Journal of Lie Theory
Volume **18** (2008) ??–??

Solution non universelle pour le problème KV-78

L. Albert, P. Harinck, and C. Torossian *

Résumé. In 1978, M. Kashiwara and M.Vergne conjectured some property on the Campbell-Hausdorff series in such way that a trace formula is satisfied. They proposed an explicit solution in the case of solvable Lie algebras. In this note, we prove that this *solvable solution* is not universal. Our method is based on computer calculation. Furthermore our programs prove up to degree 16, Drinfeld's Lie algebra $\mathfrak{grt}_1$ coincides with the Lie algebra $\widehat{\mathfrak{kv}_2}$ defined in [4].
Mathematics Subject Classification 2000 : 17B, 22E, 68-04
Key Words and Phrases : Free Lie algebra, Campbell-Hausdorff formula

1. Notations-Rappels

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbf{R}$. D'après le théorème de Lie, il existe un groupe de Lie réel G, connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et une application exponentielle notée $\exp_{\mathfrak{g}}$ qui définit un difféomorphisme local en $0 \in \mathfrak{g}$ sur G.

Pour X, Y proches de 0 dans $\mathfrak{g}$, il existe une série en des polynômes de Lie, convergente et à valeurs dans $\mathfrak{g}$, notée $Z(X,Y)$ telle que l'on ait

$$\exp_{\mathfrak{g}}(X) \cdot_G \exp_{\mathfrak{g}}(Y) = \exp_{\mathfrak{g}}\big(Z(X,Y)\big).$$

C'est la série de Campbell-Hausdorff. Les premiers termes sont bien connus et s'écrivent

$$Z(X,Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] + \frac{1}{12}[Y,[Y,X]] + \frac{1}{48}[Y,[X,[Y,X]]] - \frac{1}{48}[X,[Y,[X,Y]]] + \cdots . \tag{1}$$

Cette formule est universelle ; c'est donc aussi une formule dans l'algèbre de Lie libre engendrée par X, Y que l'on complète par le degré des crochets.

La conjecture combinatoire de Kashiwara–Vergne [8] a été démontrée par Alekseev-Meinrenken [2] en utilisant les résultats du troisième auteur [12] et s'énonce de la manière suivante.

Théorème 1.1. Conjecture KV-78 *Notons $Z(X,Y)$ la série de Campbell-Hausdorff. Il existe des séries $F(X,Y)$ et $G(X,Y)$ sur $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$ sans terme constant et à valeurs dans $\mathfrak{g}$ telles que l'on ait*

$$X + Y - \log(\exp_{\mathfrak{g}}(Y)\cdot\exp_{\mathfrak{g}}(X)) = \big(1 - e^{-\mathrm{ad}X}\big)F(X,Y) + \big(e^{\mathrm{ad}Y} - 1\big)G(X,Y) \tag{2}$$

* C.T. thanks the Max-Plank Institute For Mathematics, where this research was initiated, and Roman Pearce, CECM (Canada) for valuable remarks.

et telle que l'identité de trace suivante soit vérifiée

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\mathrm{ad}X\circ\partial_X F+\mathrm{ad}Y\circ\partial_Y G\right)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\mathrm{ad}X}{e^{\mathrm{ad}X}-1}+\frac{\mathrm{ad}Y}{e^{\mathrm{ad}Y}-1}-\frac{\mathrm{ad}Z(X,Y)}{e^{\mathrm{ad}Z(X,Y)}-1}-1\right).\tag{3}$$

Si (F,G) est un couple solution des équations de KV-78 alors

$$(G(-Y,-X),F(-Y,-X))$$

est aussi une solution. On peut donc rechercher des solutions symétriques, c'est-à-dire vérifiant $G(X,Y)=F(-Y,-X)$.

