Correspondance de distributions sphériques entre deux espaces symétriques du type G_C/G_R

Pascale Harinck[1]

Introduction

Soit G un groupe de Lie semi-simple complexe, connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit σ et τ deux involutions de $\mathfrak{g}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) les algèbres $\mathfrak{g}^\sigma$ et $\mathfrak{g}^\tau$ des points de $\mathfrak{g}$ fixés respectivement par σ et τ sont des formes réelles de $\mathfrak{g}$,
(2) le groupe G^τ des points de G fixés par τ est quasi-déployé,
(3) l'automorphisme $\sigma\tau$ est intérieur.

Le but de cet article est d'établir sous ces hypothèses une correspondance entre les distributions dites stablement invariantes de G/G^τ et celles de G/G^σ.

La notion de distribution stablement invariante est introduite à partir de celle d'intégrale invariante stable.

Dans [S], D. Shelstad caractérise les intégrales orbitales stables d'une fonction de l'espace d'Harish-Chandra Schwartz d'un groupe algébrique réductif. Ceci lui permet d'obtenir une correspondance entre les intégrales orbitales stables puis les distributions tempérées stables de deux groupes réductifs G et G', formes intérieures d'un même groupe algébrique réductif connexe quasi-déployé, où G' est en outre quasi-déployé.

Les méthodes utilisées par D. Shelstad s'adaptent à la situation décrite précédemment et on obtient des résultats similaires.

Dans la partie I (paragraphes 1 à 3), nous donnons une caractérisation des intégrales invariantes stables.

Fixons pour l'instant une involution η de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g}^\eta$ soit une forme réelle de $\mathfrak{g}$. On note $\mathbb{X}_\eta = G/G^\eta$, p la projection canonique de G sur $\mathbb{X}_\eta$ et φ_η la bijection de $\mathbb{X}_\eta$ sur son image $M_\eta \subset G$ qui à $p(g)$ associe $g\eta(g)^{-1}$.

Pour un élément γ de $\mathbb{X}_{\eta,reg}$, l'ensemble des éléments réguliers de $\mathbb{X}_\eta$ (c'est-à-dire $\varphi_\eta(\gamma)$ régulier dans G), on définit l'orbite stable de γ et on la note $< \gamma >$ comme étant l'ensemble des $x \in \mathbb{X}_\eta$ tels que $\varphi_\eta(x)$ et $\varphi_\eta(\gamma)$ soient G-conjugués. Cette orbite se décompose en un

[1]CNRS-URA 748, UFR de Mathématiques, Tour 45-55 5ème étage, 2 Place Jussieu 75251 PARIS Cédex 05

nombre fini de G^η orbites. Plus précisément on a $<\gamma>= \bigcup_{x\in\mathcal{S}_\gamma} G^\eta.\gamma^x$ où $\mathcal{S}_\gamma$ est le quotient à gauche par G^η et à droite par le centralisateur dans G^η de $\varphi_\eta(\gamma)$ de l'ensemble des $g\in G$ tels que $g\varphi_\eta(\gamma)g^{-1}\in M_\eta$ et γ^x est l'unique élément de $\mathbb{X}_\eta$ vérifiant $x\varphi_\eta(\gamma)x^{-1}=\varphi_\eta(\gamma^x)$.

Pour $f\in\mathcal{D}(\mathbb{X}_\eta)$ (c'est-à-dire C^∞ et à support compact dans $\mathbb{X}_\eta$), on définit l'intégrale invariante de f sur $\mathbb{X}_{\eta,reg}$ et on la note $\mathcal{M}(f)$, de la manière suivante : soit $\gamma\in\mathbb{X}_{\eta,reg}$. Soit $\mathfrak{a}=Z_{\mathfrak{g}^\eta}(\varphi_\eta(\gamma))$ le centralisateur dans $\mathfrak{g}^\eta$ de $\varphi_\eta(\gamma)$. C'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^\eta$. Soit $Z_{G^\eta}(\mathfrak{a})$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans G^η. On pose

$$\mathcal{M}(f)(\gamma)=\mid det(1-Ad\varphi_\eta(\gamma))_{\mathfrak{g}^\eta/\mathfrak{a}}\mid^{1/2}\int_{G^\eta/Z_{G^\eta}(\mathfrak{a})} f(g.\gamma)dg$$

On définit alors l'intégrale invariante stable de f et on la note $\mathcal{M}^{st}(f)$ par

$$\mathcal{M}^{st}(f)(\gamma)=\sum_{x\in\mathcal{S}_\gamma}\mathcal{M}(f)(\gamma^x)$$

Dans [B3], A. Bouaziz donne une caractérisation des intégrales invariantes. Nous rappelons ici ses résultats (paragraphe 2). Nous généralisons ensuite ces résultats pour les intégrales invariantes stables (paragraphe 3).

L'intégrale invariante stable d'une fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{X}_{\eta,reg}$ et elle est constante sur les orbites stables. Elle vérifie de plus les propriétés I_1^{st}, I_2^{st} et I_3^{st} énoncées dans le paragraphe 3. On note $I\mathcal{D}^{st}(\mathbb{X}_\eta)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{X}_{\eta,reg}$, constante sur les orbites stables et vérifiant les propriétés I_i^{st}. On munit $I\mathcal{D}^{st}(\mathbb{X}_\eta)$ d'une structure d'espace LF (définition de [T1] chapitre 13) de telle sorte que l'application $\mathcal{M}^{st}$ soit continue.

On note $I\mathcal{D}^{st}(\mathbb{X}_\eta)'$ son dual topologique et on note $\mathcal{D}(\mathbb{X}_\eta)'_{st}$ la clôture, pour la topologie faible, de l'espace vectoriel engendré par les $f\to\mathcal{M}^{st}(f)(\gamma)$ où $\gamma\in\mathbb{X}_{\eta,reg}$. Les éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{X}_\eta)'_{st}$ sont appelées distributions stablement invariantes. On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.12 (i) L'application $\mathcal{M}^{st}$ est surjective de $\mathcal{D}(\mathbb{X}_\eta)$ dans $I\mathcal{D}^{st}(\mathbb{X}_\eta)$,
(ii) Sa transposée ${}^t\mathcal{M}^{st}$ est une bijection de $I\mathcal{D}^{st}(\mathbb{X}_\eta)'$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{X}_\eta)'_{st}$.

Dans la deuxième partie de cet article (paragraphes 4 à 7), nous contruisons des séries de distributions sphériques stablement invariantes.

On rappelle qu'une distribution sur $\mathbb{X}_\eta$ est dite sphérique si elle est G^η-invariante et si elle est solution propre des opérateurs différentiels G-invariants sur $\mathbb{X}_\eta$. Une distribution sphérique est localement intégrable sur $\mathbb{X}_\eta$ et analytique sur $\mathbb{X}_{\eta,reg}$ ([Sa] théorème 4.3).

Nous généralisons les résultats de [H2] au cas d'un espace symétrique réductif du type $G_\mathbb{C}/G_\mathbb{R}$. (paragraphe 5). Ceci permet d'obtenir l'existence et l'unicité d'une série "la plus continue" sur $G_\mathbb{C}/G_\mathbb{R}$ (théorème 5.11). On l'exprime d'une part en fonction de transformées de Fourier d'orbites de la représentation coadjointe, d'autre part en terme de coefficients de représentations unitaires irréductibles de $G_{\mathbb{C}}$ (corollaire 5.7 et théorème 5.10).

Ensuite, on applique le procédé d'induction décrit dans [H3]. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^{\eta}$. Soit $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ la partie vectorielle de $\mathfrak{a}$. On note L le centralisateur dans G de $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{l}$ son algèbre de Lie , $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}_1$ sa partie dérivée. On note $\Gamma^*_{\mathfrak{a}}$ le réseau du dual $(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}^{\eta})^*$ de $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}^{\eta}$ formé des λ tels que pour tout $X \in \mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}^{\eta}$ vérifiant $exp 2iX = 1$, l'on ait $\lambda(X) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Soit $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{l}_1$. A chaque $\mu \in \Gamma^*_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}^*_{1,reg}$, on associe une distribution sphérique $\theta(\eta, \mu)$ sur $\mathbb{X}_{\eta}$. Elle est définie positive et extrémale (corollaire 6.5) et ne dépend que de l'orbite $(L \cap G^{\eta}).\mu$ de μ. Ceci permet de poser

$$\theta^{st}(\eta, \mu) = \sum_{w \in W_{L \cap G^{\eta}}(\mathfrak{a}) \backslash W_L(\mathfrak{a})} \theta_{w\mu}$$

où $W_L(\mathfrak{a})$ (respectivement $W_{L \cap G^{\eta}}(\mathfrak{a})$) est le quotient du normalisateur par le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans L (respectivement $L \cap G^{\eta}$).

Les distributions sphériques étant localement intégrables et analytiques sur $\mathbb{X}_{\eta,reg}$, on peut caractériser les distributions sphériques stablement invariantes de la manière suivante :

Théorème 7.1 Soit θ une distribution sphérique sur $\mathbb{X}_{\eta}$. Alors θ est stablement invariante si et seulement si, pour tout $\gamma \in \mathbb{X}_{\eta,reg}$ et pour tout $x \in \mathcal{S}_{\gamma}$ l'on a

$$\theta(\gamma) = \theta(\gamma^x)$$

On montre alors le

Théorème 7.3 La distribution $\theta^{st}(\eta, \mu)$ est stablement invariante .

La troisième partie (paragraphes 8 à 10) est consacrée à la construction de la correspondance entre les deux espaces symétriques $\mathbb{X}_{\sigma}$ et $\mathbb{X}_{\tau}$. Sous les hypothèses que l'on a faites (1, 2 et 3) , R.P. Langlands a prouvé le résultat suivant :

Pour tout $\mathfrak{a}$ sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^{\sigma}$, il existe $g \in G$ dépendant de $\mathfrak{a}$ tel que $g.\mathfrak{a}$ soit une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^{\tau}$.

A partir de là, on établit une correspondance entre les orbites stables des éléments réguliers de $\mathbb{X}_{\sigma}$ et celles de $\mathbb{X}_{\tau}$ de la manière suivante : soit $\gamma' \in \mathbb{X}_{\tau,reg}$ et $\gamma \in \mathbb{X}_{\sigma,reg}$ On note $\mathfrak{a}$ (respectivement $\mathfrak{b}$) le centralisateur de $\varphi_{\sigma}(\gamma)$ dans $\mathfrak{g}^{\sigma}$ (respectivement de $\varphi_{\tau}(\gamma')$ dans $\mathfrak{g}^{\tau}$). On dit que γ' provient de γ s'il existe $g \in G$ tel que $g.\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ et qui conjugue les éléments $\varphi_{\sigma}(\gamma)$ et $\varphi_{\tau}(\gamma')$. Cette notion ne dépend en fait que de l'orbite stable de chacun des éléments γ et γ'. On définit alors l'application T_0 qui à $< \gamma >$ associe $< \gamma' >$.

Ceci permet de construire des intégrales invariantes stables sur $\mathbb{X}_{\tau,reg}$ à partir d'intégrales invariantes stables de $\mathbb{X}_{\sigma,reg}$:

Théorème 9.1 Soit $F_0 \in I\mathcal{D}^{st}(\mathbb{X}_{\sigma})$. Soit F l'application définie sur $\mathbb{X}_{\tau,reg}$ par

$$F(\gamma') = \begin{cases} F_0(\gamma) & \text{si } <\gamma'> = T_0(<\gamma>) \\ 0 & \text{si } <\gamma'> \text{ n'est pas dans l'image de } T_0 \end{cases}$$

Alors $F \in I\mathcal{D}^{st}(\mathbb{X}_\tau)$

Le théorème de surjectivité de $\mathcal{M}^{st}$ assure l'existence pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\sigma)$ d'une fonction $f' \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\tau)$ telle que $\mathcal{M}^{st}(f)$ et $\mathcal{M}^{st}(f')$ soit liées comme dans le théorème précédent. On dit alors que f et f' sont en correspondance.

Pour $\theta' \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\tau)'_{st}$, on vérifie que $< \theta', f' >$ ne dépend pas du choix de f' en correspondance avec f. De plus l'application qui à f associe $< \theta', f' >$ définit une distribution stablement invariante notée $\mathcal{C}(\theta')$ sur $\mathbb{X}_\sigma$. On montre enfin que si θ' est sphérique il en est de même de $\mathcal{C}(\theta')$ (théorème 10.3).

On regarde comment les distributions $\theta^{st}(\eta, \mu)$ se correspondent. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^\sigma$. Il existe alors $g \in G$ tel que $g.\mathfrak{a}$ soit une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^\tau$. Soit $\mu \in \Gamma^*_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}^*_{1reg}$. La distribution $\theta^{st}(\tau, g.\mu)$ ne dépend pas du choix de g tel que $g.\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^\tau$ et on a :

$$\theta^{st}(\sigma, \mu) = (-1)^{q_{G^\tau} - q_{G^\sigma}} \mathcal{C}(\theta^{st}(\tau, g.\mu))$$

où $2q_{G^\tau}$ et $2q_{G^\sigma}$ sont les dimensions des espaces riemanniens associés respectivement à G^τ et G^σ (théorème 10.4 et corollaire 10.5).

Je remercie A. Bouaziz pour les diverses discussions que nous avons eues lors de ce travail.

Tables des matières :

I Intégrales invariantes stables sur l'espace symétrique

1 Notations et préliminaires **5**
2 Intégrales invariantes **9**
3 Intégrales invariantes stables **12**

II Distributions sphériques

4 Rappels. Série principale sphérique **21**
5 Prolongement à un groupe réductif complexe **23**
6 Induction de distributions sphériques **27**
7 Distributions stables **29**

III Correspondance entre deux espaces symétriques

8 Sous-ensembles de Cartan. Eléments réguliers **34**
9 Intégrales invariantes stables **37**
10 Distributions stables **39**

I Intégrales invariantes stables sur l'espace symétrique

1 Notations et préliminaires

Si M est une variété différentiable, on note $C^\infty(M)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur M , $\mathcal{D}(M)$ le sous-espace de $C^\infty(M)$ des fonctions à support compact et $\mathcal{D}(M)'$ l'espace des distributions sur M, c'est-à-dire le dual de $\mathcal{D}(M)$.

Si G/H est un espace homogène muni d'une mesure invariante, on identifiera $\mathcal{C}^\infty(G/H)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}(G/H)'$.

Soit G un groupe agissant sur M. Si N est une partie de M, on note $N_G(N)$ le normalisateur de N dans G, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in G$ tels que $g.N = N$ et $Z_G(N)$ le centralisateur de N dans G, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in G$ tels que, pour tout $n \in N$, l'on ait $g.n = n$.

Si $N_G(N)$ est un groupe, on pose $W_G(N) = N_G(N)/Z_G(N)$. On notera e l'élément neutre de G.

Si f est une fonction sur M, on notera$f_{/N}$ ou f_N sa restriction à N.

Si X est un ensemble fini, on note $\mid X \mid$ son cardinal.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. On notera V^* son dual et $V_\mathbb{C}$ son complexifié.

Si f est une application entre deux ensembles E et F on notera Imf son image. Si de plus E et F sont des espaces vectoriels et si f est linéaire, on notera $Kerf$ son noyau.

Soit G un groupe de Lie semi-simple complexe connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h}$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$ et soit H le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On note σ la conjugaison de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ et on pose $\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g}; \sigma(X) = -X\}$ de telle sorte que l'on ait $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$.

Soit $\mathbb{X} = G/H$ et soit p la projection canonique de G sur $\mathbb{X}$. Soit φ l'application de $\mathbb{X}$ dans G qui à $p(g)$ associe $g\sigma(g)^{-1}$. L'application φ est un isomorphisme sur son image que l'on notera M.

Le groupe G agit par translation à gauche sur $\mathbb{X}$ et on notera $g.x$ l'action de $g \in G$ sur $x \in \mathbb{X}$. On notera également pour $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$ l'action adjointe par $AdgX = g.X$

On note exp l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G et soit Exp l'application de $\mathfrak{h}$ dans G/H qui à X associe $p(exp\, iX)$. Soit J le jacobien de l'application Exp. On a , pour $X \in \mathfrak{h}$,

$$J(X) = det\left(\frac{sh\ iadX}{iadX}\right)_{/\mathfrak{h}}$$

Un élément $x \in \mathbb{X}$ est dit semi-simple (respectivement unipotent) si $\varphi(x)$ est semi-simple (respectivement unipotent).

Soit $x \in \mathbb{X}$. D'après ([O.M.] paragraphe 5 proposition 2), il existe un élément semi-simple s et un élément unipotent u de $\mathbb{X}$, déterminés de façon unique, tels que $\varphi(x) = \varphi(s)\varphi(u)$ soit la décomposition de Jordan de $\varphi(x)$. Les éléments s et u s'appellent respectivement la partie semi-simple et la partie unipotente de x.

Définition 1.1 *Un ouvert U de $\mathbb{X}$ est dit complètement H-invariant s'il est H-invariant et s'il contient la partie semi-simple de chacun de ses éléments.*

Soit $D_{\mathbb{X}}$ la fonction analytique sur $\mathbb{X}$ définie par : si $x \in \mathbb{X}$ alors l'endomorphisme $1 + z - Ad\varphi(x)$ de $\mathfrak{g}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. On pose alors

$$det_{\mathbb{C}}(1 + z - Ad\,\varphi(x)) = z^n D_{\mathbb{X}}(x) \text{ modulo } z^{n+1}$$

où $n = rang(\mathfrak{h})$.

