Base de la série la plus continue de fonctions généralisées sphériques sur G_C/G_R

Pascale Harinck[1]

Introduction

Soit G un groupe de Lie réductif complexe connexe de groupe dérivé simplement connexe et d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit H une forme réelle de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On note σ la conjugaison de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$. Elle définit une involution du groupe G que l'on notera encore σ et H est l'ensemble des points de G fixés par σ. L'espace symétrique réductif $\mathbb{X} = G/H$ est dit du type $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. L'application qui à $g \in G$ associe $g\sigma(g)^{-1}$ induit un isomorphisme φ de $\mathbb{X}$ sur son image.

On appelle fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}$ une fonction généralisée H-invariante sur $\mathbb{X}$, solution propre de l'algèbre $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ des opérateurs différentiels G-invariants sur $\mathbb{X}$. L'algèbre $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ est isomorphe au centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et toute fonction généralisée sphérique est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{X}$, analytique sur l'ensemble $\mathbb{X}_{reg}$ (ensemble des éléments réguliers) des $x \in \mathbb{X}$ tels que $\varphi(x)$ soit régulier dans G ([S] thm.4.3).

On suppose que $\mathfrak{h}$ admet une sous-algèbre de Cartan de type compact $\mathfrak{t}$ (c'est-à-dire compacte modulo le centre de $\mathfrak{h}$). Soit $\mathfrak{t}_I$ la partie compacte de $\mathfrak{t}$ et soit $\mathfrak{t}_R$ sa partie déployée. On note $\Gamma_\mathfrak{t}$ le réseau de $\mathfrak{t}_R$ formé des X tels que $exp\ 2iX = 1$. On définit l'ensemble $\Gamma_\mathfrak{t}^* + \mathfrak{t}_I^*$ des formes linéaires λ sur $\mathfrak{t}$ telles que, pour tout $X \in \Gamma_\mathfrak{t}$ l'on ait $\lambda(X) \in 2\pi\mathbb{Z}$. On note $\Gamma_\mathfrak{t}^* + \mathfrak{t}_{I-reg}^*$ l'ensemble des éléments réguliers de $\Gamma_\mathfrak{t}^* + \mathfrak{t}_I^*$.
Soit $\gamma_\mathfrak{t}$ l'isomorphisme d'Harish-Chandra de $Z(\mathfrak{g})$ dans l'algèbre $S(\mathfrak{t}_\mathbb{C})^{W_G(\mathfrak{t})}$ des invariants de l'algèbre symétrique de $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ sous l'action du groupe de Weyl $W_G(\mathfrak{t})$ de $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$.

Soit $\lambda \in \Gamma_\mathfrak{t}^* + \mathfrak{t}_{I-reg}^*$. Le but de cet article est de décrire une base de l'espace des fonctions généralisées sphériques Θ sur $\mathbb{X}$ telle que

$$\text{pour tout } z \in Z(\mathfrak{g}), \text{ l'on ait } z.\Theta = \gamma_\mathfrak{t}(z)(i\lambda)\Theta \qquad (1)$$

et d'étudier la dépendance en λ des éléments de cette base.

[1] CNRS-UMR 9994, UFR de Mathématiques, Tour 45-55 5ème étage, 2 Place Jussieu 75251 PARIS Cédex 05

A chaque sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{h}$, on associe le sous-ensemble de Cartan A de $\mathbb{X}$ formé des $x \in \mathbb{X}$ tels que $\varphi(x)$ centralise $\mathfrak{a}$.

Le théorème d'unicité ([H 2] thm.4.1 et [H4] thm.5.11) assure qu'une fonction généralisée sphérique Θ vérifiant (1) est caractérisée par sa restriction à T_{reg}.

On choisit un système de représentants $\mathcal{W}_\mathfrak{t}$ de $exp\ i\mathfrak{t} \setminus T$ dans T tel que, pour tout $y \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}$, l'on ait $\varphi(y) \in H$. Soit $W_H(\mathfrak{t})$ le quotient du normalisateur de $\mathfrak{t}$ dans H par le centralisateur de $\mathfrak{t}$ dans H. L'ensemble $\mathcal{W}_\mathfrak{t}$ est alors isomorphe à $W_G(\mathfrak{t})/W_H(\mathfrak{t})$. Pour $y \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}$, on note $W_H^y(\mathfrak{t})$ l'ensemble des $h \in W_H(\mathfrak{t})$ tels que $h.y \in exp\ i\mathfrak{t}.y$ et pour $h \in W_H^y(\mathfrak{t})$, on fixe un élément Y_h dans $\mathfrak{t}$ tel que $h.y = exp\ iY_h.y$. On a alors $2Y_h \in \Gamma_\mathfrak{t}$.

On fixe $\lambda \in \Gamma_\mathfrak{t}^* + \mathfrak{t}_{I-reg}^*$, un élément $y \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}$ et un système positif de racines ψ de $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}$. On a alors le résultat suivant (théorème 2.2 et corollaire 2.3):

Il existe une unique fonction généralisée sphérique $\Theta(\lambda, y, \psi)$ sur $\mathbb{X}$ vérifiant (1) et la propriété suivante:

(*) Soit $x \in T_{reg}$. Si $x \notin (exp\ i\mathfrak{t})\ W_H(\mathfrak{t}).y$ alors $\Theta(\lambda, y, \psi)(x) = 0$ et si $x = exp\ iX.y$ alors

$$\Theta(\lambda, y, \psi)(x) = \frac{\sum_{u \in W_H^y(\mathfrak{t})} \varepsilon(u) e^{i<u\lambda, X+Y_u>}}{\prod_{\alpha \in \psi}(1 - \xi_{-\alpha}(x))\xi_{\rho_\psi}(x)}$$

où, pour tout poids β de $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$, on note $\xi_\beta(x) = e^{\beta(X)}$ si $\varphi(x) = exp\ X$, $\rho_\psi = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \psi} \alpha$ et pour $u \in W_G(\mathfrak{t})$, on note $\varepsilon(u) = (-1)^{|\psi \cap -u^{-1}\psi|}$.

De plus, l'ensemble des $\Theta(w\lambda, y, \psi)$ lorsque y parcourt $\mathcal{W}_\mathfrak{t}$ et w parcourt $W_H(\mathfrak{t})\backslash W_G(\mathfrak{t})$ forme une base de l'espace des fonctions généralisées sphériques Θ sur $\mathbb{X}$ vérifiant (1).

Pour $y = eH$, la construction de $\Theta(\lambda, eH, \psi)$ est établie dans [H2] thm 7.1 et [H4] thm. 5.11 et s'obtient de la manière suivante:

Soit $\beta_{H.\lambda}$ la mesure de Liouville de l'orbite coadjointe $H.\lambda$ et soit $\hat{\beta}_{H.\lambda}$ la transformée de Fourier de cette mesure. Soit w_λ l'élement de $W_G(\mathfrak{t})$ tel que $w_\lambda.\psi$ soit l'ensemble des racines α de $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ telles que $i\lambda(H_\alpha) > 0$. On note Exp l'application de $\mathfrak{h}$ dans $\mathbb{X}$ qui à X associe $exp\ iX\ H$ et soit J son jacobien. On pose, pour $x \in \mathbb{X}_{reg}$,

$$\Theta(\lambda, eH, \psi)(x) = \frac{(-1)^{|\psi_{Inc}|}}{(2i)^{|\psi|}} \varepsilon(w_\lambda) \sum_{\{X \in \mathfrak{h}_{reg}, ExpX = x\}/\Gamma_\mathfrak{t}} \hat{\beta}_{H.\lambda}(X) \mid J(X) \mid^{-1/2} \qquad (2)$$

où par convention, si l'ensemble sur lequel la somme est faite est vide, la somme est nulle et $\mid \psi_{Inc} \mid$ est le cardinal de l'ensemble des racines imaginaires non compactes de ψ.

Lorsque l'élément $\varphi(y)$ est central dans G, alors pour tout $g \in G$, l'élément $g.y$ ne dépend que de gH. Donc pour $x = p(g)$, on peut poser $x.y = g.y$. On définit dans ce cas la fonction généralisée $\Theta(\lambda, y, \psi)$ en posant, pour $x \in \mathbb{X}_{reg}$, $\Theta(\lambda, y, \psi)(x) = \Theta(\lambda, eH, \psi)(x.y)$.

Lorsque y est quelconque, on note G_y le centralisateur de $\varphi(y)$ dans G. Ce groupe vérifie les mêmes hypothèses que G et $H_y = G_y \cap H$ est une forme réelle de G_y. On note $\mathbb{X}_y = G_y/H_y$. On a $y \in \mathbb{X}_y$ et $\varphi(y)$ est central dans G_y. On note ψ_y l'ensemble des $\alpha \in \psi$ telles que $\xi_\alpha(y) = 1$. Ce qui précède permet donc de définir une fonction généralisée sphérique $\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)$ vérifiant (1) et (*) sur $\mathbb{X}_y$. Pour $x \in \mathbb{X}_{reg}$, on note $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$ l'ensemble des $h \in H$ tels que $h.x \in \mathbb{X}_y$ et on pose

$$\Theta(\lambda, y, \psi)(x) = \xi_{\rho_\psi}(y) \mid D_{\mathbb{X}}(x) \mid^{-1/2} \sum_{h \in H_y \backslash \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)} \Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)(h.x) \mid D_{\mathbb{X}_y}(h.x) \mid^{1/2} \qquad (3)$$

où la fonction $D_{\mathbb{X}}$ est définie par: $det_{\mathbb{C}}(1 + z - Ad\ \varphi(x)) = z^n D_{\mathbb{X}}(x)$ modulo z^{n+1} si $n = rang\ \mathfrak{h}$.

La fonction $\Theta(\lambda, y, \psi)$ est localement intégrable sur $\mathbb{X}$ (car $D_{\mathbb{X}}^{-1/2}$ l'est) et vérifie (1) sur $\mathbb{X}_{reg}$ et (*). Pour montrer qu'elle vérifie (1) en tant que fonction généralisée, on prouve les conditions de recollement rappeler dans le théorème 1.9.

Les formules (2) et (3) permettent donc d'avoir une expression de $\Theta(\lambda, y, \psi)$ en terme de transformée de Fourier d'orbites. Ce point est essentiel dans l'étude des pôles et de la croissance de la fonction $\lambda \to \Theta(\lambda, y, \psi)$.

On établit tout d'abord le résultat suivant (théorème 3.1): pour $\alpha \in \psi$, on note H_α sa coracine.

Pour $\lambda_0 \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^*$, la fonction $\lambda \to \prod_{\alpha \in \psi}(1 - e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)})\Theta(\lambda + \lambda_0, y, \psi)$ se prolonge analytiquement sur $\mathfrak{t}_I^*$.

Pour prouver ceci, on se ramène, en utilisant la formule (3) à la situation suivante: $y = eH$ et G est semi-simple. On note alors $\Theta_\lambda = \Theta(\lambda, eH, \psi)$.

Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$ et soit $\mathfrak{a}_{R-reg}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}$ tels que, pour toute racine réelle α de $\mathfrak{a}$ l'on ait $\alpha(X) \neq 0$. On note $\pi_0(\mathfrak{a}_{R-reg})$ l'ensemble des composantes connexes de $\mathfrak{a}_{R-reg}$. On fixe $\mathcal{C} \in \pi_0(\mathfrak{a}_{R-reg})$ et $x \in G$ tel que $x.\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. On peut alors écrire pour $X \in \mathcal{C}$

$$\hat{\beta}_{H.\lambda}(X) = \varepsilon(w_\lambda) \frac{\sum_{w \in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} c(w, \mathcal{F}, \mathcal{C}) e^{i<wx.\lambda, X>}}{\prod_{\alpha \in x.\psi} \alpha(X)}$$

où $\mathcal{F}$ est une chambre de Weyl de $\mathfrak{t}_{reg}^*$ et les $c(w, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ des constantes. Comme la fonction généralisée $\hat{\beta}_{H.\lambda}$ est tempérée, les constantes $c(w, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ vérifient la condition suivante: si $c(w, \mathcal{F}, \mathcal{C}) \neq 0$ alors pour tout $\lambda \in \mathcal{F}$ et pour tout $X \in \mathcal{C}$ on a

$$Re(i < wx.\lambda, X >) \leq 0 \qquad (4)$$

On note ω la composante connexe de 0 de l'ensemble des $X \in \mathfrak{h}$ tels que $J(X) \neq 0$. Pour $X \in \mathcal{C} \cap \omega$, on peut écrire

$$\Theta_\lambda(Exp\ X) = \frac{\sum_{w \in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} d(w, \mathcal{C}, \lambda) e^{i<wx.\lambda, X>}}{\prod_{\alpha \in x.\psi}(e^{i\alpha(X)} - e^{-i\alpha(X)})}$$

avec

$$d(w,\mathcal{C},\lambda) = (-1)^{|\psi_{Inc}|} \sum_{U\in\pi_0(\mathfrak{a}_{R-reg})} \varepsilon_R(U) c(w,\mathcal{F},U) \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathfrak{a}},(\gamma+X_0)\in U} e^{i<wx.\lambda,\gamma>}$$

où $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ désigne le sous-réseau de $\mathfrak{a}$ formé des γ tels que $Exp\ \gamma = 1$, X_0 est un élément quelconque de $\mathcal{C}\cap\omega$ et $\varepsilon_R(U)$ est un signe défini en 3.3.

La relation (4) permet d'obtenir le résultat suivant(lemme 3.5): soit Σ un sytème de racines de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{F}$ la chambre de Weyl de $\mathfrak{t}^*_{reg}$ définie par Σ (pour $\lambda\in\mathcal{F}$ et $\alpha\in\Sigma$, on a $i\lambda(H_\alpha)>0$). Il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $\lambda\in\mathcal{F}$ et pour tout $X\in\omega\cap\mathcal{C}$, l'on ait

$$|\prod_{\alpha\in\Sigma}(1-e^{-i<\lambda,\pi H_\alpha>}) d(w,\mathcal{C},\lambda) e^{i<wx.\lambda,X>}| < C \qquad (5)$$

D'autre part, à l'aide des relations de recollement (théorème 1.9), on montre que les $d(w,\mathcal{C},\lambda)$ sont des fractions rationnelles en les $e^{i\pi\lambda(H_\alpha)}$ pour $\alpha\in\Sigma$ (lemme 3.6). La propriété (5) assure alors qu'il existe un nombre fini de réels deux à deux distincts $c_1,\ldots c_p$ tels que la fonction $\prod_{a\in\Sigma}\prod_{j=1}^p(e^{ic_j}-e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)})d(w,\mathcal{C},\lambda)$ soit un polynôme en les $e^{i\pi\lambda(H_\alpha)}$. On obtient alors le résultat voulu.

On définit la fonction $F(\lambda,y)$ H-invariante sur $\mathbb{X}_{reg}$ de la manière suivante: si $x\notin(exp\ i\mathfrak{t})W_H(\mathfrak{t}).y$ alors $F(\lambda,y)(x)=0$ et si $x=exp\ iX.y$ alors $F(\lambda,y)(x)$ $=\sum_{w\in W_H^y(\mathfrak{t})}\varepsilon(w)e^{i<w\lambda,X+Y_w>}$. Soit $\lambda_0\in\Gamma^*_{\mathfrak{t}}$. Pour tout $x\in\mathbb{X}_{reg}$ et pour tout densité à support compact μ sur $\mathbb{X}$, la fonction $\sum_{w\in W_G(\mathfrak{t})}F(w(\lambda_0+\lambda),y)(x)<\Theta(w(\lambda_0+\lambda),y,\psi),\mu>$ se prolonge analytiquement sur $\mathfrak{t}^*_I$ (Proposition 3.9). De plus, si U est un compact de T alors, il existe une constante $C>0$ et $k\in\mathbb{N}$ tels que pour tout $x\in U_{reg}$ et pour tout $\lambda\in\Gamma^*_{\mathfrak{t}}+\mathfrak{t}^*_I$, l'on ait

$$|\sum_{w\in W_G(\mathfrak{t})}F(w\lambda,y)(x)<\Theta(w\lambda,y,\psi),\mu>| < \frac{C}{(1+\parallel\lambda\parallel)^k}$$

(théorème 4.1 et corollaire 4.5).

Comme précédemment, on suppose pour démontrer cette assertion que $y=eH$ et G est semi-simple. On utilise l'expression suivante des $d(w,\lambda,\mathcal{C})$. Il existe des réels non nuls deux à deux distincts $c_1,\ldots c_p$ tels que

$$\prod_{\alpha\in\Sigma}(1-e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)})\prod_{j=1}^p(e^{ic_j}-e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)})(e^{-ic_j}-e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)})d(w,\lambda,\mathcal{C}) = \sum_{\gamma\in\mathcal{R}} b(w,\gamma,\Sigma)e^{i\lambda(\gamma)}$$

où $\mathcal{R}$ est le réseau de $i\mathfrak{t}$ engendré par les πH_α pour $\alpha\in\Sigma$ et les $b(w,\gamma,\Sigma)$ sont des constantes. Par (5), si $b(w,\gamma,\Sigma)\neq 0$ alors pour tout $X\in\mathcal{C}\cap\omega$ et pour tout $\lambda\in\mathcal{F}$, on a $Re(i<\lambda,x^{-1}w^{-1}X+\gamma>)\leq 0$. En utilisant cette propriété et le fait que $d(w,\mathcal{C},\lambda)$ ne dépend pas de Σ, on obtient la propriété de croissance voulue.

On suppose qu'il existe une involution de Cartan θ de $\mathfrak{g}$ commutant à σ telle que $\mathfrak{t}$ soit θ-stable. On note K le sous-groupe compact maximal de G des points fixés par θ. On pose $\mathfrak{a} = i\mathfrak{t}$, $M = exp\ \mathfrak{t}$ et $A = exp\ \mathfrak{a}$. On choisit Σ un système positif de racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$ et on note $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha\in\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$ et $N = exp\ \mathfrak{n}$. Soit $B = MAN$ et $\rho = (1/2)\sum_{\alpha\in\Sigma}\alpha$. Soit $\lambda \in (\Gamma_{\mathfrak{t}}^* + \mathfrak{t}_{I\ reg}^*)_{\mathbb{C}}$. On note C_λ l'ensemble des fonctions continues de G dans $\mathbb{C}$ telles que pour tout $t \in M$, $a \in A$, $n \in N$ et $g \in G$ l'on ait $f(gtan) = a^{-\lambda-2\rho}f(g)$ et I_λ les éléments de classe $\mathcal{C}^\infty$ de C_λ. Soit π_λ la représentation régulière gauche de G dans I_λ. La restriction à K induit un isomorphisme de I_λ dans $\mathcal{C}^\infty(K/T)$. On munit I_λ de la topologie de $\mathcal{C}^\infty(K/T)$ transportée par cet isomorphisme. Soit I'_λ le dual de I_λ.

Pour $y \in W_K(\mathfrak{t})$, on définit la fonction ξ_λ^y sur G de la manière suivante:

$$\xi_\lambda^y(g) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g \notin HyAN \\ a^{\lambda-2\rho} & \text{si} \quad g \in HyaN \end{cases}$$

Pour $\lambda - 2\rho$ strictement dominant alors on a $\xi_\lambda^y \in \mathcal{C}_{-\lambda}$ et l'application $\lambda \to \xi_{\lambda/K}^y$ admet un prolongement méromorphe de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ dans I'_λ ([vdB] Thm 5.10 et [O] Thm 5.1). On notera encore ξ_λ^y l'élément de I'_λ obtenu à partir de ce prolongement méromorphe.

Pour y et z dans $W_K(\mathfrak{t})$ et $\lambda \in (\Gamma_{\mathfrak{t}}^* + \mathfrak{t}_{I\ reg}^*)_{\mathbb{C}}$ tels que ξ_λ^y et ξ_λ^z sont définis, on pose pour $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$< C(\lambda, y, z), \varphi >=< \pi'_\lambda(\varphi)\xi_\lambda^y, \xi_{-\lambda}^z >$$

Lorsque $\lambda \in (\Gamma_{\mathfrak{t}}^* + \mathfrak{t}_{I\ reg}^*) \subset \mathfrak{t}_{reg}^* = i\mathfrak{a}_{reg}^*$ on note χ_λ le caractère de B défini par $\chi_\lambda(tan) = a^{-\lambda-2\rho}$ et soit $L_\lambda = ind_B^G\chi_\lambda$ (induite au sens unitaire). La représentation L_λ est unitaire irréductible ([Br] Thm. 7.4 p 203). Soit $\mathcal{H}_\lambda$ l'espace de L_λ. Dans ce cas l'espace $\mathcal{H}_\lambda^\infty$ des vecteurs C^∞ de $\mathcal{H}_\lambda$ est égal à I_λ. Pour $f \in I_\lambda$, on pose $< u_\lambda^y, f >=< \xi_\lambda^y, \overline{f} >$. L'élément u_λ^y est alors un élément H-invariant de l'espace $\mathcal{H}_\lambda^{-\infty}$ des vecteurs généralisés de $\mathcal{H}_\lambda$. Pour presque tout $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^* + \mathfrak{t}_{I\ reg}^*$, on a alors

$$< C(\lambda, y, z), \varphi >=< L_\lambda(\varphi)u_\lambda^y, u_\lambda^z >$$

Dans la partie 5, nous exprimons les fonctions $\Theta(\lambda, y, \psi)$ en terme des $C(\lambda, y, z)$ (théorème 5.1). Pour $y = eH$, ce résultat a été établi par P. Delorme dans [D]. La démonstration donnée ici est semblable à celle de P. Delorme et m'a été indiqué par M. Tinfou.

Dans la dernière partie de cet article, on généralise certains résultats précédemment établis à d'autres séries de fonctions généralisées sphériques en utilisant le procédé d'induction décrit dans [H3] (théorème 6.1 et théorème 6.2). Tous ces résultats seront utilisés dans [H6] pour décrire la formule d'inversion des intégrales orbitales sur $\mathbb{X}$.

Je remercie A. Bouaziz pour ses précieux conseils lors de ce travail.

Plan:

1 Notations et préliminaires

Si M est une variété différentiable, on note $C^\infty(M)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur M , $\mathcal{D}(M)$ le sous-espace de $C^\infty(M)$ des fonctions à support compact et $\mathcal{D}(M)'$ l'espace des distributions sur M, c'est-à-dire le dual de $\mathcal{D}(M)$.

Si N est une partie de M et si f est une fonction sur M, on notera $f_{/N}$ ou f_N sa restriction à N.

Si X est un ensemble fini, on note $\mid X \mid$ son cardinal.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. On notera V^* son dual et $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié. Si V est un espace vectoriel topologique, on note V' son dual topologique.

Soit G un groupe de Lie réductif complexe connexe de groupe dérivé simplement connexe et d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit H une forme réelle de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On note σ la conjugaison de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$. Elle définit une involution du groupe G que l'on notera encore σ et H est l'ensemble des points de G fixés par σ. Soit $\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g}; \sigma(X) = -X\}$ de telle sorte que l'on ait $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$. On a alors $\mathfrak{q} = i\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{h}$.

Soit M un sous-groupe de G et U une partie de G ou de $\mathfrak{g}$. On note $Z_M(U)$ le centralisateur de U dans M et $N_M(U)$ le normalisateur de U dans M. On pose $W_M(U) = N_M(U)/Z_M(U)$.

On note e l'élément neutre de G.

Soit θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ commutant à σ et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ correspondante. Soit K le sous-groupe compact maximal de G formé des points de G fixés par θ.

On fixe sur $\mathfrak{g}$ une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée, G -invariante κ qui coïncide avec la forme de Killing sur l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$ et telle que la forme $-\kappa(X, \theta(X))$ soit définie positive. Pour $X \in \mathfrak{g}$ on pose alors $\parallel X \parallel = (-\kappa(X, \theta(X)))^{1/2}$. Ceci définit une norme sur $\mathfrak{g}$ et donc également sur $\mathfrak{g}^*$ par dualité.

Soit $\mathbb{X} = G/H$ et soit p la projection canonique de G sur $\mathbb{X}$. Soit φ l'application de $\mathbb{X}$ dans G qui à $p(g)$ associe $g\sigma(g)^{-1}$. L'application φ est un isomorphisme sur son image.

Pour $x \in \mathbb{X}$, on note G_x le centralisateur de $\varphi(x)$ dans G. Soit $\mathfrak{g}_x$ son algèbre de Lie. On pose $H_x = G_x \cap H$ et $\mathfrak{h}_x = \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{h}$.

Le groupe G agit par translation à gauche sur $\mathbb{X}$ et on notera $g.x$ l'action de $g \in G$ sur $x \in \mathbb{X}$. On notera également pour $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$ l'action adjointe par $AdgX = g.X$

On note exp l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G et soit Exp l'application de $\mathfrak{h}$ dans G/H qui à X associe $p(exp\, iX)$. Soit J le jacobien de l'application Exp. On a , pour $X \in \mathfrak{h}$,

$$J(X) = det\left(\frac{sh\ iadX}{iadX}\right)_{/\mathfrak{h}}$$

Soit $D_{\mathbb{X}}$ la fonction analytique sur $\mathbb{X}$ définie par : si $x \in \mathbb{X}$ et $z \in \mathbb{C}$ alors l'endomorphisme $1 + z - Ad\varphi(x)$ de $\mathfrak{g}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. On pose alors

$$det_{\mathbb{C}}(1 + z - Ad\,\varphi(x)) = z^n D_{\mathbb{X}}(x) \text{ modulo } z^{n+1}$$

où $n = rang(\mathfrak{h})$.