2. La *solution résoluble* de Kashiwara–Vergne

Dans leur article, Kashiwara et Vergne proposent, dans le cas *résoluble*, une solution symétrique (F^0,G^0) de séries de Lie universelles. Il existe dans le cas quadratique, deux solutions [14, 1] qui sont toutefois différentes de la *solution résoluble.* Dans [5], est proposée une solution pour la première équation, qu'il serait intéressant de comparer avec la *solution résoluble.*

Suivant [11], le couple de solutions proposé dans [8], se décrit de la manière suivante : notons ψ la fonction analytique au voisinage de 0 définie par

$$\psi(z)=\frac{e^z-1-z}{(e^z-1)(1-e^{-z})}.$$

Soit $Z(t)=Z(tX,tY)$; posons

$$F^1(X,Y)=\left(\int_0^1\frac{1-e^{-t\,\mathrm{ad}X}}{1-e^{-\mathrm{ad}X}}\circ\psi(\mathrm{ad}Z(t))\mathrm{d}t\right)(X+Y)$$

et $G^1(X,Y)=F^1(-Y,-X)$. Posons alors

$$F^0(X,Y)=\frac{1}{2}\left(F^1(X,Y)+e^{\mathrm{ad}X}F^1(-X,-Y)\right)+\frac{1}{4}\left(Z(X,Y)-X\right)\tag{4}$$

et $G^0(X,Y)=F^0(-Y,-X)$.

Par construction (*cf.* [8], [11]), ce couple (F^0,G^0) vérifie l'équation (2) pour toute algèbre de Lie (pas uniquement les algèbres résolubles). Le couple (F^0,G^0) vérifie aussi, dans le cas résoluble, l'équation de trace (3). On appellera ce couple : *solution résoluble.*

On va montrer que cette solution ne convient pas pour les algèbres de Lie générales à partir du degré 8.

Les premiers termes de la série ont été calculés, à la main, jusqu'à l'ordre 4 par Rouvière dans [11], mais Rouvière a mené les calculs jusqu'à l'ordre 6. On trouve

$$\begin{aligned}F^0(X,Y)=&\frac{1}{4}Y+\frac{1}{24}[X,Y]-\frac{1}{48}[X,[X,Y]]-\frac{1}{48}[Y,[X,Y]]\\&-\frac{1}{180}[X,[X,[X,Y]]]-\frac{1}{480}[Y,[X,[X,Y]]]+\frac{1}{360}[Y,[Y,[X,Y]]]+\dots\end{aligned}\tag{5}$$

Comme notre couple est symétrique on a $G^0(X,Y) = F(-Y,-X)$.

3. Présentation des programmes

3.1. Procédures Maple et calcul en Matlab.

Notre programme en Maple, écrit par les deux derniers auteurs (P. Harinck et C. Torossian) est disponible sur :
`http://www.institut.math.jussieu.fr/~torossian/publication/pubindex.html`

Notre programme calcule pour N donné, les termes d'ordre N de $F^0(X,Y)$ grâce à la procédure `procedure KV(N)`.

Ces termes sont obtenus sous formes de crochets itérés. Afin d'éviter les redondances et pour économiser un peu de place dans cet article, nous avons présentés les résultats dans la base de Hall. Les calculs ont été fait sous Matlab, grâce au package `Lafree` dans `Diffman`, disponible sur Internet. Ce package est très facile d'utilisation, il permet de générer une base de Hall et de calculer les coordonnées de tout mot de Lie écrit dans cette base grâce à la fonction `getvector`.

Notre programme Maple calcule par la procédure `procedure SM(N)`, dans Ass_2 l'algèbre associative libre engendrée par deux variables $1 = \mathrm{ad}X, 2 = \mathrm{ad}Y$, les termes d'ordre N dans

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{ad}X}{e^{\mathrm{ad}X}-1} + \frac{\mathrm{ad}Y}{e^{\mathrm{ad}Y}-1} - \frac{\mathrm{ad}Z(X,Y)}{e^{\mathrm{ad}Z(X,Y)}-1} - 1\right).$$

On détermine alors les coordonnées dans une base des mots cycliques. La base choisie est indiquée dans cet article.