Définition 1.2 *Un élément x de $\mathbb{X}$ est dit régulier si l'on a $D_{\mathbb{X}}(x) \neq 0$. Ceci est équivalent à dire que $\varphi(x)$ est régulier dans G. On note $\mathbb{X}_{reg}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathbb{X}$ et si U est une partie de $\mathbb{X}$, on pose $U_{reg} = \mathbb{X}_{reg} \cap U$.*

On appelle sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$ un sous-espace de $\mathfrak{q}$ formé d'éléments semi-simples, abélien et maximal pour ces deux propriétés.

Comme $\mathfrak{q} = i\mathfrak{h}$, la multiplication par i induit une bijection de l'ensemble des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$ dans l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{h}$, que l'on notera $Car(\mathfrak{h})$.

On notera $\mathfrak{h}_{reg}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{h}$ et pour $\mathfrak{s}$ une partie de $\mathfrak{h}$ on pose $\mathfrak{s}_{reg} = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_{reg}$.

1.3 Pour $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$, on notera $\Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ (ou Δ quand il n'y aura pas d'ambiguïté) le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a} + i\mathfrak{a})$. Pour $\alpha \in \Delta$, on note H_α la coracine de α , $\mathfrak{g}_\alpha$ l'espace radiciel de $\mathfrak{g}$ relatif à α et s_α la réflexion de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ relative à α.

On définit la partie compacte $\mathfrak{a}_I = (\sum_{\alpha\in\Delta} i\mathbb{R}H_\alpha) \cap \mathfrak{a}$ et la partie vectorielle $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = (\sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}H_\alpha) \cap \mathfrak{a}$ de $\mathfrak{a}$ de telle sorte que l'on ait $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_I + \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$.

Une racine α est dite réelle (respectivement imaginaire) si $\alpha(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{R}$ (respectivement $\alpha(\mathfrak{a}) \subset i\mathbb{R}$), ceci est équivalent à $H_\alpha \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ (respectivement $H_\alpha \in i\mathfrak{a}_I$). Une racine est dite complexe si elle n'est ni réelle ni imaginaire. On notera $\Delta_{\mathbb{R}}$ (respectivement Δ_I et $\Delta_{\mathbb{C}}$)

l'ensemble des racines réelles (respectivement imaginaires et complexes) de Δ. Soit Δ^+ un système positif de Δ. Alors pour $S = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou I , on pose $\Delta_S^+ = \Delta^+ \cap \Delta_S$.

Soit $\alpha \in \Delta_I$. La racine α est dite compacte si $(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathbb{C}H_\alpha) \cap \mathfrak{h}$ est isomorphe à $su(2)$ et elle est non compacte si $(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathbb{C}H_\alpha) \cap \mathfrak{h}$ est isomorphe à $sl(2, \mathbb{R})$.

On note Δ_{Inc} l'ensemble des racines imaginaires non compactes de Δ.

On dit que $\mathfrak{a}$ est fondamentale si $\Delta_\mathbb{R} = \emptyset$.

1.4 A $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$, on associe l'ensemble A formé des $x \in \mathbb{X}$ tels que $\varphi(x)$ centralise $\mathfrak{a}$ et on l'appelle le sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ associé à $\mathfrak{a}$. On note $Car(\mathbb{X})$ l'ensemble des sous-ensembles de Cartan de $\mathbb{X}$.

On rappelle que tout élément régulier de $\mathbb{X}$ appartient à un unique sous-ensemble de Cartan ([O.M] paragraphe 6 théorème 2).

On a ([H 2] lemme 2.3)

$$A = N_G(\mathfrak{a})/N_H(\mathfrak{a})$$

On note $W_G(\mathfrak{a})$ les éléments du groupe de Weyl de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}$ qui stabilisent $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire $W_G(\mathfrak{a}) = N_G(\mathfrak{a})/Z_G(\mathfrak{a})$ et on pose $W_H(\mathfrak{a}) = N_H(\mathfrak{a})/Z_H(\mathfrak{a})$.

Pour β un poids de $\mathfrak{a}$, on définit la fonction ξ_β sur A par : si $a \in A$ alors $\varphi(a) = expX$ avec $X \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}$. On pose $\xi_\beta(a) = e^{\beta(X)}$.

On note A'_{Inc} l'ensemble des $a \in A$ tels que, pour tout $\alpha \in \Delta_{Inc}$ l'on ait $\xi_\alpha(a) \neq 1$.

Soit $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$. Cette algèbre s'identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels sur A, invariants par translation. On note $\partial(u)$ l'opérateur différentiel associé à $u \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$.

Les composantes connexes de A sont paramétrées par l'ensemble quotient suivant :

$$expi\mathfrak{a}\backslash\{g \in G; g\sigma(g)^{-1} \in Z_G(\mathfrak{a})\}/H = expi\mathfrak{a}\backslash N_G(\mathfrak{a})/N_H(\mathfrak{a}) = W_G(\mathfrak{a})/W_H(\mathfrak{a})$$

D'autre part, soit $L = Z_G(\mathfrak{a}_\mathbb{R})$ où $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ est la partie vectorielle de $\mathfrak{a}$. Alors, par le théorème 2.1 de [S] on obtient $W_G(\mathfrak{a})/W_H(\mathfrak{a}) = W_L(\mathfrak{a})/W_{L\cap H}(\mathfrak{a})$.

Nous allons donné une description plus précise des composantes connexes de A.

Définition 1.5 *Deux racines α et β sont dites fortement orthogonales si ni $\alpha+\beta$ ni $\alpha-\beta$ ne sont des racines.*

Lemme 1.6 *Pour tout $w \in W_L(\mathfrak{a})$, il existe un ensemble ψ de racines imaginaires non compactes, deux à deux fortement orthogonales tel que*

$$w = \prod_{\alpha\in\psi} s_\alpha \textit{ modulo } W_{L\cap H}(\mathfrak{a})$$

Le groupe $W_L(\mathfrak{a})$ est engendré par les s_α pour α parcourant Δ_I.

Pour $\alpha \in \Delta_I$, on choisit des vecteurs radiciels non nuls X_α et $X_{-\alpha}$ correspondant respectivement à α et $-\alpha$ tels que :

$[H_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2X_{\pm\alpha}$,

$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$,

$\sigma(X_\alpha) = X_{-\alpha}$ *si α est non compacte,*

$\sigma(X_\alpha) = -X_{-\alpha}$ *si α est compacte.*

On pose $g_\alpha = exp\frac{\pi}{2}(X_\alpha - X_{-\alpha})$ de telle sorte que $s_\alpha = Adg_\alpha$.

Par ce qui précède, si α est compacte alors $g_\alpha \in H$ et si α est non compacte alors $\varphi(g_\alpha) = g_\alpha^2 = expi\pi H_\alpha = exp - i\pi H_\alpha$.

Démonstration : On va prouver le résultat par récurrence sur la longueur $l(w)$ de w.

Si $l(w) = 0$ alors $w = Id$, si $l(w) = 1$ alors $w = Adg_\alpha$ avec $\alpha \in \Delta_I$ et le résultat est immédiat.

Soit $w = w_0 s_\beta$ avec $l(w_0) < l(w)$ et $\beta \in \Delta_I$. On pose $w_0 = Adg_0$ et $g = g_0 g_\beta$.

Si β est compacte alors $\varphi(g) = \varphi(g_0)$ et le résultat découle de l'hypothèse de récurrence.

Supposons que β soit imaginaire non compacte. Par hypothèse de récurrence, il existe $\psi = \{\alpha_1, \ldots \alpha_p\}$ un ensemble de racines imaginaires non compactes deux à deux fortement orthogonales tel que $g_0 = g_{\alpha_1} \ldots g_{\alpha_p}$. Par hypothèse on a $\beta \notin \psi$. Si β est fortement orthogonale à chaque $\alpha \in \psi$, alors le résultat est immédiat. Sinon, il existe $\alpha \in \psi$ tel que $\beta \pm \alpha$ soit une racine. Comme les g_α pour $\alpha \in \psi$ commutent deux à deux, on peut supposer que $\beta + \varepsilon\alpha_p$ est une racine, où $\varepsilon = \pm 1$. On a :

$$\varphi(g_{\alpha_p} g_\beta) = g_{\alpha_p} expi\pi H_\beta g_{\alpha_p} = expi\pi s_{\alpha_p}(H_\beta) exp\varepsilon i\pi H_{\alpha_p}$$

Si $\alpha_p(H_\beta) = 0$ alors

$$\varphi(g_{\alpha_p} g_\beta) = expi\pi(H_\beta + \varepsilon H_{\alpha_p}) = exp2i\pi H_{\beta+\varepsilon\alpha_p} = 1$$

et donc $g_0 g_\beta = g_{\alpha_1} \ldots g_{\alpha_{p-1}}$ modulo H ce qui donne le résultat voulu.

Si $\alpha_p(H_\beta) \neq 0$ alors $s_{\alpha_p}(H_\beta) = H_\beta \pm H_{\alpha_p}$ et donc $\varphi(g_{\alpha_p} g_\beta) = \varphi(g_\beta)$. Par suite, on a $g = g_0 g_\beta = g_{\alpha_1} \ldots g_{\alpha_{p-1}} g_\beta$ modulo H. De proche en proche, on supprime dans cette décomposition tous les g_α avec $\alpha \in \psi$ et α non fortement orthogonale à β. Au bout d'un nombre fini d'opérations on obtient l'expression voulue de g. ■

Corollaire 1.7 *Soit S l'ensemble des parties de Δ formées de racines imaginaires non compactes deux à deux fortement orthogonales. Alors on a*

$$A = \bigcup_{\psi \in \mathcal{S}} p(expi\mathfrak{a} \prod_{\alpha \in \psi} g_\alpha)$$

$$\varphi(A) = \bigcup_{\psi \in \mathcal{S}} expi\mathfrak{a} \;\; expi\pi(\sum_{\alpha \in \psi} H_\alpha)$$

1.8 On va maintenant définir la notion de sous-algèbres de Cartan et de sous-ensembles de Cartan adjacents.

On fixe $\mathfrak{a} \in Car\mathfrak{h}$ et α une racine imaginaire non compacte de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$. On choisit des vecteurs radiciels non nuls X_α et $X_{-\alpha}$ correspondants respectivement à α et $-\alpha$ tels que :

(i) $[H_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2X_{\pm\alpha}$,

(ii) $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$,

(iii) $\sigma(X_\alpha) = X_{-\alpha}$.

Alors l'algèbre $Ker\alpha + \mathbb{R}i(X_\alpha - X_{-\alpha})$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$.

On pose $\mathfrak{a}_\alpha = Ker\alpha + \mathbb{R}i(X_\alpha - X_{-\alpha})$ et on l'appelle sous-algèbre de Cartan adjacente à $\mathfrak{a}$ (relativement à α).

Soit A_α le sous-ensemble de Cartan associé à $\mathfrak{a}_\alpha$. On dit que A_α est le sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ adjacent à A (relativement à α).

Soit $c_\alpha = exp - i\pi/4(X_\alpha + X_{-\alpha})$. Alors, on a $Adc_\alpha \mathfrak{a}_\mathbb{C} = \mathfrak{a}_{\alpha,\mathbb{C}}$ et $Adc_\alpha H_\alpha = i(X_\alpha - X_{-\alpha})$. La racine $Adc_\alpha \alpha = \beta$ est une racine réelle de $\mathfrak{a}_\alpha$. L'élément c_α est appelé transformation de Cayley.

Soit $\{\alpha\}^\perp$ l'ensemble des racines orthogonales à α. L'application $\gamma \mapsto \gamma \circ c_\alpha^{-1}$ est une bijection de $\Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ sur $\Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}_\alpha)$ et de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}) \cap \{\alpha\}^\perp$ sur $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}_\alpha)$ et l'image de $\Delta_I^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}) \cap \{\alpha\}^\perp$ est un système positif de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}_\alpha)$.

Définition 1.9 *Selon D. Shelstad, on dit qu'un système positif ψ de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ est adapté à α si ψ contient l'ensemble des β de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ telles que $\beta(H_\alpha) > 0$.*

2 Intégrales invariantes

Définition 2.1 *Soit U un ouvert complètement H-invariant de $\mathbb{X}$. Soit $f \in \mathcal{D}(U)$. On définit l'intégrale invariante de f sur U_{reg} par :*

si $a \in U_{reg}$, on note $\mathfrak{a} = Z_\mathfrak{h}(\varphi(a)) \in Car(\mathfrak{h})$ et on pose

$$\mathcal{M}(f)(a) = \mid det(1 - Ad\varphi(a))_{\mathfrak{h}/\mathfrak{a}} \mid^{1/2} \int_{H/Z_H(\mathfrak{a})} f(h.a)dh$$

Dans ce paragraphe, nous rappelons les propriétés de $\mathcal{M}$ démontrées dans [B3].

Soit U un ouvert H complètement invariant de $\mathbb{X}$. Soit $I\mathcal{D}(U)$ l'ensemble des $F \in C^\infty(U_{reg})$ qui sont H-invariantes et qui vérifient les trois propriétés suivantes :

$\mathbf{I_1(U_{reg})}$- Pour tout $A \in Car(\mathbb{X})$, et pour tout $u \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ alors

$$\sup_{x \in A_{reg} \cap U} \mid \partial(u) F_{/A}(x) \mid < \infty$$

De plus, l'application $F_{/A}$ est à support compact contenu dans $A \cap U_{reg}$.

$\mathbf{I_2(U_{reg})}$- Pour tout $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$ associée à $A \in Car\mathbb{X}$ et pour tout système positif ψ de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, on définit la fonction b_ψ sur A_{reg} par :

$$b_\psi(a) = \prod_{\alpha \in \psi} \frac{(1 - \xi_{-\alpha}(a))}{\mid 1 - \xi_{-\alpha}(a) \mid}$$

Alors $b_\psi F_{/A}$ se prolonge de façon C^∞ sur A'_{Inc} (voir 1.4 pour la définition)

$\mathbf{I_3(U_{reg})}$- (relations de sauts) Soit $\gamma \in \mathbb{X}$ un élément semi-simple tel que l'algèbre dérivée de $Z_{\mathfrak{h}}(\varphi(\gamma))$ soit isomorphe à $sl(2, \mathbb{R})$. On dit alors que γ est semi-régulier de type hyperbolique. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $Z_{\mathfrak{h}}(\varphi(\gamma))$ et soit A le sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ associé à $\mathfrak{a}$. Il existe alors deux uniques racines $\pm\alpha$ de $\Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ telles que $\xi_{\pm\alpha}(\gamma) = 1$. Elles sont imaginaires non compactes.

On note, comme en 1.8, $\mathfrak{a}_\alpha$ et A_α la sous-algèbre et le sous-ensemble de Cartan adjacents respectivement à $\mathfrak{a}$ et A et c_α la transformation de Cayley correspondante. Soit $\beta = c_\alpha \alpha$.

On choisit comme en 1.9, un système positif ψ de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ adapté à α. Il définit donc un système positif ψ_α de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}_\alpha)$.

Alors pour tout $u \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$, on a

$$\lim_{t \to 0^+} \partial(u)(b_\psi F_A)(exp - tH_\alpha.\gamma) - \lim_{t \to 0^-} \partial(u)(b_\psi F_A)(exp - tH_\alpha.\gamma) =$$

$$id(\alpha) \lim_{t \to 0} \partial(c_\alpha u)(b_{\psi_\alpha} F_{A_\alpha})(exp - itH_\beta.\gamma)$$

où $\begin{cases} d(\alpha) = 2 & \text{si } s_\alpha \text{ se réalise dans } H, \\ d(\alpha) = 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

On munit, comme dans [B3] l'espace $I\mathcal{D}(U)$ de la topologie suivante :

Soit $L \subset U$ un compact modulo H (c'est-à-dire L fermé, H-invariant et $L \cap A$ est compact pour tout $A \in Car(\mathbb{X})$). On note $I\mathcal{D}(L)$ le sous-espace de $I\mathcal{D}(U)$ des fonctions à support dans L.

On définit la famille de semi-normes $\nu_{A,u}$ où $A \in Car\mathbb{X}$ est associé à $\mathfrak{a} \in Car\mathfrak{h}$ et $u \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$, par

$$\nu_{A,u}(\psi) = \sup_{a \in A} \mid \partial(u)\psi_A(a) \mid$$

Muni de la topologie définie par ces semi-normes, l'espace $I\mathcal{D}(L)$ est un espace de Fréchet. Si $L \subset L_1$ sont deux compacts modulo H, l'injection canonique de $I\mathcal{D}(L)$ dans $I\mathcal{D}(L_1)$ est un isomorphisme topologique de $I\mathcal{D}(L)$ sur son image munie de la topologie induite.

On munit $I\mathcal{D}(U)$ de la topologie limite inductive des $I\mathcal{D}(L)$, où $L \subset U$ est compact modulo H. C'est donc un espace LF (voir [T1] chapitre 13).

L'application $\mathcal{M}$ est continue.