Définition 1.1 *Un élément x de $\mathbb{X}$ est dit régulier si l'on a $D_{\mathbb{X}}(x) \neq 0$. Ceci est équivalent à dire que $\varphi(x)$ est régulier dans G. On note $\mathbb{X}_{reg}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathbb{X}$ et si U est une partie de $\mathbb{X}$, on pose $U_{reg} = \mathbb{X}_{reg} \cap U$.*

On appelle sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$ un sous-espace de $\mathfrak{q}$ formé d'éléments semi-simples, abélien et maximal pour ces deux propriétés.

Comme $\mathfrak{q} = i\mathfrak{h}$, la multiplication par i induit une bijection de l'ensemble des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$ dans l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{h}$, que l'on notera $Car(\mathfrak{h})$. Soit $H \setminus Car(\mathfrak{h})$ l'ensemble des classes de conjugaison sous H des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{h}$.

On notera $\mathfrak{h}_{reg}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{h}$ et pour $\mathfrak{s}$ une partie de $\mathfrak{h}$ on pose $\mathfrak{s}_{reg} = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_{reg}$.

1.2 Pour $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$, on notera $\Delta_{\mathfrak{a}}$ (ou Δ quand il n'y aura pas d'ambiguïté) le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a} + i\mathfrak{a})$. Pour $\alpha \in \Delta$, on note H_α la coracine de α , $\mathfrak{g}_\alpha$ l'espace radiciel de $\mathfrak{g}$ relatif à α et s_α la réflexion de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ relative à α.

On définit la partie compacte $\mathfrak{a}_I = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{k} + (\sum_{\alpha\in\Delta} i\mathbb{R}H_\alpha) \cap \mathfrak{a}$ et la partie déployée $\mathfrak{a}_R = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{p} + (\sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}H_\alpha) \cap \mathfrak{a}$ de $\mathfrak{a}$ de telle sorte que l'on ait $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_I + \mathfrak{a}_R$.

Une racine α est dite réelle (respectivement imaginaire) si $\alpha(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{R}$ (respectivement $\alpha(\mathfrak{a}) \subset i\mathbb{R}$), ceci est équivalent à $H_\alpha \in \mathfrak{a}_R$ (respectivement $H_\alpha \in i\mathfrak{a}_I$). Une racine est dite complexe si elle n'est ni réelle ni imaginaire.

On choisit un système positif Δ^+ de Δ tel que, si α est une racine complexe de Δ^+ alors $\bar{\alpha} \in \Delta^+$. On posera $\rho_{\Delta^+} = \dfrac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha$, et $\omega_{\mathfrak{a}} = \prod_{\alpha\in\Delta^+} H_\alpha$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $\rho = \rho_{\Delta^+}$.

Soit α une racine imaginaire de Δ. La racine α est dite compacte si $(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathbb{C}H_\alpha) \cap \mathfrak{h}$ est isomorphe à $su(2)$ et elle est non compacte si $(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathbb{C}H_\alpha) \cap \mathfrak{h}$ est isomorphe à $sl(2, \mathbb{R})$.

On note Δ_{Inc} l'ensemble des racines imaginaires non compactes de Δ.

Soit $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}$ tels que $exp\ 2iX = 1$. C'est un réseau de $\mathfrak{a}_R$. Soit $\Gamma_{\mathfrak{a}}^*$ l'ensemble des $\mu \in \mathfrak{a}_R^*$ tels que, pour tout $X \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$, l'on ait $\mu(X) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Soit $\mathfrak{a}_{I-reg}^*$ l'ensemble des $\mu \in \mathfrak{a}_I^*$ tels que, pour toute racine imaginaire α de Δ, l'on ait $\mu(H_\alpha) \neq 0$.

Soit $\mathfrak{a}_{R-reg}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}$ tels que pour toute racine réelle α de $\mathfrak{a}$, l'on ait $\alpha(X) \neq 0$.

1.3 A la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{h}$, on associe l'ensemble A formé des $x \in \mathbb{X}$ tels que $\varphi(x)$ centralise $\mathfrak{a}$ et on l'appelle le sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ associé à $\mathfrak{a}$. On note $Car(\mathbb{X})$ l'ensemble des sous-ensembles de Cartan de $\mathbb{X}$.

On rappelle que tout élément régulier de $\mathbb{X}$ appartient à un unique sous-ensemble de Cartan ([O.M] paragraphe 6 théorème 2).

On a ([H 2] lemme 2.3)

$$A = N_G(\mathfrak{a})/N_H(\mathfrak{a})$$

Nous allons préciser la structure des composantes connexes de A.

Pour $\alpha \in \Delta$, on choisit X_α et $X_{-\alpha}$ appartenant respectivement à $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ tels que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ et $\sigma(X_\alpha) = X_{-\alpha}$ si α est une racine imaginaire non compacte. On note $g_\alpha = exp\frac{\pi}{2}(X_\alpha - X_{-\alpha})$. D'après ([H4] corollaire 1.7), pour tout $a \in A$ il existe $X \in \mathfrak{a}$ et un ensemble $\mathcal{S}$ de racines imaginaires non compactes deux à deux fortement orthogonales tels que $a = p(expi\ X \prod_{\alpha\in\mathcal{S}} g_\alpha)$. On a alors $\varphi(a) = exp\ 2iX\ exp\ i\pi \sum_{\alpha\in\mathcal{S}} H_\alpha$. On pose $g_{\mathcal{S}} = \prod_{\alpha\in\mathcal{S}} g_\alpha$ et $y_{\mathcal{S}} = p(g_{\mathcal{S}})$. Soit $\mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$ un système de représentants de $exp\ i\mathfrak{a} \setminus A = W_G(\mathfrak{a})/W_H(\mathfrak{a})$ dans A formé d'éléments y tels que $\varphi(y) \in H$. Soit $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$. On note $W_H^y(\mathfrak{a})$ l'ensemble des $h \in W_H(\mathfrak{a})$ tels que $h.y \in exp\ i\mathfrak{a}.y$. Pour $h \in W_H^y(\mathfrak{a})$, il existe donc $Y_h \in \mathfrak{a}$ tel que $h.y = exp\ iY_h.y$ et donc comme $\varphi(y) \in H$ on a $2Y_h \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$. Si Y' est un autre élément vérifiant cette propriété, il est facile de voir que $Y_h - Y' \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$. D'autre part, on a $Y_h = hY_{h^{-1}} = -hY_{h^{-1}}$ modulo $\Gamma_{\mathfrak{a}}$. Si $\mathfrak{a} = \mathfrak{t}$, alors Y_h est central dans $\mathfrak{h}$.

Lemme 1.4 *Pour tout $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$, il existe $g \in G_y$ tel que $y = p(g)$.*

Démonstration: Soit $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$. Par ce qui précède, il existe $X \in \mathfrak{a}$ et un ensemble $\mathcal{S}$ de racines imaginaires non compactes deux à deux fortement orthogonales tels que $y = exp\ iX.y_{\mathcal{S}}$. Comme $\varphi(y)$ et $\varphi(y_{\mathcal{S}})$ sont dans H, on a $exp\ 4iX = 1$ et donc $2X \in \Gamma_{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}_R$. Soit $g = exp\ iX\ g_{\mathcal{S}}$. Il est clair que $p(g) = y$. On a $g\varphi(y)g^{-1} = exp\ iXg_{\mathcal{S}}exp\ 2iX\varphi(y_{\mathcal{S}})g_{\mathcal{S}}^{-1}exp - iX$. Or $g_{\mathcal{S}}$ commute à $\varphi(y_{\mathcal{S}})$ et à $exp\ iX$ puisque $X \in \mathfrak{a}_R$ et $\varphi(y_{\mathcal{S}})$ commute à $exp - iX$. On en déduit donc que $g\varphi(y)g^{-1} = \varphi(y_{\mathcal{S}})exp\ 2iX = \varphi(y)$. ∎

On pose $\mathcal{W}_{\mathfrak{a}}^{-1} = W_H(\mathfrak{a}) \setminus W_G(\mathfrak{a})$

Pour β un poids de $\mathfrak{a}$, on définit la fonction ξ_β sur A par: si $a \in A$ alors $\varphi(a) = expX$ avec $X \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. On pose $\xi_\beta(a) = e^{\beta(X)}$.

Soit $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. Cette algèbre s'identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels sur A, invariants par translation. On note $\partial(u)$ l'opérateur différentiel associé à $u \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$.

1.5 Nous allons rappeler la notion de sous-algèbres de Cartan et de sous-ensembles de Cartan adjacents.

Soit $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$ et soit A le sous-ensemble de Cartan associé. Soit Φ le système de racines réelles de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$ et soit Φ^+ un système positif. On choisit X_α et $X_{-\alpha}$ appartenant respectivement à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tels que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$. Soit $Ker\alpha$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}$ tel que $\alpha(X) = 0$. Il existe alors un élément c_α du groupe adjoint de G tel que $c_\alpha(H_\alpha) = i(X_\alpha - X_{-\alpha})$ et pour tout $X \in Ker\alpha$, l'on ait $c_\alpha(X) = X$. L'élément c_α est appelé transformation de Cayley.

On pose $\mathfrak{a}_\alpha = \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}) + Ker\alpha$. La sous-algèbre $\mathfrak{a}_\alpha$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$ et on a $c_\alpha.\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\alpha,\mathbb{C}}$. On dit que $\mathfrak{a}_\alpha$ est adjacente à $\mathfrak{a}$ relativement à α. Dans ce cas, on note A_α le sous-ensemble de Cartan associé à $\mathfrak{a}_\alpha$ et on l'appelle le sous-ensemble de Cartan adjacent à A (relativement à α).

Soit Φ_α l'ensemble des racines de Φ orthogonales à α. Alors $c_\alpha(\Phi_\alpha) = \Phi_\alpha$ est le système de racines réelles de $\mathfrak{a}_\alpha$ dans $\mathfrak{g}$ et $\Phi_\alpha^+ = \Phi_\alpha \cap \Phi^+$ est un système positif de ce système de racines.

1.6 Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et soit $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$. On rappelle que l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants sur $\mathbb{X}$ est isomorphe à $Z(\mathfrak{g})$. Dans toute la suite, nous identifierons ces deux algèbres. Si $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$, on note $\gamma_{\mathfrak{a}}$ l'isomorphisme d'Harish-Chandra de $Z(\mathfrak{g})$ dans l'algèbre des invariants sous l'action de $W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$.

Définition 1.7 - *Une fonction généralisée Θ sur $\mathbb{X}$ est dite sphérique si elle est H-invariante et s'il existe un caractère χ de $Z(\mathfrak{g})$ tel que pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, l'on ait $z.\Theta = \chi(z)\Theta$.*

Théorème 1.8 *([S], thm. 4.3). Une fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}$ est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{X}$ et analytique sur $\mathbb{X}_{reg}$.*

Nous allons rappeler les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction localement intégrable définisse une fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}$.

Théorème 1.9 *([H1] théorème 4.11) Soit Θ une fonction H-invariante et localement intégrable sur $\mathbb{X}$. Soit χ un caractère régulier de $Z(\mathfrak{g})$. Alors, pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a $z.\Theta = \chi(z)\Theta$ en tant que fonction généralisée si et seulement si la fonction Θ vérifie les trois conditions suivantes:*
(D1) pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a $z.\Theta = \chi(z)\Theta$ sur $\mathbb{X}_{reg}$,

(D2) Soit $A \in Car(\mathbb{X})$ associé à $\mathfrak{a}$ de $Car(\mathfrak{h})$. Soit Δ^+ un système positif de racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$. Soit $\Delta_A = \prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-\xi_{-\alpha})\xi_\rho$. Alors la fonction $\Delta_A\Theta_{/A_{reg}}$ se prolonge de façon C^∞ sur l'ensemble A_{R-reg} des $x \in A$ tels que, pour toute racine réelle α de $\mathfrak{a}$, l'on ait $\xi_\alpha(x) \neq 1$,

(D3) Soit $A \in Car(\mathbb{X})$ associé à $\mathfrak{a}$ de $Car(\mathfrak{h})$. Soit Δ^+ un système positif de racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors la fonction $\partial(\omega_{\mathfrak{a}})(\Delta_A\Theta_{/A_{reg}})$ se prolonge continument sur A. On notera encore $\partial(\omega_{\mathfrak{a}})(\Delta_A\Theta_{/A_{reg}})$ ce prolongement. Soit α une racine réelle de $\mathfrak{a}$ et soit $a \in A$ tel que $\xi_\alpha(a) = 1$ et $\xi_\beta(a) \neq 1$ pour toute racine β distincte de $\pm\alpha$, alors on a

$$\partial(\omega_{\mathfrak{a}})(\Delta_A\Theta_{/A_{reg}})(a) = \partial(\omega_{\mathfrak{a}_\alpha})(\Delta_{A_\alpha}\Theta_{/A_{\alpha,reg}})(a)$$

2 Base de la série la plus continue de fonctions généralisées sphériques

Dans toute la suite de cet article, sauf mention explicite du contraire, on supposera que $\mathfrak{h}$ admet une sous-algèbre de Cartan de type compact. On fixe $\mathfrak{t}$ une telle sous-algèbre de Cartan. Son système de racine n'est donc formé que de racines imaginaires. On a $\mathfrak{t}_R = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{t}_I = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{t} \cap [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$.

Soit $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^* + \mathfrak{t}_{I-reg}^*$. Le but de cette partie est de décrire une base de l'espace des fonctions généralisées sphériques Θ sur $\mathbb{X}$ telles que, pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, l'on ait $z.\Theta = \gamma_{\mathfrak{t}}(z)(i\lambda)\Theta$.

Soit T le sous-ensemble de Cartan associé à $\mathfrak{t}$. On rappelle le résultat suivant:

Théorème 2.1 *(Théorème d'unicité [H2] thm 4.1 et [H4] thm 5.11) Soit $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^* + \mathfrak{t}_{I-reg}^*$. Soit Θ une fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}$ telle que:*
(i) pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, l'on ait $z.\Theta = \gamma_{\mathfrak{t}}(z)(i\lambda)\Theta$,
(ii) Si $x \in T_{reg}$ alors $\Theta(x) = 0$.
Alors $\Theta = 0$ en tant que fonction généralisée sur $\mathbb{X}$.

Théorème 2.2 *Soit $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^* + \mathfrak{t}_{I-reg}^*$. Soit $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{t}}$ et soit ψ un système positif de racines de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors il existe une unique fonction généralisée sphérique $\Theta(\lambda, y, \psi)$ sur $\mathbb{X}$ vérifiant les propriétés suivantes:*
(i) Pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a $z.\Theta(\lambda, y, \psi) = \gamma_{\mathfrak{t}}(z)(i\lambda)\Theta(\lambda, y, \psi)$
(ii) Soit $x \in T_{reg}$. Si $x \notin (exp\ i\mathfrak{t})\ W_H(\mathfrak{t}).y$ alors $\Theta(\lambda, y, \psi)(x) = 0$ et si $x = exp\ iX.y$ alors

$$\Theta(\lambda, y, \psi)(x) = \frac{\sum_{u\in W_H^y(\mathfrak{t})} \varepsilon(u)e^{i<u\lambda, X+Y_u>}}{\prod_{\alpha\in\psi}(1 - \xi_{-\alpha}(x))\xi_{\rho_\psi}(x)}$$

Corollaire 2.3 *Soit* $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^* + \mathfrak{t}_{I-reg}^*$ *et soit* ψ *un système positif de racines de* $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ *dans* $\mathfrak{g}$.

(i) Si $h \in W_H(\mathfrak{t})$*, alors, on a* $\Theta(h.\lambda, y, \psi) = \varepsilon(h)\Theta(\lambda, h^{-1}.y, \psi)$

(ii) l'ensemble des $\Theta(w\lambda, y, \psi)$ *lorsque* y *parcourt* $\mathcal{W}_{\mathfrak{t}}$ *et* w *parcourt* $\mathcal{W}_{\mathfrak{t}}^{-1}$ *forme une base de l'espace des fonctions généralisées sphériques* Θ *sur* $\mathbb{X}$ *telles que, pour tout* $z \in Z(\mathfrak{g})$*, l'on ait* $z.\Theta = \gamma_{\mathfrak{t}}(z)(i\lambda)\Theta$.

Remarque : L'expression de $\Theta(\lambda, y, \psi)$ sur T_{reg} donnée dans le théorème 2.2 (ii) diffère de celle annoncée dans [H5] théorème 1. Ceci provient du fait suivant: pour $u \in W_H(\mathfrak{t})$ tel que $u.y \in exp\ i\mathfrak{t}.y$ alors on n'a pas obligatoirement $u \in W_{H_y}(\mathfrak{t})$ (l'élément Y_u n'est pas forcément dans $\Gamma_{\mathfrak{t}}$). Cette erreur est corrigée ici. Le même type d'erreur est à corriger pour la fonction orbitale $F(\lambda, y, \psi)$ définie dans le théorème 3 de [H5] (voir [H6] paragraphe 5). Ces corrections n'influent pas sur les autres résultats de [H5] (voir [H6]).

Démonstration: **du corollaire**: Par le théorème d'unicité, pour obtenir (i), il suffit de prouver que les deux fonctions généralisées sphériques considérées coïncident sur T_{reg}. Soit $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{t}}$.

Soit $x \in T_{reg}$. Si $x \notin exp\ i\mathfrak{t}W_H(\mathfrak{t}).y$ alors il est clair que les deux fonctions généralisées considérées sont nulles en x. Soit $X \in \mathfrak{t}$ tel que $x = exp\ iX.y$. On a alors

$$\begin{aligned}\Theta(\lambda, h^{-1}.y, \psi)(x) &= \Theta(\lambda, h^{-1}.y, \psi)(exp\ ih^{-1}.X\ h^{-1}.y) \\ &= \frac{\sum_{u \in W_H^{h^{-1}.y}(\mathfrak{t})} \varepsilon(u) e^{i<u\lambda, h^{-1}.X>} e^{i<\lambda,(h^{-1}Y)_u>}}{\prod_{\alpha\in\psi}(1-\xi_{-\alpha}(h^{-1}exp\ iX.y)\xi_{\rho_\psi}(h^{-1}exp\ iX.y)}\end{aligned}$$

où $uh^{-1}.y = exp\ i(h^{-1}Y)_u h^{-1}y$. Or, il est clair que pour $u \in W_H^{h^{-1}.y}$, on a $huh^{-1} \in W_H^y(\mathfrak{t})$ et $Y_{huh^{-1}} = (h^{-1}Y)_u$. On a donc

$$\Theta(\lambda, h^{-1}.y, \psi)(x) = \frac{\sum_{u \in W_H^y(\mathfrak{t})} \varepsilon(u) e^{i<uh\lambda,X>} e^{i<\lambda,Y_u>}}{\prod_{\alpha\in h.\psi}(1-\xi_{-\alpha}(exp\ iX.y)\xi_{h.\rho_\psi}(exp\ iX.y)} = \varepsilon(h)\Theta(h.\lambda, y, \psi)(x)$$

On obtient donc l'assertion (i).

Soit Θ une fonction généralisée sphérique telle que, pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, l'on ait $z.\Theta = \gamma_{\mathfrak{t}}(z)(i\lambda)\Theta$. Soit ψ un système positif de racines de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$ et soit $\Delta_T = \prod_{\alpha\in\psi}(1-\xi_{-\alpha})\xi_{\rho_\psi}$. D'apres le théorème **??** (D1) et (D2), pour tout $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{t}}$, il existe des constantes $c(w, y)$ telles que pour tout $X \in \mathfrak{t}_{reg}$, l'on ait

$$\Theta(exp\ iX.y) = \frac{\sum_{w\in W_G(\mathfrak{t})} c(w,y) e^{i<w\lambda,X>}}{\Delta_T(exp\ iX.y)}$$

Comme Θ est H-invariante, pour tout $u \in W_H(\mathfrak{t})$, on a $c(w, y) = \varepsilon(u)c(uw, uy)$ et pour $u \in W_H^y(\mathfrak{t})$, on a $c(w, y) = \varepsilon(u)c(uw, y)e^{i<\lambda,Y_u>}$. Par conséquent, on a

$$\Theta(exp\ iX.y) = \sum_{w\in W_H^y(\mathfrak{t})\backslash W_G(\mathfrak{t})} c(w,y) \frac{\sum_{u\in W_H^y(\mathfrak{t})} \varepsilon(u) e^{i<\lambda,Y_u>} e^{i<uw\lambda,X>}}{\Delta_T(exp\ iX.y)}$$

$$= \sum_{w \in W_H(\mathfrak{t}) \backslash W_G(\mathfrak{t})} \sum_{v \in W_H^y(\mathfrak{t}) \backslash W_H(\mathfrak{t})} c(vw, y)\Theta(vw\lambda, y, \psi)(exp\, iX.y)$$

$$= \sum_{w \in W_H(\mathfrak{t}) \backslash W_G(\mathfrak{t})} \sum_{v \in W_H^y(\mathfrak{t}) \backslash W_H(\mathfrak{t})} c(w, v^{-1}y)\Theta(w\lambda, v^{-1}y, \psi)(exp\, iX.y)$$

Comme $\Theta(w\lambda, z, \psi)$ est nulle en dehors de $exp\, i\mathfrak{t}\, W_H(\mathfrak{t}).z$ pour $z \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}$, on en déduit

$$\Theta = \sum_{y \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}} \sum_{w \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}^{-1}} c(w, y)\Theta(w\lambda, y, \psi)$$

Maintenant, on se donne pour $y \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}$ et $w \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}^{-1}$, des constantes $c(w, y)$ telles que la fonction généralisée $\Theta = \sum_{y \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}} \sum_{w \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}^{-1}} c(w, y)\Theta(w\lambda, y, \psi)$ soit nulle. En particulier, elle est nulle sur T_{reg}. Soit donc $z \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}$ et $X \in \mathfrak{t}_{reg}$. On a alors

$$\Theta(exp\, iX.z) = \sum_{h \in W_H(\mathfrak{t})/W_H^z(\mathfrak{t})} \sum_{w \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}^{-1}} c(w, hz)\Theta(w\lambda, hz, \psi)(exp\, iX.z)$$

$$= \sum_{h \in W_H(\mathfrak{t})/W_H^z(\mathfrak{t})} \sum_{w \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}^{-1}} \sum_{u \in W_H^z(\mathfrak{t})} c(w, hz)\varepsilon(h)\varepsilon(u)e^{i<\lambda, Y_u>}e^{i<uh^{-1}w\lambda, X>} = 0$$

Maintenant, le groupe $W_G(\mathfrak{t})$ est isomorphe à $\mathcal{W}_\mathfrak{t}^{-1} \times W_H(\mathfrak{t})/W_H^z(\mathfrak{t}) \times W_H^z(\mathfrak{t})$ par l'application $(w, h, u) \to uh^{-1}w$. Comme λ est supposé regulier, les applications $X \to e^{i<w\lambda, X>}$ sont linéairement indépendantes lorsque w parcourt $W_G(\mathfrak{t})$. La nullité de Θ entraine donc la nullité de toutes les constantes $c(w, y)$. Ceci achève la démonstration du corollaire. ■

Lemme 2.4 *Soit $y \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}$.*

(i) Le groupe G_y est réductif complexe connexe de groupe dérivé simplement connexe, σ-stable. On pose $\mathbb{X}_y = G_y/H_y$,

(ii) L'algèbre $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de type compact de $\mathfrak{h}_y$,

(iii) On a $y \in \mathbb{X}_y$.

Démonstration: L'élément $\varphi(y)$ est un élément semi-simple de G. D'après ([O.V] 4 problem 10 et thm 9), on sait que G_y est réductif complexe connexe. Il est clairement σ-stable. Soit $G_{y\,1}$ le groupe dérivé de G_y d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{y\,1}$. On a $\pi_1(G_{y\,1}) = Ker\; exp(2i\pi.)/\sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_y, \mathfrak{t})} \mathbb{Z}\, H_\alpha$. Soit $X \in \mathfrak{g}_{y\,1}$ tel que $exp\, 2iX = 1$. Le groupe dérivé de G étant simplement connexe, on a

$$X \in \mathfrak{g}_{y\,1} \cap \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})} \mathbb{Z}\, H_\alpha$$

D'après ([Bou], Chap.6, paragraphe 1, proposition 28), on a

$$\mathfrak{g}_{y\,1} \cap \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})} \mathbb{Z}\, H_\alpha = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{y\,1}, \mathfrak{t})} \mathbb{Z}\, H_\alpha$$

On en déduit donc que $G_{y\,1}$ est simplement connexe.

L'assertion (ii) est immédiate. Par le lemme **??**, il est clair que y admet un représentant dans $\mathbb{X}_y$ ce qui donne (iii). ■

On fixe λ, y et ψ comme dans le théorème **??**.

Pour $y = eH$, le résultat du théorème **??** est déjà connu ([H2] thm 7.1 et [H4] thm. 5.11). Nous rappelons brièvement la construction de $\Theta(\lambda, eH, \psi)$.