Nous avons remplacé, comme dans [4], la condition de trace, par une égalité dans l'espace vectoriel gradué $cy_2 := Ass_2/\langle ab - ba, a, b \in Ass_2\rangle$, c'est à dire que le mot $x_1x_2\ldots x_n$ est identifié au mot $x_2x_3\ldots x_nx_1$. C'est l'espace vectoriel engendré par les mots cycliques[2]. C'est en effet la seule relation universelle vérifiée par la trace. On n'a pas cherché à optimiser informatiquement cette partie, car notre objectif était l'ordre d'atteindre l'ordre 8 ou 10.

3.2. Programme Caml et résultats complémentaires dus à L. Albert et C. Torossian.

Le premier auteur (L. Albert) a écrit un programme `CharlesKV2.ML` en Caml, indépendant du programme Maple, disponible sur la page web du troisième auteur (C. Torossian).[3] Le programme calcule

$$\mathrm{ad}X \circ \partial_X F + \mathrm{ad}Y \circ \partial_Y G,$$

dans la base cyclique générée par le programme.

[2]Dans [5] cet espace est aussi considéré.
[3]http ://www.institut.math.jussieu.fr/ torossian/publication/pubindex.html

Algèbre $\mathfrak{kv}_2$

Ce programme a permis de vérifier jusqu'à l'ordre 16, la conjecture de [4] concernant l'égalité des dimensions entre l'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{kv}_2}$, définie dans [4] et l'algèbre $\mathfrak{grt}_1$ définie par Drinfeld [6]. Plus précisément, on calcule pour un degré N donné, la dimension du noyau du système qui définit l'algèbre de Lie $\mathfrak{kv}_2$: (A, B) couple de mots de Lie en deux variables X, Y de degré N, vérifiant les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} [X, A(X,Y)] + [Y, B(X,Y)] &= 0 && (6)\\ \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\Big(\partial_X A(X,Y) \circ \mathrm{ad}X + \partial_Y B(X,Y) \circ \mathrm{ad}Y\Big) &= 0. && (7) \end{aligned}$$

Grâce au package `Lafree`, on calcule la matrice correspondant à la première équation. Grâce au programme Caml du premier auteur, on peut déterminer la matrice correspondant à la deuxième équation. La complexité croit de manière exponentielle et les programmes sont fortement récursifs. Il en résulte des difficultés de gestion de mémoire et de temps de calculs.[4] Sur la page web du troisième auteur (C. T.), on trouvera les matrices du système $\mathfrak{kv}_2$ pour $N = 13, 14, 15, 16$ sous forme *sparse* zippée.[5]

En degré 8, on obtient une unique solution $\langle (A, B)\rangle$ des équations (6) et (7) :

$$\begin{aligned} A(X,Y) = {}& 4*[[X,Y],[Y,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]] + 6*[[X,Y],[Y,[Y,[X,[X,[X,Y]]]]]]\\ &- 6*[[X,Y],[Y,[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]]] - 4*[[X,Y],[Y,[Y,[Y,[Y,[X,Y]]]]]]\\ &- 4*[[X,Y],[[X,Y],[X,[X,[X,Y]]]]] + 6*[[X,[X,Y]],[Y,[X,[X,[X,Y]]]]]\\ &+ 6*[[X,[X,Y]],[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]] - 3*[[X,[X,Y]],[Y,[Y,[Y,[X,Y]]]]]\\ &+ 2*[[X,[X,Y]],[[X,Y],[X,[X,Y]]]] - 3*[[X,[X,Y]],[[X,Y],[Y,[X,Y]]]]\\ &+ 4*[[Y,[X,Y]],[X,[X,[X,[X,Y]]]]] + 9*[[Y,[X,Y]],[Y,[X,[X,[X,Y]]]]]\\ &- 12*[[Y,[X,Y]],[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]] - 10*[[Y,[X,Y]],[Y,[Y,[Y,[X,Y]]]]]\\ &+ 9*[[Y,[X,Y]],[[X,Y],[X,[X,Y]]]] - 3*[[Y,[X,Y]],[[X,Y],[Y,[X,Y]]]]\\ &- 6*[[X,[X,[X,Y]]],[Y,[X,[X,Y]]]] - 3*[[X,[X,[X,Y]]],[Y,[Y,[X,Y]]]]\\ &+ 3*[[Y,[X,[X,Y]]],[Y,[Y,[X,Y]]]], \qquad (8) \end{aligned}$$

[4] Pour N=16, il a fallu 18h sur un ordinateur puissant pour obtenir la matrice de la seconde équation. La matrice occupe 100MB de fichier texte.