Théorème 2.2 *([B3] théorème 8.2.2) L'application $\mathcal{M}$ est surjective de $\mathcal{D}(U)$ sur $I\mathcal{D}(U)$ et sa transposée ${}^t\mathcal{M}$ est une bijection de $I\mathcal{D}(U)'$ sur l'espace des distributions H-invariantes sur U.*

Remarque. Dans [B3], A. Bouaziz ne donne pas explicitement les relations de sauts. Elles se déduisent facilement du lemme 8.2.1 (ii) de [B3] et du fait suivant :

Soit $\gamma \in \mathbb{X}$ un élément semi-simple de type hyperbolique et soit $\mathfrak{z} = Z_{\mathfrak{h}}(\varphi(\gamma))$. L'algèbre $\mathfrak{z}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{h}$ de même rang que $\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{z})$. On choisit un système positif ψ de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ de telle sorte que $\psi_{\mathfrak{z}} = \psi \cap \Delta_I(\mathfrak{z}, \mathfrak{a})$ soit un système positif de $\Delta_I(\mathfrak{z}, \mathfrak{a})$. On pose

$$a_{\psi_{\mathfrak{z}}} = \prod_{\alpha \in \psi_{\mathfrak{z}}} \frac{\alpha}{\mid \alpha \mid}$$

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{z}$ qui est $\mathbb{X}$-admissible (voir [B3] paragraphe 8, A1, A2, A3, A4 pour la définition. Ici on utilise essentiellement la propriété A2 des voisinages admissibles c'est-à-dire : l'application π de $H \times \mathcal{V}$ dans $\mathbb{X}$ qui à (h, X) associe $hexp\, iX.\gamma$ est submersive). Alors la fonction sur $\mathfrak{a}_{reg} \cap \mathcal{V}$ qui à X associe $a_{\psi_{\mathfrak{z}}}(X) b_{\psi}((exp\, iX).\gamma)^{-1}$ est constante. Les relations de sauts s'obtiennent par passage à l'algèbre de Lie en utilisant le lemme 8.2.1 de [B3].

2.3 Soit $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$ et soit ψ un système de racines positives de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$. On définit la signature imaginaire ε_I de $W_H(\mathfrak{a})$ dans $\{\pm 1\}$ comme dans [B3] paragraphe 3.3 de la manière suivante : soit

$$\rho_{\psi} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \psi} \alpha$$

et soit A le sous-ensemble de Cartan associé à $\mathfrak{a}$. Alors pour tout $a \in A_{reg}$ et pour tout $w \in W_H(\mathfrak{a})$, on a

$$b_{\psi}(w^{-1}.a) = \varepsilon_I(w) \frac{\xi_{\rho_{\psi} - w\rho_{\psi}}(a)}{\mid \xi_{\rho_{\psi} - w\rho_{\psi}}(a) \mid} b_{\psi}(a)$$

On note $Car_j(\mathfrak{h})$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{a}$ de Cartan de $\mathfrak{h}$ telles que $dim\, \mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = j$ où $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ est la partie vectorielle de $\mathfrak{a}$ (voir 1.3). Soit $Car_j(\mathbb{X})$ l'ensemble des $A \in Car(\mathbb{X})$ associé à $\mathfrak{a} \in Car_j(\mathfrak{h})$. Soit $I\mathcal{D}_j(U)$ l'ensemble des $F \in I\mathcal{D}(U)$ telles que si $k > j$ alors, pour tout $A \in Car_k(\mathbb{X})$ on a $F_A = 0$.

Si $F \in I\mathcal{D}_j(U)$ et si $A \in Car_j(\mathbb{X})$ alors la fonction $b_{\psi} F_A$ se prolonge de façon C^{∞} sur A (d'après $I_2(U_{reg})$ et $I_3(U_{reg})$) et donc $b_{\psi} F_A \in \mathcal{D}(U \cap A)$.

D'autre part, si $\mathfrak{a}$ est la sous-algèbre de Cartan associé à A, on a, pour $a \in A$ et $w \in W_H(\mathfrak{a})$,

$$(b_{\psi} F_A)(w^{-1}.a)) = \varepsilon_I(w) \frac{\xi_{\rho_{\psi} - w\rho_{\psi}}(a)}{\mid \xi_{\rho_{\psi} - w\rho_{\psi}}(a) \mid} (b_{\psi} F_A)(a)$$

Soit $\mathcal{D}(U \cap A)^{\psi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}(U \cap A)$ vérifiant la relation ci-dessus.

Soit $j \in \mathbb{N}$. On fixe $A_1 \dots A_k$ des représentants des classes de conjugaison de H dans $Car_j(\mathbb{X})$. Pour $i \in \{1 \dots k\}$, on note $\varepsilon_{I,i}$ la signature imaginaire de $W_H(\mathfrak{a}_i)$ et on fixe un système positif ψ_i de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}_i)$.

Soit π_j l'application de $I\mathcal{D}_j(U)$ dans $\bigoplus_{1\leq i\leq k} \mathcal{D}(U\cap A_i)^{\psi_i}$ définie par :

$$\pi_j(F) = \sum_{1\leq i\leq k} b_{\psi_i} F_{A_i}$$

Théorème 2.4 *([B3] théorème 8.2.3) L'application π_j est surjective et sa transposé ${}^t\pi_j$ est une bijection de*

$$(\bigoplus_{1\leq i\leq k} \mathcal{D}(U\cap A_i)^{\psi_i})'$$

sur l'orthogonal de $I\mathcal{D}_{j-1}(U)$ dans $I\mathcal{D}_j(U)'$.

3 Intégrales invariantes stables

Dans ce paragraphe, nous définissons la notion d'intégrales invariantes stables et nous les caractérisons par des propriétés analogues à celles des intégrales invariantes. Les résultats obtenus et les méthodes utilisées sont les mêmes que pour les groupes points réels d'un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$ (voir[S] et[B3]).

Définition 3.1 *Soit $\gamma \in \mathbb{X}_{reg}$. On appelle orbite stable de γ et on la note $<\gamma>$ l'ensemble des $x\in\mathbb{X}$ tels que $\varphi(x)$ et $\varphi(\gamma)$ soient G-conjugués.*

Soit $A \in Car(\mathbb{X})$ associé à $\mathfrak{a}\in Car(\mathfrak{h})$. On pose comme dans [S]

$$\mathcal{A}(A) = \{g\in G; Adg\ \mathfrak{a}\subset\mathfrak{h}\}$$

L'ensemble $\mathcal{A}(A)$ est également l'ensemble des $g\in G$ tels que $g^{-1}\sigma(g)\in Z_G(\mathfrak{a})$ et donc on a $\mathcal{A}(A) = HN_G(\mathfrak{a})$.

Théorème 3.2 *([S] théorème 2.1) Soit $L = Z_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}})$ où $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ est la partie vectorielle de $\mathfrak{a}$. On a*

$$\mathcal{A}(A) = HN_L(\mathfrak{a}).$$

On pose **3.3** $\qquad \mathcal{S}(A) = H\setminus\mathcal{A}(A)/Z_G(\mathfrak{a})$

C'est un ensemble fini isomorphe à $W_H(\mathfrak{a})\setminus W_G(\mathfrak{a}) = W_{L\cap H}(\mathfrak{a})\setminus W_L(\mathfrak{a})$ (d'après le théorème précédent).

Soit $\gamma\in A_{reg}$ et soit $x\in<\gamma>$. Il existe alors $g\in G$ tel que $g\varphi(\gamma)g^{-1} = \varphi(x)$ et donc $Adg\ \mathfrak{a}\subset\mathfrak{h}$. Par suite, on a $g\in\mathcal{A}(A)$. Maintenant, si $g\in\mathcal{A}(A)$, il se peut que $g\varphi(\gamma)g^{-1}$ n'appartienne pas à $M=\varphi(\mathbb{X})$. On définit alors $\mathcal{A}(A)_\gamma$ comme l'ensemble des $g\in\mathcal{A}(A)$ tels que $g\varphi(\gamma)g^{-1}\in M$.

Définition 3.4 *Pour $g\in\mathcal{A}(A)_\gamma$, on note γ^g l'unique élément de $\mathbb{X}$ tel que $g\varphi(\gamma)g^{-1} = \varphi(\gamma^g)$.*

On pose $\mathcal{S}(A)_\gamma = H \setminus \mathcal{A}(A)_\gamma / Z_G(\mathfrak{a})$. On a alors

$$< \gamma >= \bigcup_{x \in \mathcal{S}(A)_\gamma} H.\gamma^x$$

Soit A_j la composante connexe de A contenant γ. On peut écrire $A_j = exp\ i\mathfrak{a}.x_j$ où $\varphi(x_j) = u_j \in M \cap H$. Il est clair que $g\varphi(\gamma)g^{-1} \in M$ si et seulement si $gu_jg^{-1} \in M$. Donc les ensembles $\mathcal{A}(A)_\gamma$ et $\mathcal{S}(A)_\gamma$ dépendent uniquement de la composante connexe de A contenant γ. On utilisera ces notations même lorsque l'élément γ n'est pas régulier. D'autre part, lorsque γ est régulier, on posera

$$\mathcal{S}_\gamma = \mathcal{S}(A)_\gamma$$

Définition 3.5 *Un ouvert U de $\mathbb{X}$ est dit stablement invariant s'il est complètement invariant et s'il contient l'orbite stable de ses éléments semi-simple réguliers.*

Définition 3.6 *Soit U un ouvert stablement invariant de $\mathbb{X}$. Soit $f \in \mathcal{D}(U)$. On définit l'intégrale orbitale stable de f sur U_{reg} et on la note $\mathcal{M}^{st}(f)$ de la manière suivante : Si $\gamma \in U_{reg}$ et si A est l'unique sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ contenant γ alors*

$$\mathcal{M}^{st}(f)(\gamma) = \sum_{x \in \mathcal{S}_\gamma} \mathcal{M}(f)(\gamma^x).$$

Il est clair que $\mathcal{M}^{st}(f)$ est de classe C^∞ sur U_{reg} et qu'elle est constante sur chaque orbite stable. On dit alors qu'elle est stablement invariante.

Soit U un ouvert stablement invariant. Soit $I\mathcal{D}^{st}(U)$ l'ensemble des fonctions F de $C^\infty(U_{reg})$ qui sont stablement invariantes et qui vérifient les propriétés suivantes :

$\mathbf{I_1^{st}(U_{reg})}$ est identique à $\mathbf{I_1(U_{reg})}$.

$\mathbf{I_2^{st}(U_{reg})}$- Pour tout $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$ et pour tout système positif ψ de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, on note A le sous-ensemble de Cartan associé à $\mathfrak{a}$, alors la fonction $b_\psi F_{/A}$ se prolonge de façon C^∞ sur l'ensemble des γ tels que pour tout $x \in \mathcal{S}_\gamma$ l'on ait $\gamma^x \in A'_{Inc}$.

$\mathbf{I_3^{st}(U_{reg})}$- (relations de sauts) Soit $\gamma \in \mathbb{X}$ un élément semi-régulier de type hyperbolique. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $Z_\mathfrak{h}(\varphi(\gamma))$ et soit A le sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ associé à $\mathfrak{a}$. Soit $\pm\alpha$ les deux uniques racines (imaginaires non compactes) de $\Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ telles que $\xi_{\pm\alpha}(\gamma) = 1$.

On note, comme en 1.8, $\mathfrak{a}_\alpha$ et A_α la sous-algèbre et le sous-ensemble de Cartan adjacents respectivement à $\mathfrak{a}$ et A et c_α la transformation de Cayley correspondante. Soit $\beta = c_\alpha \alpha$.

On choisit comme en 1.9, un système positif ψ de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ adapté à α. Il définit donc un système positif ψ_α de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}_\alpha)$.

Alors pour tout $u \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, on a

$$\lim_{t\to 0^+} \partial(u)(b_\psi F_A)(exp - tH_\alpha.\gamma) - \lim_{t\to 0^-} \partial(u)(b_\psi F_A)(exp - tH_\alpha.\gamma)$$

$$= 2i \lim_{t\to 0} \partial(c_\alpha u)(b_{\psi_\alpha} F_{A_\alpha})(exp - itH_\beta.\gamma)$$

On munit l'espace $I\mathcal{D}^{st}(U)$ de la topologie suivante :

Soit $L \in U$ un compact modulo H stablement invariant. On note $I\mathcal{D}^{st}(L)$ le sous-espace de $I\mathcal{D}^{st}(U)$ des fonctions à support dans L.

On définit la famille de semi-normes $\nu_{A,u}$ où $A \in Car\mathbb{X}$ est associé à $\mathfrak{a} \in Car\mathfrak{h}$ et $u \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, par

$$\nu_{A,u}(\psi) = \sup_{a\in A} \mid \partial(u)\psi_A(a) \mid$$

Muni de la topologie définie par ces semi-normes, l'espace $I\mathcal{D}^{st}(L)$ est un espace de Fréchet. Si $L \subset L_1$ sont deux compacts modulo H, l'injection canonique de $I\mathcal{D}^{st}(L)$ dans $I\mathcal{D}^{st}(L_1)$ est un isomorphisme topologique de $I\mathcal{D}^{st}(L)$ sur son image munie de la topologie induite.

On munit $I\mathcal{D}^{st}(U)$ de la topologie limite inductive des $I^{st}\mathcal{D}(L)$, où $L \subset U$ compact modulo H stablement invariant. Cette topologie en fait un espace LF et l'application $\mathcal{M}^{st}$ est continue.

Théorème 3.7 *L'image de $\mathcal{D}(U)$ par $\mathcal{M}^{st}$ est contenu dans $I\mathcal{D}^{st}(U)$.*

Démonstration : La démonstration est analogue à celle du lemme 4.3 de [S]. Soit $f \in \mathcal{D}(U)$. Soit $A \in Car(\mathbb{X})$ associé à $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$.

Pour tout $\gamma \in A_{reg}$, on a $\mathcal{M}^{st}(f)(\gamma) = \sum_{x\in\mathcal{S}_\gamma} \mathcal{M}(f)(\gamma^x)$.

Les propriétés $I_1^{st}(U_{reg})$ et $I_2^{st}(U_{reg})$ découlent directement des propriétés $I_1(U_{reg})$ et $I_2(U_{reg})$ vérifiées par $\mathcal{M}(f)$.

Démontrons donc la propriété $I_3^{st}(U_{reg})$.

Soit $\gamma \in \mathbb{X}$ semi-régulier de type hyperbolique. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $Z_{\mathfrak{h}}(\varphi(\gamma))$. On note par $\pm\alpha$ les deux uniques racines imaginaires non compactes de $\Delta_I(\mathfrak{h},\mathfrak{a})$ telles que $\xi_{\pm\alpha}(\gamma) = 1$.

On note, comme en 1.8, $\mathfrak{a}_\alpha$ et A_α la sous-algèbre et le sous-ensemble de Cartan adjacents respectivement à $\mathfrak{a}$ et A et c_α la transformation de Cayley correspondante. Soit $\beta = c_\alpha\alpha$.

On choisit comme en 1.9, un système positif ψ de $\Delta_I(\mathfrak{h},\mathfrak{a})$ adapté à α et donc un système positif ψ_α de $\Delta_I(\mathfrak{h},\mathfrak{a}_\alpha)$.

Pour simplifier les notations on pose

$$\overline{F}_A = b_\psi \mathcal{M}^{st}(f)_A$$

et pour $a \in A_{reg}$ et $w \in \mathcal{S}_a$, on pose

$$F_A^w(a) = b_\psi(a)\mathcal{M}(f)_A(a^w)$$

de telle sorte que

$$\overline{F}_A(a) = \sum_{w \in \mathcal{S}_a} F_A^w(a)$$

Soit $u \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, l'élément $\gamma_t = exp\ -tH_\alpha.\gamma$ appartient à la même composante connexe de A que γ.

On a donc :

$$\lim_{t\to 0^+} \partial(u)\overline{F}_A(\gamma_t) - \lim_{t\to 0^-} \partial(u)\overline{F}_A(\gamma_t) = \sum_{w\in\mathcal{S}(A)_\gamma} [\lim_{t\to 0^+} \partial(u)F_A^w(\gamma_t) - \lim_{t\to 0^-} \partial(u)F_A^w(\gamma_t)]$$

Soit $w \in \mathcal{S}(A)_\gamma$. Si la racine $w\alpha$ est compacte alors γ^w apppartient à A'_{Inc}. Donc, par $I_2(U_{reg})$, l'application F_A^w est continue en γ. Il suffit donc de considérer dans la somme ci-dessus simplement les $w \in \mathcal{S}(A)_\gamma$ tels que $w\alpha$ soit imaginaire non compacte.

Pour relier l'ensemble des $w \in \mathcal{S}(A)_\gamma$ tels que $w\alpha$ soit imaginaire non compacte à $\mathcal{S}(A_\alpha)_\gamma$, nous utilisons les résultats suivants de Shelstad.

Lemme 3.8 *([S] lemme 4.2) Soit $L = Z_G(a_\mathbb{R})$ et soit $w \in W_L(\mathfrak{a})$ tel que $w\alpha$ soit imaginaire non compacte. Alors, il existe $w_0 \in W_{L\cap H}(\mathfrak{a})$ tel que $w_0\alpha = \pm w\alpha$.*

Soit $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des $w \in \mathcal{S}(A)$ tels qu'il existe $\delta \in N_L(\mathfrak{a})$ représentant w et vérifiant $\delta\alpha = \pm\alpha$.

Soit $\mathcal{S}_\alpha(A)$ l'ensemble des orbites de $< 1, s_\alpha >$ dans $\mathcal{C}(A)$.

Lemme 3.9 *([S] proposition 4.6) L'application de $\mathcal{S}(A_\alpha)$ dans $\mathcal{S}_\alpha(A)$ qui à w associe $c_\alpha^{-1}wc_\alpha$ est bijective.*

On note $\mathcal{C}(A)_\gamma = \mathcal{S}(A)_\gamma \cap \mathcal{C}(A)$ et soit $\mathcal{S}_\alpha(A)_\gamma$ l'ensemble des orbites de $< 1, s_\alpha >$ dans $\mathcal{C}(A)_\gamma$.