Soit $\beta_{H.\lambda}$ la mesure de Liouville de l'orbite coadjointe $H.\lambda$ et soit $\hat{\beta}_{H.\lambda}$ la transformée de Fourier de cette mesure. Soit w_λ l'élement de $W_G(\mathfrak{t})$ tel que $w_\lambda.\psi$ soit l'ensemble des $\alpha \in \Delta_\mathfrak{t}$ telles que $i\lambda(H_\alpha) > 0$. On pose, pour $x \in \mathbb{X}_{reg}$,

$$\Theta(\lambda, eH, \psi)(x) = \frac{(-1)^{|\psi_{Inc}|}}{(2i)^{|\psi|}}\varepsilon(w_\lambda) \sum_{\{X \in \mathfrak{h}_{reg}, ExpX = x\}/\Gamma_\mathfrak{t}} \hat{\beta}_{H.\lambda}(X) \mid J(X) \mid^{-1/2}$$

où par convention, si l'ensemble sur lequel la somme est faite est vide, la somme est nulle et $\mid \psi_{Inc} \mid$ est le cardinal de l'ensemble des racines imaginaires non compactes de ψ.

Lorsque l'élément $\varphi(y)$ est central dans G, alors pour tout $g \in G$, l'élément $g.y$ ne dépend que de $p(g)$. Donc pour $x = p(g)$, on peut poser $x.y = g.y$. On définit dans ce cas la fonction généralisée $\Theta(\lambda, y, \psi)$ en posant, pour $x \in \mathbb{X}_{reg}$, $\Theta(\lambda, y, \psi)(x) = \Theta(\lambda, eH, \psi)(x.y)$. Il est clair que $\Theta(\lambda, y, \psi)$ vérifie les assertions du théorème **??**. D'autre part, par construction, on a

$$\Theta(\lambda, y, \psi)_{/\mathbb{X}_{reg}} \text{ est nulle en dehors de } (exp\ i\mathfrak{h}.y)_{reg}.$$

On suppose maintenant que y est quelconque. On note ψ_y l'ensemble des racines $\alpha \in \psi$ telles que $\xi_\alpha(y) = 1$. Par ce qui précède, il existe une unique fonction généralisée sphérique $\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)$ sur $\mathbb{X}_y$ vérifiant les propriétés du théorème **??** sur l'espace symétrique $\mathbb{X}_y$. Pour $x \in \mathbb{X}_{reg}$, on note $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$ l'ensemble des $h \in H$ tel que $h.x \in \mathbb{X}_y$.

Lemme 2.5 *Soit $x \in \mathbb{X}_{reg}$ et soit $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}_x$. Soit A le sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ associé à $\mathfrak{a}$. Alors, on a:*

(i) si $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$, on a $h.\mathfrak{a} \in Car\ \mathfrak{h}_y$,

(ii) l'ensemble $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$ ne dépend que de la composante connexe de A qui contient x,

(iii) l'ensemble $H_y \setminus \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$ est fini.

Si x est un élément semi-simple de $\mathbb{X}$ appartenant au sous-ensemble de Cartan A associé à $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$, on notera $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x, \mathfrak{a})$ l'ensemble des $h \in H$ tels que $h.x \in \mathbb{X}_y$ et $h.\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h}_y)$.

Démonstration: Soit $x \in \mathbb{X}_{reg}$. Si $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$, l'élément $h\varphi(x)h^{-1}$ est un élément régulier de G_y, et donc $Z_{\mathfrak{h}_y}(h\varphi(x)h^{-1})$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}_y$ contenue dans $h.\mathfrak{a}$. Comme $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_y$ ont même rang, on en déduit que $h.\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h}_y)$. D'où l'assertion (i).

Soit $u \in \mathcal{W}_\mathfrak{a}$ tel que $x \in exp\ i\mathfrak{a}.u$. Montrons que l'on a $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x) = \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(u, \mathfrak{a})$. Soit $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$. D'après (i), on a $h.\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h}_y)$. On écrit $x = exp\ iX.u$ avec $X \in \mathfrak{a}$. On a donc $h.x = (exp\ ih.X)h.u$. Il est donc clair que $h.x \in \mathbb{X}_y$ si et seulement si $h.u \in \mathbb{X}_y$.

L'assertion (iii) découle de ([B1] Remarque 7.2.3). ■

On pose alors

$$\Theta(x) = \xi_{\rho_\psi}(y) \mid D_{\mathbb{X}}(x) \mid^{-1/2} \sum_{h \in H_y \backslash \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)} \Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)(h.x) \mid D_{\mathbb{X}_y}(h.x) \mid^{1/2}$$

Le théorème **??** découle du théorème suivant:

Théorème 2.6 *La fonction Θ définit une fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}$ vérifiant les assertions du théorème* **??**. *On la notera $\Theta(\lambda, y, \psi)$.*

2.7 Remarque: Comme la fonction $\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi)_{/\mathbb{X}_{y\ reg}}$ est nulle en dehors de $(exp\ i\mathfrak{h}_y.y)_{reg}$, on a

$$\Theta(\lambda, y, \psi)_{\mathbb{X}_{reg}} \text{ est nulle en dehors de } (exp\ i\mathfrak{h}\ H.y)_{reg}.$$

Démonstration: L'ensemble $H_y \backslash \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$ est fini et la fonction $\mid D_{\mathbb{X}} \mid^{-1/2}$ est localement intégrable sur $\mathbb{X}$. Par l'expression locale de $\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)$ ([H 2] théorème 5.11), il est clair que Θ définit une fonction localement intégrable, H -invariante sur $\mathbb{X}$. Pour prouver que Θ définit une fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}$, on va montrer que Θ vérifie les conditions nécessaires et suffisantes rappeler dans le théorème **??**.

Soit $z \in Z(\mathfrak{g})$ et $x \in \mathbb{X}_{reg}$. On note A le sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ contenant x. Si $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$, on note $(h.A)_y$ le sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}_y$ contenant $h.x$. On a alors ([H1] cor. 3.9):

$$(z.\Theta)_{/A_{reg}}(x) = \mid D_{\mathbb{X}}(x) \mid^{-1/2} \gamma_{\mathfrak{a}}(z).(\mid D_{\mathbb{X}} \mid^{1/2} \Theta_{/A_{reg}})(x)$$

$$= \xi_{\rho_\psi}(y) \mid D_{\mathbb{X}}(x) \mid^{-1/2} \sum_{h \in H_y \backslash \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)} \gamma_{h.\mathfrak{a}}(z).(\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y) \mid D_{\mathbb{X}_y} \mid^{1/2})_{/(h.A)_{y,reg}}(h.x)$$

$$= \gamma_{\mathfrak{t}}(z)(i\lambda)\Theta_{/A_{reg}}(x)$$

Donc Θ vérifie l'assertion (D1) du théorème **??**.

Démonstration de (D2). Soit A un sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ associé à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{a}$. Soit Δ^+ un système positif de racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$. On pose $\Delta_A = \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - \xi_{-\alpha})\xi_\rho$. On pose $\Psi_A = \Delta_A \Theta_{/A_{reg}}$. Montrons que la fonction Ψ_A se prolonge analytiquement sur l'ensemble A_{R-reg} des $a \in A$ tels que pour toute racine réelle de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$, l'on ait $\xi_\alpha(a) \neq 1$ (relation (D2)).

Si $\mathcal{S}$ est un ensemble de racines, on pose $b_{\mathcal{S}} = \prod_{\alpha \in \mathcal{S}} \frac{(1 - \xi_{-\alpha})}{\mid 1 - \xi_{-\alpha} \mid}$. On a alors

$$\Delta_A = \frac{\xi_\rho}{\mid \xi_\rho \mid} b_{\Delta^+} \mid D_{\mathbb{X}} \mid^{1/2}$$

Si pour tout $h \in H$, l'algèbre $h.\mathfrak{a}$ n'est pas une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}_y$, alors pour tout $x \in A_{reg}$, on a $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x) = \emptyset$ et donc la fonction Ψ_A est toujours nulle, elle vérifie donc bien (D2).

On suppose maintenant que $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h}_y)$. Pour $\mathfrak{b} \in Car(\mathfrak{h}_y)$, on adoptera les notations suivantes: soient B et B_y les sous-ensembles de Cartan respectivement de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{X}_y$ associés à $\mathfrak{b}$. L'ensemble B_y est formé des $exp\ i\mathfrak{b}.u$ où $u \in \mathcal{W}_\mathfrak{b} \cap \mathbb{X}_y$. Soit $\Delta_\mathfrak{b}^+$ et $\Delta_{\mathfrak{b},y}^+$ des systèmes positifs de racines de $\mathfrak{b}_\mathbb{C}$ respectivement dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_y$ tels que $\Delta_{\mathfrak{b},y}^+ \subset \Delta_\mathfrak{b}^+$. Soit $\Delta_{\mathfrak{b},R}^+$ et $\Delta_{\mathfrak{b},y,R}^+$ l'ensemble des racines réelles de $\Delta_\mathfrak{b}^+$ et $\Delta_{\mathfrak{b},y}^+$. On pose $\rho_{\mathfrak{b},y} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{b},y}^+} \alpha$ et $\rho_\mathfrak{b} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_\mathfrak{b}^+} \alpha$.

On pose $\varepsilon(\mathfrak{b}, y) = \frac{\xi_{\rho_\mathfrak{b}}}{|\xi_{\rho_\mathfrak{b}}|}\frac{|\xi_{\rho_{\mathfrak{b},y}}|}{\xi_{\rho_{\mathfrak{b},y}}} b_{\Delta_\mathfrak{b}^+ - \Delta_{\mathfrak{b},y}^+}$. C'est une fonction qui prend les valeurs ± 1 sur B_{reg}.

On a alors:

$$\Psi_A(x) = \xi_{\rho_\psi}(y) \sum_{h\in H_y\backslash\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)} \varepsilon(h.\mathfrak{a}, y)(h.x)(\Delta_{(h.A)_y}\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y))(h.x)$$

Si $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x) = \emptyset$ alors la fonction Ψ_A est nulle sur les éléments réguliers de la composante connexe de A contenant x et donc elle se prolonge analytiquement sur cette composante connexe.

On suppose maintenant que $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x) \neq \emptyset$. Par la remarque **??**, on sait que $\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)(h.x) \neq 0$ si et seulement si il existe $X \in h.\mathfrak{a}$ tel que $h.x = exp\ iX.y$. Dans ce cas, on a:

$$\varepsilon(h.\mathfrak{a}, y)(h.x) = \xi_{\rho_{h.\mathfrak{a}} - \rho_{h.\mathfrak{a},y}}(y) \prod_{\alpha\in\Delta_{h.\mathfrak{a}}^+ - \Delta_{h.\mathfrak{a},y}^+} \frac{(e^{i\alpha(X)} - \xi_{-\alpha}(y)e^{-i\alpha(X)})}{|\ (e^{i\alpha(X)} - \xi_{-\alpha}(y)e^{-i\alpha(X)})\ |}$$

Comme $y \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}$, pour toute racine $\alpha \in \Delta_{h.\mathfrak{a}}^+$, on a $\xi_\alpha(y) = \pm 1$. Or pour tout $\alpha \in \Delta_{h.\mathfrak{a}}^+ - \Delta_{h.\mathfrak{a},y}^+$, on a $\xi_{-\alpha}(y) = -1$ et donc $\varepsilon(h.\mathfrak{a}, y)(h.x) = \xi_{\rho_{h.\mathfrak{a}} - \rho_{h.\mathfrak{a},y}}(y) \prod_{\alpha\in\Delta_{h.\mathfrak{a}}^+ - \Delta_{h.\mathfrak{a},y}^+} \frac{cos\alpha(X)}{|cos\alpha(X)|}$.

Si α est une racine imaginaire, on a $cos\alpha(X) = chi\alpha(X) > 0$. Si α est une racine complexe positive, alors il en est de même de $\bar{\alpha}$ et dans ce cas, on a $cos\alpha(X)cos\bar{\alpha}(X) > 0$. On en déduit donc que $\varepsilon(h.\mathfrak{a}, y)(h.x) = \xi_{\rho_{h.\mathfrak{a}} - \rho_{h.\mathfrak{a},y}}(y) \prod_{\alpha\in\Delta_{h.\mathfrak{a},R}^+ ;\xi_\alpha(y)=-1} signe(cos\alpha(X))$.

En particulier, la fonction $\varepsilon(h.\mathfrak{a}, y)$ se prolonge en une fonction localement constante sur $(h.A)_{R-reg} \cap (exp\ ih.\mathfrak{a}.y)$.

Soit $\gamma \in exp\ i\mathfrak{a}.x$ avec $\gamma \in A_{R-reg}$. Dans ce cas, pour tout $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$, on a $h.\gamma \in ((h.A)_y)_{R-reg}$ et donc la fonction $\Delta_{(h.A)_y}\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)$ se prolonge analytiquement au voisinage de $h.\gamma$. D'autre part, lorsque $\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)$ ne s'annule pas au voisinage de $h.\gamma$, la fonction $\varepsilon(h.\mathfrak{a}, y)$ est constante au voisinage de $h.\gamma$ par ce qui précède. On obtient donc l'assertion (D2).

Démonstration de (D3). On garde les notations précédentes. On fixe α une racine réelle de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}$ et $\gamma \in A$ tels que $\xi_\alpha(\gamma) = 1$ et $\xi_\beta(\gamma) \neq 1$ pour toute racine β différente de $\pm\alpha$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma_\alpha(t) = exp\ itH_\alpha.\gamma$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout t vérifiant $0 <\mid t \mid< \varepsilon$, l'élément $\gamma_\alpha(t)$ appartient à A_{reg}. On garde les notations de **??** et **??**. Il faut donc prouver les deux assertions suivantes:

(*) l'application $\partial(\omega_\mathfrak{a})\Psi_A$ se prolonge continument au point γ,

(**) $\lim\limits_{t\to 0}(\partial(\omega_\mathfrak{a})\Psi_A)(\gamma_\alpha(t)) = \partial(\omega_{\mathfrak{a}_\alpha})\Psi_{A_\alpha}(\gamma)$.

Démonstration de (*). Si $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a},\gamma) = \emptyset$ alors la fonction Ψ_A est nulle en $\gamma_\alpha(t)$ pour $0 <\mid t \mid< \varepsilon$ et donc $\partial(\omega_\mathfrak{a})\Psi_A$ se prolonge continument par 0 en γ.

Supposons maintenant que $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a},\gamma) \neq \emptyset$. On fixe $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a},\gamma)$. Comme la fonction $\Theta(\mathbb{X}_y,\lambda,y,\psi_y)_{/\mathbb{X}_{y\ reg}}$ est nulle en dehors de $exp\ i\mathfrak{h}_y.y$, on peut supposer que $h.\gamma \in exp\ i(h.\mathfrak{a}).y$. On pose $\mathfrak{b} = Ad(h)\mathfrak{a}$ et $\delta = h.\alpha$. La racine δ est donc une racine réelle de $\mathfrak{b}_\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}$.

On pose $\omega_{\mathfrak{b},y} = \prod\limits_{\beta\in\Delta^+_{\mathfrak{b},y}} H_\beta$ et $P = \prod\limits_{\beta\in\Delta^+_\mathfrak{b}-\Delta^+_{\mathfrak{b},y}} H_\beta$ de telle sorte que $\omega_\mathfrak{b} = \omega_{\mathfrak{b},y}P$. Le polynome P est invariant sous l'action du groupe de Weyl $W_{G_y}(\mathfrak{b}_\mathbb{C})$. Soit $\Gamma_{\mathfrak{b},\mathfrak{t}}$ l'isomorphisme de $S(\mathfrak{b}_\mathbb{C})^{W_{G_y}(\mathfrak{b}_\mathbb{C})}$ dans $S(\mathfrak{t}_\mathbb{C})^{W_{G_y}(\mathfrak{t}_\mathbb{C})}$. On a alors

$$\partial(P)(\Delta_{B_y}\Theta(\mathbb{X}_y,\lambda,y,\psi_y)_{/B_y}) = \Gamma_{\mathfrak{b},\mathfrak{t}}(P)(i\lambda)(\Delta_{B_y}\Theta(\mathbb{X}_y,\lambda,y,\psi_y))_{/B_y}$$

On pose

$$F_h(t) = \partial\omega_{\mathfrak{b},y}(\varepsilon(\mathfrak{b},y)\Delta_{B_y}\Theta(\mathbb{X}_y,\lambda,y,\psi_y))(h.\gamma_\alpha(t))$$

de telle sorte que $\Psi_A(\gamma_\alpha(t)) = \xi_{\rho_\psi}(y)\Gamma_{\mathfrak{b},\mathfrak{t}}(P)(i\lambda) \sum\limits_{h\in H_y\backslash\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a},\gamma)} F_h(t)$.

On a vu précédemment que la fonction $\varepsilon(\mathfrak{b},y)$ est une fonction localement constante sur $(B_y)_{R-reg}$. Donc, pour tout $t \neq 0$ suffisamment petit, on a

$$F_h(t) = \varepsilon(\mathfrak{b},y)(h.\gamma_\alpha(t))\partial\omega_{\mathfrak{b},y}(\Delta_{B_y}\Theta(\mathbb{X}_y,\lambda,y,\psi_y))(h.\gamma_\alpha(t))$$

1^{er}*cas :* $\delta \notin \Delta_{\mathfrak{b},y}$. La fonction $\partial\omega_{\mathfrak{b},y}(\Delta_{B_y}\Theta(\mathbb{X}_y,\lambda,y,\psi_y))$ est continue au point γ par la propriété (D2).

D'autre part, on a supposé que $h.\gamma = exp\ iX.y$ avec $X \in \mathfrak{b}$. On a donc $h.\gamma_\alpha(t) = exp\ i(tH_\delta + X).y$. Vue l'hypothèse sur δ, on a $\xi_\delta(y) = -1$. Comme $\xi_\delta(exp\ iX.y) = 1$ on a $e^{2i\delta(X)} = -1$ ce qui est équivalent à $\delta(X) \in \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$. On en déduit que pour $t \neq 0$ voisin de 0, on a

$$\varepsilon(\mathfrak{b},y)(h.\gamma_\alpha(t)) = \xi_{\rho_\mathfrak{b}-\rho_{\mathfrak{b},y}}(y) \prod_{\beta\in\Delta^+_{\mathfrak{b},R},\xi_\beta(y)=-1} signe(cos\beta(tH_\delta + X))$$

Soit β est une racine réelle de $\mathfrak{b}_\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que $\xi_\beta(y) = -1$. Si $\beta \neq \delta$ alors on a $\xi_\beta(h.\gamma) \neq 1$ et donc $e^{2i\beta(X)} \neq -1$. On en déduit que pour t suffisamment petit, on a $cos\beta(tH_\delta + X)cos\beta(X) > 0$ et $tsin\delta(X)cos\delta(tH_\delta + X) < 0$. On obtient donc $\varepsilon(\mathfrak{b},y)(h.\gamma_\alpha(t)) = -\varepsilon(\mathfrak{b},y)(h.\gamma_\alpha(-t))$ et par conséquent on a $\lim\limits_{t\to 0^+} F_h(t) = -\lim\limits_{t\to 0^-} F_h(t)$.

Or, comme $\delta \notin \Delta^+(\mathfrak{h}_y, \mathfrak{b})$, la réflexion s_δ ne se réalise pas dans H_y. L'élément $s_\delta h = hs_\alpha$ envoie γ sur $h.\gamma$ et il ne représente pas le même élément que h dans $H_y \setminus \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a}, \gamma)$. Par ce qui précède, on a

$$\lim_{t\to 0^+}(F_h(t) + F_{hs_\alpha}(t)) = \lim_{t\to 0^+}(F_h(t) + F_h(-t)) = 0 = \lim_{t\to 0^-}(F_h(t) + F_{hs_\alpha}(t))$$

$\underline{2^{ieme} cas :}$ $\delta \in \Delta^+_{\mathfrak{b},y}$.

La fonction $\varepsilon(\mathfrak{b}, y)(h.\gamma_\alpha(t))$ est continue en $t = 0$ et la fonction $\partial\omega_{\mathfrak{b},y}(\Delta_{B_y}\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y))$ est continue au point $h.\gamma$ par la propriété (D3).

On a donc prouvé l'assertion (*) . Notons $\mathcal{A}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a}, \gamma)$ l'ensemble des $h \in H$ tels que $h.\alpha \in \Delta(\mathfrak{h}_y, h.\mathfrak{a})$ et $h.\gamma \in exp\ i(h.\mathfrak{a}).y$. On a prouvé de plus que:

$$(***) \quad (\partial\omega_{\mathfrak{a}}\Psi_A)(\gamma) = \xi_{\rho_\psi}(y)\Gamma_{\mathfrak{b},\mathfrak{t}}(i\lambda) \sum_{h\in H_y\setminus \mathcal{A}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a},\gamma)} \varepsilon(h.\mathfrak{a}, y)\partial\omega_{h.\mathfrak{a},y}(\Delta_{(h.A)_y}\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y))(h.\gamma)$$

<u>Démonstration de (**).</u>

On garde les notations précédentes. On suppose que $\mathcal{A}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a}, \gamma) \neq \emptyset$. Soit $h \in \mathcal{A}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a}, \gamma)$. On peut écrire $y = hexp\ iX.\gamma$ avec $X \in \mathfrak{a}$. Comme $\xi_\alpha(\gamma) = 1$ et $h.\alpha \in \Delta_{h.\mathfrak{a},y}$, on obtient $\xi_\alpha(Exp\ X) = 1$ ce qui est équivalent à $\alpha(X) \in \pi\mathbb{Z}$. D'après ([H2] proposition 3.9), deux cas sont possibles: soit il existe $X_0 \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_\alpha$ tel que $Exp\ X = Exp\ X_0$, soit on est dans la situation suivante:

$Exp\ X = Exp\ (X_0 + \frac{\pi}{2}H_\alpha)$ avec $X_0 \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_\alpha$ et pour tout $Z \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$, on a $\alpha(Z) \neq \pi$. Or d'après ([H2] démonstration du théorème 6.3, 2ième cas), dans ce deuxième cas on a

$$\partial(\omega_{h.\mathfrak{a},y})(\Delta_{(h.A)_y}\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y))(h.\gamma) = 0$$

Donc dans la somme (***) définissant Ψ_A, seuls sont à prendre en compte les $h \in \mathcal{A}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a}, \gamma)$ tels qu'il existe $X \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_\alpha$ vérifiant $hexp\ iX.\gamma = y$. Or il est clair qu'un tel h est un élément de $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a}_\alpha, \gamma)$ tel que $h.\gamma \in (exp\ ih.\mathfrak{a}_\alpha).y$.

Soit $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a}_\alpha, \gamma)$ tel que $h.\gamma \in (exp\ ih.\mathfrak{a}_\alpha).y$. On rappelle que c_α est la transformation de Cayley relative à α (voir **??**). Soit $\beta = c_\alpha.\alpha$. C'est une racine imaginaire non compacte de $\mathfrak{a}_{\alpha,\mathbb{C}}$ et on a $\xi_\beta(\gamma) = 1$. Comme on peut écrire $hexp\ iX.\gamma = y$ avec $X \in \mathfrak{a}_\alpha$, on en déduit que $\xi_\beta(Exp\ X) = \xi_{h.\beta}(y)$. Comme β est imaginaire alors $\xi_\beta(Exp\ X)$ est un réel strictement positif. Par conséquent, on a $\xi_{h.\beta}(y) = 1$ et $\beta(X) = 0$. La racine $h.\beta$ est donc une racine de $(h.\mathfrak{a}_\alpha)_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_y$. On en déduit que $h.\alpha \in \Delta_{h.\mathfrak{a},y}$. Par le choix de X, il est clair que $h.\gamma \in exp\ ih.(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_\alpha).y$.