[5] Sous les conseils de Roman Pearce, le calcul du rang se fait par réduction modulo p à partir de $N = 15$, car les matrices sont de taille trop importante. Cette réduction modulo p ne fait que majorer la dimension du noyau. Par ailleurs les résultats de [4] et [9] minorent la dimension. Cela permet de conclure sur la dimension exacte.

$$\begin{aligned} B(X,Y) = &-4*[[X,Y],[X,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]] - 6*[[X,Y],[Y,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]] \\ &+ 6*[[X,Y],[Y,[Y,[X,[X,[X,Y]]]]]] + 4*[[X,Y],[Y,[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]]] \\ &- 12*[[X,Y],[[X,Y],[X,[X,[X,Y]]]]] + 18*[[X,Y],[[X,Y],[Y,[X,[X,Y]]]]] \\ &+ 12*[[X,Y],[[X,Y],[Y,[Y,[X,Y]]]]] - 10*[[X,[X,Y]],[X,[X,[X,[X,Y]]]]] \\ &- 12*[[X,[X,Y]],[Y,[X,[X,[X,Y]]]]] + 9*[[X,[X,Y]],[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]] \\ &+ 4*[[X,[X,Y]],[Y,[Y,[Y,[X,Y]]]]] - 9*[[X,[X,Y]],[[X,Y],[X,[X,Y]]]] \\ &- 3*[[Y,[X,Y]],[X,[X,[X,[X,Y]]]]] + 6*[[Y,[X,Y]],[Y,[X,[X,[X,Y]]]]] \\ &+ 6*[[Y,[X,Y]],[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]] + 9*[[Y,[X,Y]],[[X,Y],[X,[X,Y]]]] \\ &+ 4*[[Y,[X,Y]],[[X,Y],[Y,[X,Y]]]] - 3*[[X,[X,[X,Y]]],[Y,[X,[X,Y]]]] \\ &+ 3*[[X,[X,[X,Y]]],[Y,[Y,[X,Y]]]] + 6*[[Y,[X,[X,Y]]],[Y,[Y,[X,Y]]]]. \end{aligned} \tag{9}$$

Dimension de $\widehat{\mathfrak{kv}_2}$ et $\mathfrak{grt}_1$

On présente notre tableau de résultats (dus à L. Albert et C. Torossian), où on a fait figurer la dimension d_N en degré N de l'algèbre de Lie libre en deux générateurs Lie_2, la dimension c_N en degré N de l'espace vectoriel des mots cycliques en deux générateurs cy_2. Notre système $\mathfrak{kv}_2(N)$ en degré N est de taille $((d_{N+1}+c_N)\times 2d_N)$. Pour $N=16$ la matrice est de taille $(11826, 8160)$.

D'après [4], $E := \widehat{\mathfrak{kv}_2}/\mathfrak{kv}_2$ est concentré en degré impair et on a $\dim E_{2n+1} = 1$ pour $n \geq 1$. Les dimensions de $\widehat{\mathfrak{kv}_2}(N)$ s'en déduisent alors. En degré $N=1$, on trouve un élément central dans $\widehat{\mathfrak{kv}_2}$, noté $t=(Y,X)$ dans [4].

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Lie_2(N)	2	1	2	3	6	9	18	30	56	99	186	335	630	1161	2182	4080
cy_2(N)	2	3	4	6	8	14	20	36	60	108	188	352	632	1182	2192	4116
$\mathfrak{kv}_2$(N)	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	2	2	3	3	5
$\widehat{\mathfrak{kv}_2}$(N)	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5

Dans [9], Racinet introduit une algèbre graduée $\mathfrak{drm}_0$ dont les dimensions, jusqu'en degré $N=19$ sont calculées dans [7]. Ces trois auteurs montrent, jusqu'en degré $N=19$, l'inclusion $\mathfrak{drm}_0 \subset \mathfrak{grt}_1$, où $\mathfrak{grt}_1$ est l'algèbre de Lie introduite par Drinfeld [6] . Par ailleurs d'après [4], on a l'inclusion en tout degré $\mathfrak{grt}_1 \subset \widehat{\mathfrak{kv}_2}$.