Lemme 3.10 *L'application de $\mathcal{S}(A_\alpha)_\gamma$ dans $\mathcal{S}_\alpha(A)_\gamma$ qui à w associe $c_\alpha^{-1}wc_\alpha$ est bijective.*

Démonstration : Comme $\xi_\alpha(\gamma) = 1$, on peut écrire $\varphi(\gamma) = exp(Z + in\pi H_\alpha)$ où $Z \in \mathfrak{a} + i\mathfrak{a}$ avec $\alpha(Z) = 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.

D'autre part, on a $c_\alpha\alpha = \beta$ et $exp\ i\pi H_\alpha = exp\ i\pi H_\beta$. Par suite, si $w \in \mathcal{S}(A_\alpha)_\gamma$ on a $w.\beta = \beta$ et donc, on a $w\varphi(\gamma)w^{-1} = exp\ wZ\ exp\ i\pi nH_\beta \in M$ avec $\beta(wZ) = 0$.

On en déduit que
$(c_\alpha^{-1}wc_\alpha)\varphi(\gamma)(c_\alpha^{-1}w^{-1}c_\alpha) = expwZ\ exp\ in\pi H_\beta \in M$. Le lemme 3.10 découle du lemme 3.9. ∎

Soit $w \in N_L(\mathfrak{a})$ tel que $w\alpha$ soit imaginaire non compacte. Par le lemme 3.8, il existe $w_0 \in N_{L\cap H}(\mathfrak{a})$ tel que $w_0^{-1}w\alpha = \pm\alpha$ et $w_0^{-1}w$ représente le même élément que w dans $\mathcal{S}(A)$.

On a donc :

$$\lim_{t\to 0^+}\partial(u)\overline{F}_A(\gamma_t)-\lim_{t\to 0^-}\partial(u)\overline{F}_A(\gamma_t)=\sum_{w\in\mathcal{C}(A)_\gamma}[\lim_{t\to 0^+}\partial(u)F_A^w(\gamma_t)-\lim_{t\to 0^-}\partial(u)F_A^w(\gamma_t)]$$

1^{er} cas : s_α se réalise dans H

Dans ce cas, chaque orbite de $\mathcal{S}_\alpha(A)_\gamma$ contient un seul élément et donc $\mathcal{S}_\alpha(A)_\gamma$ est isomorphe à $\mathcal{C}(A)_\gamma$.

De plus, par $I_3(U_{reg})$, on a

$$\lim_{t\to 0^+}\partial(u)F_A^w(\gamma_t)-\lim_{t\to 0^-}\partial(u)F_A^w(\gamma_t)=2i\lim_{t\to 0}\partial(c_\alpha u)F_{A_\alpha}^w(exp-itH_\beta.\gamma)$$

En utilisant le lemme 3.10, on obtient :

$$\lim_{t\to 0^+}\partial(u)\overline{F}_A(\gamma_t)-\lim_{t\to 0^-}\partial(u)\overline{F}_A(\gamma_t)=2i\lim_{t\to 0}\partial(c_\alpha u)\overline{F}_{A_\alpha}(exp-itH_\beta.\gamma)$$

2^{eme} cas : s_α ne se réalise pas dans H

Dans ce cas, chaque orbite de $\mathcal{S}_\alpha(A_\gamma)$ contient deux éléments.

Soit $u\in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ tel que $u^{s_\alpha}=-u$. L'application $\mathcal{M}^{st}(f)_A$ est invariante sous l'action de s_α. Par suite, on a

$$\overline{F}_A(\gamma_{-t})=-\overline{F}_A(\gamma_t)$$

On en déduit donc, comme $u^{s_\alpha}=-u$, que l'on a

$$\lim_{t\to 0^+}\partial(u)\overline{F}_A(\gamma_t)=\lim_{t\to 0^-}\partial(u)\overline{F}_A(\gamma_t)$$

et

$$\lim_{t\to 0}\partial(c_\alpha u)\overline{F}_{A_\alpha}(exp-itH_\beta.\gamma)=0$$

Soit maintenant $u\in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ tel que $u^{s_\alpha}=u$. Soit $w\in\mathcal{C}(A)_\gamma$ et $\delta\in N_L(\mathfrak{a})$ tel que δ représente w. On a

$$\begin{aligned}F_A^{s_\alpha\delta}(\gamma_t)&=b_\psi(\gamma_t)\mathcal{M}(f)(\gamma_t^{s_\alpha\delta})\\&=b_\psi(\gamma_t)\mathcal{M}(f)(\gamma_{-t}^{\delta})\\&=-b_\psi(\gamma_{-t})\mathcal{M}(f)(\gamma_{-t}^{\delta})\\&=-F_A^{\delta}(\gamma_{-t})\end{aligned}$$

Comme $u^{s_\alpha}=u$, on obtient :

$$\lim_{t\to 0^+}\partial(u)F_A^{s_\alpha\delta}(\gamma_t)=-\lim_{t\to 0^-}\partial(u)F_A^{\delta}(\gamma_t)$$

Par suite, on a

$$\lim_{t\to 0^+}\partial(u)\overline{F}_A(\gamma_t)-\lim_{t\to 0^-}\partial(u)\overline{F}_A(\gamma_t)=2\sum_{\delta\in\mathcal{S}_\alpha(A)_\gamma}[\lim_{t\to 0^+}\partial(u)F_A^{\delta}(\gamma_t)-\lim_{t\to 0^-}\partial(u)F_A^{\delta}(\gamma_t)]$$

$$=2i\sum_{\delta\in\mathcal{S}(A_\alpha)_\gamma}\lim_{t\to 0}\partial(c_\alpha u)F_{A_\alpha}^{\delta}(exp-itH_\beta.\gamma)=2i\lim_{t\to 0}\partial(c_\alpha u)\overline{F}_{A_\alpha}(exp-itH_\beta.\gamma)$$

Ceci achève la démonstration du théorème. ■

Nous voulons maintenant prouver la surjectivité de l'application $\mathcal{M}^{st}$ de $\mathcal{D}(U)$ dans $I\mathcal{D}^{st}(U)$.

Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $I\mathcal{D}_j^{st}(U)$ l'ensemble des $F \in I\mathcal{D}^{st}(U)$ telles que si $k > j$ alors, pour tout $A \in Car_k(\mathbb{X})$ on a $F_A = 0$.

Soit $A \in Car(\mathbb{X})$ associé à $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$. Soit ψ un système de racines imaginaires positives de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$. La notion de signature imaginaire définie en 2.3 se prolonge à $W_G(\mathfrak{a})$.

On note $\mathcal{D}(U \cap A)^{\psi,st}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{D}(U \cap A)$ telles que, pour tout $a \in A$ et pour tout $w \in \mathcal{A}(A)_a$, l'on ait

$$f(a^w) = \varepsilon_I(w^{-1}) \frac{\xi_{\rho_\psi - w^{-1}\rho_\psi}(a)}{\mid \xi_{\rho_\psi - w^{-1}\rho_\psi}(a) \mid} f(a)$$

Si $A \in Car_j(\mathbb{X})$ et si $f \in I\mathcal{D}_j^{st}(U)$ alors on a $b_\psi f_A \in \mathcal{D}(U \cap A)^{\psi,st}$.

Soit $j \in \mathbb{N}$. On fixe $A_1 \dots A_k$ des représentants des classes de conjugaison de H dans $Car_j(\mathbb{X})$. Pour $i \in \{1 \dots k\}$, on fixe un système positif ψ_i de $\Delta_I(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}_i)$.

Soit π_j^{st} l'application de $I\mathcal{D}_j^{st}(U)$ dans $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(U \cap A_i)^{\psi_i,st}$ définie par :

$$\pi_j^{st}(F) = \sum_{1 \leq i \leq k} b_{\psi_i} F_{A_i}$$

Définition 3.11 *Une distribution sur U est dite stablement invariante (ou stable) si elle se trouve dans la clôture, pour la topologie faible, de l'espace vectoriel engendré par les distributions $f \to \mathcal{M}^{st}(f)(\gamma)$ où $\gamma \in U_{reg}$. On note $\mathcal{D}(U)'_{st}$ l'espace des distributions stablement invariantes sur U.*

Théorème 3.12 *(i) L'application π_j^{st} est surjective,*
(ii) L'application $\mathcal{M}^{st}$ est surjective de $\mathcal{D}(U)$ dans $I\mathcal{D}^{st}(U)$,
(iii) Sa transposée ${}^t\mathcal{M}^{st}$ est une bijection de $I\mathcal{D}^{st}(U)'$ sur $\mathcal{D}(U)'_{st}$.

Démonstration : La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 6.2.1 de [B3].

Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{D}_j^{st}(U)$ l'image réciproque de $I\mathcal{D}_j^{st}(U)$ par $\mathcal{M}^{st}$. Montrons tout d'abord que $\pi_j^{st} \circ \mathcal{M}^{st}$ envoie surjectivement $\mathcal{D}_j^{st}(U)$ sur $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(U \cap A_i)^{\psi_i,st}$. Pour cela, on introduit, pour $i \in \{1, \dots k\}$ la fonction p_{A_i} de $\mathcal{D}(U \cap A_i)^{\psi_i}$ dans $\mathcal{D}(U \cap A_i)^{\psi_i,st}$ définie par

$$p_{A_i}(f)(\gamma) = \sum_{w \in \mathcal{S}(A_i)_\gamma} \varepsilon_I(w) \frac{\xi_{w^{-1}\rho_{\psi_i} - \rho_{\psi_i}}(\gamma)}{\mid \xi_{w^{-1}\rho_{\psi_i} - \rho_{\psi_i}}(\gamma) \mid} f(\gamma^w)$$

Si $f \in \mathcal{D}(U \cap A_i)^{\psi_i,st}$ alors $p_{A_i}(f)(\gamma) =\mid \mathcal{S}(A_i)_\gamma \mid f(\gamma)$. Comme $\mathcal{S}(A_i)_\gamma$ ne dépend que de la composante connexe de A_i à laquelle appartient γ, on en déduit que l'application p_{A_i} est surjective.

On fixe $(f_1, \ldots f_k) \in \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(U \cap A_i)^{\psi_i,st}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots k\}$, il existe $\tilde{f_i} \in \mathcal{D}(U \cap A_i)^{\psi_i}$ telle que $p_{A_i}(\tilde{f_i}) = f_i$.

On rappelle que $I\mathcal{D}_j(U)$ est l'ensemble des $f \in I\mathcal{D}(U)$ telles que, pour tout $k > j$ et pour tout $A \in Car_k(\mathbb{X})$ l'on ait $F_A = 0$. Soit $\mathcal{D}_j(U) = \mathcal{M}^{-1}(I\mathcal{D}_j(U))$.

D'après les théorèmes 2.2 et 2.4, il existe $\varphi \in \mathcal{D}_j(U)$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots k\}$, l'on ait $b_{\psi_i}\mathcal{M}(\varphi)_{A_i} = \tilde{f_i}$.

Il est facile de voir que l'on a $b_{\psi_i}\mathcal{M}^{st}(\varphi)_{A_i} = p_{A_i}(b_{\psi_i}\mathcal{M}(\varphi)_{A_i})$ et par suite $b_{\psi_i}\mathcal{M}^{st}(\varphi)_{A_i} = f_i$. On obtient donc $\pi_j^{st} \circ \mathcal{M}^{st}(\varphi) = (f_1, \ldots f_k)$.

Comme $\mathcal{D}_j(U) \subset \mathcal{D}_j^{st}(U)$, on obtient le résultat voulu. Le (i) du théorème est donc prouvé.

A partir de là, il est facile de vérifier par récurrence sur j que $\mathcal{M}^{st}$ est surjective de $\mathcal{D}_j(U)^{st}$ dans $I\mathcal{D}_j^{st}(U)$ ce qui prouve (ii).

La surjectivité de $\mathcal{M}^{st}$ implique l'injectivité de ${}^t\mathcal{M}^{st}$. Il est clair que l'on a $Im{}^t\mathcal{M}^{st} \subset \mathcal{D}(U)'_{st} \subset (Ker\mathcal{M}^{st})^\perp$. Por avoir la surjectivité de ${}^t\mathcal{M}^{st}$, il suffit donc de prouver que l'on a $(Ker\mathcal{M}^{st})^\perp \subset Im{}^t\mathcal{M}^{st}$, c'est-à-dire si $\Theta \in \mathcal{D}(U)'$ est nulle sur $Ker\mathcal{M}^{st}$, alors il existe $\theta \in I\mathcal{D}^{st}(U)'$ telle que $\Theta ={}^t \mathcal{M}^{st}(\theta)$.

Pour cela nous allons utiliser, d'une part, le résultat suivant de F. Trèves :
Théorème ([T2] théorème 7.1) Soient E et F deux espaces de Fréchet et u une application linéaire continue de E dans F. Alors u est surjective si et seulement si ${}^tu$ est une bijection de F' sur $(Keru)^\perp$.

D'autre part nous allons utiliser l'existence de partitions stablement invariantes de l'unité :

Lemme : Soit $L \subset \mathbb{X}$ un compact modulo H stablement invariant et soit $\{\mathcal{W}_i\}_{i=1\ldots r}$ un recouvrement de L par des ouverts stablement invariants. Alors il existe pour tout $i \in \{1, \ldots r\}$ une fonction $\chi_i \in C^\infty(\mathcal{W}_i)$ constante sur les orbites stables à support compact modulo H inclus dans $\mathcal{W}_i$ telles que $\sum_{i=1}^{r} \chi_i = 1$ au voisinage de L.

A. Bouaziz démontre dans ([B3] lemme 6.1.1) cette assertion pour un groupe de Lie semi-simple réel. Sa démonstration repose sur l'existence de bons voisinages de chaque élément semi-simple du groupe. Or il prouve ([B3] paragraphe 8.1) l'existence de bons voisinages de chaque élément semi-simple pour l'espace symétrique $\mathbb{X}$. On obtient alors facilement le lemme précédent.

Supposons que l'on ait une famille $\mathcal{K}$ de compacts L modulo H stablement invariants dont les intérieurs sont stablement invariants et recouvrent U et tels que l'application

$\mathcal{M}^{st}$ soit surjective de $\mathcal{D}(L)$ dans $I\mathcal{D}^{st}(L)$. On notera $\mathcal{M}^{st}_L$ la restriction de $\mathcal{M}^{st}$ à $\mathcal{D}(L)$. Pour chaque $L \in \mathcal{K}$, on construit un ouvert $U_L \subset U$ qui rencontre l'orbite stable de tout élément de L et dont l'adhérence $\overline{U}_L$ est un compact inclus dans U de la manière suivante : on fixe $A_1, \ldots A_k$ une famille représentative de classes de H-conjugaison de sous-ensembles de Cartan de $\mathbb{X}$. Pour chaque i, on choisit un ouvert $U_i \subset U$ qui contient $L \cap A_i$ et dont l'adhérence dans U est compacte (voir [B3] paragraphe 2.2 et 8.1). Alors $\cup_{i\in\{1,\ldots k\}} U_i$ convient.

La même démonstration que celle du lemme 10.2.1 de [B2] permet d'écrire $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L \cap \overline{U}_L) + Ker\mathcal{M}^{st}_L$. Par suite la restriction $\mathcal{M}^{st}_{L,U_L}$ de $\mathcal{M}^{st}_L$ à $\mathcal{D}(L \cap \overline{U}_L)$ est surjective de $\mathcal{D}(L \cap \overline{U}_L)$ dans $I\mathcal{D}^{st}(L)$. Les espaces $\mathcal{D}(L \cap \overline{U}_L)$ et $I\mathcal{D}^{st}(L)$ étant des espaces de Fréchet, l'application $\mathcal{M}^{st}_{L,U_L}$ est bijective de $I\mathcal{D}^{st}(L)'$ dans $(Ker\mathcal{M}^{st}_{L,U_L})^{\perp}$.

Soit $\Theta \in \mathcal{D}(U)'$ nulle sur $Ker\mathcal{M}^{st}$. Par ce qui précède, il existe une unique $\theta_L \in I\mathcal{D}^{st}(L)'$ telle que la restriction de Θ à $\mathcal{D}(L \cap \overline{U}_L)$ soit égale à $\mathcal{M}^{st}_{L,U_L}(\theta_L)$. La restriction de Θ à $\mathcal{D}(L)$ est alors égale à ${}^t\mathcal{M}^{st}_{L,U_L}(\theta_L)$. L'unicité des θ_L implique que pour $L, L' \in \mathcal{K}$, les restrictions de θ_L et $\theta_{L'}$ coïncident sur $I\mathcal{D}^{st}(L \cap L')$. La partition stablement invariante de l'unité implique qu'il existe $\theta \in I\mathcal{D}^{st}(U)'$ dont la restriction à chaque $I\mathcal{D}^{st}(L)$ soit θ_L. Il est alors clair que l'on a ${}^t\mathcal{M}^{st}(\theta) = \Theta$.

Il reste à prouver l'existence de la famille $\mathcal{K}$. On procède comme dans la démonstration du théorème 6.2.1 de [B3]. Soit $n = dim\mathfrak{h}$. Pour $X \in \mathfrak{h}$ on note

$$det(\lambda - adX) = \lambda^n + a_{n-1}(X)\lambda^{n-1} + \ldots + a_l(X)\lambda^l$$

le polynome caractéristique de X. Soit $d = 2(n-l)!$. On pose $n_i = d/2(n-i)$. Soit $q(X) = \sum_i a_i(X)^{2n_i}$. C'est une fonction polynomiale H-invariante. Si X et X' sont réguliers et G-conjugués alors $q(X) = q(X')$. D'autre part, on $q(X) = 0$ si et seulement si X est nilpotent.