On a donc prouvé que l'application identité est une bijection entre l'ensemble des $h \in \mathcal{A}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a}, \gamma)$ tels que $y \in hexp\ i(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_\alpha).\gamma$ et l'ensemble des $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a}_\alpha, \gamma)$ tels que $y \in hexp\ i(\mathfrak{a}_\alpha).\gamma$ En utilisant la propriété (**) appliquer à $\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)$ aux points $h.\gamma$, on obtient ainsi

$\partial(\omega_{\mathfrak{a}})(\Psi_A)(\gamma)$

$$= \xi_{\rho_\psi}(y)\Gamma_{\mathfrak{b},\mathfrak{t}}(P)(i\lambda) \sum_{h\in H_y\setminus \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a}_\alpha,\gamma)} \varepsilon(h.\mathfrak{a}, y)(h.\gamma)\partial(\omega_{h.\mathfrak{a}_\alpha,y})(\Delta_{(h.A_\alpha)_y}\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y))(h.\gamma)$$

Pour avoir le résultat (**) pour Θ, il suffit donc de prouver que pour tout $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a}_\alpha, \gamma)$ tel que $h.\gamma \in exp\, ih.(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_\alpha).y$, on a

$$\varepsilon(h.\mathfrak{a}, y)(h.\gamma) = \varepsilon(h.\mathfrak{a}_\alpha, y)(h.\gamma)$$

On écrit $hexp\, iX.\gamma = y$ avec $X \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_\alpha$. On a alors

$$\varepsilon(h.\mathfrak{a}, y)(h.\gamma) = \xi_{\rho_{h.\mathfrak{a}} - \rho_{h.\mathfrak{a},y}}(y) \prod_{\beta \in \Delta^+_{h.\mathfrak{a},R}, \xi_\beta(y) = -1} signe(cos\beta(h.X)$$

Comme $\xi_{h.\alpha}(y) = 1$, on a $\xi_{\rho_{h.\mathfrak{a}} - \rho_{h.\mathfrak{a},y}}(y) = \xi_{\rho_{h.\mathfrak{a}_\alpha} - \rho_{h.\mathfrak{a}_\alpha,y}}(y)$. D'autre part, les racines réelles de $h.\mathfrak{a}_\alpha$ sont les racines réelles de $h.\mathfrak{a}$ orthogonales à $h.\alpha$. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des racines réelles positives β de $h.\mathfrak{a}$ telles que $\xi_\beta(y) = -1$ et $\beta(H_{h.\alpha}) \neq 0$. Il faut donc prouver que $\prod_{\beta \in \mathcal{R}} signe(cos\beta(X)) = 1$. Soit $\beta \in \mathcal{R}$. Soit $\delta \in \{s_{h.\alpha}(\beta), -s_{h.\alpha}(\beta)\} \cap \Delta^+_{h.\mathfrak{a}}$. C'est une racine de $\mathcal{R}$ distincte de β telle que $cos\; \beta(h.X) cos\; \delta(h.X) > 0$. On en déduit donc le résultat voulu.

Lorsque $\mathcal{A}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a}, \gamma) = \emptyset$, alors $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\mathfrak{a}_\alpha, \gamma) = \emptyset$ par ce qui précède. On a donc dans ce cas $\partial(\omega_\mathfrak{a})(\Psi_A)(\gamma) = \partial(\omega_{\mathfrak{a}_\alpha})(\Psi_{A_\alpha})(\gamma) = 0$

Ceci achève la démonstration de (**).

Calcul de $\Theta_{/T_{reg}}$. Soit $x \in T_{reg}$. On écrit $x = exp\; iX.u$ avec $X \in \mathfrak{t}$ et $u \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}$. On a $\Theta(x) \neq 0$ si et seulement si $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x) \neq \emptyset$. Soit $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$. On a alors $h.\mathfrak{t} \in Car(\mathfrak{h}_y)$. Or $\mathfrak{t}$ et $h.\mathfrak{t}$ sont alors deux sous-algèbres de Cartan fondamentales de $\mathfrak{h}_y$. Elles sont donc H_y conjuguées. Donc les ensembles $W_{H_y}(\mathfrak{t}) \setminus W_H(\mathfrak{t})$ et $H_y \setminus \{h \in H; h.\mathfrak{t} \in Car(\mathfrak{h}_y)\}$ sont donc isomorphes. Maintenant comme $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$, on a $u \in W_H(\mathfrak{t}).y$.

Donc, si $x \notin exp\; i\mathfrak{t}\; W_H(\mathfrak{t}).y$, alors $\Theta(x) = 0$. Par H-invariance, il suffit de connaitre $\Theta(x)$ pour $x = exp\; iX.y$. Soit $h \in W_H(\mathfrak{t})$ tel que $h.x \in exp\; i\mathfrak{t}.y$. On a alors $h \in W_H^y(\mathfrak{t})$. On obtient ainsi

$$\Theta(x) = \xi_{\rho_\psi}(y) \mid D_\mathbb{X}(x) \mid^{-1/2} \sum_{h \in W_{H_y}(\mathfrak{t}) \setminus W_H^y(\mathfrak{t})} \Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)(h.x) \mid D_{\mathbb{X}_y}(h.x) \mid^{1/2}$$

$$= \xi_{\rho_\psi}(y) \mid D_\mathbb{X}(x) \mid^{-1/2} \sum_{h \in W_{H_y}(\mathfrak{t}) \setminus W_H^y(\mathfrak{t})} \Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, eH_y, \psi_y)(Exp\;(h.X + Y_h)) \mid D_{\mathbb{X}_y}(h.x) \mid^{1/2}$$

$$= \xi_{\rho_\psi}(y) \mid D_\mathbb{X}(x) \mid^{-1/2} \sum_{h \in W_{H_y}(\mathfrak{t}) \setminus W_H^y(\mathfrak{t})} \frac{\sum_{w \in W_{H_y}(\mathfrak{t})} \varepsilon(w) e^{i<w\lambda, h.X + Y_h>} \mid D_{\mathbb{X}_y}(h.x) \mid^{1/2}}{\prod_{\alpha \in \psi_y}(1 - \xi_{-\alpha}(Exp\;(h.X + Y_h)) \xi_{\rho_{\psi_y}}(Exp\;(h.X + Y_h)}$$

Maintenant, on a

$$\frac{\mid D_{\mathbb{X}_y}(h.x) \mid^{1/2}}{\prod_{\alpha \in \psi_y}(1 - \xi_{-\alpha}(Exp\;(h.X + Y_h)) \xi_{\rho_{\psi_y}}(Exp\;(h.X + Y_h))} = \frac{\mid D_{\mathbb{X}_y}(h.x) \mid^{1/2}}{\prod_{\alpha \in \psi_y}(1 - \xi_{-\alpha}(h.x)) \xi_{\rho_{\psi_y}}(h.x) \xi_{\rho_{\psi_y}}(y)}$$

$= b_{\psi_y}(h.x) = b_\psi(h.x) = \varepsilon(h) b_\psi(x)$.

On obtient donc

$$\Theta(x) = \frac{\xi_{\rho_\psi}(y) \mid D_{\mathbb{X}}(x) \mid^{-1/2}}{b_\psi(x)} \sum_{h \in W_{H_y}(\mathfrak{t}) \backslash W_H^y(\mathfrak{t})} \varepsilon(h) \sum_{w \in W_{H_y}(\mathfrak{t})} \varepsilon(w) e^{i<w\lambda, h.X+Y_h>}$$

On en déduit le résultat voulu.

Ceci achève la démonstration du théorème.

∎

3 Pôles des fonctions généralisées $\Theta(\lambda, y, \psi)$

On fixe comme dans la partie précédente une sous-algèbre de Cartan de type compact $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{h}$. Soit $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^* + t_{I-reg}^*$, soit $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{t}}$ et ψ un sytème positif de racines de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$.

Le but de cette partie est d'étudier la dépendance en λ des fonctions généralisées $\Theta(\lambda, y, \psi)$ construites dans le paragraphe précédent. Les résultats et méthodes utilisées sont analogues à ceux décrits par A. Bouaziz lors de son étude des intégrales orbitales sur un groupe réel de Lie réductif connexe ([B2] paragraphe 6).

Soit $\mathfrak{t}_{I-reg}^*(\mathbb{C})$ l'ensemble des $\mu \in \mathfrak{t}_{I,\mathbb{C}}^*$ tels que la partie réelle $Re(\mu)$ de μ soit dans $\mathfrak{t}_{I-reg}^*$.

Suivant [C-D], on dit qu'une fonction holomorphe f sur un ouvert dense de $\mathbb{C}^n$ et à valeurs dans un espace de Fréchet est méromorphe sur $\mathbb{C}^n$ si pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, il existe un voisinage V_x de x et une fonction holomorphe g_x de V_x à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que fg_x se prolonge en une fonction holomorphe sur V_x.

Théorème 3.1 *(1) Soit $\lambda_0 \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^*$. Soit $\lambda \in \mathfrak{t}_{I-reg}^*$. La fonction $\lambda \to \Theta(\lambda_0 + \lambda, y, \psi)$ se prolonge en une fonction holomorphe de $\mathfrak{t}_{I-reg}^*(\mathbb{C})$ dans l'espace des fonctions généralisées sur $\mathbb{X}$. La fonction généralisée $\Theta(\lambda_0 + \lambda, y, \psi)$ est sphérique et elle vérifie les propriétés du théorème* **??**.

(2) Soit $\lambda_0 \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^*$. Soit ψ_y l'ensemble des $\alpha \in \psi$ tels que $\xi_\alpha(y) = 1$. Alors la fonction $\lambda \to \prod_{\alpha \in \psi_y} (1 - e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)}) \Theta(\lambda_0 + \lambda, y, \psi)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathfrak{t}_{I,\mathbb{C}}^*$. De plus pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, c'est une fonction holomorphe sur l'ensemble des $\mu \in \mathfrak{t}_{I,\mathbb{C}}^*$ dont la partie imaginaire $\mathcal{I}m(\mu)$ vérifie: pour toute racine $\alpha \in \psi_y$ on a $\mid \mathcal{I}m(\mu)(H_\alpha) \mid < \varepsilon$.

En particulier, la fonction $\lambda \to \prod_{\alpha \in \psi_y} (1 - e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)}) \Theta(\lambda_0 + \lambda, y, \psi)$ se prolonge analytiquement sur $\mathfrak{t}_I^*$.

Le reste de cette partie consiste en la démonstration de ce théorème.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on fixe un système positif ψ de racines de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$. Soit $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{t}}$.

Soit $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$ et soit A le sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ associé. On fixe $x \in G$ tel que $x.\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. Soit U une composante connexe de l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}$ tels que $exp\ iX.y \in A_{R-reg}$. Par **??**, si $a \in A_{reg}$ avec $\Theta(\lambda, y, \psi)(a) \neq 0$ alors $\mathfrak{a}$ est H-conjuguée à une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}_y$. On suppose maintenant que $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h}_y)$. Dans ce cas, on a $\Theta(\lambda, y, \psi)(a) \neq 0$ si et seulement si $a \in W_H(\mathfrak{a})exp\ i\mathfrak{a}.y$. Comme la fonction généralisée $\Theta(\lambda, y, \psi)$ est sphérique, le théorème **??** (D1) et (D2) assure que pour tout $w \in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, il existe des fonctions $d_y(w, U, \lambda)$ de λ telles que, pour tout $X \in U$ l'on ait
3.2

$$\Theta(\lambda, y, \psi)(exp\ iX.y) = \frac{\sum_{w \in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} d_y(w, U, \lambda) e^{i<wx.\lambda, X>}}{\prod_{\alpha \in x.\psi}(1 - \xi_{-\alpha}(exp\ iX.y))\xi_{\rho_{x.\psi}}(exp\ iX.y)}$$

Nous allons étudier les fonctions $d_y(w, U, \lambda)$.

On suppose tout d'abord que $y = eH$.

Soit G_1 le groupe dérivé de G et soit $H_1 = H \cap G_1$. On pose $\mathbb{X}_1 = G_1/H_1$. Soit $\lambda_1 = \lambda_{/\mathfrak{t} \cap [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]}$ et soit λ_0 l'élément de $\mathfrak{c}^*$ tel que $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$. D'après ([H4] lemme 5.3), la fonction généralisée $\Theta(\lambda, eH, \psi)$ est le prolongement de la fonction généralisée $\Theta(\mathbb{X}_1, \lambda_1, eH, \psi)$, définie sur $\mathbb{X}_1$ par le théorème **??**, par le caractère χ_{λ_O} du centre de G défini par λ_0. Rappelons la définition de ce prolongement.

Soit $g_1, \dots g_p$ un système de représentants de $G_1 \cap (ZH)/H_1$ dans G_1. Pour tout $j \in \{1, \dots p\}$, il existe donc $h_j \in H$ et z_j dans le centre de G tels que $g_j = h_j z_j$. Pour $X \in \mathfrak{h}_{reg}$, on écrit $X = X_0 + X_1$ avec $X_0 \in \mathfrak{c}$ et $X_1 \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. On a alors :

$$\Theta(\lambda, eH, \psi)(Exp\ X) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \Theta(\mathbb{X}_1, \lambda_1, eH, \psi)(g_j^{-1} exp\ iX_1.g_k)\chi_{\lambda_0}(exp\ iX_0 z_j z_k^{-1})$$

Il suffit donc de prouver le théorème pour la fonction généralisée $\Theta(\mathbb{X}_1, \lambda_1, eH, \psi)$.

On suppose donc maintenant que <u>G est semi-simple</u>. On a alors $\Gamma_{\mathfrak{t}} = \{0\}$ et $\mathfrak{t}_I = \mathfrak{t}$.

3.3 Dans toute la suite de ce paragraphe on adoptera les notations suivantes. Soit ω la composante connexe de 0 de l'ensemble des $X \in \mathfrak{h}$ tels que $J(X) \neq 0$. Soit $\pi_0(\mathfrak{a}_{R-reg})$ l'ensemble des composantes connexes de $\mathfrak{a}_{R-reg}$. On fixe $\mathcal{C} \in \pi_0(\mathfrak{a}_{R-reg})$.

Soit Δ_R le système de racines réelles de $\mathfrak{a}$. Par ([H2] (3.3) et lemme 3.4), on a $\Gamma_{\mathfrak{a}} = \sum_{\alpha \in \Delta_R} \pi \mathbb{Z} H_\alpha$. Soit W_R le groupe de Weyl engendré par les réflexions s_α pour $\alpha \in \Delta_R$.

Soit $U \in \pi_0(\mathfrak{a}_{R-reg})$. Il existe un unique élément u de W_R tel que $u.U = \mathcal{C}$. On pose alors $\varepsilon_R(U) = \varepsilon(u)$.

La fonction généralisée $\Theta(\lambda, eH, \psi)$ s'exprime facilement en terme de transformée de Fourier d'orbites: soit $\beta_{H.\lambda}$ la mesure de Liouville de l'orbite coadjointe $H.\lambda$ et soit $\hat{\beta}_{H.\lambda}$ la transformée de Fourier de cette mesure. Soit w_λ l'élement de $W_G(\mathfrak{t})$ tel que $w_\lambda.\psi$ soit l'ensemble des $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{t}}$ telles que $i\lambda(H_\alpha) > 0$. On a, pour $x \in \mathbb{X}_{reg}$,

$$\Theta(\lambda, eH, \psi)(x) = \frac{(-1)^{|\psi_{Inc}|}}{(2i)^{|\psi|}} \varepsilon(w_\lambda) \sum_{\{X \in \mathfrak{h}_{reg}, ExpX = x\}} \hat{\beta}_{H.\lambda}(X) \mid J(X) \mid^{-1/2}$$

D'après ([V] thm. I.7.7), pour tout $w \in W_G(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ et pour toute chambre de Weyl $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{t}^*_{reg}$, il existe des constantes $c(w,\mathcal{F},\mathcal{C})$ telles que pour tout $X \in \mathcal{C}$, l'on ait

$$\hat{\beta}_{H.\lambda}(X) = \varepsilon(w_\lambda)\frac{\sum_{w\in W_G(\mathfrak{a}_\mathbb{C})} c(w,\mathcal{F},\mathcal{C})e^{i<wx.\lambda,X>}}{\prod_{\alpha\in x.\psi}\alpha(X)}$$

De plus les constantes $c(w,\mathcal{F},\mathcal{C})$ vérifient la propriété suivante (car la distribution $\hat{\beta}_{H.\lambda}$ est tempérée):

3.4 si $c(w,\mathcal{F},\mathcal{C}) \neq 0$ alors pour tout $X \in \mathcal{C}$ et pour tout $\lambda \in \mathcal{F}$, on a

$$Re\ i < wx.\lambda, X > \leq 0$$

D'autre part, soit V une composante connexe de l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}$ tels que $Exp\ X \in A_{R-reg}$. Il existe alors un unique élément $\gamma_V \in \Gamma_\mathfrak{a}$ et un unique élément $w_0 \in W_R$ tels que $w_0.V = \mathcal{C}\cap\omega + \gamma_V$. Par H-invariance, on a $\Theta(\lambda, eH, \psi)(Exp\ X) = \Theta(\lambda, eH, \psi)(Exp(w_0.X - \gamma_V))$ et donc on a

$$d(w,V,\lambda) = d(w_0w, \mathcal{C}\cap\omega, \lambda)e^{-i<w_0wx.\lambda,\gamma_V>}$$

Dans ce qui suit, on prendra $V = \mathcal{C}\cap\omega$ et on posera $d(w,\mathcal{C}\cap\omega,\lambda) = d(w,\mathcal{C},\lambda)$. Nous allons étudier $d(w,\mathcal{C},\lambda)$.

Soit $X_0 \in \mathcal{C}\cap\omega$. D'après ([H2] (5.8)), pour tout $w \in W_G(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$, on a

3.5 $$d(w,\mathcal{C},\lambda) = (-1)^{|\psi_{Inc}|}\sum_{U\in\pi_0(\mathfrak{a}_{R-reg})}\varepsilon_R(U)c(w,\mathcal{F},U)\sum_{\gamma\in\Gamma_\mathfrak{a},(\gamma+X_0)\in U} e^{i<wx.\lambda,\gamma>}$$

cette série étant absolument convergente d'après ([H2] lemme 5.7).

Remarques:

(1) Les fonctions $d(w,\mathcal{C},\lambda)$ ne dépendent pas du choix de $\mathcal{F}$. En effet, la fonction généralisée $\Theta(\lambda, eH, \psi)$ est uniquement déterminée par les deux propriétés suivantes:

(i) pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a $z.\Theta(\lambda, eH, \psi) = \gamma_\mathfrak{t}(z)(i\lambda)\Theta(\lambda, eH, \psi)$,

(ii) si $t \in T_{reg} - (Exp\ \mathfrak{t})_{reg}$ alors $\Theta(\lambda, eH, \psi)(t) = 0$ et pour $x = Id$, on a

$d(w,\mathfrak{t},\lambda) = 0$ si $w \notin W_H(\mathfrak{t})$

$d(w,\mathfrak{t},\lambda) = \varepsilon(w)$ si $w \in W_H(\mathfrak{t})$

(2) La fonction $d(w,\mathcal{C},\lambda)$ dépend également du choix de x tel que $x.\mathfrak{t}_\mathbb{C} = \mathfrak{a}_\mathbb{C}$. Notons la $d(x,w,\mathcal{C},\lambda)$. Soit x' un autre élément de G tel que $x'.\mathfrak{t}_\mathbb{C} = \mathfrak{a}_\mathbb{C}$. Il existe donc $w_0 \in W_G(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ tel que $x' = w_0x$. On a alors $d(x',w,\mathcal{C},\lambda) = \varepsilon(w_0)d(x,ww_0,\mathcal{C},\lambda)$. La dépendance de ce choix de x n'interviendra pas dans les résultats que nous allons démontrer.

On fixe une chambre de Weyl $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{t}^*_{reg}$ et on note Σ le système positif de racines de $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ défini par le choix de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire l'ensemble des racines α de $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ telles que, pour tout $\mu \in \mathcal{F}$, l'on ait $i\mu(H_\alpha) > 0$.

On note $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{reg}(\mathbb{C})$ tel que $Re(\lambda) \in \mathcal{F}$.

Lemme 3.6 *On garde les notations précédentes.*

(i) La fonction $\lambda \to d(w, \mathcal{C}, \lambda)$ *se prolonge holomorphiquement à* $\mathfrak{t}^*_{reg}(\mathbb{C})$ *et pour tout* $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{reg}(\mathbb{C})$*, la fonction généralisée* $\Theta(\lambda, eH, \psi)$ *définie par* **??** *vérifie les propriétés du théorème* **??***,*

(ii) La fonction $\lambda \to \prod_{\alpha\in\Sigma}(1 - e^{-i<\lambda,\pi H_\alpha>})d(w, \mathcal{C}, \lambda)$ *est bornée sur toute partie relativement compacte de* $\mathfrak{t}^*_{reg}(\mathbb{C})$ *et il existe une constante strictement positive* C *telle que, pour tout* $\lambda \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ *et pour tout* $X \in \mathcal{C} \cap \omega$*, l'on ait*

$$| \prod_{\alpha\in\Sigma}(1 - e^{-i<\lambda,\pi H_\alpha>})d(w, \mathcal{C}, \lambda)e^{i<wx.\lambda,X>} |< C$$

Démonstration: Les constantes $c(w, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ ne dépendent que de $\mathcal{F}$ et non pas de λ. Comme pour tout $w \in W_G(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$, pour tout $\gamma \in \Gamma_\mathfrak{a}$ et pour tout $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{reg}(\mathbb{C})$, on a $Re < iwx.\lambda, \gamma >=< iwx.\mathcal{R}e\lambda, \gamma >$, la série définissant $d(w, \mathcal{C}, \lambda)$ (voir formule **??**) reste absolument convergente pour tout $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{reg}(\mathbb{C})$. Pour $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{reg}(\mathbb{C})$, on définit $d(w, \mathcal{C}, \lambda)$ par la formule **??** et la fonction $\Theta(\lambda, eH, \psi)$ par **??**. On obtient alors facilement l'assertion (i).

Par la propriété (**??**), si $c(w, \mathcal{F}, U) \neq 0$ alors, pour tout $\nu \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ et pour tout $X \in U$, on a $\mathcal{R}e\ i < wx.\nu, X >\leq 0$.

Soit N le cardinal de l'ensemble des $U \in \pi_0(\mathfrak{a}_{R-reg})$ telles que $c(w, \mathcal{F}, U) \neq 0$. On pose $C_1(w) = N \sup_{U\in\pi_0(\mathfrak{a}_{R-reg})} | c(w, \mathcal{F}, U) |$. On obtient ainsi

$$| d(w, \mathcal{C}, \lambda) |\leq C_1(w) \sum_{\gamma\in\Gamma_\mathfrak{a};Re<iwx.\lambda,\gamma+X_0>\leq 0} e^{\mathcal{R}e<iwx.\lambda,\gamma>}$$

On suppose maintenant que $\lambda \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$. Soit $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ les racines simples de Σ et soit $\omega_1 \ldots \omega_k$ les poids fondamentaux relatifs à cette base, c'est-à-dire $\omega_j(H_{\alpha_l}) = \delta_{j,l}$ où $\delta_{j,l}$ est le symbole de Krönecker.

On a alors $Re\lambda = i\sum_{j=1}^k t_j\omega_j$ où les t_j sont des réels strictement négatifs et pour tout $\gamma \in \Gamma_\mathfrak{a}$, on a $x^{-1}w^{-1}\gamma \in \sum_{j=1}^k \pi\mathbb{Z}H_{\alpha_j}$.

Soit $j \in \{1, \ldots, k\}$. Soit $r_{j,w}$ le plus grand entier tel que, pour tout $X_0 \in \mathcal{C} \cap \omega$, l'on ait $\pi r_{j,w} \leq -Re < \omega_j, x^{-1}w^{-1}(X_0) >$. Donc, si $\gamma \in \Gamma_\mathfrak{a}$ est tel que pour tout $X_0 \in \mathcal{C} \cap \omega$ l'on ait $Re\ i < \lambda, x^{-1}w^{-1}(X_0 + \gamma) >\leq 0$ alors on peut écrire

$x^{-1}w^{-1}.\gamma = \sum_{j=1}^k \pi n_j H_{\alpha_j}$ avec $n_j \in \mathbb{Z}$ et $n_j \leq r_{j,w}$.

On obtient ainsi

$$| d(w, \mathcal{C}, \lambda) |\leq C_1(w) \sum_{(n_1\ldots,n_k)\in\mathbb{Z}^k,\ n_j\leq r_{j,w}} e^{i<Re\ \lambda,\pi n_j H_{\alpha_j}>}$$

$$\leq C_1(w) \prod_{j=1}^k e^{i\pi r_{j,w}<\mathcal{R}e\ \lambda,H_{\alpha_j}>} \sum_{n_j\leq 0} e^{i\pi n_j<\mathcal{R}e\ \lambda,H_{\alpha_j}>}$$

$$\leq C_1(w)\frac{\prod_{j=1}^k e^{i\pi r_{j,w}<\mathcal{R}e\ \lambda, H_{\alpha_j}>}}{\prod_{j=1}^k(1-e^{-i\pi<\mathcal{R}e\ \lambda, H_{\alpha_j}>})}$$

On obtient la première partie de l'assertion (ii).

Maintenant, pour $X \in \mathcal{C}\cap\omega$, on a $\sum_{j=1}^k i\pi r_{j,w}(Re\ \lambda(H_{\alpha_j}) + i < wx.\mathcal{R}e\ \lambda, X >) = -\sum_{j=1}^k t_j[\pi r_{j,w} + \mathcal{R}e\ \omega_j(x^{-1}w^{-1}.X)] \leq 0.$

Par conséquent, on a

$$\mid d(w,\mathcal{C},\lambda)e^{i<wx\lambda,X>} \mid\leq C_1(w)\frac{1}{\prod_{j=1}^k(1-e^{-i\pi<Re\ \lambda, H_{\alpha_j}>})}$$

On note $C = \sup_{w\in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} C_1(w)$. On obtient ainsi

$$\mid \prod_{j=1}^k(1-e^{-i\pi<Re\ \lambda, H_{\alpha_j}>})d(w,\mathcal{C},\lambda)e^{i<wx\lambda,X>} \mid\leq C$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

■

Lemme 3.7 *Soit $w \in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. Soit $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ les racines simples de Σ. Alors il existe une fraction rationnelle $\mathcal{R}_{w,\mathcal{C}}$ en k variables telle que, pour tout $\lambda\in\mathfrak{t}^*_{reg}(\mathbb{C})$ l'on ait*

$$d(w,\mathcal{C},\lambda) = \mathcal{R}_{w,\mathcal{C}}(e^{i\pi(\mathcal{R}e\lambda)(H_{\alpha_1})},\dots,e^{i\pi(\mathcal{R}e\lambda)(H_{\alpha_k})})$$

Démonstration: On démontre le résultat par récurrence sur $dim\ \mathfrak{a}_R$. Si $dim\ \mathfrak{a}_R = 0$ alors la sous-algèbre $\mathfrak{a}$ est H-conjuguée à $\mathfrak{t}$. On peut donc supposer que $\mathfrak{a}=\mathfrak{t}$. Dans ce cas, on a $\mathcal{C}=\mathfrak{t}$ et $d(w,\mathfrak{t},\lambda)=\varepsilon(w)$ si $w\in W_H(\mathfrak{t})$ et $d(w,\mathfrak{t},\lambda)=0$ sinon. Le lemme est donc immédiat dans ce cas.