Les dimensions de $\mathfrak{dmr}_0$ sont identiques [7] à celles de $\widehat{\mathfrak{kv}_2}$ (pour $N \geq 2$), on en déduit l'égalité $\mathfrak{dmr}_0 = \mathfrak{grt}_1 = \widehat{\mathfrak{kv}_2}/<t>$ jusqu'en degré $N=16$.

L'algèbre de Drinfeld est conjecturalement égale à une algèbre de Lie libre engendrée par des générateurs en degré impair $\sigma_3, \sigma_5, \cdots$. L'élément de degré 8 ci-dessus correspond au terme $[\sigma_3, \sigma_5]$.

4. Equations de Trace pour le couple (F^0, G^0)

On va comparer, pour le couple symétrique (F^0, G^0) de l'équation (2), les deux membres de l'équation de trace (3) grâce aux deux programmes indépendants.

4.1. Equation de trace à l'ordre 5 et 7.

Voici les termes d'ordre 5, 7 pour $F^0(X,Y)$ calculés par le programme Maple.

Ordre 5 :

Au terme $\frac{1}{2880}$ près il vaut

$$[X,[X,[X,[X,Y]]]]+8*[Y,[X,[X,[X,Y]]]]+8*[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]\\ +[Y,[Y,[Y,[X,Y]]]]+6*[[X,Y],[X,[X,Y]]]+2*[[X,Y],[Y,[X,Y]]].$$

Ordre 7 :

Au terme $\frac{1}{1209600}$ près il vaut

$$-10*[X,[X,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]]-120*[Y,[X,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]]\\ -380*[Y,[Y,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]]-380*[Y,[Y,[Y,[X,[X,[X,Y]]]]]]\\ -120*[Y,[Y,[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]]]-10*[Y,[Y,[Y,[Y,[Y,[X,Y]]]]]]\\ -150*[[X,Y],[X,[X,[X,[X,Y]]]]]-940*[[X,Y],[Y,[X,[X,[X,Y]]]]]\\ -960*[[X,Y],[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]]-210*[[X,Y],[Y,[Y,[Y,[X,Y]]]]]\\ -240*[[X,Y],[[X,Y],[X,[X,Y]]]]-60*[[X,Y],[[X,Y],[Y,[X,Y]]]]\\ -60*[[X,[X,Y]],[X,[X,[X,Y]]]]+30*[[X,[X,Y]],[Y,[X,[X,Y]]]]\\ +360*[[X,[X,Y]],[Y,[Y,[X,Y]]]]-740*[[Y,[X,Y]],[X,[X,[X,Y]]]]\\ -1170*[[Y,[X,Y]],[Y,[X,[X,Y]]]]-180*[[Y,[X,Y]],[Y,[Y,[X,Y]]]].$$

Pour les deux couples d'ordre 5 et 7, le membre de gauche de (3) calculé par le programme Caml, donne 0 dans les bases cycliques. Il est donc égal au le membre de droite qui est nul aussi pour des raisons de parité. En effet la série de Bernoulli est paire à partir de l'ordre 2, de plus $Z(-X,-Y)=-Z(Y,X)$ et $Z(Y,X)$ est conjugué à $Z(X,Y)$. Donc le membre de droite de (3) n'a que des termes en degré total pair.

4.2. Equation de trace à l'ordre 6.

Voici les termes d'ordre 6 pour $F^0(X,Y)$ calculés par le programme Maple.