Soit γ un élément semi-simple de U. Soit $\gamma_1, \ldots \gamma_r \in \mathbb{X}$ de telle sorte que $\bigcup_{g\in G} g\varphi(\gamma)g^{-1} \cap \varphi(\mathbb{X}) = \bigcup_{j=1}^{r} H.\gamma_j$. Pour $j \in \{1, \ldots r\}$, on pose $M_j = Z_H(\varphi(\gamma_j))$ et $\mathfrak{m}_j = Z_{\mathfrak{h}}(\varphi(\gamma_j))$. Pour $\varepsilon > 0$, on note $\mathcal{V}_{j,\varepsilon}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{m}_j$ tels que $q(X) < \varepsilon$. Pour ε petit, c'est un voisinage admissible de 0 dans $\mathfrak{m}_j$([B3] paragraphes 6.1 et 8.2). Pour $0 < \eta < \varepsilon$, on pose $L_{j,\eta} = Hexpi\overline{\mathcal{V}}_{j,\eta}.\gamma_j$ où $\overline{\mathcal{V}}_{j,\eta}$ est l'adhérence de $\mathcal{V}_{j,\eta}$. Soit $\mathcal{M}^{\mathfrak{m}_j}(\psi)$ l'intégrale invariante sous le groupe M_j d'une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathfrak{m}_j)$. D'après ([B3] démonstration du théorème 6.2.1), l'application $\mathcal{M}^{\mathfrak{m}_j}$ est surjective de $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{V}}_{j,\varepsilon})$ dans $I\mathcal{D}^{\mathfrak{m}_j}(\overline{\mathcal{V}}_{j,\varepsilon})$. Soit $L_{\gamma,\eta} = \bigcup_{j=1}^{r} L_{j,\eta}$. C'est un compact modulo H, stablement invariant dont l'intérieur $L_{\gamma,\eta}$ est également stablement invariant.

Par le lemme 8.2.1 de [B3] (qui ramène l'étude de $\mathcal{M}$ à celle des $\mathcal{M}^{\mathfrak{m}_j}$), on en déduit que $\mathcal{M}$ est surjective de $\mathcal{D}(L_{\gamma,\eta})$ dans $I\mathcal{D}(L_{\gamma,\eta})$. Le raisonnement appliqué dans la démonstration de (i) et (ii) prouve alors que $\mathcal{M}^{st}$ est surjective de $\mathcal{D}(L_{\gamma,\eta})$ dans $I\mathcal{D}^{st}(L_{\gamma,\eta})$.

Pour γ un élément semi-simple de $\mathbb{X}$, on choisit η_γ assez petit. L'ensemble des L_{γ,η_γ} pour γ parcourant l'ensemble des éléments semi-simples de U forment un recouvrement de U ([H1] corollaire 2.13). La famille $\mathcal{K}$ formé des L_{γ,η_γ} pour γ parcourant l'ensemble des éléments semi-simples de U vérifie bien les hypothèses voulues.

Ceci achève la démonstration du théorème. $\blacksquare$

II Distributions sphériques

Dans cette partie, nous rappelons les constructions de distributions sphériques faites dans [H2] et [H3] à partir des transformées de Fourier d'orbites de la représentation coadjointe. Nous les exprimons comme coefficients de représentations irréductibles unitaires de G.

Ensuite, nous introduisons la notion de distributions sphériques stables et nous donnons des exemples de séries de distributions sphériques stables.

Sauf mention explicite du contraire, les notations sont celles de la partie I.

4 Rappels. Série principale sphérique

Soit $D(\mathbb{X})$ l'agèbre des opérateurs différentiels G-invariants sur $\mathbb{X}$. Cette algèbre est isomorphe au centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ ([H2] paragraphe 2). Dans toute la suite de cet article, on identifiera ces deux algèbres.

Définition 4.1 *Une distribution θ sur $\mathbb{X}$ est dite sphérique si elle est H-invariante et s'il existe un caractère χ de $Z(\mathfrak{g})$ tel que, pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, l'on ait $z.\theta = \chi(z)\theta$.*

Théorème 4.2 *([Sa 1] Théorème 4.3) Si θ est une distribution sphérique sur $\mathbb{X}$ alors θ est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{X}$ et analytique sur $\mathbb{X}_{reg}$.*

Soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire, admissible avec caractère infinitésimal de G. On note respectivement $\mathcal{H}_\pi^\infty$ et $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ l'espace de Fréchet des vecteurs de classe C^∞ de $\mathcal{H}_\pi$ et l'espace des formes antilinéaires continues sur $\mathcal{H}_\pi^\infty$.

Soit $\mathcal{H}_\pi^{-\infty,H}$ l'ensemble des éléments H-invariants de $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$.

Proposition 4.3 *([Po])Si $v \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty,H}$ et si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ alors*
$\pi(\psi)v = \int_{\mathbb{X}} \pi(g)v\ \psi(g)d\dot{g} \in \mathcal{H}_\pi^\infty$.

Définition 4.4 *Soit v et w deux éléments de $\mathcal{H}_\pi^{-\infty,H}$. On appelle coefficient de π relativement à (v, w), la distribution qui à $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ associe $< \pi(f)v, w >$.*

Lemme 4.5 *Lorsque π est irréductible et $v \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty,H}$ alors la distribution qui à $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ associe $< \pi(f)v, v >$ est définie positive et extrémale.*

On suppose dans ce paragraphe que l'algèbre $\mathfrak{h}$ admet une sous-algèbre de Cartan compacte $\mathfrak{t}$. Soit T le sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ associé à $\mathfrak{t}$. On notera Δ et Δ^+ le système de racines de $\mathfrak{t}$ et un système positif.

Soit λ un élément régulier de $\mathfrak{t}^*$. Soit $\omega_\lambda = H.\lambda$ l'orbite sous la représentation coadjointe de λ. Cette orbite a une mesure canonique $d\beta_{\omega_\lambda}$ (mesure de Liouville) qui est tempérée. On note $\hat{\beta}_{\omega_\lambda}$ sa transformée de Fourier. C'est une distribution H-invariante sur $\mathfrak{h}$, tempérée et solution propre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathfrak{h}$.

Soit γ l'isomorphisme d'harish-Chandra de $Z(\mathfrak{g})$ dans $S(\mathfrak{t}_\mathbb{C})^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{t}_\mathbb{C})}$.

Soit Ω la composante connexe de 0 de l'ensemble des $X \in \mathfrak{h}$ tels que $J(X) \neq 0$ (J est le jacobien de l'application Exp). L'application Exp est un isomorphisme de Ω sur son image.

Théorème 4.6 *([H2] Théorème 7.1) Soit T_{ω_λ} la fonction définie sur $\mathbb{X}_{reg}$ par :*

$$T_{\omega_\lambda}(x) = \sum_{\substack{Y \in \mathfrak{h}_{reg} \\ Exp\, Y = x}} \hat{\beta}_{\omega_\lambda}(Y) \mid J(Y) \mid^{-1/2}$$

Alors, T_{ω_λ} définit une distribution sphérique sur $\mathbb{X}$. C'est l'unique distribution sphérique vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a $z.T_{\omega_\lambda} = \gamma(z)(i\lambda)T_{\omega_\lambda}$,

(ii) si $x \in T_{reg} \setminus Exp\,\mathfrak{t}$ alors $T_{\omega_\lambda}(x) = 0$,

(iii) si $X \in \mathfrak{t}_{reg}$ alors

$$T_{\omega_\lambda}(ExpX) =\mid J(X) \mid^{-1/2} \hat{\beta}_{\omega_\lambda}(X) = (-1)^{|\Delta^+_{Inc}(\mathfrak{h},\mathfrak{a})|}(2i)^{|\Delta^+|} \frac{\sum_{w\in W_H(\mathfrak{a})} \varepsilon(w) e^{i<w\lambda,X>}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+_\lambda}(e^{i\alpha(X)} - e^{-i\alpha(X)})}$$

où Δ^+_λ est l'ensemble des racines β telles que $i < \lambda, H_\beta >> 0$.

Soit $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ et $N = exp\,\mathfrak{n}$. Soit $B = exp(\mathfrak{t} + i\mathfrak{t})N$. On définit le caractère χ_λ de B par

$$\chi_\lambda(exp(X + iY)n) = e^{i<\lambda,Y>}$$

Soit $\pi_\lambda = ind_B^G \chi_\lambda$ et soit $\mathcal{H}_\lambda$ l'espace de π_λ. La représentation π_λ est unitaire et irréductible.

Théorème 4.7 *([D] théorème 3) Pour presque tout $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{reg}$, il existe $v_\lambda \in \mathcal{H}_\lambda^{-\infty,H}$ tel que*

$$T_{\omega_\lambda}(x) =< \pi_\lambda(x)v_\lambda, v_\lambda >$$

5 Prolongement à un groupe réductif complexe

Dans ce paragraphe, nous donnons la série principale sphérique pour les espaces symétriques réductifs du type $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$.

Soit M un groupe de Lie réductif complexe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}$. Soit Z le centre de M et soit M_1 le groupe dérivé de M. On note $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{m}_1$ leur algèbre de Lie respective.

Soit $\mathfrak{h}$ une forme réelle de $\mathfrak{m}$ et soit σ la conjugaison de $\mathfrak{m}$ relativement à $\mathfrak{h}$. Soit H le sous-groupe analytique de M d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On pose $H_1 = H \cap M_1$ et $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}_1$.

On note par la même lettre p les projections canoniques de M sur M/H et de M_1 sur M_1/H_1.

On suppose que M vérifie les propriétés suivantes :

5.1 (i)M_1 est simplement connexe,

(ii) il existe un ensemble fini $\mathcal{Z}$ de H tel que $Z = \mathcal{Z} exp\, \mathfrak{z}$,

(iii) H_1 admet une série discrète (ce qui est équivalent à dire que $\mathfrak{h}_1$ admet une sous-algèbre de Cartan compacte).

On choisit une sous-algèbre de Cartan compacte $\mathfrak{t}_1$ de $\mathfrak{h}_1$ et on pose $\mathfrak{t} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{t}_1$.

Dans le paragraphe précédent, nous avons défini la série principale sphérique sur M_1/H_1. Nous voulons prolonger ces distributions à l'espace M/H.

Soit p_0 l'application de $(M_1/H_1) \times Z/Z \cap H$ dans M/H qui à $(p(m), z)$ associe $p(mz)$.

Remarque : Dans ([H3], paragraphe 3 p117), nous avons défini le prolongement d'une distribution sphérique θ sur M_1/H_1 par un caractère unitaire de Z trivial sur $Z \cap H$ comme étant la distribution Θ définie par

$$\Theta(y) = \sum_{\substack{(x,z) \in (M_1/H_1)_{reg} \times Z/Z \cap H \\ p_0(x,z) = y}} \theta(x)\ \chi(z)$$

Ceci définit en effet une distribution sur M/H solution propre des opérateurs différentiels H-invariants sur M/H. Elle est $H_1(Z \cap H)$-invariante mais non H-invariante.

Nous donnons ici une définition correcte du prolongement qui diffère donc de celle de [H3]. Cette erreur n'influe pas sur les résultats de [H3] comme nous allons le voir dans ce qui suit.

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des $x \in M_1/H_1$ tels qu'il existe $z \in Z$ vérifiant $x = p(z)$. L'ensemble $\mathcal{L}$ est fini ([H 3] lemme 3.2). Nous allons tout d'abord donner quelques propriétés de l'ensemble $\mathcal{L}$.

Lemme 5.2 *(i)* $\mathcal{L} = M_1 \cap (ZH)/H_1$,

(ii) si $p(y) \in \mathcal{L}$ *alors* $yH_1y^{-1} = H_1$,

(iii) Soit $\mathcal{H} = H/(Z\cap H)H_1$ de telle sorte que $H = \bigcup_{x\in\mathcal{H}} (Z\cap H)xH_1$. Alors l'application de H dans $\mathcal{L}$ qui à $zm \in ZM_1$ associe mH_1 est bien définie et elle induit un isomorphisme de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{L}$,

(iv) $H.\mu_1 = \bigcup_{x\in\mathcal{H}} H_1 x.\mu_1$.

Démonstration : L'assertion (i) est juste la définition de $\mathcal{L}$. Si $p(y) \in \mathcal{L}$, on a $y = zh$ avec $z \in Z$ et $h \in H$. Par suite $y\sigma(y)^{-1}$ commute à H_1 ce qui s'écrit, pour tout $x \in H_1$, $y^{-1}xy = \sigma(y^{-1}xy)$. On obtient alors (ii).

Soit $h \in H$. On peut écrire $h = zm$ avec $z \in Z$ et $m \in M_1$. Si $h = z'm'$ est une autre décomposition analogue de h alors, on a $mm'^{-1} = z'z^{-1} \in Z \cap M_1 \subset H_1$ et donc $m = m'$ modulo H_1. On a donc bien définie une application ψ de H dans $\mathcal{L}$. Si $m \in M_1 \cap ZH$, alors $m = zh$ et donc $\psi(h) = mH_1$ ce qui assure la surjectivité de ψ. Il est clair que le noyau de ψ est $(Z \cap H)H_1$. On en déduit donc (iii).

L'assertion (iv) découle de la définition de $\mathcal{H}$. ∎

Pour $u \in \mathcal{L}$, on notera par la même lettre un représentant de u dans M_1 et on choisit $z_u \in Z$ tel que $u = p(z_u)$.

Lemme 5.3 *Soit θ une distribution sphérique sur M_1/H_1 et χ un caractère de Z trivial sur $Z \cap H$. On identifie χ à une fonction sur $Z/Z \cap H$. Alors la fonction $pr(\theta, \chi)$ définie sur $(M/H)_{reg}$ par*

$$pr(\theta,\chi)(y) = \sum_{u\in\mathcal{L}} \sum_{\substack{(x,z) \in (M_1/H_1)_{reg} \times Z/Z\cap H \\ p_0(x,z) = y}} \theta(u^{-1}x)\ \chi(z)\chi(z_u)$$

définit une distribution sphérique sur M/H.

Soit maintenant $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ une représentation unitaire admissible avec caractère infinitésimal de M_1 et soit χ un caractère de Z trivial sur $Z \cap H$. On a le résultat suivant

Proposition 5.4 *Pour tout $v \in \mathcal{H}_1^{-\infty,H}$, il existe $w \in \mathcal{H}_1^{-\infty,H}$ tel que*

$$pr(<\pi(m)v, v>, \chi)(p_0(m,z)) = <\pi(m)w, w> \chi(z)$$

Démonstration : Il suffit de poser $w = \sum_{u\in\mathcal{L}} \chi(z_u^{-1})\pi(u)v$. Le lemme s'obtient par simple calcul. ∎

Nous allons étudier ici le prolongement de $T_{H_1.\mu_1}$ où $\mu_1 \in \mathfrak{t}^*_{1\,reg}$.

Soit Γ_Z l'ensemble des $X \in \mathfrak{z}\cap\mathfrak{h}$ tels que $exp\ 2iX = 1$ et Γ_Z^* le dual de Γ_Z c'est-à-dire l'ensemble des $\lambda \in (\mathfrak{z}\cap\mathfrak{h})^*$ tels que pour tout $X \in \Gamma_Z$ l'on ait $\lambda(X) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Lemme 5.5 *Soit $\mu_0 \in (\mathfrak{z}\cap\mathfrak{h})^*$. Alors l'application χ_{μ_0} de Z dans $\mathbb{C}$ qui à $zexp(X+iY) \in \mathcal{Z}exp\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}$ associe $e^{i<\mu_0,Y>}$ définit un caractère de Z trivial sur $Z \cap H$ si et seulement si $\mu_0 \in \Gamma_Z^*$.*

Démonstration : L'application χ_{μ_0} définit un caractère de Z si et seulement si $zexp(X+iY) = z'exp(X'+iY')$ implique que $\mu_0(Y-Y') \in 2\pi\mathbb{Z}$. Or ceci est immédiat puisque $zexp(X+iY) = z'exp(X'+iY')$ implique $Y - Y' \in \Gamma_Z$. ■

Dans toute la suite de ce paragraphe, on fixe $\mu = \mu_0 + \mu_1 \in \Gamma_Z^* + \mathfrak{t}_{1\,reg}^*$.

Lemme 5.6 *On reprend les notations des théorèmes 4.6 et 4.7. Soit $y \in \mathcal{L}$. Alors, pour tout $m \in M_1/H_1$, on a*

$$T_{H_1 y.\mu_1}(m) =< \pi_{\mu_1}(m)\pi_{\mu_1}(y)v_{\mu_1}, \pi_{\mu_1}(y)v_{\mu_1} >$$

Démonstration : Soit $F_{\mu_1}(m) =< \pi_{\mu_1}(m)\pi_{\mu_1}(y)v_{\mu_1}, \pi_{\mu_1}(y)v_{\mu_1} >$. C'est une distribution sphérique sur M_1/H_1 telle que pour tout $z \in Z(\mathfrak{m}_1)$ l'on ait $z.F_{\mu_1} = \gamma(z)(i\mu_1)F_{\mu_1}$. On note T_1 le sous-ensemble de Cartan de M_1/H_1 associé à $\mathfrak{t}_1$. Par le théorème d'unicité ([H2] théorème 4.1), il suffit de prouver que, pour tout $t \in T_{1\,reg}$ on a $T_{H_1 y.\mu_1}(t) = F_{\mu_1}(t)$.

Si $y \in \mathcal{L}$ alors $\varphi(y) \in M_1 \cap Z$ et donc on peut choisir un représentant dans $N_{M_1}(\mathfrak{t}_1)$ de y que l'on notera également y.