On suppose $dim\ \mathfrak{a}_R > 0$. Soit ϕ^+ le système de racines réelles positives de $\mathfrak{a}$ déterminée par le choix de $\mathcal{C}$. Soit Π l'ensemble des racines simples de ϕ^+ et soit $\tilde{\alpha}$ la plus grande racine de ϕ^+. On reprend les notations de **??**. Soit $\mathcal{C}_\alpha$ la chambre de Weyl de $\mathfrak{a}_{\alpha,R-reg}$ définie par ϕ^+_α et soit $x_\alpha = c_\alpha x$ (on a $x_\alpha\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\alpha,\mathbb{C}}$). D'après ([H2] (6.9) et (6.13)), la condition (D3) du théorème **??** (conditions de recollement), se traduit par les relations suivantes:

(1) pour tout $\alpha\in\Pi$, alors $d(w,\mathcal{C},\lambda)-d(s_\alpha w,\mathcal{C},\lambda) = d(c_\alpha w c_\alpha^{-1},\mathcal{C}_\alpha,\lambda)-d(c_\alpha s_\alpha w c_\alpha^{-1},\mathcal{C}_\alpha,\lambda)$

(2) $d(w,\mathcal{C},\lambda)e^{i<wx.\lambda,\pi\ H_{\tilde{\alpha}}>} - d(s_{\tilde{\alpha}}w,\mathcal{C},\lambda) = f(\tilde{\alpha},\lambda)$ où la fonction $f(\tilde{\alpha},\lambda)$ est définie de la manière suivante:

si pour tout $X\in\Gamma_{\mathfrak{a}}$, on a $\tilde{\alpha}(X)\neq\pi$ alors $f(\tilde{\alpha},\lambda)=0$

sinon, il existe $Z_0 \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$ tel que $\tilde{\alpha}(Z_0) = \pi$ et $\pi H_{\tilde{\alpha}}/2 + Z_0 \in \overline{\mathfrak{a}_{\tilde{\alpha}} \cap \omega}$. Soit $\phi_{0,\tilde{\alpha}}$ le système de racines réelles positives de $\mathfrak{a}_{\tilde{\alpha}}$ défini comme suit: soit $\gamma \in \phi^+_{\tilde{\alpha}}$. Alors on a $\gamma \in \phi^+_{0,\tilde{\alpha}}$ si $\gamma(Z_0) = 0$ et $-\gamma \in \phi^+_{0,\tilde{\alpha}}$ si $\gamma(Z_0) = \pi$. Soit $\mathcal{C}_{0,\tilde{\alpha}}$ la chambre de Weyl de $\mathfrak{a}_{\tilde{\alpha},R-reg}$ définie par le choix de $\phi_{0,\tilde{\alpha}}$. ([H2](6.11))

Dans ce cas, on a $f(\tilde{\alpha}, \lambda) = d(c_{\tilde{\alpha}} w c_{\tilde{\alpha}}^{-1}, \mathcal{C}_{0,\tilde{\alpha}}, \lambda) - d(c_{\tilde{\alpha}} s_{\tilde{\alpha}} w c_{\tilde{\alpha}}^{-1}, \mathcal{C}_{0,\tilde{\alpha}}, \lambda) e^{i<wx.\lambda, \pi H_{\tilde{\alpha}} - Z_0>}$

Comme la fonction généralisée $\Theta(\lambda, eH, \psi)$ est l'unique fonction généralisée vérifiant (i) $z.\Theta(\lambda, eH, \psi) = \gamma_{\mathfrak{t}}(z)(i\lambda)\Theta(\lambda, eH, \psi)$ pour $z \in Z(\mathfrak{g})$ et (ii) si $x \in T_{reg} \setminus Exp(\mathfrak{t})$, alors $\Theta(\lambda, eH, \psi)(x) = O$ et $\Theta(\lambda, eH, \psi)(Exp\ X) = \frac{\sum_{w \in W_H(\mathfrak{t})} \varepsilon(w) e^{i<w\lambda, X>}}{\prod_{\alpha \in \psi}((1-\xi_{-\alpha}(Exp\ X))\xi_{\rho_\psi}(Exp\ X)}$, les fonctions $d(w, \mathcal{C}, \lambda)$ sont les uniques solutions du système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{cases} (0) \qquad \text{si } \mathfrak{a} = \mathfrak{t} \text{ alors } d(w, \mathfrak{t}, \lambda) = \begin{cases} \varepsilon(w) & \text{si } w \in W_H(\mathfrak{t}) \\ 0 & \text{si } w \notin W_H(\mathfrak{t}) \end{cases} \\ \left.\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\right\} \text{ définies ci-dessus} \\ (3) \qquad \text{pour tout } v \in W_H(\mathfrak{a}) \text{ alors } d(vw, v\mathcal{C}, \lambda) = \varepsilon(v) d(w, \mathcal{C}, \lambda) \end{cases}$$

Comme on a $x^{-1} w^{-1} H_{\tilde{\alpha}} \in \sum_{\beta \in \Sigma} \mathbb{Z} H_\beta$, en appliquant l'hypothèse de récurrence aux fonctions $d(c_\alpha w c_\alpha^{-1}, \mathcal{C}_\alpha, \lambda)$ pour $\alpha \in \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$, on obtient donc le résultat voulu. ■

Corollaire 3.8 *Soit Σ un système positif de racines de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors, pour tout $\alpha \in \Sigma$, il existe un entier $n_\alpha \in \mathbb{N}$ et des réels deux à deux distincts $c_{\alpha,1}, \ldots, c_{\alpha,n_\alpha}$ tels que pour tout $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{reg}(\mathbb{C})$, la fonction $\prod_{\alpha \in \Sigma} \prod_{j=1}^{n_\alpha} (e^{ic_{\alpha,j}} - e^{-i\pi<\lambda, H_\alpha>}) d(w, \mathcal{C}, \lambda)$ soit un polynôme en les $e^{i\pi<\lambda, H_\alpha>}$ pour $\alpha \in \Sigma$.*

En particulier, elle se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{C}}$.

Démonstration: La démonstration de ce corollaire est exactement la même que celle du corollaire 6.3.3 de [B2]. En effet celui-ci découle des lemmes 6.3.1 et 6.3.2 de [B2] qui sont les analogues des deux lemmes précédemment démontrés ici. ■

On ne suppose plus G semi-simple et on fixe $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{t}}$. On a vu précédemment que, pour tout U composante connexe de l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}$ tels que $exp\ iX.y \in A_{R-reg}$, il existe des fonctions $d_y(w, U, \lambda)$ telles que, pour tout $X \in U$, l'on ait

$$\Theta(\lambda, y, \psi)(exp\ iX.y)$$

$$= \frac{\sum_{w \in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} d_y(w, U, \lambda) e^{i<wx.\lambda, X>}}{\prod_{\alpha \in x.\psi}(1 - \xi_{-\alpha}(exp\ iX.y))\xi_{\rho_{x.\psi}}(exp\ iX.y)}$$

Corollaire 3.9 *Soit Σ comme précédemment et soit Σ_y l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\xi_\alpha(y) = 1$.*

(i) Soit $\lambda_0 \in \Gamma^*_{\mathfrak{t}}$. Alors la fonction $\lambda \to \Theta(\lambda_0 + \lambda, y, \psi)$ se prolonge en une fonction holomorphe de $\mathfrak{t}^*_{I-reg}(\mathbb{C})$ dans l'espace des fonctions généralisées sur $\mathbb{X}$. La fonction généralisée $\Theta(\lambda_0 + \lambda, y, \psi)$ est sphérique et elle vérifie les propriétés du théorème **??**.

(ii) Pour tout $\alpha \in \Sigma_y$ il existe un entier $n_\alpha \in \mathbb{N}$ et des réels deux à deux distincts $c_{\alpha,1}, \ldots, c_{\alpha,n_\alpha}$ tels que pour tout $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{reg}(\mathbb{C})$ et pour tout $w \in W_G(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$, la fonction $\prod_{\alpha\in\Sigma_y}\prod_{j=1}^{n_\alpha}(e^{ic_{\alpha,j}} - e^{-i\pi<\lambda,H_\alpha>})d_y(w,U,\lambda)$ soit un polynôme en les $e^{i\pi<\lambda,H_\alpha>}$ pour $\alpha \in \Sigma_y$.

Démonstration: On rappelle que pour $\gamma \in \mathbb{X}_{reg}$, on a

$$\Theta(\lambda,y,\psi)(\gamma) = \xi_{\rho_\psi}(y) \mid D_\mathbb{X}(\gamma) \mid^{-1/2} \sum_{h\in H_y\backslash\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\gamma)} \Theta(\mathbb{X}_y,\lambda,y,\psi_y)(h.\gamma) \mid D_{\mathbb{X}_y}(h.\gamma) \mid^{1/2}$$

et en particulier, la fonction $\Theta(\lambda,y,\psi)_{/\mathbb{X}_{reg}}$ est nulle en dehors de $(exp\ i\mathfrak{h}\ H.y)_{reg}$.

Soit $A \in Car(\mathbb{X})$ associé à $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$. Si pour tout $h \in H$, on a $h.\mathfrak{a} \notin \mathfrak{h}_y$, alors la fonction généralisée $\Theta(\lambda,y,\psi)$ est nulle sur A_{reg}.

On suppose $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h}_y)$. Soit $\gamma = exp\ iX.y \in A_{R-reg}$. Supposons qu'il existe $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\gamma)$ tel que $h.\gamma \in exp\ ih\mathfrak{a}.y$. On a alors $h.\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h}_y)$ et il existe $Y_h \in h.\mathfrak{a}$ tel que $hy = exp\ iY_h.y$. Soit U la composante connexe de l'ensemble des $Y \in \mathfrak{a}$ tels que $exp\ iY.y \in A_{R-reg}$ contenant X. Dans ce cas, il existe U_h une composante connexe de l'ensemble des $Y \in h.\mathfrak{a}$ tels que $exp\ iY.y \in (h.A)_{y,R-reg}$, telle que $h.X + Y_h \in U_h$. Soit $x_h \in G_y$ tel que $x_h.\mathfrak{t}_\mathbb{C} = (h.\mathfrak{a})_\mathbb{C}$.

Par définition de $\Theta(\lambda,y,\psi)$ et avec les notations de la démonstration du théorème **??** (démonstration de (D2)), on a:

$$\frac{\prod_{\alpha\in x.\psi}(1-\xi_{-\alpha}(\gamma))\xi_{\rho_{x.\psi}}(\gamma)}{\xi_{\rho_\psi}(y)}\Theta(\lambda,y,\psi)(\gamma)$$
$$= \sum_{h\in H_y\backslash\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)} \varepsilon(h.\mathfrak{a},y)(h.x)(\Delta_{(h.A)_y}\Theta(\mathbb{X}_y,\lambda,y,\psi_y))(h.x)$$

où $\varepsilon(h.\mathfrak{a},y)(h.x)$ est un signe qui ne dépend que U_h (et non de $h.x$). On le notera $s(\mathfrak{a},h,U_h)$. Comme $\Theta(\mathbb{X}_y,\lambda,y,\psi_y))(h.x) = \Theta(\mathbb{X}_y,\lambda,eH,\psi_y))(Exp\ (h.X+Y_h))$, on obtient donc

$$\frac{\prod_{\alpha\in x.\psi}(1-\xi_{-\alpha}(\gamma))\xi_{\rho_{x.\psi}}(\gamma)}{\xi_{\rho_\psi}(y)}\Theta(\lambda,y,\psi)(\gamma)$$
$$= \sum_{h\in H_y\backslash\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(y,\mathfrak{a})} s(\mathfrak{a},h,U_h) \sum_{v\in W_{G_y}(h.\mathfrak{a}_\mathbb{C})} d(v,U_h,\lambda)e^{i<vx_h.\lambda,h.X+Y_h>}$$

$$= \sum_{w\in W_G(\mathfrak{a}_\mathbb{C})}\sum_{h\in H_y\backslash\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(y,\mathfrak{a})} s(\mathfrak{a},h,U_h) \sum_{\substack{v\in W_{G_y}(h.\mathfrak{a}_\mathbb{C})\\ (vx_h)_{/\mathfrak{t}_\mathbb{C}} = hwx_{/\mathfrak{t}_\mathbb{C}}}} d(v,U_h,\lambda)e^{i<vx_h.\lambda,Y_h>}e^{i<wx.\lambda,X>}$$

On obtient ainsi

$$d_y(w,U,\lambda) = \xi_{\rho_\psi}(y) \sum_{h\in H_y\backslash\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(y,\mathfrak{a})} s(\mathfrak{a},h,U_h) \sum_{\substack{v\in W_{G_y}(h.\mathfrak{a}_\mathbb{C})\\ (vx_h)_{/\mathfrak{t}_\mathbb{C}} = hwx_{/\mathfrak{t}_\mathbb{C}}}} d(v,U_h,\lambda)e^{i<vx_h.\lambda,Y_h>}$$

La première assertion du corollaire découle des propriétés des $d(v, U_h, \lambda)$ (lemme 3.5 (i)) et la deuxième assertion du corollaire **??** ■

Démonstration: **du théorème ??**:

Soit $\lambda_0 \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^*$. Soit $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{t}}$ et soit ψ et Σ deux systèmes positifs de racines de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$. Pour $\lambda \in \mathfrak{t}_{I-reg}^*(\mathbb{C})$, on pose $\Theta(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Sigma_y} (1 - e^{-i\pi<\lambda,H_\alpha>})\Theta(\lambda_0 + \lambda, y, \psi)$. Pour tout $\alpha \in \Sigma_y$, on fixe comme dans le corollaire **??**, un entier n_α strictement positif et des réels deux à deux distincts $c_{\alpha,1}, \dots, c_{\alpha,n_\alpha}$. On pose $g(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Sigma_y} \prod_{\substack{j=1,\dots n_\alpha \\ c_{\alpha,j}\neq 0}} (e^{ic_{\alpha,j}} - e^{-i\pi<\lambda,H_\alpha>})$ de sorte que pour tout $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$, pour tout $w \in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ et pour toute composante connexe U de l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}$ tels que $exp\ iX.y \in A_{R-reg}$, la fonction $g(\lambda) \prod_{\alpha\in\Sigma_y} (1 - e^{-i\pi<\lambda,H_\alpha>})d_y(w, U, \lambda_0 + \lambda)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathfrak{t}_{I,\mathbb{C}}^*$.

Nous allons montrer que la fonction $\lambda \to g(\lambda)\Theta(\lambda)$ est holomorphe sur $\mathfrak{t}_{I,\mathbb{C}}^*$. Soit dX une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}$ et soit dx la mesure invariante sur $\mathbb{X}$ tangente à dX. D'après ([Bou] 3.3.1 (v')), pour avoir ce résultat il suffit de prouver les deux assertions suivantes:

(*) La fonction $\lambda \to g(\lambda)\Theta(\lambda)$ est continue,

(**) Pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$, la fonction $\lambda \to g(\lambda) < \Theta(\lambda), fdx >$ est holomorphe sur $\mathfrak{t}_{I,\mathbb{C}}^*$.

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble borné de $\mathcal{D}(\mathbb{X})$ ([Sc] Chap. III paragraphe 2). Soit $\lambda \in \mathfrak{t}_{I,\mathbb{C}}^*$. Soit $f \in \mathcal{B}$. On définit l'intégrale orbitale $\mathcal{M}(f)$ de f de la manière suivante: si $x \in \mathbb{X}_{reg}$ alors $\mathfrak{h}_x = \mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$. Soit dY la mesure de Lebesgue sur $[\mathfrak{a}, \mathfrak{h}]$ définie par la forme de Killing. Soit dh la mesure H-invariante sur $H/Z_H(\mathfrak{a})$ tangente à dY. On pose

$$\mathcal{M}(f)(x) = \mid D_{\mathbb{X}}(x) \mid^{1/2} \int_{H/Z_H(\mathfrak{a})} f(h.x)dh$$

Soit dZ la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{a}$ telle que $dX = dZ \wedge dY$ et soit da la mesure invariante sur A tangente à dZ.

Soit $\lambda_1 \in \mathfrak{t}_{I,\mathbb{C}}^*$. On a alors la formule d'intégration de Weyl suivante

$$< g(\lambda)\Theta(\lambda) - g(\lambda_1)\Theta(\lambda_1), fdx >$$

$$= \sum_{\mathfrak{a}\in H\backslash Car(\mathfrak{h})} \frac{1}{\mid W_H(\mathfrak{a}) \mid} \int_A \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} (g(\lambda)\Theta(\lambda) - g(\lambda_1)\Theta(\lambda_1))(a)\mathcal{M}(f)(a)da$$

Comme l'ensemble $\mathcal{B}$ est borné, il existe un compact U de $\mathbb{X}$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{B}$, le support de f soit contenu dans U ([Sc] III paragraphe 2 Thm IV). D'autre part, par le corollaire **??**, pour tout $a \in A_{reg}$, la fonction qui à λ associe $\mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} g(\lambda)\Theta(\lambda)(a)$ est holomorphe sur $\mathfrak{t}_{I,\mathbb{C}}^*$.

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de λ_1 dans $\mathfrak{t}^*_{I,\mathbb{C}}$ tel que, pour tout $\lambda \in V$, pour tout $A \in Car(\mathbb{X})$ et pour tout $a \in U \cap A_{reg}$, l'on ait

$$\mid D_{\mathbb{X}}(a)^{1/2}(g(\lambda)\Theta(\lambda) - g(\lambda_1)\Theta(\lambda_1))(a) \mid < \varepsilon$$

Maintenant, pour tout $A \in Car(\mathbb{X})$, la fonction $f \to \int_A \mid \mathcal{M}(f)(a) \mid da$ est continue ([H 3] paragraphe 2). Comme $\mathcal{B}$ est borné dans $\mathcal{D}(\mathbb{X})$ et donc relativement compact ([Sc] II paragraphe 2 Thm VII), il existe une constante $C_A > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{B}$ et pour tout $A \in Car(\mathbb{X})$, l'on ait

$$\mid \int_A \mathcal{M}(f)(a)da \mid < C_A$$

On en déduit donc qu'il existe une constante C' ($C' = \sum_{\mathfrak{a} \in H \backslash Car(\mathfrak{h})} \frac{C_A}{\mid W_H(\mathfrak{a}) \mid}$) telle que pour $f \in \mathcal{B}$ et pour tout $\lambda \in V$ l'on ait

$$\mid < g(\lambda)\Theta(\lambda) - g(\lambda_1)\Theta(\lambda_1), f dx > \mid < C'\varepsilon$$

On obtient donc l'assertion (*).

On garde les notations précédentes. Pour l'assertion (**), en utilisant la formule d'intégration de Weyl, il suffit de prouver que pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ et pour tout $A \in Car(\mathbb{X})$, la fonction qui à λ associe $\int_A g(\lambda)\Theta(\lambda)(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a)da$ est holomorphe sur $\mathfrak{t}^*_{I,\mathbb{C}}$. Or, on a les propriétés suivantes:

(i) pour tout $a \in A_{reg}$, la fonction $\lambda \to g(\lambda)\Theta(\lambda)(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a)$ est holomorphe sur $\mathfrak{t}^*_{I,\mathbb{C}}$,

(ii) pour tout $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{I,\mathbb{C}}$, la fonction $a \to g(\lambda)\Theta(\lambda)(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a)$ est intégrable sur A,

(iii) il existe une constante strictement positive C telle que, pour presque tout a dans le support de $\mathcal{M}(f)$ (qui est compact), l'on ait $\mid g(\lambda)\Theta(\lambda)(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a) \mid < C \mid \mathcal{M}(f)(a) \mid$.

Le théorème de convergence dominée assure donc que la fonction $\lambda \to \int_A g(\lambda)\Theta(\lambda)(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a)da$ est holomorphe sur $\mathfrak{t}^*_{I,\mathbb{C}}$.

On obtient donc (**).

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \inf_{\alpha \in \psi_y} \inf_{\substack{j = 1, \dots n_\alpha \\ c_{\alpha,j} \neq 0}} \mid c_{\alpha,j} \mid$. La fonction $g(\lambda)$ est alors inversible sur l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{I,\mathbb{C}}$ tels que pour tout $\alpha \in \psi_y$, l'on ait $\mid \mathcal{I}m\lambda(H_\alpha) \mid < \varepsilon$.

L'assertion (2) du théorème est alors complètement démontrée. ∎

Pour $\lambda \in \Gamma^*_{\mathfrak{t}} + \mathfrak{t}^*_{I,\mathbb{C}}$, on définit la fonction H -invariante $F(\lambda, y)$ sur $\mathbb{X}_{reg}$ de la manière suivante: Soit $A \in Car(\mathbb{X})$ associé à $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{a}$ n'est pas H-conjuguée à $\mathfrak{t}$ alors pour tout $a \in A_{reg}$, on a $F(\lambda, y)(a) = 0$. Soit $X \in \mathfrak{t}$ tel que $exp\, iX.y \in T_{reg}$. Alors $F(\lambda, y)(exp\, iX.y) = \sum_{w \in W^y_H(\mathfrak{t})} \varepsilon(w) e^{i < w\lambda, X + Y_w >}$.

Proposition 3.10 *Soit* $\lambda_0 \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^*$. *Alors, pour tout* $x \in \mathbb{X}_{reg}$, *la fonction qui à* λ *associe* $\sum_{w\in W_{G_y}(\mathfrak{t})} F(w(\lambda_0+\lambda),y)(x)\Theta(w(\lambda_0+\lambda),y,\psi)$ *est analytique sur* $\mathfrak{t}_I^*$.

Démonstration: Soit $\Pi(\lambda) = \prod_{\alpha\in\psi_y}(e^{i\pi\lambda(H_\alpha)/2} - e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)/2})$. Par le théorème **??** (2), la fonction qui à λ associe $T(\lambda) = \Pi(\lambda) \sum_{w\in W_{G_y}(\mathfrak{t})} F(w(\lambda_0+\lambda),y)(x)\Theta(w(\lambda_0+\lambda),y,\psi)$ est analytique sur $\mathfrak{t}_I^*$. Maintenant, il est clair que pour tout $w \in W_{G_y}(\mathfrak{t})$ et pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ on a $< T(w\lambda), fdx >= \varepsilon(w) < T(\lambda), fdx >$ et donc la fonction $\lambda \to< T(\lambda), fdx >$ s'annule sur les hyperplans $\lambda(H_\alpha) = 0$ lorsque α parcourt ψ_y. Comme la fonction Π a justement des zéros simples le long de ces hyperplans, on en déduit que la fonction $\lambda \to \sum_{w\in W_{G_y}(\mathfrak{t})} F(w(\lambda_0+\lambda),y)(x)\Theta(w(\lambda_0+\lambda),y,\psi)$ est faiblement analytique sur $\mathfrak{t}_I^*$ et donc analytique d'après ([Bou] 3.3.1 (iv)). ∎

4 Croissance des fonctions généralisées $\Theta(\lambda, y, \psi)$

Soit $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de type compact de $\mathfrak{h}$. Soit ψ un système positif de racines de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$ et soit $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{t}}$.

Théorème 4.1 *(i) Soit* $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^* + \mathfrak{t}_{I-reg}^*$. *La fonction* $\mid D_{\mathbb{X}} \mid^{1/2} \Theta(\lambda,y,\psi)_{/\mathbb{X}_{reg}}$ *est bornée sur* $\mathbb{X}_{reg}$,

(ii) Soit $Q \in S(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ *et soit* U *une partie bornée de* T. *Alors, il existe une constante* $C > 0$ *et un entier positif* k *tels que pour tout* $x \in U_{reg}$, *pour tout* $\gamma \in \mathbb{X}_{reg}$ *et pour tout* $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^* + \mathfrak{t}_I^*$, *l'on ait*

$$\mid \sum_{w\in W_{G_y}(\mathfrak{t})} \partial(Q).F(w\lambda,y)(x)\Theta(w\lambda,y,\psi)(\gamma)D_{\mathbb{X}}(\gamma)^{1/2} \mid\leq C(1+\parallel\lambda\parallel)^k$$

La suite de cette partie consiste en la démonstration de ce théorème.

Démonstration: L'assertion (i) découle directement des résultats du lemme **??** et de la démonstration du corollaire **??**.