Ordre 6 :

Au terme $\frac{1}{120960}$ près il vaut

$$24*[X,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]+69*[Y,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]\\ +20*[Y,[Y,[X,[X,[X,Y]]]]]-39*[Y,[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]]\\ -12*[Y,[Y,[Y,[Y,[X,Y]]]]]+144*[[X,Y],[X,[X,[X,Y]]]]\\ +114*[[X,Y],[Y,[X,[X,Y]]]]+18*[[X,Y],[Y,[Y,[X,Y]]]]\\ -18*[[X,[X,Y]],[Y,[X,Y]]].$$

Considérons la base des mots cyclique de longueur 6 suivante :

```
C6[1] := [1, 1, 1, 1, 1, 1]; C6[2] := [1, 1, 1, 1, 1, 2];
```

```
C6[3] := [1, 1, 2, 1, 1, 2]; C6[4] := [1, 1, 1, 2, 1, 2];
C6[5] := [1, 2, 1, 2, 1, 2]; C6[6] := [1, 1, 1, 1, 2, 2];
C6[7] := [1, 1, 2, 2, 1, 2]; C6[8] := [1, 1, 2, 1, 2, 2];
C6[9] := [1, 2, 2, 1, 2, 2]; C6[10] := [1, 1, 1, 2, 2, 2];
C6[11] := [1, 2, 1, 2, 2, 2]; C6[12] := [1, 1, 2, 2, 2, 2];
C6[13] := [1, 2, 2, 2, 2, 2]; C6[14] := [2, 2, 2, 2, 2, 2].
```

Notre programme en Maple a calculé, au facteur $\frac{1}{120960}$ près, les coordonnées dans la base cyclique du terme de droite de (3). On trouve :

$$[0, -12, 36, -96, -144, 30, 72, 72, 36, -40, -96, 30, -12, 0].$$

Le programme en Caml calcule les coordonnées dans la base cyclique ci-dessus, le membre de gauche de (3). On trouve, au facteur $\frac{1}{120960}$ près

$$[0, -12, 36, -96, -144, 30, 72, 72, 36, -40, -96, 30, -12, 0].$$

Il y a donc bien égalité à l'ordre 6 dans l'équation de trace (3).

4.3. Défaut de l'équation de trace à l'ordre 8.
Au terme $\frac{1}{21772800}$ près, il vaut

$$\begin{aligned}
&-144*[X,[X,[X,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]]]-666*[Y,[X,[X,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]]]\\
&-1116*[Y,[Y,[X,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]]]-315*[Y,[Y,[Y,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]]]\\
&+612*[Y,[Y,[Y,[Y,[X,[X,[X,Y]]]]]]]+414*[Y,[Y,[Y,[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]]]]\\
&+72*[Y,[Y,[Y,[Y,[Y,[Y,[X,Y]]]]]]]-2160*[[X,Y],[X,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]]\\
&-6618*[[X,Y],[Y,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]]-4940*[[X,Y],[Y,[Y,[X,[X,[X,Y]]]]]]\\
&-226*[[X,Y],[Y,[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]]]+264*[[X,Y],[Y,[Y,[Y,[Y,[X,Y]]]]]]\\
&-5712*[[X,Y],[[X,Y],[X,[X,[X,Y]]]]]-6480*[[X,Y],[[X,Y],[Y,[X,[X,Y]]]]]\\
&-1188*[[X,Y],[[X,Y],[Y,[Y,[X,Y]]]]]-2160*[[X,[X,Y]],[X,[X,[X,[X,Y]]]]]\\
&-3852*[[X,[X,Y]],[Y,[X,[X,[X,Y]]]]]-1970*[[X,[X,Y]],[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]]\\
&-1166*[[X,[X,Y]],[Y,[Y,[Y,[X,Y]]]]]-1464*[[X,[X,Y]],[[X,Y],[X,[X,Y]]]]\\
&+3280*[[X,[X,Y]],[[X,Y],[Y,[X,Y]]]]-3738*[[Y,[X,Y]],[X,[X,[X,[X,Y]]]]]\\
&-3360*[[Y,[X,Y]],[Y,[X,[X,[X,Y]]]]]+2356*[[Y,[X,Y]],[Y,[Y,[X,[X,Y]]]]]\\
&+750*[[Y,[X,Y]],[Y,[Y,[Y,[X,Y]]]]]-5520*[[Y,[X,Y]],[[X,Y],[X,[X,Y]]]]\\
&-356*[[Y,[X,Y]],[[X,Y],[Y,[X,Y]]]]+2412*[[X,[X,[X,Y]]],[Y,[X,[X,Y]]]]\\
&+580*[[X,[X,[X,Y]]],[Y,[Y,[X,Y]]]]-2884*[[Y,[X,[X,Y]]],[Y,[Y,[X,Y]]]].
\end{aligned}$$