Soit $t \in T_{1\,reg}$. On peut écrire $t = p(exp\; iX\; m)$ avec $m \in N_{M_1}(\mathfrak{t}_1)$. Par suite, on a

$$F_{\mu_1}(t) =< \pi_{\mu_1}(y^{-1}exp\; iXmy)v_{\mu_1}, v_{\mu_1} >= T_{H_1.\mu_1}(p(exp(iy^{-1}.X)y^{-1}my))$$

Or on a $T_{H_1.\mu_1}(p(exp(iy^{-1}.X)y^{-1}my) \neq 0$ si et seulement si $y^{-1}my \in H_1$ ce qui est équivalent à $m \in H_1$ (d'aprés 5.2 (ii)).

Donc F_{μ_1} est nulle sur $T_{1\,reg} \setminus Exp(\mathfrak{t}_{1\,reg})$.

Soit maintenant $X \in \mathfrak{t}_{1\,reg}$. On a :

$$F_{\mu_1}(Exp\; X) = T_{H_1.\mu_1}(p(exp\; iy^{-1}.X)) = (-1)^{|\Delta^+_{Inc}(\mathfrak{h},\mathfrak{t}_1)|}(2i)^{|\Delta^+|}\frac{\sum_{w\in W_{H_1}(\mathfrak{t}_1)}\varepsilon(w)e^{i<w\mu_1, y^{-1}.X>}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+_{\mu_1}}(e^{i\alpha(y^{-1}.X)} - e^{-i\alpha(y^{-1}.X)})}$$

Par le lemme 5.2 (ii), l'application de $W_{H_1}(\mathfrak{t}_1)$ dans lui-même qui à w associe $Ady \circ w \circ Ady^{-1}$ est un isomorphisme. On en déduit alors :

$$F_{\mu_1}(Exp\; X) = (-1)^{|\Delta^+_{Inc}(\mathfrak{h},\mathfrak{t}_1)|}(2i)^{|\Delta^+|}\frac{\sum_{w\in W_{H_1}(\mathfrak{t}_1)}\varepsilon(w)e^{i<wy\mu_1, X>}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+_{y.\mu_1}}(e^{i\alpha(X)} - e^{-i\alpha(X)})} = T_{H_1 y.\mu_1}(Exp\; X)$$

Le lemme est donc prouvé. ■

On note $B = exp(\mathfrak{t} + i\mathfrak{t})N$ où $N = exp(\sum_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{h},\mathfrak{t})}\mathfrak{m}_\alpha)$. On note χ_μ le caractère de B défini par

$$\chi_\mu(exp(X+iY)n) = e^{i<\mu,Y>}$$

et on pose $\pi_\mu = ind_B^M \chi_\mu$ d'espace $\mathcal{H}_\mu$.

Corollaire 5.7 *Pour presque tout $\mu \in \Gamma_Z^* + \mathfrak{t}_{1\,reg}^*$, il existe $w_\mu \in \mathcal{H}_\mu^{-\infty,H}$ tel que*

$$pr(T_{H_1.\mu_1}, \chi_{\mu_0})(x) = \sum_{u\in\mathcal{L}} \sum_{p_0(y,z)=x} T_{H_1u.\mu_1}(y)\chi_{\mu_0}(z) =< \pi_\mu(x)w_\mu, w_\mu >$$

5.8 Remarque : (i) Soit ψ_0 l'isomorphisme de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{L}$ défini dans 5.2 (iii). Alors pour tout $h \in H$ et pour tout représentant l de $\psi_0(h)$ on a $Adh = Adl$.

(ii) Par le lemme 5.2, on a $\hat{\beta}_{H.\mu_1} = \sum_{y\in\mathcal{L}} \hat{\beta}_{H_1y.\mu_1}$. D'autre part, il est clair que pour tout $X \in \mathfrak{h}_1$ et $Y \in \mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}$, l'on a : $\hat{\beta}_{H.\mu}(X+Y) = \hat{\beta}_{H.\mu_1}(X)\chi_{\mu_0}(exp\ iY)$.

Définition 5.9 *On pose*

$$T_{H.\mu_1} = \sum_{y\in\mathcal{L}} T_{H_1y.\mu_1} = \sum_{y\in\mathcal{H}} T_{H_1y.\mu_1}$$

et on définit

$$C_\mu = pr(T_{H_1.\mu_1}, \chi_{\mu_0})$$

Théorème 5.10 *On note J le jacobien de l'application Exp de $\mathfrak{h}$ dans M/H. Pour tout $x \in (M/H)_{reg}$, on a*

$$C_\mu(x) = \sum_{\{Y\in\mathfrak{h}_{reg}, ExpY=x\}/\Gamma_Z} \hat{\beta}_{H.\mu}(Y) \mid J(Y) \mid^{-1/2}$$

En particulier, la distribution C_μ est nulle sur $\mathbb{X}_{reg} \setminus Exp\ \mathfrak{h}_{reg}$ et elle ne dépend que de l'orbite $H.\mu$ de μ.

Démonstration : Soit Exp_1 l'application de $\mathfrak{h}_1$ dans M_1/H_1 qui à X associe $p(expiX)$ et soit J_1 son jacobien. Soit Ω_1 la composante connexe de 0 de l'ensemble des $X \in \mathfrak{h}_1$ tels que $J_1(X) \neq 0$. Soit $x \in (M/H)_{reg}$. On a :

$$\begin{aligned} C_\mu(x) &= \sum_{\substack{(y,z)\in(M_1/H_1)\times Z/Z\cap H \\ p_0(y,z)=x}} T_{H.\mu_1}(y)\chi_{\mu_0}(z) \\ &= \sum_{\substack{y\in Exp\,\Omega_1,\, z\in Z/Z\cap H \\ p_0(y,z)=x}} T_{H.\mu_1}(y)\chi_{\mu_0}(z) \\ &= \sum_{\substack{(Y,z)\in\mathfrak{h}_{1,reg}\times Z/Z\cap H \\ p_0(Exp_1Y,z)=x}} \hat{\beta}_{H.\mu_1}(Y)\chi_{\mu_0}(z) \mid J_1(Y) \mid^{-1/2} \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des $(Y,z) \in \mathfrak{h}_{1,reg} \times Z/Z\cap H$ tels que $p_0(Exp_1Y,z) = x$. Soit $z = z_0exp(Z_0 + iZ_1) \in \mathcal{Z}exp(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z} + i\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z})$. On a $p_0(ExpY,z) = x$ si et seulement si $Exp(Y+Z_1) = x$.

Soit Z_0 et Z_1 dans $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z}$ tels qu'il existe $Y \in \mathfrak{h}_{1,reg}$ avec $Exp(Y+Z_0) = Exp(Y+Z_1) = x$. Dans ce cas, on a $Z_0 - Z_1 \in \Gamma_Z$.

Soit $\mathcal{I}_0$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{h}_{reg}$ tels que $Exp\ X = x$. Par ce qui précède, l'application de $\mathcal{I}_0$ dans $\mathcal{I}$ qui à $X_0 + X_1 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{z} + \mathfrak{h}_1$ associe $(X_1, ExpX_0)$ induit un isomorphisme de $\mathcal{I}_0/\Gamma_Z$ dans $\mathcal{I}$. Du (ii) de la remarque 5.8 et de ce qui précède, on obtient :

$$C_\mu(x) = \sum_{\{Y\in\mathfrak{h}_{reg};ExpY=x\}/\Gamma_Z} \hat{\beta}_{H.\mu}(Y) \mid J(Y) \mid^{-1/2}$$

■

Théorème 5.11 *Soit $\mu \in \Gamma_Z^* + \mathfrak{t}^*_{1\ reg}$. Alors la distribution C_μ est l'unique distribution sphérique vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) pour tout $z \in Z(\mathfrak{m})$, on a $z.C_\mu = \gamma(z)(i\mu)C_\mu$

(ii) si $x \in T_{reg} \setminus Exp\ \mathfrak{t}$ alors $C_\mu(x) = 0$

(iii) si $X \in \mathfrak{t}_{reg}$ alors

$$C_\mu(ExpX) =\mid J(X) \mid^{-1/2} \hat{\beta}_{H.\mu}(X)$$

Démonstration : Par le théorème 4.6, la définition de C_μ et le théorème 5.10, il est clair qu'elle vérifie les propriétés (i) (ii) et (iii). En utilisant l'application p_0 elle définit une distribution C^0_μ sur M_1/H_1 et un caractère de Z trivial sur $Z \cap H$. Le théorème d'unicité ([H2] théorème 4.1) dans le cadre semi-simple permet d'obtenir l'unicité de C_μ. ■

6 Induction de distributions sphériques

Les notations sont celles de la partie I.

Nous allons tout d'abord rappeler brièvement le procédé d'induction pour les distributions sphériques défini dans [H3].

On fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{h}$. On note, comme en 1.3, $\mathfrak{a}_I$ et $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ les parties compacte et vectorielle de $\mathfrak{a}$. Soit $L = Z_G(\mathfrak{a}_\mathbb{R})$. Le groupe L est réductif, complexe, σ-stable et de même rang que G.

Pour $B \in Car(\mathbb{X})$, on note $\mathcal{N}^H_L(B)$ l'ensemble des $h \in H$ tels que $h.B \subset L/L \cap H$.

Théorème 6.1 *([H3] corollaire 2.4) Soit θ une distribution sphérique sur $L/L \cap H$. On définit la fonction $ind^G_L\theta$ sur $\mathbb{X}_{reg}$ par*

si $B \in Car(\mathbb{X})$ et $x \in B_{reg}$ alors

$$ind^G_L\theta(x) =\mid D_\mathbb{X}(x) \mid^{-1/2} \sum_{h\in H\cap L\backslash\mathcal{N}^H_L(B)} \theta(h.x) \mid D_{L/L\cap H}(h.x) \mid^{1/2}$$

Alors

(1) la fonction $ind^G_L\theta$ définit une distribution sphérique sur $\mathbb{X}$,

(2) Si θ est définie positive et extrémale alors il en est de même de $ind^G_L\theta$

On note Z et L_1 le centre et le sous-groupe dérivé de L. Soit $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{l}_1$ leur algèbre de Lie respective.

Lemme 6.2 *Les groupes L_1 et Z vérifient les propriétés 5.1.*

Démonstration : Le groupe L_1 est connexe, semi-simple complexe. On a donc $\pi_1(L_1) = Ker\ exp(2i\pi\ .)/\sum_{\alpha\in\Delta_I(\mathfrak{h},\mathfrak{a})}\mathbb{Z}H_\alpha$. Soit $X \in \mathfrak{l}_1$ tel que $exp2i\pi X = e$. Comme le groupe G est simplement connexe, on a

$$X \in \mathfrak{l}_1 \cap \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a})} \mathbb{Z}H_\alpha$$

D'après ([Bou] chapitre 6, paragraphe 1, proposition 28), on a

$$\mathfrak{l}_1 \cap \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a})} \mathbb{Z}H_\alpha = \sum_{\alpha\in\Delta_I(\mathfrak{h},\mathfrak{a})} \mathbb{Z}H_\alpha = \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h},\mathfrak{a})} \mathbb{Z}H_\alpha$$

On obtient que L_1 est simplement connexe.

Il est clair que $Z \subset exp\ \mathfrak{a}_\mathbb{C}$ et $\mathfrak{z}$ est l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}$ tels que pour tout $\alpha \in \Delta_I(\mathfrak{h},\mathfrak{a})$ l'on ait $\alpha(X) = 0$.

Soit X et Y dans $\mathfrak{a}$ tels que $y = exp(X+iY) \in Z$. Dans ce cas pour tout $\alpha \in \Delta_I(\mathfrak{h},\mathfrak{a})$, on a $\alpha(X) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha(Y) = 0$. On peut donc écrire $y = expX_0z$ avec $z \in exp\ \mathfrak{z}$ et $expX_0 \in exp(\mathfrak{a}_I \cap \mathfrak{l}_1) \cap Z \subset L_1 \cap H \cap Z$. On obtient l'assertion 5.1 (ii).

L'assertion (iii) est claire puisque l'algèbre $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{l}_1$ est une sous-algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{h}$. ■

On pose $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}\cap\mathfrak{l}_1$ de telle sorte que $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}\cap\mathfrak{h} + \mathfrak{a}_1$.

6.3 On note $\Gamma_\mathfrak{a}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{z}\cap\mathfrak{h}$ tels que $exp2iX = 1$ et $\Gamma_\mathfrak{a}^*$ l'ensemble des $\lambda \in (\mathfrak{z}\cap\mathfrak{h})^*$ tels que pour tout $X \in \Gamma_\mathfrak{a}$, l'on ait $\lambda(X) \in 2\pi\mathbb{Z}$. On reprends les notations du paragraphe précédent. Pour $\mu = \mu_0 + \mu_1 \in \Gamma_\mathfrak{a}^* + \mathfrak{a}_{1reg}^*$, on a défini une distribution sphérique C_μ sur $L/L\cap H$ (définition 5.9).

On pose

6.4 $\qquad \theta_\mu = ind_L^G C_\mu.$

On choisit un système positif $\Delta^+(\mathfrak{h},\mathfrak{a})$ de telle sorte que $\Delta_\mathbb{C}^+(\mathfrak{h},\mathfrak{a})$ soit σ-stable. Soit $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_\mathbb{C} + \sum_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{h},\mathfrak{a})} \mathfrak{g}_\alpha$ et soit B le sous-groupe de Borel de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. On pose $N = exp(\sum_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{h},\mathfrak{a})}\mathfrak{g}_\alpha)$ de telle sorte que $B = exp\mathfrak{a}_\mathbb{C}N$. On définit le caractère χ_μ de B par

$$\chi_\mu(exp(X+iY)n) = e^{i<\mu,Y>}$$

Soit $\pi_\mu = ind_B^G\chi_\mu$ d'espace $\mathcal{H}_\mu$. La représentation π_μ est unitaire et irréductible.

Corollaire 6.5 *Pour presque tout* $\mu \in \Gamma^*_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}^*_{1reg}$, *il existe* $v_\mu \in \mathcal{H}_\mu^{-\infty,\,H}$ *tel que* $\theta_\mu(g) =< \pi_\mu(g)v_\mu, v_\mu >$.

Démonstration : La démonstration est analogue à celle de la proposition 4.1 de [H3]. ■

Proposition 6.6 *Soit* $x \in \mathbb{X}_{reg}$.
(i) Si $x \notin Exp\, \mathfrak{h}$ *alors on a* $\theta_\mu(x) = 0$.
(ii) Si $X \in \mathfrak{a}_{reg}$ *alors on a* $\theta_\mu(Exp\ X) = 2^{|\Delta^+(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{l},\mathfrak{a})|-|\Delta^+(\mathfrak{h},\mathfrak{a})|}\hat{\beta}_{H.\mu}(X) \mid J(X) \mid^{-1/2}$

Démonstration : Il suffit de regarder ce qui se passe sur chaque sous-ensemble de Cartan. Soit $B \in Car(\mathbb{X})$ et soit $b \in B_{reg}$. Si $\mathcal{N}_L^G(B) = \emptyset$ alors par le théorème 6.1, la fonction θ_μ est nulle sur B_{reg}.

Si $\mathcal{N}_L^G(B) \neq \emptyset$, on a

$$\theta_\mu(b) =\mid D_{\mathbb{X}}(b) \mid^{-1/2} \sum_{h\in H\cap L\backslash\mathcal{N}_L^H(B)} C_\mu(h.b) \mid D_{L/L\cap H}(h.b) \mid^{1/2}$$

Or on a $C_\mu(h.b) \neq 0$ implique $h.b \in Exp(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h})_{reg}$ et donc $b \in Exp\ \mathfrak{h}_{reg}$.

Maintenant, si $X \in \mathfrak{a}_{reg}$, on a :

$$\theta_\mu(Exp\ X) =$$

$$\mid D_{\mathbb{X}}(Exp\ X) \mid^{-1/2} \sum_{h\in H\cap L\backslash\mathcal{N}_L^H(A)} \hat{\beta}_{L\cap H.\mu}(h.X) \mid D_{L/L\cap H}(h.Exp\ X) \mid^{1/2}\mid J_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h}}(h.X) \mid^{-1/2}$$

où $J_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h}}$ est le jacobien de l'application Exp de $\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h}$ dans $L/L\cap H$. Le lemme 4.2.1 de [B 1] permet alors de conclure. ■

7 Distributions sphériques stables

Nous rappelons qu'une distribution est dite stable si elle est dans la clôture pour la topologie faible, de l'espace vectoriel engendré par les $f \to \mathcal{M}^{st}(f)(\gamma)$ où $\gamma \in \mathbb{X}_{reg}$.

Théorème 7.1 *Soit* θ *une distribution sphérique sur* $\mathbb{X}$. *Alors* θ *est stable si et seulement si, pour tout* $\gamma \in \mathbb{X}_{reg}$ *et pour tout* $x \in \mathcal{S}_\gamma$ *l'on a*

$$\theta(\gamma) = \theta(\gamma^x)$$

Démonstration : On a la formule d'intégration de Weyl suivante : soit $H \setminus Car(\mathfrak{h})$ l'ensemble des classes de H-conjugaison de sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{h}$. Pour $\mathfrak{a} \in H \setminus Car(\mathfrak{h})$ associée à $A \in Car(\mathbb{X})$, on peut normaliser la mesure da sur A de telle sorte que, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$, l'on ait

$$< \theta, f >= \sum_{\mathfrak{a}\in H\backslash Car(\mathfrak{h})} \frac{1}{\mid W_H(\mathfrak{a}) \mid} \int_A \theta(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a)\, da$$

Supposons tout d'abord que pour tout $\gamma \in \mathbb{X}_{reg}$ et pour tout $x \in \mathcal{S}_\gamma$ l'on ait $\theta(\gamma) = \theta(\gamma^x)$.