Pour l'assertion (ii), nous allons d'abord considérer le cas $y = eH$. La fonction généralisée $\Theta(\lambda,eH,\psi)_{/\mathbb{X}_{reg}}$ ne vit que sur $(Exp\ \mathfrak{h})_{reg}$. Soit $X \in \mathfrak{t}$. On écrit $X = X_0 + X_1$ avec $X_0 \in \mathfrak{c}\cap\mathfrak{p}$ et $X_1 \in \mathfrak{t}\cap[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$. Soit $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^* + \mathfrak{t}_I^*$. On a alors $F(\lambda,eH,\psi)(Exp\ X) = e^{i<\lambda_0,X_0>}F(\lambda_1,eH,\psi)(Exp\ X_1)$. Il est facile de voir, comme dans le paragraphe précédent, qu'on peut supposer que <u>G est semi-simple</u>. On note $\mathcal{R}$ le réseau de $i\mathfrak{t}$ engendré par les πH_α pour $\alpha \in \psi$.

Soit $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$. On fixe dans tout la suite un élément x de G tel que $x.\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. et une composante connexe $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{a}_{R-reg}$. On écrit comme dans le paragraphe précédent, pour tout $X \in \mathcal{C}\cap\omega$,

$$\Theta(\lambda,eH,\psi)(Exp\ X) = \frac{\sum_{w\in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} d(w,\mathcal{C},\lambda)e^{i<wx.\lambda,X>}}{\prod_{\alpha\in x.\psi}(1-\xi_{-\alpha}(Exp\ X))\xi_{\rho_{x.\psi}}(Exp\ X)}$$

Soit Σ un sytème positif de racines de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ et soit $\mathcal{F}$ la chambre de Weyl de $\mathfrak{t}^*_{reg}$ définie par Σ.

D'après le corollaire **??** il existe des réels non nuls deux à deux distincts $d_1, \ldots, d_n$ tels que la fonction $\prod_{\alpha\in\Sigma}(1 - e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)})\prod_{j=1}^{n}(e^{id_j} - e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)})d(w, \mathcal{C}, \lambda)$ soit un polynôme en les $e^{i\pi\lambda(H_\alpha)}$ pour $\alpha \in \Sigma$. On pose $f_\Sigma(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Sigma}(1 - e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)})$ et $g_\Sigma(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Sigma}\prod_{j=1}^{n}(e^{id_j} - e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)})(e^{-id_j} - e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)})$. Il existe donc des constantes $b(w, \gamma, \Sigma)$, non nulles pour un nombre fini de valeurs de γ, telles que

$$d(w, \mathcal{C}, \lambda) = \frac{\sum_{\gamma\in\mathcal{R}} b(w, \gamma, \Sigma)e^{i<\lambda,\gamma>}}{g_\Sigma(\lambda)f_\Sigma(\lambda)}$$

Lemme 4.2 *Soit* $h^+ = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma} H_\alpha$. *Soit* $w \in W_G(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ *et* $u \in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. *Alors, on a*

(1) $f_{w\Sigma}(\lambda) = f_\Sigma(w^{-1}\lambda) = \varepsilon(w)f_\Sigma(\lambda)e^{i\pi\lambda(h^+-wh^+)}$ *et*
$g_{w\Sigma}(\lambda) = g_\Sigma(w^{-1}\lambda) = g_\Sigma(\lambda)e^{2in\pi\lambda(h^+-wh^+)}$

(2) Pour tout $\gamma \in \mathcal{R}$ *, on a*

$$b(u, \gamma, w\Sigma) = \varepsilon(w)b(u, \gamma + (2n + 1)\pi(wh^+ - h^+), \Sigma)$$

Démonstration: On écrit $f_\Sigma(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Sigma}(e^{i\pi\lambda(H_\alpha/2)} - e^{-i\pi\lambda(H_\alpha/2)})e^{-i\pi\lambda(h^+)}$. Les relations vérifiées par $f_\Sigma(\lambda)$ deviennent immédiates.

Si d est un réel et $\alpha \in \psi$, on remarque que

$$(e^{id} - e^{i\pi\lambda(H_\alpha)})(e^{-id} - e^{i\pi\lambda(H_\alpha)}) = (e^{id} - e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)})(e^{-id} - e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)})e^{2i\pi\lambda(H_\alpha)}$$

Un simple calcul prouve alors les propriétés de g_Σ.

Comme $d(u, \mathcal{C}, \lambda)$ ne dépend pas de Σ, on a

$$\frac{\sum_{\gamma\in\mathcal{R}} b(u, \gamma, w\Sigma)e^{i<\lambda,\gamma>}}{f_{w\Sigma}(\lambda)g_{w\Sigma}(\lambda)} = \frac{\sum_{\gamma\in\mathcal{R}} b(u, \gamma, \Sigma)e^{i<\lambda,\gamma>}}{f_\Sigma(\lambda)g_\Sigma(\lambda)}$$

Comme $(f_{w\Sigma}g_{w\Sigma})(\lambda) = \varepsilon(w)f_\Sigma(\lambda)g_\Sigma(\lambda)e^{(2n+1)i\pi\lambda(h^+-wh^+)}$, on obtient

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{R}} b(u, \gamma, w\Sigma)e^{i<\lambda,\gamma-(2n+1)\pi(h^+-wh^+)>} = \varepsilon(w)\sum_{\gamma\in\mathcal{R}} b(u, \gamma, \Sigma)e^{i<\lambda,\gamma>}$$

La propriété (2) est alors claire. ∎

On fixe $x_0 \in (Exp\ \mathfrak{t})_{reg}$ et $Q \in S(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$. On pose $h(\lambda) = \partial(Q)F(\lambda, eH, \psi)(x_0)$.

Soit $\Theta(\lambda) = \sum_{w\in W_G(\mathfrak{t})} h(w\lambda)\Theta(w\lambda, eH, \psi)$. On définit la fonction Δ_ψ sur $\mathbb{X}_{reg}$ par sa restriction à chaque sous-ensemble de Cartan: si $a \in A_{reg}$ alors $\Delta_\psi(a) = \prod_{\alpha\in x.\psi}(1 - \xi_{-\alpha}(a))\xi_{\rho_{x.\psi}}(a)$ (l'élément x vérifie $x.\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$).

Soit $X \in \mathcal{C} \cap \omega$. On a alors

$$(\Delta_\psi \Theta)(Exp\ X) = \sum_{w \in W_G(\mathfrak{t})} h(w\lambda) \sum_{u \in W_G(\mathfrak{a}_\mathbb{C})} d(u, \mathcal{C}, w\lambda) e^{i<uxw.\lambda, X>}$$

$$= \sum_{w \in W_G(\mathfrak{t})} h(w\lambda) \sum_{u \in W_G(\mathfrak{a}_\mathbb{C})} \frac{\sum_{\gamma \in \mathcal{R}} b(u, \gamma, w\Sigma) e^{i<w\lambda, \gamma>} e^{i<uxw\lambda, X>}}{f_{w\Sigma}(w\lambda) g_{w\Sigma}(w\lambda)}$$

(par l'expression de $d(u, \mathcal{C}, w\lambda)$)

$$= \sum_{w \in W_G(\mathfrak{t})} \frac{\varepsilon(w) h(w\lambda)}{f_\Sigma(\lambda) g_\Sigma(\lambda)} \sum_{u \in W_G(\mathfrak{a}_\mathbb{C})} \sum_{\gamma \in \mathcal{R}} b(u, \gamma + (2n+1)\pi(wh^+ - h^+), \Sigma) e^{i<w\lambda, x^{-1}u^{-1}X + \gamma>}$$

(d'après les deux propriétés du lemme 4.2)

$$= \sum_{\gamma \in \mathcal{R}} \sum_{u \in W_G(\mathfrak{a}_\mathbb{C})} b(u, \gamma, \Sigma) \sum_{w \in W_G(\mathfrak{t})} \frac{\varepsilon(w) h(w\lambda)}{f_\Sigma(\lambda) g_\Sigma(\lambda)} e^{i<w\lambda, x^{-1}u^{-1}.X + \gamma - (2n+1)\pi(wh^+ - h^+)>}$$

Pour avoir le résultat voulu il suffit donc de prouver si $b(u, \gamma, \Sigma) \neq 0$ alors il existe une constante $C > 0$ et un entier positif k tels que pour tout $X \in \mathcal{C} \cap \omega$ et pour tout $\lambda \in \mathcal{F}$, l'on ait

4.3 $$\left| \sum_{w \in W_G(\mathfrak{t})} \frac{\varepsilon(w) h(w\lambda)}{f_\Sigma(\lambda) g_\Sigma(\lambda)} e^{i<w\lambda, x^{-1}u^{-1}.X + \gamma - (2n+1)\pi(wh^+ - h^+)>} \right| < C(1 + \| \lambda \|)^k$$

Maintenant, la relation (ii) du lemme 3.6 implique la relation suivante

si $b(u, \gamma, \Sigma) \neq 0$ alors pour tout $X \in \mathcal{C} \cap \omega$ et pour tout $\lambda \in \mathcal{F}$, on a

$$Re(i < ux\lambda, X > + i < \lambda, \gamma >) \leq 0$$

Or, par le lemme **??**, on a $b(u, \gamma, \Sigma) = \varepsilon(w) b(u, \gamma - (2n+1)\pi(wh^+ - h^+), w\Sigma)$. On en déduit que si $X \in \mathcal{C} \cap \omega$ et $\lambda \in \mathcal{F}$, on a

4.4 $$Re(i < w\lambda, x^{-1}u^{-1}X + \gamma - (2n+1)\pi(wh^+ - h^+) >) \leq 0$$

et cette relation est encore valable pour λ dans l'adhérence de $\mathcal{F}$.

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les racines simples de Σ et soit $\omega_1, \ldots, \omega_k$ les poids fondamentaux relatifs à cette base. Par **??**, si $b(u, \gamma, \Sigma) \neq 0$ alors pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, pour tout $w \in W_G(\mathfrak{t})$ et pour tout $X \in \mathcal{C} \cap \omega$, on a
4.5

$$Re(i < w\omega_j, x^{-1}u^{-1}X + \gamma - (2n+1)\pi(wh^+ - h^+) >) \leq 0$$

Soit P une partie de $\{1,\ldots,k\}$. Soit $\mathcal{F}_P$ l'ensemble des $\mu\in\mathcal{F}$ tels que pour tout $j\in P$, l'on ait $i\mu(\pi H_{\alpha_j})\leq 1$ et pour tout $j\notin P$, l'on ait $i\mu(\pi H_{\alpha_j})\geq 1$. Soit $\Sigma_P=\Sigma\cap(\sum_{j\in P}\mathbb{Z}\alpha_j)$. On note W_P le groupe de Weyl engendré par les s_α pour $\alpha\in P$.

On pose $\mathfrak{t}_P=\sum_{j\in P} i\mathbb{R}H_{\alpha_j}$ et $\mathfrak{t}^P=\cap_{j\in P}Ker\ \omega_j$. On a alors $\mathfrak{t}=\mathfrak{t}_P+\mathfrak{t}^P$ et $\mathfrak{t}^*=\mathfrak{t}_P^*+(\mathfrak{t}^P)^*$. L'espace $\mathfrak{t}_P^*$ s'identifie à l'orthogonal de $\mathfrak{t}^P$. Le groupe de Weyl W_P agit respectivement sur $\mathfrak{t}_P$ et sur $\mathfrak{t}^P$ et il fixe tout élément de $\mathfrak{t}^P_{\mathbb{C}}$. Pour $X\in\mathfrak{t}$, on pose $X=X_P+X^P$ où $X_P\in\mathfrak{t}_P$ et $X^P\in\mathfrak{t}^P$.

L'ensemble des $\mathcal{F}_P$ où P parcourt l'ensemble des parties de $\{1,\ldots,k\}$ forme un recouvrement fini de $\mathcal{F}$. En écrivant chaque élément $s\in W_G(\mathfrak{t})$ sous la forme vw où v est un représentant de s dans $W_G(\mathfrak{t})/W_P$ et $w\in W_P$, on voit que pour avoir la relation **??**, il suffit de prouver que pour toute partie P de $\{1,\ldots,k\}$ et pour tout $v\in W_G(\mathfrak{t})$, l'on a:

si $b(u,\gamma,\Sigma)\neq 0$ alors la fonction

$$\sum_{w\in W_P}\frac{\varepsilon(w)h(vw\lambda)}{f_\Sigma(\lambda)g_\Sigma(\lambda)}e^{i<vw\lambda,x^{-1}u^{-1}.X+\gamma-(2n+1)\pi(vwh^+-h^+)>}$$

vérifie une estimation du même type que **??** pour tout $X\in\mathcal{C}\cap\omega$ et pour tout $\lambda\in\mathcal{F}$.

On fixe $v\in W_G(\mathfrak{t})$ et $\lambda\in\mathcal{F}_P$ et on écrit $\lambda=\lambda_P+\lambda^P\in\mathfrak{t}_P^*+(\mathfrak{t}^P_{\mathbb{C}})^*$. Les éléments λ_P et λ^P sont alors dans l'adhérence de $\mathcal{F}$. Soit $w\in W_P$. On pose $X(w)=v^{-1}(x^{-1}u^{-1}X+\gamma-(2n+1)\pi(vwh^+-h^+))$ et $Y(w)=w^{-1}X(w)$. On écrit $Y(w)=Y(w)_P+Y(w)^P\in\mathfrak{t}_P+\mathfrak{t}^P$ de telle sorte que $<\lambda,Y(w)>=<\lambda_P,Y(w)_P>+<\lambda^P,Y(w)^P>$. La relation 4.5 implique les deux relations suivantes: pour tout $X\in calC\cap\omega$ et tout $\lambda\in\mathcal{F}$,

(i) $Re\ i<w\lambda_P,X(w)>=Re\ i<\lambda_P,Y(w)>=Re\ i<\lambda_P,Y(w)_P>\leq 0$,

(ii) $Re\ i<w\lambda^P,X(w)>=Re\ i<\lambda^P,Y(w)>=Re\ i<\lambda^P,Y(w)^P>\leq 0$.

On vérifie que $Y(w)=w^{-1}Y(Id)+(2n+1)\pi(w^{-1}h^+-h^+)$. Comme $w\in W_P$, on a $(w^{-1}h^+-h^+)\in\mathfrak{t}_P$ et donc $Y(w)^P=w^{-1}Y(Id)^P$.

Or, comme w agit trivialement sur $\mathfrak{t}^P$, on en déduit que l'on a $<\lambda^P,Y(w)^P>=<\lambda^P,Y(Id)^P>$.

Maintenant, les fonctions $\dfrac{1}{g_\Sigma(\lambda)}$ et $\dfrac{f_{\Sigma_P}(\lambda)}{f_\Sigma(\lambda)}$ sont bornées sur $\mathcal{F}_P$. Il suffit donc de prouver que la fonction $\sum_{w\in W_P}\dfrac{\varepsilon(w)h(vw\lambda)}{f_{\Sigma_P}(\lambda)}e^{i<\lambda_P,Y(w)_P>}$ vérifie une relation du type **??** lorsque $X\in\mathcal{C}\cap\omega$, $\lambda_P\in\mathcal{F_P}$ et $\lambda^P\in\mathfrak{t}^P\cap\mathcal{F}$.

On pose $x_0=Exp\ Z$. On a alors

$$h(\lambda)=\partial(Q)F(\lambda,eH,\psi)(Exp\ Z)=\sum_{\tau\in W_H(\mathfrak{t})}\varepsilon(\tau)Q(i\tau\lambda)e^{i<\tau.\lambda,Z>}$$

On a donc

$$\sum_{w\in W_P}\frac{\varepsilon(w)h(vw\lambda)}{f_{\Sigma_P}(\lambda)}e^{i<\lambda_P,Y(w)_P>}$$

$$= \sum_{\tau \in W_H(\mathfrak{t})} \varepsilon(\tau) \sum_{w \in W_P} \frac{\varepsilon(w) Q(i\tau v w\lambda)}{f_{\Sigma_P}(\lambda)} e^{i<\tau v w\lambda, Z>} e^{i<\lambda_P, Y(w)_P>}$$

$$= \sum_{\tau \in W_H(\mathfrak{t})} \varepsilon(\tau) e^{i<\lambda^P, (v^{-1}\tau^{-1}Z)^P>} \sum_{w \in W_P} \frac{\varepsilon(w) Q(i\tau v w\lambda)}{f_{\Sigma_P}(\lambda)} e^{i<w\lambda_P, (v^{-1}\tau^{-1}Z)_P>} e^{i<\lambda_P, Y(w)_P>}$$

Maintenant, on peut écrire $v^{-1}\tau^{-1}Q$ comme somme finie d'éléments du type $Q^P Q_P$ avec $Q^P \in S(\mathfrak{t}^P_{\mathbb{C}})$ et $Q_P \in S((\mathfrak{t}_P)_{\mathbb{C}})$.

Comme λ^P ne prend que des valeurs réelles sur $\mathfrak{t}^P$, il existe une constante strictement positive C et un entier positif k qui ne dépendent pas de λ et de Z tels que

$$\mid Q^P(i\lambda^P) e^{i<\lambda^P, (v^{-1}\tau^{-1}Z)^P>} \mid < C(1 + \parallel \lambda \parallel)^k$$

Il suffit donc de prouver que la fonction

$$\sum_{w \in W_P} \frac{\varepsilon(w) Q_P(iw\lambda_P)}{f_{\Sigma_P}(\lambda)} e^{i<w\lambda_P, (v^{-1}\tau^{-1}Z)_P>} e^{i<\lambda_P, Y(w)_P>}$$

est majorée par une constante, ceci pour tout $\lambda \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{C} \cap \omega$ et Z dans une partie bornée de $\mathfrak{t}$.

Pour $\lambda \in \mathfrak{t}_P$, on pose $g(\lambda, Z, X) = \sum_{w \in W_P} \frac{\varepsilon(w) Q_P(iw\lambda_P)}{\prod_{\alpha \in \Sigma_P} \lambda(H_\alpha)} e^{i<w\lambda, (v^{-1}\tau^{-1}Z)_P>} e^{i<\lambda, Y(w)_P>}$.

Comme la fonction $\frac{\prod_{\alpha \in \Sigma_P} \lambda(H_\alpha)}{f_{\Sigma_P}(\lambda)}$ est de classe C^∞ sur $\mathfrak{t}^*_P$, il suffit de prouver que $g(\lambda, X, Z)$ est bornée pour λ, X et Z comme ci-dessus.

Soit $h^+_P = \sum_{\alpha \in \Sigma_P} H_\alpha/2$. On a alors $Y(w)_P = w^{-1}Y(Id)_P + (2n+1)\pi(w^{-1}h^+_P - h^+_P)$ et $Y(Id) = v^{-1}x^{-1}u^{-1}X + v^{-1}\gamma - (2n+1)\pi(h^+ - v^{-1}h^+)$. Il est donc clair que $Y(w)_P$ parcourt un ensemble borné lorsque X parcourt $\mathcal{C} \cap \omega$. On pose $Y(w)_P = w^{-1}Y'_P - (2n+1)\pi h^+_P$ avec $Y'_P = Y(Id)_P + (2n+1)\pi h^+_P$. Comme $e^{i<\lambda_P, -(2n+1)\pi h^+_P>}$ est borné et Y'_P et Z parcourent des ensembles bornés, il suffit de voir que la fonction

$$g_0(\lambda, Z, X) = \sum_{w \in W_P} \frac{\varepsilon(w) Q_P(iw\lambda)}{\prod_{\alpha \in \Sigma_P} \lambda(H_\alpha)} e^{i<w\lambda, (v^{-1}\tau^{-1}Z)_P>} e^{i<w\lambda, Y'_P>}$$

est de classe C^∞. Or le numérateur de $g_0(\lambda, Z, X)$ est W_P anti-invariant. Le lemme 3.1 de [He] assure le résultat voulu.

On a donc prouvé le théorème pour $y = eH$.

On se replace maintenant dans le cadre général. Soit $y \in \mathcal{W}_\mathfrak{t}$. Pour $X \in \mathfrak{t}_{reg}$ et $Q \in S(\mathfrak{t}_\mathbb{C})$, on a $\partial(Q) F(\lambda, y)(exp\; iX.y) = \sum_{v \in W^y_H(\mathfrak{t})} \varepsilon(v) Q(iv\lambda) e^{i<v\lambda, X + Y_v>}$. Pour $v \in W^y_H(\mathfrak{t})$ on a $2Y_v \in \Gamma_\mathfrak{t} \subset \mathfrak{c}$ (où $\mathfrak{c}$ est le centre de $\mathfrak{h}$) et donc on a $e^{i<v\lambda, Y_v>} = e^{i<\lambda, Y_v>} = \pm 1$. La fonction

$\partial(Q)F(\lambda, y)(exp\ iX.y)$ vérifie donc les mêmes propriétés que $\partial(Q)F(\lambda, eH)(Exp\ X)$. Pour tout $X \in \mathfrak{t}_{reg}$, $Q \in S(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ et pour tout $\gamma \in \mathbb{X}_{reg}$ on a

$$\sum_{w \in W_{G_y}(\mathfrak{t})} \partial(Q)F(w\lambda, y)(exp\, iX.y)\Theta(w\lambda, y, \psi)(\gamma) \mid D_{\mathbb{X}}(\gamma) \mid^{1/2}$$

$$= \sum_{h \in H_y \backslash \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\gamma)} \sum_{w \in W_{G_y}(\mathfrak{t})} \partial(Q)F(w\lambda, y)(exp\, iX.y)\Theta(\mathbb{X}_y, \lambda, eH, \psi_y)(h.\gamma.y) \mid D_{\mathbb{X}_y}(h.\gamma.y) \mid^{1/2}$$

Comme $H_y \setminus \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\gamma)$ est fini et ne dépend que de la composante connexe de $\mathbb{X}_{reg}$ qui contient γ et que ces composantes connexes sont en nombre fini, le théorème pour $y = eH$ implique le théorème pour tout $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{t}}$. ■

Corollaire 4.6 *Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$, $N > 0$ et U une partie bornée de T. Soit $u \in S(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in U_{reg}$, l'on ait*

$$\mid \sum_{w \in W_{G_y}(\mathfrak{t})} \partial(u)F(w\lambda, y, \psi)(x) < \Theta(w\lambda, y, \psi), f > \mid \leq \frac{C}{(1+ \parallel \lambda \parallel)^N}$$

Démonstration: Si $P \in S(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*)^{W_G(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})}$ alors il existe $z \in Z(\mathfrak{g})$ tel que $P = \gamma_{\mathfrak{t}}(z)$. Pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$, on a donc $P(i\lambda) < \Theta(w\lambda, y, \psi), fdx >=< z.\Theta(w\lambda, y, \psi), fdx >=< \Theta(w\lambda, y, \psi),^t z.fdx >$. Par le théorème précédent et la formule d'intégration de Weyl, il existe une constante strictement positive C' (qui dépend de z et de f) et un entier k tels que l'on ait

$$\mid \sum_{w \in W_{G_y}(\mathfrak{t})} \partial(u)F(w\lambda, y, \psi)(x) < z.\Theta(w\lambda, y, \psi), f > \mid$$

$$= \mid P(i\lambda) \sum_{w \in W_{G_y}(\mathfrak{t})} \partial(u)F(w\lambda, y, \psi)(x) < \Theta(w\lambda, y, \psi), f > \mid \leq C'(1+ \parallel \lambda \parallel)^k$$

On obtient alors facilement le résultat voulu. ■

5 Lien avec les représentations

Dans cette partie, nous exprimons les fonctions généralisées $\Theta(\lambda, y, \psi)$ en terme de coefficients généralisées de représentations unitaires et irréductibles de G.

Soit $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de type compact θ-stable de $\mathfrak{h}$. On pose $\mathfrak{a} = i\mathfrak{t}$. Soit $M = exp\ \mathfrak{t}$ et $A = exp\ \mathfrak{a}$. On choisit Σ un système positif de racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$ et on note $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$ et $N = exp\ \mathfrak{n}$. Soit B le sous-groupe de Borel de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$. Soit $\rho = (1/2) \sum_{\alpha \in \Sigma} \alpha$. Pour μ un poids de $\mathfrak{a}$ et $a = exp\ X \in A$, on pose $a^\mu = e^{\mu(X)}$. On note $W = N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$ et $W_H = N_{K \cap H}(\mathfrak{a})/Z_{K \cap H}(\mathfrak{a})$.

Soit $\lambda \in (\Gamma_{\mathfrak{t}}^* + \mathfrak{t}_I^*)_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^* = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. On note $\mathcal{C}_\lambda$ l'ensemble des fonctions continues de G dans $\mathbb{C}$ telles que pour tout $t \in M$, $a \in A$, $n \in N$ et $g \in G$ l'on ait $f(gtan) = a^{-\lambda - 2\rho} f(g)$. Soit

$I_\lambda = \mathcal{C}_\lambda \cap \mathcal{C}^\infty(G)$ et soit π_λ la représentation régulière gauche de G dans I_λ. La restriction à K induit un isomorphisme de I_λ dans $\mathcal{C}^\infty(K/T)$. On munit I_λ de la topologie de $\mathcal{C}^\infty(K/T)$ transportée par cet isomorphisme. Soit I'_λ le dual de I_λ. Les espaces $I_{-\lambda}$ et $\mathcal{C}_{-\lambda}$ s'injecte naturellement dans I'_λ. On note π'_λ la transposée de π_λ. La restriction de π'_λ à $I_{-\lambda}$ coïncide avec $\pi_{-\lambda}$.