Considérons la base des mots cycliques de longueur 8 suivante :

```
C8[1] := [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]; C8[2] := [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2];
C8[3] := [1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2]; C8[4] := [1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2];
C8[5] := [1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2]; C8[6] := [1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2];
C8[7] := [1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2]; C8[8] := [1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2];
C8[9] := [1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2]; C8[10] := [1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2];
C8[11] := [1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2]; C8[12] := [1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2];
C8[13] := [1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2]; C8[14] := [1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2];
C8[15] := [1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2]; C8[16] := [1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2];
C8[17] := [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 2]; C8[18] := [1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2];
C8[19] := [1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2]; C8[20] := [1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2];
```

```
C8[21] := [1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2]; C8[22] := [1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2];
C8[23] := [1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2]; C8[24] := [1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2];
C8[25] := [1, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 2]; C8[26] := [1, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2];
C8[27] := [1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2]; C8[28] := [1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2];
C8[29] := [1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2]; C8[30] := [1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2];
C8[31] := [1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2]; C8[32] := [1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2];
C8[33] := [1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2]; C8[34] := [1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2];
C8[35] := [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]; C8[36] := [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2].
```

Le terme d'ordre 8 du membre de droite de (3) dans la base cyclique ci-dessus vaut exactement d'après le programme Maple (au facteur $\frac{1}{21772800}$ près) :

$$\begin{aligned}[0,72,720,-1080,864,-2160,4320,4320,-252,\mathbf{-1080,0,0},\\ -2160,540,\mathbf{-1080},-2160,-2160,0,-2160,504,1440,0,\mathbf{0},1440,4320,\\ \mathbf{0},720,-630,\mathbf{-1080,-1080},-1080,504,864,-252,72,0]. \quad (10)\end{aligned}$$

Le programme Caml a calculé, pour la composante de degré 8 du couple (F^0, G^0), les coordonnées dans la base cyclique ci-dessus, de

$$\mathrm{ad}X \circ \partial_X F + \mathrm{ad}Y \circ \partial_Y G$$

et trouve (au facteur $\frac{1}{21772800}$ près) :

$$\begin{aligned}[0,72,720,-1080,864,-2160,4320,4320,-252,\mathbf{-1088,\ 40,\ -40},\\ -2160,540,\mathbf{-1072},-2160,-2160,0,-2160,504,1440,0,\mathbf{-40},1440,4320,\\ \mathbf{40},720,-630,\mathbf{-1072,\ -1088},-1080,504,864,-252,72,0]. \quad (11)\end{aligned}$$

Comme on le constate, la différence est non nulle et vaut (au facteur $\frac{1}{21772800}$ près) :

$$\begin{aligned}8*[1,1,1,1,2,2,1,2]-8*[1,1,1,1,2,1,2,2]-8*[1,1,2,2,2,2,1,2] \quad (12)\\ +8*[1,1,2,1,2,2,2,2]+40*[1,1,1,2,1,1,2,2]-40*[1,1,1,2,2,1,1,2]\\ +40*[1,1,2,2,2,1,2,2]-40*[1,1,2,2,1,2,2,2],\end{aligned}$$

c'est à dire en notant $x = \mathrm{ad}X, y = \mathrm{ad}Y$,

$$\begin{gathered}8*\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(x^4y^2xy - x^4yxy^2 - x^2y^4xy + x^2yxy^4\right) + \\ 40*\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(x^3yx^2y^2 - x^3y^2x^2y + x^2y^3xy^2 - x^2y^2xy^3\right).\end{gathered}$$

On en déduit le résultat annoncé :