On veut exprimer $< \theta, f >$ en fonction des $\mathcal{M}^{st}(f)(a)$ pour $a \in A_{reg}$.

Soit $A \in Car(\mathbb{X})$. Soit $A_1 \dots A_k$ les composantes connexes de A.

Soit $j \in \{1, \dots k\}$. On note $\varphi(A_j) = (exp\ i\mathfrak{a})u_j$ où $u_j \in M \cap H$. Soit $\mathcal{S}(A)_j$ l'ensemble des $x \in \mathcal{S}(A)$ tels que $xu_jx^{-1} \in M$.

On note I_j l'ensemble des $l \in \{1, \dots k\}$ tels qu'il existe $x \in \mathcal{S}(A)_j$ vérifiant $A_j^x = A_l$ (ce qui est équivalent à $xu_jx^{-1} = u_l$). Pour $l \in \{1, \dots k\}$, on note $W_{j,l}$ l'ensemble des $x \in \mathcal{S}(A)_j$ tels que $A_j^x = A_l$. On pose $\alpha_j =\mid I_j \mid$, $a_{j,l} =\mid W_{j,l} \mid$ et $\beta_j = a_{j,j}$.

Nous allons étudier quelques propriétés des entiers α_j et $a_{j,l}$.

Tout d'abord on a $W_{j,l} \neq \emptyset$ si et seulement si $l \in I_j$. Il est clair que $l \in I_j$ si et seulement si $j \in I_l$ et on a $a_{j,l} = a_{l,j}$. D'autre part les α_j sont tous non nuls.

Supposons $l \in I_j$. Soit w et w' dans $W_{j,l}$. On a alors
$wu_jw^{-1} = w'u_jw'^{-1} = u_l$ et donc $w'^{-1}w \in W_{j,j}$.

Donc si $w_0 \in W_{j,l}$ alors l'ensemble $W_{j,l}$ est l'ensemble des w_0w avec $w \in W_{j,j}$. Par suite on a

$$(*) \qquad \beta_j = \beta_l = a_{j,l} = a_{l,j}$$

D'autre part, on a $p \in I_l$ si et seulement si il existe $w \in \mathcal{S}(A)_l$ tel que $wu_lw^{-1} = u_p$. Comme par hypothèse on a $W_{j,l} \neq \emptyset$, il existe $x \in \mathcal{S}(A)_j$ tel que $xu_jx^{-1} = u_l$ et donc on a $wxu_jx^{-1}w^{-1} = u_p$. On en déduit $p \in I_j$.

Donc on a

$$(**) \qquad \alpha_j = \alpha_l$$

D'autre part il est clair que l'on a $\alpha_j\beta_j =\mid \mathcal{S}(A)_j \mid$.

Reprenons la formule d'intégration de Weyl.

Par hypothèse sur θ, on a, pour tout $j \in \{1 \dots k\}$ et pour $x \in \mathcal{S}(A)_j$:

$$\begin{aligned}\int_{A_j} \theta(a^x) \mid D_{\mathbb{X}}(a^x) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a^x)\, da &= \int_{A_j^x} \theta(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a)\, da \\ &= \int_{A_j} \theta(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a^x)\, da\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha_j\beta_j} \int_{A_j} \theta(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}^{st}(f)(a)\, da &= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha_j\beta_j} \sum_{x\in\mathcal{S}(A)_j} \int_{A_j^x} \theta(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a)\, da \\ &= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha_j\beta_j} \sum_{l\in I_j} a_{j,l} \int_{A_l} \theta(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a)\, da \\ &= \sum_{l=1}^{k} \sum_{j\in I_l} \frac{a_{j,l}}{\alpha_j\beta_j} \int_{A_l} \theta(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a)\, da\end{aligned}$$

Si $a_{j,l} \neq 0$ alors on a vu (voir (*) et (**)) que l'on a $a_{j,l} = a_{j,j} = \beta_j$ et $\alpha_l = \alpha_j$.
On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha_j \beta_j} \int_{A_j} \theta(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}^{st}(f)(a)\, da &= \sum_{j=1}^{k} \int_{A_j} \theta(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a)\, da \\
&= \int_{A} \theta(a) \mid D_{\mathbb{X}}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}(f)(a)\, da
\end{aligned}$$

Par suite la distribution θ est stable.

Supposons maintenant que la distribution θ soit stable.

Soit $\gamma_0 \in \mathbb{X}_{reg}$. Soit A l'unique sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}$ qui contient γ_0 et soit $\mathfrak{a}$ la sous-algèbre de Cartan associée à A. On fixe $w_0 \in \mathcal{A}(A)_{\gamma_0}$.

Soit U un voisinage ouvert de γ_0 dans $\mathbb{X}_{reg} \cap A$ contenu dans la composante connexe de γ_0 dans A tel que pour tout $w \in \mathcal{A}(A)_{\gamma_0}/Z_G(\mathfrak{a})$ l'on ait $U \cap U^w = \emptyset$.

L'application de $U^{w_0} \times H/Z_H(w_0\mathfrak{a})$ dans $H.U^{w_0}$ qui à (γ, h) associe $h.\gamma$ est alors un difféomorphisme.

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ à support contenu dans $H.U$. On définit la fonction $f^{(w_0)} \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ à support dans $H.U^{w_0}$ par

$$f^{(w_0)}(h.\gamma) = f(h.\gamma^{w_0^{-1}})$$

Il est facile de voir que l'on a

$$\mathcal{M}^{st}(f^{(w_0)}) = \mathcal{M}^{st}(f)$$

Par suite, on en déduit

$$< \theta, f^{(w_0)} >=< \theta, f >$$

et donc

$$\theta(\gamma_0) = \theta(\gamma_0^{w_0})$$

■

Soit $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$ associé à $A \in Car\mathbb{X}$. On note, comme dans le paragraphe 6, $L = Z_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}})$, $\mathfrak{l}$ l'algèbre de Lie de L, Z le centre de L et $\mathfrak{z}$ l'algèbre de Lie de Z. On note $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ le réseau des $X \in \mathfrak{a}$ vérifiant $exp\, 2iX = 1$ et $\Gamma_{\mathfrak{a}}^*$ le réseau des $\lambda \in \mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}$ tels que pour tout $X \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$ l'on ait $\lambda(X) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Pour $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_{1reg}^*$, nous avons défini (voir les deux paragraphes précédents) une distribution $\theta_\mu = ind_L^G C_\mu$. Nous avons vu (théorème 5.10 et définition 6.4) que θ_μ ne dépend que de l'orbite $(H \cap L).\mu$ de μ. D'autre part, nous avons défini (paragraphe 3) l'ensemble $\mathcal{S}(A) = W_H(\mathfrak{a}) \setminus W_G(\mathfrak{a}) = W_{L\cap H}(\mathfrak{a}) \setminus W_L(\mathfrak{a})$. On peut donc définir

7.2 $$\theta_\mu^{st} = \sum_{w \in \mathcal{S}(A)} \theta_{w.\mu} = ind_L^G \sum_{w \in \mathcal{S}(A)} C_{w.\mu}$$

Théorème 7.3 *La distribution θ^{st}_μ est stable.*

Démonstration : Montrons tout d'abord que la distribution sphérique $T_\mu = \sum_{w\in\mathcal{S}(A)} C_{w.\mu}$ est une distribution stable de $L/L\cap H$.

Par le théorème 5.10, pour tout $x \in (L/L\cap H)_{reg}$ on a

$$T_\mu(x) = \sum_{\{Y\in(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h})_{reg};ExpY=x\}/\Gamma_{\mathfrak{a}}} \sum_{w\in\mathcal{S}(A)} \hat{\beta}_{(L\cap H).w\mu}(Y) \mid J_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h}}(Y) \mid^{-1/2}$$

où $J_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h}}$ est le jacobien de l'application Exp de $\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h}$ dans $L/L\cap H$.

Soit $B \in Car(L/L\cap H)$ et soit $b \in B_{reg}$.

Si $b \notin Exp\ \mathfrak{b}$ alors pour tout $b' \in< b >$, on a $b' \notin H.Exp\ \mathfrak{b}$ et par conséquent on a $T_\mu(b) = T_\mu(b') = 0$.

Si $b \in Exp\ \mathfrak{b}$ alors on écrit $b = ExpX$ et dans ce cas , on a $\mathcal{S}_b = \mathcal{S}(B)$.

Pour prouver la stabilité de T_μ, il faut montrer que, pour tout $x \in \mathcal{S}(B)$, on a

$$T_\mu(b^x) = T_\mu(b)$$

Soit $x \in \mathcal{S}(B)$. On a

$$\begin{aligned} T_\mu(b^x) &= \sum_{\{Y\in(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h})_{reg};ExpY=Exp\ x.X\}/\Gamma_{\mathfrak{a}}} \sum_{w\in\mathcal{S}(A)} \hat{\beta}_{(L\cap H).w\mu}(Y) \mid J_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h}}(Y) \mid^{-1/2} \\ &= \sum_{\{Y\in(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h})_{reg};ExpY=ExpX\}/\Gamma_{\mathfrak{a}}} \sum_{w\in\mathcal{S}(A)} \hat{\beta}_{(L\cap H).w\mu}(x.Y) \mid J_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h}}(Y) \mid^{-1/2} \end{aligned}$$

Pour avoir le résultat, il suffit donc de prouver que, pour tout $x \in \mathcal{S}(B)$ et $Y \in \mathfrak{b}_{reg}$, on a

$$\sum_{w\in\mathcal{S}(A)} \hat{\beta}_{(L\cap H).w\mu}(Y) = \sum_{w\in\mathcal{S}(A)} \hat{\beta}_{(L\cap H).w\mu}(x.Y)$$

Or Harish-Chandra a prouvé un résultat analogue pour la série discrète sur $(L\cap H)$ ([V] paragraphe 3.6 Théorème 1). La démonstration est la même pour les transformées de Fourier d'orbites et on obtient l'assertion précédente.

Montrons maintenant la stabilité de θ^{st}_μ.

Soit $B \in Car(\mathbb{X})$ et soit $b \in B_{reg}$.

Si $\mathcal{N}^H_L(B) = \emptyset$ alors θ^{st}_μ est nulle sur B_{reg} et donc elle est nulle sur tout élément de $< b >$.

Si $\mathcal{N}^H_L(B) \neq \emptyset$, on sait que si $b \notin Exp\mathfrak{b}$ alors pour tout $w \in \mathcal{S}(A)$ on a $\theta_{w.\mu}(b) = 0$ et donc θ^{st}_μ est nulle sur $< b >$.

On suppose donc maintenant que $b = ExpX$ avec $X \in \mathfrak{b}$. Soit $x \in \mathcal{S}(B)$. D'après le théorème 6.1, on a

$$\theta^{st}_\mu(b^x) = \mid D_{\mathbb{X}}(b) \mid^{-1/2} \sum_{h\in H\cap L\backslash\mathcal{N}^H_L(B)} \sum_{w\in\mathcal{S}(A)} C_{w.\mu}(h.b^x) \mid D_{L/L\cap H}(h.b^x) \mid^{1/2}$$

Pour $h \in \mathcal{N}_L^H(B)$, on a

$h.b^x = Exp\ hx.X = Exphxh^{-1}h.X = (h.b)^{hxh^{-1}}$

D'autre part, l'application de $\mathcal{S}(B)$ dans $\mathcal{S}(h.B)$ qui à w associe hwh^{-1} est un isomorphisme.

Comme d'une part $\sum_{w\in\mathcal{S}(A)} C_{w.\mu}$ est stable et d'autre part $\mid D_{L/L\cap H}(h.b^x) \mid^{1/2} = \mid D_{L/L\cap H}(h.b) \mid^{1/2}$, on obtient

$$\theta_\mu^{st}(b^x) = \theta_\mu^{st}(b)$$

On a donc prouvé le théorème. ∎

III Correspondance entre deux espaces symétriques

On considère comme dans la partie I un groupe de Lie G semi-simple complexe connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit σ et τ deux involutions de $\mathfrak{g}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) les algèbres $\mathfrak{g}^\tau$ et $\mathfrak{g}^\sigma$ sont des formes réelles de $\mathfrak{g}$

(ii) le groupe G^τ est quasi-déployé (c'est-à-dire G^τ admet un sous-groupe de Borel)

(iii) l'automorphisme $\sigma\tau$ est intérieur

On note $\mathbb{X}_\sigma = G/G^\sigma$ et $\mathbb{X}_\tau = G/G^\tau$.

Le but de cette partie est d'établir une correspondance entre les distributions sphériques stables de $\mathbb{X}_\sigma$ construites dans le paragraphe 7 et celles de $\mathbb{X}_\tau$. Les résultats et les méthodes utilisées sont analogues à ceux de D. Shelstad dans [S].

On va établir cette correspondance à partir du résultat suivant de R.P. Langlands ([SW] lemme 2.1 page 106) : sous les hypothèses précédentes, on a

Pour tout $\mathfrak{a} \in Car\mathfrak{g}^\sigma$, il existe $g \in G$ dépendant de $\mathfrak{a}$ tel que $g.\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^\tau$.

On reprends les notations des parties précédentes en précisant par l'indice σ ou τ sur quel espace symétrique on travaille. Pour $\eta = \sigma$ ou τ, on rappelle que φ_η est la bijection de $\mathbb{X}_\eta$ dans $M_\eta \subset G$ qui à $p_\eta(g)$ associe $g\eta(g)^{-1}$.

8 Sous-ensembles de Cartan. Eléments réguliers

Soit $\eta = \sigma$ ou τ. Pour $A \in Car\mathbb{X}_\eta$, on pose

$$< A >= \bigcup_{g\in G^\eta} g.A$$

l'ensemble des conjugués sous G^η de A et on note $< Car\mathbb{X}_\eta >$ l'ensemble des classes de G^η-conjugaison de sous-ensembles de Cartan de $\mathbb{X}_\eta$.

8.1 Soit $A \in Car\mathbb{X}_\sigma$ associé à $\mathfrak{a} \in Car\mathfrak{g}^\sigma$. Il existe $g \in G$ dépendant de $\mathfrak{a}$ tel que $g.\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^\tau$. L'algèbre $\mathfrak{b} = g.\mathfrak{a}$ est alors une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^\tau$. Si g' est un autre élément de G tel que $\mathfrak{b}' = g'.\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^\tau$ alors les algèbres $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont G^τ-conjuguées. Soit B et B' les sous-ensembles de Cartan associés à $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$. Par ce qui précède, on a

$$B' \in < B >$$

Soit $\mathfrak{a}' \in Car\mathfrak{g}^\sigma$ et $g' \in G$ tels que $g'.\mathfrak{a}'$ soit G^τ-conjuguée à $\mathfrak{b}$. Dans ce cas si A' est le sous-ensemble de Cartan associé à $\mathfrak{a}'$, on a $A' \in < A >$. On en déduit que $< B >$ ne dépend que de $< A >$.

On peut donc définir l'application T de $< Car\mathbb{X}_\sigma >$ dans $< Car\mathbb{X}_\tau >$ qui à $< A >$ associe $< B >$ défini ci-dessus. Par ce qui précède l'application T est injective.

Il est faux en général que sous les hypothèses précédentes l'on ait

$$g\varphi_\sigma(A)g^{-1} \subset \varphi_\tau(B)$$

Par contre on a le résultat suivant :

Lemme 8.2 *Soit A_j une composante connexe de A. Il existe alors $x \in G$ et une composante connexe B_j de B tels que*

$$x\varphi_\sigma(A_j)x^{-1} = \varphi_\tau(B_j)$$

Démonstration : On a décrit dans le corollaire 1.7 les composantes connexes de A.

Il existe donc un ensemble ψ de racines imaginaires non compactes deux à deux fortement orthogonales tel que, si $g_\alpha = exp\frac{\pi}{2}(X_\alpha - X_{-\alpha})$ réalise s_α alors

$$A_j = p_\sigma(exp\ i\mathfrak{a} \prod_{\alpha\in\psi} g_\alpha)$$

Pour avoir le résultat voulu, il suffit de prouver :

(*) il existe $x \in G$ tel que $x.\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ et tel que $\psi' = \{x.\alpha; \alpha \in \psi\}$ soit un ensemble de racines imaginaires non compactes deux à deux fortement orthogonales de $\Delta_I(\mathfrak{g}^\tau, \mathfrak{b})$.

Pour α une racine imaginaire non compacte de $\mathfrak{a}$, on note c_α la transformée de Cayley relative à α (voir 1.8). Si α et β sont fortement orthogonales, alors c_α et c_β commutent.On peut donc poser

$$c_\psi = \prod_{\alpha\in\psi} c_\alpha$$

Soit $\mathfrak{a}_\psi$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^\sigma$ obtenue à partir de $\mathfrak{a}$ par c_ψ(par transformations de Cayley successives).

Il existe $g_0 \in G$ tel que $g_0.\mathfrak{a}_\psi = \mathfrak{b}_0$ soit une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^\tau$.

D'après ([Sc] proposition 2.16), il existe ψ' un ensemble de racines imaginaires non compactes deux à deux fortement orthogonales de $\Delta_I(\mathfrak{g}^\tau, \mathfrak{b})$ et $u_0 \in G^\tau$ tels que

$$c_{\psi'}.\mathfrak{b}_\mathbb{C} = u_0.\mathfrak{b}_{0\mathbb{C}}$$

Soit $\mathfrak{l} = Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_\mathbb{R})$. On a alors $g.\mathfrak{l} = Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{b}_\mathbb{R})$.

Soit ψ'_0 l'ensemble des $u_0^{-1}c_{\psi'}\alpha'$ pour $\alpha' \in \psi'$. C'est une base du $\mathbb{Q}$ espace vectoriel engendré par $\Delta_\mathbb{R}(g.\mathfrak{l}, \mathfrak{b}_{0\mathbb{C}})$ ([Sc] lemme 2.22).