Pour $y \in W$, on définit la fonction ξ^y_λ sur G de la manière suivante:
$\xi^y_\lambda(g) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g \notin HyAN \\ a^{\lambda-2\rho} & \text{si} \quad g \in HyaN \end{cases}$
Pour $\lambda - 2\rho$ strictement dominant (c'est-à-dire, pour tout $\alpha \in \Sigma$ on a $Re < \lambda - 2\rho, H_\alpha > > 0$) alors on a $\xi^y_\lambda \in \mathcal{C}_{-\lambda}$ et pour $\mu \in (\Gamma^*_{\mathfrak{t}})_{\mathbb{C}}$ l'application $\lambda \to \xi^y_{(\lambda+\mu)/K}$ admet un prolongement méromorphe de $\mathfrak{t}^*_{I\,\mathbb{C}}$ dans $I'_{\lambda+\mu}$ ([vdB] Thm 5.10 et [O] Thm 5.1). On notera encore ξ^y_λ l'élément de I'_λ obtenu à partir de ce prolongement méromorphe.

Pour y et z dans W, on note $\Omega_{y,z}$ le plus grand ouvert de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ sur lequel ξ^y_λ et ξ^z_λ sont définis. On pose pour $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ et $\lambda \in \Omega_{y,z}$,

$$< C(\lambda, y, z), \varphi > = < \pi'_\lambda(\varphi)\xi^y_\lambda, \xi^z_{-\lambda} >$$

Remarque : Pour $\lambda \in (\Gamma^*_{\mathfrak{t}} + \mathfrak{t}^*_{I\,reg}) \subset i\mathfrak{a}^*_{reg}$, on note χ_λ le caractère de B défini par $\chi_\lambda(tan) = a^{-\lambda-2\rho}$ et soit $L_\lambda = ind^G_B \chi_\lambda$ (induite au sens unitaire). La représentation L_λ est unitaire irréductible ([Br] Thm. 7.4 p 203). Soit $\mathcal{H}_\lambda$ l'espace de L_λ. Dans ce cas l'espace $\mathcal{H}^\infty_\lambda$ des vecteurs C^∞ de $\mathcal{H}_\lambda$ est égal à I_λ. Pour $f \in I_\lambda$, on pose $< u^y_\lambda, f > = < \xi^y_\lambda, \overline{f} >$ où $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$. L'élément u^y_λ est alors un élément H-invariant de l'espace $\mathcal{H}^{-\infty}_\lambda$ des vecteurs généralisés de $\mathcal{H}_\lambda$. Pour presque tout $\lambda \in (\Gamma^*_{\mathfrak{t}} + \mathfrak{t}^*_I)$, on a alors

$$< C(\lambda, y, z), \varphi > = < L_\lambda(\varphi)u^y_\lambda, u^z_\lambda >$$

Pour $\alpha \in \Sigma \cup -\Sigma$, on définit $\varepsilon(\alpha)$ par: $\varepsilon(\alpha) = -1$ si α est une racine imaginaire compacte de $\mathfrak{t}$ et $\varepsilon(\alpha) = 1$ sinon. On note Σ_{comp} l'ensemble des racines imaginaires compactes de $\mathfrak{t}$ et Σ_{Inc} son complémentaire dans Σ. Pour $w \in W$, on pose $T(w) = \Sigma \cap -w\Sigma$.

Théorème 5.1 *Pour tout y et z dans W et pour presque tout $\lambda \in \Gamma^*_{\mathfrak{t}} + \mathfrak{t}^*_{I\,reg}$, on a*

$$C(\lambda, y, z) = \prod_{\alpha \in T(y)} \frac{\varepsilon(\alpha)\varepsilon(zy^{-1})}{\varepsilon(-zy^{-1}.\alpha)} \xi_\rho(zy^{-1}H)(-1)^{|\Sigma \cap yz^{-1}\Sigma_{Inc}|} \prod_{\alpha \in \Sigma} \frac{2}{y.\lambda(H_\alpha)} \Theta(-z\lambda, zy^{-1}H, -\Sigma)$$

En particulier, on a

$$C(\lambda, y, y) = (-1)^{|\Sigma_{Inc}|} \prod_{\alpha \in \Sigma} \frac{2}{(y.\lambda)(H_\alpha)} \Theta(-y.\lambda, eH, -\Sigma)$$

La suite de cette partie consiste en la démonstration de ce théorème.

On suppose tout d'abord que <u>G est semi-simple</u>.

Pour $y = z = Id$ ce théorème a été démontré par P. Delorme ([D] Thm. 3). Comme la distribution $C(\lambda, y, z)$ est sphérique, par le théorème d'unicité ([H2] Thm. 4.1), il suffit de comparer les restrictions de $C(\lambda, y, z)$ et de $\Theta(-z\lambda, zy^{-1}H, -\Sigma)$ à T_{reg}. Le calcul est du même type que dans le cas $y = z = Id$ et il m'a été indiqué par M. Tinfou.

Nous rappelons maintenant les notations et résultats de [D] qui nous seront nécessaires pour la suite.

Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. Pour $w \in W$, on note comme dans ([D] 5.1), $A(w, \lambda)$ l'opérateur d'entrelacement entre les représentations π_λ et $\pi_{w\lambda}$. Soit $A'(w, \lambda)$ l'opérateur transposé de $A(w, \lambda)$.

Par ([D] Thm. 2 p 330), on a

$$A'(w, \lambda)\xi^{Id}_{w\lambda} = \prod_{\alpha \in T(w)} \varepsilon(\alpha) \frac{2}{(w.\lambda)(H_\alpha)} \xi^w_\lambda$$

On en déduit donc que l'on a

$$< C(\lambda, y, z), \varphi >= \prod_{\alpha \in T(y)} \frac{\varepsilon(\alpha)\ y.\lambda(H_\alpha)}{2} < \pi'_\lambda(\varphi) A'(y, \lambda)\xi^{Id}_{y\lambda}, \xi^z_{-\lambda} >$$

$$= \prod_{\alpha \in T(y)} \frac{\varepsilon(\alpha)\ y.\lambda(H_\alpha)}{2} < A'(y, \lambda)\pi'_{y\lambda}(\varphi)\xi^{Id}_{y\lambda}, \xi^z_{-\lambda} >$$

Par la remarque 3 p 326 et le théorème 2 de [D], on obtient

$$C(\lambda, y, z) = \prod_{\alpha \in T(y)} \frac{\varepsilon(\alpha)\ y.\lambda(H_\alpha)}{2} \prod_{\beta \in T(y^{-1})} \varepsilon(z\beta) \frac{2}{-\lambda(H_\beta)} C(y\lambda, Id, zy^{-1})$$

ou encore

5.2 $$C(\lambda, y, z) = \prod_{\alpha \in T(y)} \frac{\varepsilon(\alpha)}{\varepsilon(-zy^{-1}.\alpha)} C(y\lambda, Id, zy^{-1})$$

Pour démontrer le théorème il suffit de considérer les distributions $C(\lambda, Id, y)$.

Soit C une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}_{reg}$ et soit $\mathcal{C} = exp\ C$. On fixe $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(K/M)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathcal{C})$ et on définit pour $w \in W$ la fonction $\Phi^w = \Phi^w(\psi, \varphi)$ sur $\mathbb{X}$ de la manière suivante:

$\Phi^w(gH) = 0$ si $gH \notin HwAH$

$\Phi^w(hwaH) = \psi(h)\varphi(a)$ si $h \in H$ et $a \in A$

Pour $w \in W$, on note D_w la fonction définie sur A par

$$D_w(a) = \prod_{\alpha \in \Sigma} \mid (a^{-\alpha} - a^\alpha)\xi_\alpha(w^{-1}H) \mid^2$$

On rappelle la formule d'intégration obtenue dans ([D] Prop. 3 p 314).

Si Ψ est une fonction continue sur $\mathbb{X}$ à support dans $HwaH$, alors on a:

5.3 $\int_{\mathbb{X}} \Psi(gH)d\dot{g} = C_G \int_{H/M} \int_{\mathcal{C}} \Psi(hwaH)D_w(a)dad\dot{h}$

où C_G est une constante.

On fixe $X_0 \in -C$ et on pose $a_t = exp\ tX_0$ pour $t > 0$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$, on définit la fonction $\varphi_t \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ en posant: si $a \in \mathcal{C}$ et si $aa_t \notin \mathcal{C}$ alors $\varphi_t(a) = 0$ et si $a \in \mathcal{C}$ et si $aa_t \in \mathcal{C}$ alors $\varphi_t(a) = \varphi(aa_t)$. On note alors $\Phi_t^w = \Phi^w(\psi, \varphi_t)$.

Maintenant, on fixe x et w dans W. On suppose que $C = -x.C^+$ où C^+ est la chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ définie par Σ. On suppose que $\lambda - 2\rho$ est Σ-strictement dominant.

D'après le théorème 1 p 319 de [D], il existe un élément $u_{\lambda,x}^w$ de $I_{-\lambda}$ tel que l'on ait:

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-x(\lambda+2\rho)} \pi'_\lambda(\Phi_t^w)\xi_\lambda^{Id} = C_G u_{\lambda,x}^w$$

De plus si $x \notin W_H$ alors $u_{\lambda,x}^w = 0$. Ainsi, on obtient:

$$< u_{\lambda,x}^w, \xi_{-\lambda}^y >= \frac{1}{C_G} \lim_{t\to+\infty} a_t^{-x(\lambda+2\rho)} < C(\lambda, Id, y), \Phi_t^w >$$

Nous allons calculer de deux manières différentes $\lim\limits_{t\to+\infty} a_t^{-x(\lambda+2\rho)} < C(\lambda, Id, y), \Phi_t^w >$. Comme la fonction $C(\lambda, Id, y)$ est sphérique et solution propre de $Z(\mathfrak{g})$ pour le caractère défini par λ, il existe des constantes $d_y(w, u, \lambda)$ telles que, pour tout $a \in A_{reg}$ et pour tout $h \in H$, l'on ait

$$C(\lambda, Id, y)(hwaH) = \frac{\sum_{u\in W} d_y(w, u, \lambda)a^{-u\lambda}}{\Delta_T(waH)}$$

où $\Delta_T = \prod_{\alpha\in\Sigma}(1 - \xi_\alpha)\xi_{-\rho}$.

Par construction, la fonction Φ_t^w est à support contenu dans $HwAH$. D'après **??**, on obtient

$$\frac{1}{C_G} < C(\lambda, Id, y), \Phi_t^w >= \int_{H/M} \psi(hM)d\dot{h} \int_{\mathcal{C}} \varphi(a) \frac{\sum_{u\in W} d_y(w, u, \lambda)(aa_{-t})^{-u\lambda}}{\Delta_T(waa_{-t}H)} D_w(aa_{-t})\ da$$

Si $a = exp\ X$, on a

$$\Delta_T(waH) = \prod_{\alpha\in\Sigma}(1-\xi_\alpha(waH))\xi_{-\rho}(waH) = \prod_{\alpha\in\Sigma}(1-\xi_{w^{-1}.\alpha}(aH)\xi_\alpha(wH))\xi_{-w^{-1}\rho}(aH)\xi_{-\rho}(wH)$$

$$= \xi_{-\rho}(wH) \prod_{\alpha\in wx\Sigma} (e^{-w^{-1}.\alpha(X)} - e^{w^{-1}.\alpha(X)}\xi_\alpha(wH)) \prod_{\alpha\in(-wx\Sigma)\cap\Sigma} (-\xi_\alpha(wH))$$

Si $\alpha \in (-wx\Sigma) \cap \Sigma$, comme $X_0 \in xC^+$ alors on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \xi_{w^{-1}\alpha}(aa_{-t}) = 0$. On obtient donc l'équivalent suivant en $+\infty$:

$$\Delta_T(waa_{-t}H) \sim \prod_{\alpha\in wx\Sigma} e^{-w^{-1}\alpha(X-tX_0)} \prod_{\alpha\in(-wx\Sigma)\cap\Sigma} -\xi_\alpha(wH)\xi_{-\rho}(wH)$$

On pose $s(w,x) = \xi_{-\rho}(wH)\prod_{\alpha\in(-wx\Sigma)\cap\Sigma} -\xi_\alpha(wH) = \xi_{-wx\rho}(wH)\varepsilon(w)\varepsilon(x)$ et on obtient

$$\Delta_T(waa_{-t}H) \sim (aa_{-t})^{-2x\rho}s(w,x)$$

On rappelle ([D] lemme 8 (ii) p 325) que l'on a :

$$D_w(aa_{-t}) \sim a_t^{4x\rho}a^{-4x\rho}$$

Maintenant comme $Re(\lambda-2\rho)$ est Σ-strictement dominant et que $X_0 \in x(C^+)$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-x\lambda}\sum_{u\in W} d_y(w,u,\lambda)(aa_{-t})^{-u\lambda} = d_y(w,x,\lambda)a^{-x\lambda}$$

On obtient ainsi

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-x(\lambda+2\rho)}\varphi(a)\frac{\sum_{u\in W} d_y(w,u,\lambda)(aa_{-t})^{-u\lambda}}{\Delta_T(waa_{-t}H)}D_w(aa_{-t}) = d_y(w,x,\lambda)s(w,x)a^{-x(\lambda+2\rho)}$$

Par la démonstration du lemme 8 p 325 de [D], la convergence est dominée. On en déduit le résultat suivant:

Lemme 5.4 *Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}reg}$ tel que $Re(\lambda-2\rho)$ soit strictement Σ-dominant et tel que $\xi^y_{-\lambda}$ soit défini. Soit $x \in W_H$. Alors on a*

$$< u^w_{\lambda,x}, \xi^y_{-\lambda} >= s(w,x)d_y(w,x,\lambda)\int_{H/M}\psi(hM)d\dot{h}\int_{\mathcal{C}}\varphi(a)a^{-x(\lambda+2\rho)}da$$

Comme dans [D], nous allons calculer le produit scalaire $< u^w_{\lambda,x}, \xi^y_{-\lambda} >$ d'une autre manière ce qui déterminera les constantes $d_y(w,x,\lambda)$ pour λ vérifiant les hypothèses du lemme précédent.

Lemme 5.5 *On choisit λ vérifiant les mêmes propriétés que dans le lemme précédent et soit $x \in W_H$. Alors, on a:*

(i) si $w \notin W_H y W_H$ alors $< u^w_{\lambda,x}, \xi^y_{-\lambda} >= 0$,

(ii) si $x \notin Z_H(y^{-1}\sigma(y))$ alors $< u^y_{\lambda,x}, \xi^y_{-\lambda} >= 0$,

(iii) si $x \in Z_H(y^{-1}\sigma(y))$ alors

$$< u^y_{\lambda,x}, \xi^y_{-\lambda} >= (-1)^{|\Sigma\cap y^{-1}.\Sigma_{Inc}|}\prod_{\alpha\in\Sigma}\frac{2}{\lambda(H_\alpha)}\int_{H/M}\psi(hM)d\dot{h}\int_{\mathcal{C}}\varphi(a)a^{-x(\lambda+2\rho)}da$$

et $s(y,x) = \xi_{-\rho}(y^{-1}H)\varepsilon(y)\varepsilon(x)$

Démonstration: Soit w_0 l'élément de plus grande longueur de W (en particulier on a $w_0\Sigma = -\Sigma$).

D'après ([D] lemme 12 p 329), il existe $v^w_{\lambda,x} \in I_{-w_0\lambda}$ tel que $u^w_{\lambda,x} = A'(w_0,\lambda)v^w_{\lambda,x}$. De plus la fonction $v^w_{\lambda,x}$ est à support dans $Hwxw_0AN$. On obtient ainsi

$$< u^w_{\lambda,x}, \xi^y_{-\lambda} >=< v^w_{\lambda,x}, A'(w_0,-w_0\lambda)\xi^y_{-\lambda} >= \prod_{\alpha\in\Sigma}\frac{2\varepsilon(y\alpha)}{-\lambda(H_\alpha)} < v^w_{\lambda,x}, \xi^{yw_0}_{-w_0\lambda} >$$

$$= (-1)^{|\Sigma|}(-1)^{|\Sigma\cap y^{-1}.\Sigma_{comp}|}\prod_{\alpha\in\Sigma}\frac{2}{\lambda(H_\alpha)} < v^w_{\lambda,x}, \xi^{yw_0}_{-w_0\lambda} >$$

$$= (-1)^{|\Sigma\cap y^{-1}.\Sigma_{Inc}|}\prod_{\alpha\in\Sigma}\frac{2}{\lambda(H_\alpha)} < v^w_{\lambda,x}, \xi^{yw_0}_{-w_0\lambda} >$$

Or la fonction $\xi^{yw_0}_{-w_0\lambda}$ est à support contenu dans Hyw_0AN. Donc, si $Hyw_0AN \neq Hwxw_0AN$ alors on a $< u^w_{\lambda,x}, \xi^y_{-\lambda} >= 0$. Or, d'après ([D] proposition 2), ceci est le cas lorsque $w \notin W_H y W_H$ ce qui donne l'assertion (i).

On suppose maintenant que $w = y$. On a $Hyw_0AN = Hyxw_0AN$ si et seulement s'il existe $h \in W_H$ tel que $yx = hy$ c'est-à-dire $x = y^{-1}hy$.

Par hypothèse on a $x \in W_H$. On en déduit alors $xy^{-1}\sigma(y) = y^{-1}h\sigma(y)$ et $y^{-1}\sigma(y)x = y^{-1}\sigma(y)\sigma(x) = y^{-1}h\sigma(y)$. Par suite, on a $x \in Z_H(y^{-1}\sigma(y))$ ce qui donne l'assertion (ii).

On suppose maintenant que $x \in Z_H(y^{-1}\sigma(y))$. Les fonctions $v^y_{\lambda,x}$ et $\xi^{yw_0}_{-w_0\lambda}$ sont à support dans Hyw_0AN. D'après ([D] démonstration du lemme 12 p 329), on obtient

$$< v^y_{\lambda,x}, \xi^{yw_0}_{-w_0\lambda} >= \int_{H/M}\psi(hM)d\dot{h}\int_{\mathcal{C}}\varphi(a)a^{-x(\lambda+2\rho)}da$$

ce qui donne le résultat voulu dans (iii).

Calculons $s(y,x)$ pour $x \in Z_H(y^{-1}\sigma(y))$. On a $s(y,x) = \xi_{-yx\rho}(yH)\varepsilon(y)\varepsilon(x)$ et $x^{-1}y^{-1}y\sigma(y)^{-1}yx = y^{-1}\sigma(y)$. Par suite, on obtient $s(y,x) = \xi_{-\rho}(y^{-1}H)\varepsilon(y)\varepsilon(x)$. ■

Démonstration: du théorème lorsque G est semi-simple: Soit $y \in W$ et soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}\,reg}$ tel que $Re(\lambda - 2\rho)$ soit strictement Σ-dominant et tel que $\xi^y_{-\lambda}$ soit défini. On garde les notations précédentes. En comparant les résultats des deux lemmes précédents, on obtient les assertions suivantes:

(i) si $x \notin Z_H(y^{-1}\sigma(y))$ alors pour tout $w \in W$, on a $d_y(w,x,\lambda) = 0$,

(ii) si $x \in Z_H(y^{-1}\sigma(y))$ et si $w \notin W_H y W_H$ alors $d_y(w,x,\lambda) = 0$,

(iii) si $x \in Z_H(y^{-1}\sigma(y))$ alors

$$d_y(y,x,\lambda) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)\xi_\rho(y^{-1}H)(-1)^{|\Sigma\cap y^{-1}\Sigma_{Inc}|}\prod_{\alpha\in\Sigma}\frac{2}{\lambda(H_\alpha)}$$

On obtient ainsi que $C(\lambda, Id, y)$ est l'unique fonction généralisée sur $\mathbb{X}$ telle que

(*) pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, l'on ait $z.C(\lambda, Id, y) = \gamma_{\mathfrak{t}}(i\lambda)C(\lambda, Id, y)$,

(**) soit $x \in T_{reg}$. Si $x \notin Hyexp\, i\mathfrak{t}$ alors $C(\lambda, Id, y)(x) = 0$

si $x = yexp\, X$ avec $X \in \mathfrak{a}$ alors

$$C(\lambda, Id, y)(x) = \varepsilon(y)\xi_\rho(y^{-1}H)(-1)^{|\Sigma\cap y^{-1}\Sigma_{Inc}|}\prod_{\alpha\in\Sigma}\frac{2}{\lambda(H_\alpha)}\sum_{u\in W_{H_{y^{-1}}}(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})}\frac{\varepsilon(u)e^{-<u\lambda,X>}}{\Delta_T(x)}$$

Comme $C(\lambda, Id, y)(yexp\ X) = C(\lambda, Id, y)(exp(yX)y)$, on en déduit que l'on a

$$C(\lambda, Id, y) = \varepsilon(y)\xi_\rho(yH)(-1)^{|\Sigma\cap y^{-1}\Sigma_{Inc}|}\prod_{\alpha\in\Sigma}\frac{2}{\lambda(H_\alpha)}\Theta(-y\lambda, yH, -\Sigma)$$

En reprenant la formule **??**, on obtient finalement que pour tout y et z dans W, on a

$$C(\lambda, y, z) = \prod_{\alpha\in T(y)}\frac{\varepsilon(\alpha)}{\varepsilon(-zy^{-1})}C(y\lambda, Id, zy^{-1})$$

$$= \prod_{\alpha\in T(y)}\frac{\varepsilon(\alpha)}{\varepsilon(-zy^{-1}.\alpha)}\varepsilon(zy^{-1})\xi_\rho(zy^{-1}H)(-1)^{|\Sigma\cap yz^{-1}\Sigma_{Inc}|}\prod_{\alpha\in\Sigma}\frac{2}{y.\lambda(H_\alpha)}\Theta(-z\lambda, zy^{-1}H, -\Sigma)$$

■

Démonstration: **du théorème lorsque** G **est réductif**. Nous allons pour cela utiliser le prolongement de distributions sphériques d'un espace semi-simple à un espace réductif décrit dans ([H4] paragraphe 5). Rappelons la définition de ce prolongement:

Soit G_1 le groupe dérivé de G et Z la composante connexe neutre de son centre. On pose $H_1 = H \cap G_1$ et $\mathbb{X}_1 = G_1/H_1$. On écrit $\mathfrak{h} = \mathfrak{c} + \mathfrak{h}_1$ où $\mathfrak{c}$ est le centre de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_1$ son algèbre dérivée.

Soit $g_1, \dots g_p$ un système de représentants de $G_1 \cap (ZH)/H_1$ dans $N_{G_1}(\mathfrak{t}_1)$ tels que $g_j\sigma(g_j)^{-1} \in H_1$. Ceci est possible puisque pour $g \in G_1 \cap (ZH)$, l'élément $g\sigma(g)^{-1}$ est central dans G_1. Pour tout $j \in \{1, \dots p\}$, il existe donc $x_j \in H$ et $z_j = exp\ iZ_j \in Z$ tels que $g_j = x_j z_j$. On note p_0 l'application de $\mathbb{X}_1 \times Z/Z \cap H$ dans $\mathbb{X}$ qui à $(p(g), z)$ associe $p(gz)$.

Soit Θ est une fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}_1$ et χ un caractère unitaire de Z trivial sur $Z \cap H$. On peut définir la fonction $\tilde{\Theta}$ sur $\mathbb{X}_{reg}$ en posant, pour $\gamma = p_0(\gamma_1, z)$:

$$\tilde{\Theta}(\gamma) = \sum_{p_0(x,z)=\gamma}\Theta(x)\chi(z) = \sum_{k=1}^{p}\Theta(\gamma_1.g_k)\chi(z\ z_k^{-1})$$

Ceci définit une fonction généralisée sur $\mathbb{X}$ solution propre des opérateurs différentiels G-invariants sur $\mathbb{X}$. Elle est $(Z\cap H)H_1$ invariante mais non H-invariante ([H4] paragraphe 5). On définit alors le prolongement $pr(\Theta, \chi)$ de Θ à $\mathbb{X}$ par le caractère χ en posant, pour $\gamma = p_0(\gamma_1, z) \in \mathbb{X}_{reg}$

$$prol(\Theta, \chi)(\gamma) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\Theta(g_j^{-1}\gamma_1.g_k)\chi(zz_jz_k^{-1})$$

On note $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}_1$. On peut donc écrire $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$ avec $\lambda_0 \in \Gamma_{\mathfrak{t}}^*$ et $\lambda_1 \in \mathfrak{t}_{1\ reg}^*$. Soit χ le caractère de Z définit par: si X et Y sont dans $\mathfrak{c}$ alors $\chi(exp(X + iY)) = e^{i<\lambda_0, Y>}$.