Théorème 4.1. *La solution proposée par Kashiwara et Vergne [8], dans le cas résoluble, à la conjecture KV-78, ne convient pas en degré 8 pour les algèbres de Lie générales.*

Démonstration. Notons $x = \mathrm{ad}X, y = \mathrm{ad}Y$. Considérons les termes de degré 3 en y. Il suffit de trouver une algèbre de Lie telle que $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(x^4y^2xy - x^4yxy^2) + 5 * \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(x^3yx^2y^2 - x^3y^2x^2y) \neq 0$. Considérons $\mathfrak{g} = \mathrm{gl}(n, \mathbf{R}) \times V$ avec V une représentation telle que V^* ne soit pas isomorphe à V. On prendra pour V la représentation standard.

Pour X, Y deux matrices, l'action adjointe dans $\mathfrak{g}$ laisse stable $\mathrm{gl}(n, \mathbf{R})$ et V. La composante sur $\mathrm{gl}(n, \mathbf{R})$ de la trace sera nulle car $\mathrm{gl}(n, \mathbf{R})$ est une algèbre quadratique, et donc nos expressions valent les traces matricielles standards. On peut prendre par exemple

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve $\mathrm{tr}(X^4Y^2XY) = -1$, $\mathrm{tr}(X^4YXY^2) = 1$, $\mathrm{tr}(X^3YX^2Y^2) = \mathrm{tr}(X^3Y^2X^2Y) = -1$ ce qui permet de conclure.

■

Remarque 4.2. Dans le cas des algèbres de Lie quadratique la différence (12) est nulle. On a vérifié que les termes d'ordre 10, du membre de gauche et du membre de droite (3) sont distincts en général, mais que leur différence s'annule dans le cas quadratique. On peut donc penser que la *solution résoluble* de Kashiwara-Vergne, résout aussi les équations dans le cas des algèbres quadratiques. Ceci a été vérifié pour $\mathrm{sl}(2, \mathbf{R})$ dans [10]. Dans le cas quadratique Vergne [14] et Alekseev-Meinrenken [1] proposent des solutions distinctes de la *solution résoluble*. Ces deux solutions du cas quadratique ne sont pas universelles d'après [3].

Références

[1] Alekseev, A., and E. Meinrenken, *Poisson geometry and the Kashiwara–Vergne conjecture*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **335** (2002), 723–728.

[2] —, *On the Kashiwara–Vergne conjecture*, Invent. Math. **164** (2006), 615–634.

[3] Alekseev, A., and E. Petracci, *On the Kashiwara–Vergne conjecture*, Journal of Lie Theory **16** (2006), 531–538.

[4] Alekseev, A., and C. Torossian, *The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators*, `arXiv: 0802.4300`.

[5] Burgunder, E., *Eulerian idempotent and Kashiwara–Vergne conjecture*, Ann. Inst. Fourier **58** (2008), no. 4, 1153–1184..

[6] Drinfeld, V. G., *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Leningrad Math. J. **2** (1991), 829–860.

[7] Espie, M., J. C. Novelli, and G. Racinet, *Formal computations about multiple zeta values.*, From combinatorics to dynamical systems, 1–16, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **3**, de Gruyter, Berlin, 2003.

[8] Kashiwara, M., and M. Vergne, *The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions*, Inventiones Math. **47** (1978), 249–272.

[9] Racinet, G., *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **95** (2002), 185–231.

[10] Rouvière, F., *Démonstration de la conjecture de Kashiwara–Vergne pour* $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$, C. R. Acad. Sci. Paris, **292** (1981), 657–660.

[11] —, *Espaces symétriques et méthodes de de Kashiwara-Vergne*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **19** (1986), 553–581.

[12] Torossian, C., *Sur la conjecture combinatoire de Kashiwara–Vergne*, J. Lie Theory **12** (2002), 597–616.

[13] —, *La conjecture de Kashiwara-Vergne (d'après Alekseev—Meinrenken)*, Séminaire Bourbaki, juin 2007.

[14] Vergne, M., *Le centre de l'algèbre enveloppante et la formule de Campbell-Hausdorff*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **329** (1999), 767–772.