Soit y et z dans W et soit $C(\mathbb{X}_1, \lambda_1, y, z)$ le coefficient de la série principale sur $\mathbb{X}_1$ défini comme précédemment. D'après ([H 4] prop.5.4), on a

$$C(\lambda, y, z) = pr(C(\mathbb{X}_1, \lambda_1, y, z), \chi)$$

Pour obtenir le théorème dans le cas réductif, il suffit de prouver le résultat suivant: soit $y \in \mathcal{W}_t$ et soit Θ_1 la fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}_1$ définit dans le théorème **??**. Alors on a

$$prol(\Theta_1, \chi) = \Theta(\lambda, y, \psi) \qquad (*)$$

On pose $\Theta = prol(\Theta_1, \chi)$. Par le théorème d'unicité, il suffit de prouver l'égalité (*) en tout point de T_{reg}.

Soit $\gamma \in T_{reg}$. Pour j et l dans $\{1, \ldots, p\}$, on a $\Theta_1(g_j^{-1}\gamma g_l) \neq 0$ si et seulement si $g_j^{-1}\gamma g_l \in exp\ i\mathfrak{t}_1 W_{H_1}(\mathfrak{t}_1).y$. Ceci implique que $\gamma \in exp\ i\mathfrak{t}W_H(\mathfrak{t}).y$. Donc, pour $\gamma \notin exp\ i\mathfrak{t}W_H(\mathfrak{t}).y$, on a $\Theta(\gamma) = 0$.

Supposons donc que $\gamma = exp\ i(X_0 + X_1).y$ avec $X_0 \in \mathfrak{c}$ et $X_1 \in \mathfrak{t}_1$. On a alors

$$\Theta(\gamma) = \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{p} \Theta_1(exp\ i(g_j^{-1}.X_1)g_j^{-1}yg_k)e^{i<\lambda_0, X_0+Z_j-Z_k>}$$

Soit $(j,k) \in \{0, \ldots, p\}^2$ tels que $g_j^{-1}yg_k = exp\ iX\ h.y$ avec $X \in \mathfrak{t}_1$ et $h \in H_1$. Dans ce cas, on a $exp\ 2iX\ h\varphi(y)h^{-1} = h_j\varphi(y)h_j^{-1}exp\ 2i(Z_k - Z_j)$. Comme $exp\ 2i(Z_k - Z_j)$ et $\varphi(y)$ sont dans H_1, on a $exp\ 2iX \in H_1$ ce qui est équivalent à $exp\ 4iX = 1$. Comme $X \in \mathfrak{t}_1$ ceci implique que $X = 0$.

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des (j,k) tels qu'il existe $h_{j,k} \in H_1$ vérifiant $g_j^{-1}yg_k = h_{j,k}y$. On alors

$$\Theta(\gamma) = \sum_{(j,k)\in\mathcal{I}} \frac{\sum_{w\in W_{H_1\,y}(\mathfrak{t}_1)} \varepsilon(w)e^{i<g_jh_{j,k}w.\lambda_1, X_1>}e^{i<\lambda_0, X_0+Z_j-Z_k>}}{\Delta_T(exp\ ih_{j,k}^{-1}g_j^{-1}X_1y)}$$

Or, on a $exp\ ih_{j,k}^{-1}g_j^{-1}X_1y = h_{j,k}^{-1}g_j^{-1}exp\ iX_1yg_k$. Comme $\varphi(g_k)$ est central dans G, on obtient $\Delta_T(exp\ ih_{j,k}^{-1}g_j^{-1}X_1y) = \varepsilon(h_{j,k})\varepsilon(g_j)\Delta_T(\gamma)$. Par suite, on a

$$(\Delta_T\Theta)(\gamma) = \sum_{(j,k)\in\mathcal{I}} \varepsilon(h_{j,k})\varepsilon(g_j) \sum_{w\in W_{H_1\,y}(\mathfrak{t}_1)} \varepsilon(w)e^{i<g_jh_{j,k}w.\lambda_1, X_1>}e^{i<\lambda_0, X_0+Z_j-Z_k>}$$

Montrons que $W_H^y(\mathfrak{t})/W_{H_1\,y}(\mathfrak{t}_1)$ est isomorphe à $\mathcal{I}$. Soit $h \in W_H^y(\mathfrak{t})$. On a donc $h.y = exp\ iY_h.y$ avec $2Y_h \in \Gamma_\mathfrak{t} \subset \mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}$. D'après ([H4] lemme 5.2), on a $H = \cup_{j=0}^{p}(Z \cap H)x_jH_1$. Il existe donc un unique $j \in \{0, \ldots, p\}$ et des éléments $z \in Z \cap H$ et $h_1 \in H_1$ tels que $h = zx_jh_1$. Notons $y = p(g)$ avec $g \in G_1$. On a alors $h_1\varphi(y)h_1^{-1} = exp\ 2iY_hg_j^{-1}\varphi(y)g_j = exp\ 2i(Y_h + Z_j)\varphi(g_j^{-1}y) = g_j^{-1}gexp\ 2i(Y_h + Z_j)\sigma(g_j^{-1}g)^{-1}$. Par conséquent, on a $g^{-1}g_jh_1g \in G_1 \cap (ZH)$. Il existe donc $k \in \{0, \ldots, p\}$ tel que $h_1.y = g_j^{-1}.yg_k$. On a donc $(j,k) \in \mathcal{I}$. De plus, on a $h_1^{-1}h_{j,k} \in W_{H_1\,y}(\mathfrak{t}_1)$ et $Y_h + Z_j - Z_k \in \Gamma_\mathfrak{t}$.

On vient donc de définir une application Ψ de $W_H^y(\mathfrak{t})$ dans $\mathcal{I}$.

Soit $(j,k) \in \mathcal{I}$. On a alors $x_jh_{j,k}y = x_jg_j^{-1}yg_k = z_j^{-1}yg_k = exp\ i(Z_k - Z_j).y$. On a donc $h = x_jh_{j,k} \in W_H^y(\mathfrak{t})$ et $Y_h = Z_k - Z_j$ modulo $\Gamma_\mathfrak{t}$. Ceci assure la surjectivité de Ψ.

Soit h et h' dans $W_H^y(\mathfrak{t})$ tels que $\Psi(h) = \Psi(h') = (j,k)$. On peut alors écrire $h = zx_jh_{j,k}h_1$ et $h' = z'x_jh_{j,k}h_1'$, où z et z' sont dans $Z \cap H$ et h_1 et h_1' sont dans $W_{H_1\,y}(\mathfrak{t}_1)$. On a alors $h^{-1}h' = h_1^{-1}h_1'z^{-1}z'$ et donc $Ad(h^{-1}h') \in W_{H_1\,y}(\mathfrak{t}_1)$.

L'application Ψ induit donc un isomorphisme de $W_H^y(\mathfrak{t})/W_{H_1\,y}(\mathfrak{t}_1)$ dans $\mathcal{I}$.

On obtient ainsi

$$(\Delta_T\Theta)(\gamma) = \sum_{h\in W_H^y(\mathfrak{t})/W_{H_1\,y}(\mathfrak{t}_1)} \sum_{w\in W_{H_1\,y}(\mathfrak{t}_1)} \varepsilon(h)\varepsilon(w)e^{i<hw\lambda, X_1+X_0+Y_h>} = \Delta_T\Theta(\lambda, y, \psi)(\gamma)$$

Ceci achève la démonstration du théorème. ∎

6 Autres séries de fonctions généralisées sphériques

Dans cette partie, on ne fait plus d'hypothèses sur $\mathfrak{h}$.

Soit $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$. On écrit $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_I + \mathfrak{a}_R$ comme en **??**. Soit L le centralisateur de $\mathfrak{a}_R$ dans G et soit $\mathfrak{l}$ son algèbre de Lie. On rappelle ([H 3] paragraphe 6) que le groupe L est réductif complexe connexe de groupe dérivé simplement connexe. De plus, il est σ-stable et $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de type compact de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}$. On pose $\mathbb{X}_L = L/L \cap H$. Soit $A \in Car(\mathbb{X})$ associé à $\mathfrak{a}$. D'après ([H 2] démonstration du lemme 2.3), on a $A = N_G(\mathfrak{a})/N_H(\mathfrak{a}) = N_L(\mathfrak{a})/N_{L\cap H}(\mathfrak{a})$.

Soit $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$. Il est facile de voir que $y \in \mathbb{X}_L$. Soit ψ un système positif de racines imaginaires de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$ (c'est un système positif des racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{l}$). Soit $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_{I-reg}^*$. Soit $\Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)$ la fonction généralisée sphérique sur $\mathbb{X}_L$ définie par le théorème **??**. On pose alors

$$\Theta(\lambda, y, \psi) = ind_L^G\Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)$$

l'induction de fonctions généralisées sphériques étant définie dans ([H3] Thm 2.1).

Pour $w \in W_H(\mathfrak{a})$, on définit la signature imaginaire $\varepsilon_I(w)$ de w de la manière suivante: $\varepsilon_I(w) = (-1)^{|\psi\cap -w^{-1}.\psi|}$.

Théorème 6.1 *La fonction généralisée sphérique $\Theta(\lambda, y, \psi)$ vérifie les propriétés suivantes:*

(i) Pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a $z.\Theta(\lambda, y, \psi) = \gamma_{\mathfrak{a}}(z)(i\lambda)\Theta(\lambda, y, \psi)$,

(ii) Soit $B \in Car(\mathbb{X})$ associé à $\mathfrak{b} \in Car(\mathfrak{h})$. Si $\mathfrak{b}$ n'est pas H-conjuguée à une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}$ alors $\Theta(\lambda, y, \psi)_{/B_{reg}} = 0$,

(iii) Soit $a \in A_{reg}$. Si $a \notin exp\ i\mathfrak{a}W_H(\mathfrak{a}).y$ alors $\Theta(\lambda, y, \psi)(a) = 0$ et si $a = exp\ iX.y$ alors

$$\Theta(\lambda, y, \psi)(a) = \frac{\sum_{w\in W_H^y(\mathfrak{a})} \varepsilon_I(w)e^{i<w\lambda, X+Y_w>}}{\mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \xi_{\rho_\psi}(y)b_\psi(a)}$$

(iv) Soit $\lambda_0 \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$. Alors la fonction $\lambda \to \prod_{\alpha\in\psi_y}(1-e^{-i\pi\lambda(H_\alpha)})\Theta(\lambda_0+\lambda, y, \psi)$ se prolonge analytiquement à $\mathfrak{a}_I^*$,

(v) La fonction $\mid D_{\mathbb{X}} \mid^{1/2} \Theta(\lambda, y, \psi)_{/\mathbb{X}_{reg}}$ est bornée sur $\mathbb{X}_{reg}$,

(vi) Pour tout $u \in W_{L\cap H}(\mathfrak{a})$, on a

$$\Theta(u\lambda, y, \psi) = \varepsilon(u)\Theta(\lambda, u^{-1}y, \psi)$$

(vii) pour tout $Y \in \frac{1}{2}\Gamma_{\mathfrak{a}}$, on a

$$\Theta(\lambda, exp\ iY.y, \psi) = e^{i<\lambda,Y>}\Theta(\lambda, y, \psi)$$

Démonstration: Pour $\mathfrak{b} \in Car(\mathfrak{h})$, on note $\mathcal{N}_H^{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{l}}(\mathfrak{b})$ l'ensemble des $h \in H$ tel que $h.\mathfrak{b} \in Car(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h})$. On rappelle que par définition de l'induite, si $b \in B_{reg}$ alors, on a

$$\Theta(\lambda, y, \psi)(b) =\mid D_{\mathbb{X}}(b) \mid^{-1/2} \Big(\sum_{h\in H\cap L\backslash\mathcal{N}_H^{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{l}}(\mathfrak{b})} \Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)(h.b) \mid D_{\mathbb{X}_L}(h.b) \mid^{1/2}\Big)$$

Les assertions (i) et (ii) deviennent immédiates. Les propriétés (iv) et (v) découlent du théorème 3.1 (2) et du théorème 4.1 (i) appliqués à $\Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)$. L'assertion (vi) découle du corollaire 2.3 (ii) appliqué à $\Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)$.

Soit $a \in A_{reg}$ et $h \in \mathcal{N}_H^{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{l}}(\mathfrak{a})$. Pour que $\Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)(h.a)$ soit non nulle, il faut que $h.a \in exp\ ih.\mathfrak{a}.W_{L\cap H}(h.\mathfrak{a}).y$.

Donc si $a \notin exp\ i\mathfrak{a}.W_H(\mathfrak{a}).y$, on a $\Theta(\lambda, y, \psi)(a) = 0$.

Soit $X \in \mathfrak{a}_{reg}$ tel que $a = exp\ iX.y$. Si $h \in \mathcal{N}_H^{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{l}}(\mathfrak{a})$ alors les algèbres $\mathfrak{a}$ et $h.\mathfrak{a}$ sont $L\cap H$-conjuguées puisqu'elles sont fondamentales dans $\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h}$. On a donc

$$\Theta(\lambda, y, \psi)(a) =\mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{-1/2} \Big(\sum_{h\in W_{L\cap H}(\mathfrak{a})\backslash W_H(\mathfrak{a})} \Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)(h.a) \mid D_{\mathbb{X}_L}(h.a) \mid^{1/2}\Big)$$

Maintenant, si $\Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)(h.a) \neq 0$, il existe $h_1 \in H\cap L$ tel que $h.a \in exp\ ih.\mathfrak{a}h_1.y$. Par le choix de y ceci implique que $h_1^{-1}h \in W_H^y(\mathfrak{a})$. On en déduit donc que l'on a

$$\Theta(\lambda, y, \psi)(a)$$

$$=\mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{-1/2} \sum_{h\in W^y_{(L\cap H)}(\mathfrak{a})\backslash W_H^y(\mathfrak{a})} \frac{\sum_{w\in W^y_{(L\cap H)}(\mathfrak{a})} \varepsilon(w) e^{i<w\lambda, h.X+Y_h>} e^{i<\lambda, Y_w>}}{\prod_{\alpha\in\psi}(1-\xi_{-\alpha}(hexp\ iX.y))\xi_{\rho_\psi}(hexp\ iX.y)} \mid D_{\mathbb{X}_L}(h.a) \mid^{1/2}$$

Or $\frac{|D_{\mathbb{X}_L}(h.a)|^{1/2}}{\prod_{\alpha\in\psi}(1-\xi_{-\alpha}(h.a))\xi_{\rho_\psi}(h.a)} = \frac{|\xi_{\rho_\psi}(h.a)|}{\xi_{\rho_\psi}(h.a)} b_\psi(h.a) = \xi_{\rho_\psi}(y)\varepsilon_I(h)b_\psi(a)$. On obtient donc

$$\Theta(\lambda, y, \psi)(a) = \sum_{w\in W_H^y(\mathfrak{a})} \varepsilon_I(w) e^{i<w\lambda, X+Y_w>} \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{-1/2} \xi_{\rho_\psi}(y) b_\psi(a)$$

Il reste à prouver l'assertion (vii). Par construction, il suffit de prouver cette propriété pour $\Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)$ et par le théorème d'unicité il suffit de la montrer en chaque point de A_{reg}. Soit $x \in A_{reg}$. Si $x \notin exp\ i\mathfrak{a}.W_H(\mathfrak{a}).y$, on a $\Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)(x) = 0 = \Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, exp\ iY.y, \psi)(x)$. Soit $x = exp\ iX.y$. On a alors

$$\Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, exp\ iY.y, \psi)(x) = \Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, exp\ iY.y, \psi)(exp\ i(X-Y)exp\ iY.y)$$

$$= D_{\mathbb{X}}(x) \mid^{-1/2} \xi_{\rho_\psi}(exp\ iY.y) b_\psi(x) \sum_{w \in W_{L\cap H}^{exp\ iY.y}(\mathfrak{a})} \varepsilon(w) e^{i<w\lambda, X-Y+Y_w>}$$

Or Y est central dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}$ et donc on a $W_{L\cap H}^{exp\ iY.y}(\mathfrak{a}) = W_{L\cap H}^{y}(\mathfrak{a})$ et $\xi_{\rho_\psi}(exp\ iY.y) = \xi_{\rho_\psi}(y)$. On obtient donc le résultat voulu. ■

Pour $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_I^*$, on se donne une fonction $F(\lambda)$ définie sur $\mathbb{X}_{reg}$ et vérifiant les propriétés suivantes:

(i) $F(\lambda)$ est H-invariante et bornée sur $\mathbb{X}_{reg}$,

(ii) pour $\lambda_0 \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$, la fonction qui à λ associe $F(\lambda + \lambda_0)$ est analytique sur $\mathfrak{a}_I^*$,

(iii) soit $\mathfrak{b} \in Car(\mathfrak{h})$. Soit $x \in G$ tel que $x.\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$. Soit B le sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ associé à $\mathfrak{b}$. On suppose que , pour tout $z \in \mathcal{W}_{\mathfrak{b}}$, pour tout $w \in W_G(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ et pour toute composante connexe $\mathcal{C}$ de l'ensemble des $X \in \mathfrak{b}$ tels que $exp\ iX.z \in B_{reg}$, il existe des constantes $d(z, w, \mathcal{C}, \lambda)$ telles que, pour tout $X \in \mathcal{C}$, l'on ait:

$$F(\lambda)(exp\ iX.z) = \sum_{w \in W_G(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})} d(z, w, \mathcal{C}, \lambda) e^{i<wx.\lambda, X>}$$

On suppose de plus qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(z, w, \mathcal{C}, \lambda)$ l'on ait $\mid d(z, w, \mathcal{C}, \lambda) \mid < C$.

Théorème 6.2 *(i) Soit $\gamma \in \mathbb{X}_{reg}$. Soit $\lambda_0 \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$. Alors, la fonction qui à λ associe $\sum_{w \in W_{L_y}(\mathfrak{a})} F(w(\lambda_0 + \lambda))(\gamma)\Theta(w(\lambda_0 + \lambda), y, \psi)$ se prolonge en une fonction analytique sur $\mathfrak{a}_I^*$,*

(ii) Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ et N un entier strictement positif. Soit $B \in Car(\mathbb{X})$ et $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$. Soit U un compact de B. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\gamma \in U_{reg}$, l'on ait

$$\mid \sum_{w \in W_{L_y}(\mathfrak{a})} \partial(u) F(w\lambda)(\gamma) < \Theta(w\lambda, y, \psi), f > \mid \leq \frac{C}{(1 + \parallel \lambda \parallel)^N}$$

Démonstration: L'assertion (i) se démontre comme la proposition **??**.

Pour prouver (ii), il suffit de montrer (comme pour le corollaire **??**), l'assertion suivante:

Il existe une constante $C > 0$ et un entier positif k tels que, pour tout $\gamma \in U_{reg}$ et pour tout $x \in \mathbb{X}_{reg}$ l'on ait

6.3

$$\mid \sum_{w \in W_{L_y}(\mathfrak{a})} \partial(u) F(w(\lambda_0 + \lambda))(\gamma)\Theta(w(\lambda_0 + \lambda), y, \psi)(x) D_{\mathbb{X}}(x)^{1/2} \mid \leq C(1 + \parallel \lambda \parallel)^k$$

Soit $x \in \mathbb{X}_{reg}$ et soit B' l'unique sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$, associé à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{b}'$, contenant x. Comme $\Theta(\lambda, y, \psi) = ind_{\mathbb{X}_L}^{\mathbb{X}} \Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)$, on a

$$\sum_{w \in W_{L_y}(\mathfrak{a})} \partial(u) F(w\lambda)(\gamma) \Theta(w\lambda, y, \psi)(x) \mid D_{\mathbb{X}}(x) \mid^{1/2}$$

$$= \sum_{h \in L \cap H \backslash \mathcal{N}_H^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l}}(\mathfrak{b}')} \sum_{w \in W_{L_y}(\mathfrak{a})} \partial(u) F(w\lambda)(\gamma) \Theta(\mathbb{X}_L, w\lambda, y, \psi)(h.x) \mid D_{\mathbb{X}_L}(h.x) \mid^{1/2}$$

Il suffit donc de prouver l'assertion **??** où l'on a remplacé $\Theta(w\lambda, y, \psi)(x) \mid D_{\mathbb{X}}(x) \mid^{1/2}$ par $\Theta(\mathbb{X}_L, w\lambda, y, \psi)(x) \mid D_{\mathbb{X}_L}(x) \mid^{1/2}$. Le résultat voulu se démontre alors comme le théorème **??**. ■

Nous allons maintenant exprimer les fonctions $\Theta(\lambda, eH, \psi)$ en terme de coefficients de représentations unitaires irréductibles de G.

On fixe $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_{I\,reg}^*$. On note ψ_λ l'ensemble des racines imaginaires α de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$ telles que $-i\lambda(H_\alpha) > 0$ et ψ_{Inc} l'ensemble des racines imaginaires non compactes de ψ_λ. Soit $L = Z_G(\mathfrak{a}_R)$ et soit P un sous-groupe parabolique σ-stable de G de sous-groupe de Lévi L. On note $P = LU$. Soit $B = exp(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})N$ le sous-groupe de Borel de G contenu dans P tel que $\psi_\lambda \subset \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ (où $\mathfrak{n}$ désigne l'algèbre de Lie de N).

On considère le caractère χ_λ de B défini par $\chi_\lambda(exp(X + iY)n) = e^{i<\lambda, Y>}$ et on note $\pi_\lambda = ind_B^G \chi_\lambda$. Soit $\mathcal{H}_\lambda$ l'espace de cette représentation. D'après ([Br] Thm. 7.4 p 203) cette représentation est unitaire et irréductible.

On pose
$$C(\lambda) = (-1)^{|\psi_{Inc}|}(i)^{|\psi_\lambda|}\Theta(-\lambda, eH, \psi_\lambda)$$

Proposition 6.4 *Pour presque tout $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_{I\,reg}^*$, il existe $v_\lambda \in \mathcal{H}_\lambda^{-\infty, H}$ tel que*

$$C(\lambda)(x) = < \pi_\lambda(x) v_\lambda, v_\lambda >$$

Démonstration: Soit $B_0 = B \cap L$ et soit $\tau = ind_{B_0}^L(\chi_{\lambda\,/B_0})$. On a alors $\pi_\lambda = ind_P^G \tau \otimes Id_U$.

D'après le théorème **??**, pour presque tout $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_{I\,reg}^*$, il existe un vecteur $v_\tau \in \mathcal{H}_\tau^{-\infty,\, L \cap H}$ tel que l'on ait

$$< \tau(l) v_\tau, v_\tau > = (-1)^{|\psi_{Inc}|}(i)^{|\psi_\lambda|}\Theta(\mathbb{X}_L, -\lambda, eH, \psi_\lambda)(l)$$

Maintenant, on a $C(\lambda) = ind_{\mathbb{X}_L}^{\mathbb{X}}((-1)^{|\psi_{Inc}|}(i)^{|\psi_\lambda|}\Theta(\mathbb{X}_L, -\lambda, eH, \psi_\lambda))$. Le corollaire 2.6 de [H3] assure alors l'existence de $v_\lambda \in \mathcal{H}_\lambda^{-\infty, H}$ tel que $C(\lambda)(x) = < \pi_\lambda(x) v_\lambda, v_\lambda >$ pour presque tout λ. ■

References

[vdB] E.P. van den Ban, The principal series for a reductive symmetric space I, H-fixed distribution vectors, Ann. Scient. de l'E.N.S. 21 (1988), 175-187,

[B1] A. Bouaziz, Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes, J. Funct. Anal. 70 (1987), 1-79,

[B2] A. Bouaziz, Formule d'inversion des intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs (à paraître au J. Funct. Anal.),

[Bou] N. Bourbaki, Variétés différentiables et analytiques. Fascicule de résultats, Hermann,Paris 1977,

[Br] F. Bruhat, Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), 97-205,

[C-D] J. Carmona et P. Delorme, Base méromorphe de vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs; Equation fonctionnelle, J. of Funct. Anal. 122 (1994), 152-221,

[D] P. Delorme, Coefficients généralisés de séries principales sphériques et distributions sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, Invent. Math. 105 (1991), 305-346,

[H1] P. Harinck, Fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, thèse de doctorat, université Paris 7,

[H2] P. Harinck, Fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 23 (1990), 1-38,

[H3] P. Harinck, Fonctions généralisées sphériques induites sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ et applications, J. of Funct. Anal. 103 (1992), 104-127,

[H4] P. Harinck, Correspondance de distributions sphériques entre deux espaces symétriques du type $G_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$, J. of Funct. Anal. 124 (1994), 427- 474,

[H5] P. Harinck, Inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel pour $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, C.R.Acad. Sci. Paris, t 320 (1995), 1295-1298,

[H6] P. Harinck, Fonctions orbitales sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel, prépublication,

[He] S. Helgason, Fundamental solutions of invariant differential operators on symmetric spaces, Amer. J. Math. 86 (1964),565-601,

[O] G. Olafsson, Fourier and Poisson transformation associated to a semisimple symmetric space, Inv. Math. 90 (1987), 605-629, [O-V] A.L. Onishik et E. B. Vinberg, Lie Groups and Algebraic Groups, Springer- Verlag Berlin Heidelberg (1990),

[S] S. Sano, Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples $G_{\mathbb{C}}/G$, J. of Math. of Kyoto univ., 31 (1991), 377-417,

[Sc] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, Paris 1978,

[V] V. S. Varadarajan, Harmonic analysis on real reductive groups, Lecture Notes in Mathematics 576, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New-York 1977.