D'autre part, soit ψ_0 l'ensemble des $c_\psi \alpha$ pour $\alpha \in \psi$. C'est une base du $\mathbb{Q}$ espace vectoriel engendré par $\Delta_{\mathbb{R}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{a}_{\psi\mathbb{C}})$. Par suite les ensembles ψ'_0 et $g_0.\psi_0$ sont G^τ-conjugués (lemme 2.19 de [Sc]). Soit $u \in G^\tau$ tel que $ug_0.\psi_0 = \psi'_0$. On pose

$$x = c_{\psi'}^{-1} u_0 u g_0 c_\psi$$

Par construction, on a $x.\psi = \psi'$ et $x.\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$. On peut écrire $\mathfrak{a} = \sum_{\alpha \in \psi} \mathbb{R} i H_\alpha + \bigcap_{\alpha \in \psi} Ker\alpha$. Par suite, on a $\mathfrak{a}_\psi = \sum_{\alpha \in c_\psi \psi} \mathbb{R} H_\alpha + \bigcap_{\alpha \in c_\psi . \psi} Ker\alpha$. Les racines de $c_\psi \psi$ sont réelles. Soit $x_0 = u_0 u g_0$. On a $x_0.\mathfrak{a}_\psi = \mathfrak{b}_{\psi'}$ et $c_{\psi'}\psi' = x_0 c_\psi \psi$. Donc on a $x.\mathfrak{a} = \sum_{\alpha \in \psi'} \mathbb{R} i H_\alpha + \bigcap_{\alpha \in \psi'} Ker\alpha = \mathfrak{b}$. L'élément x vérifie donc bien la relation (*) ∎

On définit un ordre sur $< Car\mathbb{X}_\sigma >$ de la manière suivante :

On dit que $< A_0 > \leq < A_1 >$ si et seulement si il existe $A'_0 \in < A_0 >$et $A'_1 \in < A_1 >$ associés respectivement à $\mathfrak{a}'_0$ et $\mathfrak{a}'_1$ tels que $\mathfrak{a}'_{0\mathbb{R}} \subset \mathfrak{a}'_{1\mathbb{R}}$.

Lemme 8.3 *([S] lemme 2.8)*

(i) si $< A_0 > \leq < A_1 >$ alors $T(< A_0 >) \leq T(< A_1 >)$,

(ii) si $< B > \in ImT$ et si $< B' > \leq < B >$ alors on a $< B' > \in ImT$,

(iii) soit $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{g}^\sigma$ et A le sous-ensemble de Cartan associé à $\mathfrak{a}$. On note $< B >= T(< A >)$. Alors la sous-algèbre $\mathfrak{b}$ associé à B est fondamentale.

On regarde maintenant l'action de T sur deux sous-ensembles de Cartan adjacents.

Soit $B \in Car\mathbb{X}_\tau$ associé à $\mathfrak{b} \in Car\mathfrak{g}^\tau$. On suppose $< B > \in ImT$ et on fixe $A \in Car\mathbb{X}_\sigma$ associé à $\mathfrak{a} \in Car\mathfrak{g}^\sigma$ tel que $T(< A >) =< B >$. Soit $g \in G$ tel que $g.\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Soit α une racine imaginaire non compacte de $\mathfrak{b}$. On note B_α le sous-ensemble de Cartan adjacent à B relativement à α.

Lemme 8.4 *(i) Soit $\beta = g^{-1}.\alpha$. Alors la racine β est une racine imaginaire de $\mathfrak{a}$,*

(ii) Si $< B_\alpha > \in ImT$ alors il existe $w \in N_G(\mathfrak{a})$ tel que $w\beta$ soit une racine imaginaire non compacte que l'on note δ. On a alors $T < A_\delta >=< B_\alpha >$,

(iii) Si $< B_\alpha > \notin ImT$ alors pour tout $w \in N_G(\mathfrak{a})$ la racine $w\beta$ est imaginaire compacte.

Démonstration : L'assertion (i) est immédiate.

Prouvons (ii). Soit $A_0 \in Car\mathbb{X}_\sigma$ tel que $T < A_0 >=< B_\alpha >$. Il existe donc $g_0 \in G$ tel que $g_0.\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_\alpha$. Les arguments utilisés lors de la démonstration du lemme 8.2 assurent qu'il existe $\delta \in \Delta_{Inc}(\mathfrak{g}^\sigma, \mathfrak{a})$ et $u_0 \in G^\sigma$ tels que $\mathfrak{a}_\delta = u_0.\mathfrak{a}_0$ et $c_\delta \delta = u_0 g_0^{-1} c_\alpha \alpha$. Soit $w = c_\delta^{-1} u_0 g_0^{-1} c_\alpha g$. On a alors $w\beta = \delta$ et $w \in N_G(\mathfrak{a})$. Les algèbres $\mathfrak{a}_\delta$ et $\mathfrak{a}_0$ étant G^σ-conjugués, on a $T < A_\delta >=< B_\alpha >$. L'assertion (ii) est donc prouvée.

Maintenant supposons que $< B_\alpha > \notin ImT$. Le raisonnement précédent montre facilement l'assertion (iii). ∎

Nous allons maintenant définir une application entre les orbites stables des éléments réguliers de $\mathbb{X}_\sigma$ et celles des éléments réguliers de $\mathbb{X}_\tau$.

Soit $\gamma \in \mathbb{X}_{\sigma,reg}$. L'élément γ appartient à un unique sous-ensemble de Cartan A_γ de $\mathbb{X}_\sigma$ associé à $\mathfrak{a}_\gamma \in Car\mathfrak{g}^\sigma$. Soit $\gamma' \in \mathbb{X}_{\tau,reg}$. On note $B_{\gamma'}$ l'unique sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{X}_\tau$ associé à $\mathfrak{b}_{\gamma'} \in Car\mathfrak{g}^\tau$ contenant γ'.

Définition 8.5 *On dit que γ' provient de γ s'il existe $g \in G$ tel que*
(i) $g\varphi_\sigma(\gamma)g^{-1} = \varphi_\tau(\gamma')$,
(ii)$g.\mathfrak{a}_\gamma = \mathfrak{b}_{\gamma'}$,
On note $P(\gamma')$ l'ensemble des $\gamma \in \mathbb{X}_{\sigma,reg}$ tels que γ' provient de γ et $I(\gamma)$ l'ensemble des $\gamma' \in \mathbb{X}_{\tau,reg}$ tels que γ' provient de γ.

Lemme 8.6 *Si $\gamma' \in \mathbb{X}_{\tau,reg}$ et si $\gamma \in P(\gamma')$ alors on a $P(\gamma') =<\gamma>$ et $I(\gamma) =<\gamma'>$. De plus, $I(\gamma)$ ne dépend que de $<\gamma>$.*

Démonstration : Si $\gamma_0 \in P(\gamma')$ alors $\varphi_\sigma(\gamma_0)$ et $\varphi_\sigma(\gamma)$ sont G-conjugués et donc $\gamma_0 \in <\gamma>$. Si $\gamma_0 \in <\gamma>$ alors il existe g et g' dans G tels que $g'\varphi_\sigma(\gamma_0)g'^{-1} = \varphi_\sigma(\gamma)$ et $g\varphi_\sigma(\gamma)g^{-1} = \varphi_\tau(\gamma')$.

On a donc $gg'\varphi_\sigma(\gamma_0)(gg')^{-1} = \varphi_\tau(\gamma')$ et $Ad(gg')\mathfrak{a}_{\gamma_0} = \mathfrak{b}_{\gamma'}$. Par suite, on a $\gamma_0 \in P(\gamma')$.

Les autres assertions du lemme se démontrent de la même façon. ■

On définit l'application T_0 de l'ensemble des orbites stables des éléments réguliers de $\mathbb{X}_\sigma$ dans l'ensemble des orbites stables des éléments réguliers de $\mathbb{X}_\tau$ par :

$$T_0(<\gamma>) = I(\gamma)$$

Remarque : (1) L'application T_0 est injective mais non surjective

(2) il se peut que $<B>\in ImT$ et qu'il existe $\gamma \in B_{reg}$ avec $<\gamma>\notin ImT_0$.

9 Intégrales invariantes stables.

Les notations sont celles du paragraphe 3.

Théorème 9.1 *Soit $F_0 \in I\mathcal{D}^{st}(\mathbb{X}_\sigma)$. Soit F l'application définie sur $\mathbb{X}_{\tau,reg}$ par*

$$F(\gamma') = \begin{cases} F_0(\gamma) & si <\gamma'>= T_0(<\gamma>), \\ 0 & si <\gamma'>\notin ImT_0. \end{cases}$$

Alors $F \in I\mathcal{D}^{st}(\mathbb{X}_\tau)$.

Démonstration : Comme F_0 est constante sur chaque orbite stable, l'application F est bien définie. Il est clair qu'elle est constante sur chaque orbite stable d'éléments réguliers de $\mathbb{X}_{\tau,reg}$ et qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{X}_{\tau,reg}$.

Soit $B \in Car\mathbb{X}_\tau$ associé à $\mathfrak{b} \in Car\mathfrak{g}^\tau$. La relation $I_1^{st}(\mathbb{X}_{\tau,reg})$ est immédiatement vérifiée.

La preuve de $I_2^{st}(\mathbb{X}_{\tau,reg})$ et de $I_3^{st}(\mathbb{X}_{\tau,reg})$ est différente selon que $< B >$ appartienne à l'image de T ou non.

<u>1^{er} **cas**</u> : $< B >\notin ImT$

Dans ce cas, pour tout $\gamma' \in B_{reg}$ on a $< \gamma' >\notin ImT_0$. En effet si $\gamma' \in B_{reg}$ avec $< \gamma' >\in ImT_0$ alors il existe $\gamma \in \mathbb{X}_{reg}$ et $g \in G$ tels que $g\varphi_\sigma(\gamma)g^{-1} = \varphi_\tau(\gamma')$ et $g.\mathfrak{a}_\gamma = \mathfrak{b}$. On aurait alors $T(< A_{\gamma>}) >=< B >$ ce qui est impossible.

Donc, pour tout $\gamma' \in B_{reg}$, on a $F(\gamma') = 0$. La relation $I_2^{st}(\mathbb{X}_{\tau,reg})$ est donc vérifiée sur B.

Soit α une racine imaginaire non compacte de $\mathfrak{b}$. Le sous-ensemble de Cartan B_α adjacent à B vérifie alors $< B >\leq< B_\alpha >$. Le lemme 8.3 permet de conclure que $< B_{\alpha>} \notin ImT$.

Par suite, l'assertion $I_3^{st}(\mathbb{X}_{\tau,reg})$ est vérifiée au voisinage de chaque point semi-régulier de type hyperbolique de B.

<u>2^{eme} **cas**</u> : $< B >\in ImT$

Soit $A \in Car\mathbb{X}_\sigma$ tel que $T(< A >) =< B >$ et soit $\mathfrak{a}$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^\sigma$ associée à A. On fixe $x \in G$ tel que $x.\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Soit $\gamma' \in B$ tel que pour tout $w \in \mathcal{S}(B)_{\gamma'}$, l'on ait $\gamma'^w \in B'_{Inc}$, c'est-à-dire, tel que pour toute racine imaginaire non compacte β l'on ait $\xi_\beta(\gamma'^w) \neq 1$.

Si $(\bigcup_{g\in G} g\varphi_\tau(\gamma')g^{-1}) \cap M_\sigma = \emptyset$ alors il existe un voisinage V de γ' tel que tout élément $y \in V_{reg}$ vérifie $< y >\notin ImT_0$. Dans ce cas, l'application F est nulle sur V_{reg} et donc se prolonge de façon C^∞ en γ'.

Si $(\bigcup_{g\in G} g\varphi_\tau(\gamma')g^{-1}) \cap M_\sigma \neq \emptyset$, on fixe $\gamma \in A$ et $g \in G$ tel que $g.\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ et $g\varphi_\sigma(\gamma)g^{-1} = \varphi_\tau(\gamma')$. Pour prouver que F_B vérifie $I_2^{st}(\mathbb{X}_{\tau,reg})$ sachant que F_0/A vérifie $I_2^{st}(\mathbb{X}_{\sigma,reg})$, il suffit de montrer le résultat suivant :

s'il existe $w_0 \in \mathcal{S}(A)_\gamma$ tel que $\gamma^{w_0} \notin A'_{Inc}$ alors il existe $w' \in \mathcal{S}(B)_{\gamma'}$ tel que $\gamma'^{w'} \notin B'_{Inc}$.

Soit $w_0 \in \mathcal{S}(A)_\gamma$ et soit α une racine imaginaire non compacte de $\Delta_I(\mathfrak{g}^\sigma, \mathfrak{a})$ tels que $\xi_\alpha(\gamma^{w_0}) = 1$. Soit $\mathfrak{a}_\alpha$ et A_α la sous-algèbre de Cartan et le sous-ensemble de Cartan adjacents respectivement à $\mathfrak{a}$ et A. On a $\gamma^{w_0} \in A_\alpha$ et donc il existe $x_0 \in G$, $\mathfrak{b}_0 \in Car(\mathfrak{g}^\tau)$ et $\gamma_0 \in B_0$ tels que $x_0\varphi_\sigma(\gamma^{w_0})x_0^{-1} = \varphi_\tau(\gamma_0)$ et $x_0.\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{b}_0$.

Comme dans la démonstration du lemme 8.2, il existe $\beta \in \Delta_{Inc}(\mathfrak{g}^\tau, \mathfrak{b})$ et $u \in G^\tau$ tels que $c_\beta\beta = ux_0c_\alpha\alpha$. On pose $x = c_\beta^{-1}ux_0c_\alpha$. On a vu (démonstration du lemme 8.2) que l'on a $x.\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Soit $w' = xw_0g^{-1}$. Montrons tout d'abord que $w'\varphi_\tau(\gamma')w'^{-1} \in M_\tau$. Soit $\delta = c_\beta.\beta$. On a alors $\xi_\delta(\gamma_0^u) = \xi_{x_0c_\alpha\alpha}(\gamma_0) = \xi_\alpha(\gamma^{w_0}) = 1$. On en déduit $w'\varphi_\tau(\gamma')w'^{-1} = x\varphi_\sigma(\gamma^{w_0})x^{-1} = c_\beta^{-1}\varphi_\tau(\gamma_0^u)c_\beta = \varphi_\tau(\gamma_0^u)$.

L'élément $\gamma'^{w'}$ existe donc. Comme $\gamma_0 \in B \cap B_\beta$, on obtient

$$\xi_\beta(\gamma'^{w'}) = \xi_\beta(\gamma_0^u) = 1$$

et donc $\gamma'^{w'} \notin B_{Inc}$.

On a donc prouvé que F_B vérifie $I_2^{st}(\mathbb{X}_{\tau,reg})$.

Soit maintenant $\gamma' \in B$ semi-régulier de type hyperbolique. Soit $\pm\alpha$ les deux uniques racines (imaginaires non compactes) telles que $\xi_{\pm\alpha}(\gamma') = 1$.

Soit B_α le sous-ensemble de Cartan adjacent à B relativement à α.

Si $(\bigcup_{g\in G} g\varphi_\tau(\gamma')g^{-1}) \cap M_\sigma = \emptyset$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \varepsilon[$, l'on ait $< exp - tH_\alpha.\gamma' > \notin ImT_0$. Dans ce cas $I_3^{st}(\mathbb{X}_{\tau,reg})$ est vérifiée puisque F est nulle au voisinage de γ'.

Si $(\bigcup_{g\in G} g\varphi_\tau(\gamma')g^{-1}) \cap M_\sigma \neq \emptyset$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \varepsilon[$, l'on ait $< exp - tH_\alpha.\gamma' > \in ImT_0$. On fixe alors $\gamma \in A$ et $g \in G$ tel que $g.\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ et $g\varphi_\sigma(\gamma)g^{-1} = \varphi_\tau(\gamma')$.

Si $< B_\alpha > \in ImT$, alors d'après le lemme 8.4 et ce qui précède, on peut supposer que $\beta = g^{-1}.\alpha$ est une racine imaginaire non compacte de $\mathfrak{a}$. Donc la relation $I_3^{st}(\mathbb{X}_{\tau,reg})$ pour γ' découle de $I_3^{st}(\mathbb{X}_{\sigma,reg})$ vérifiée par F_0 au point γ.

Si $< B_\alpha > \notin ImT$, toujours d'après le lemme 8.4, la racine $\beta = g^{-1}.\alpha$ ainsi que toutes ses transformées par $W_G(\mathfrak{a})$ sont imaginaires compactes.

La relation $I_3^{st}(\mathbb{X}_{\tau,reg})$ pour γ' découle alors de $I_2^{st}(\mathbb{X}_{\sigma,reg})$.

Dans tous les cas, on a vu que F vérifie $I_3^{st}(\mathbb{X}_{\tau,reg})$. Le théorème est donc prouvé. ∎

Corollaire 9.2 *Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\sigma)$. Alors il existe $f' \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\tau)$ telle que, pour tout $\gamma' \in \mathbb{X}_{\tau,reg}$, l'on ait*

$$\mathcal{M}_\tau^{st}(f')(\gamma') = \begin{cases} \mathcal{M}_\sigma^{st}(f)(\gamma) & si < \gamma' >= T_0(< \gamma >) \\ 0 & si < \gamma' > \notin ImT_0 \end{cases}$$

On dira que f' est correspondance avec f.

10 Distributions stables

Nous allons définir une application correspondance $\mathcal{C}$ de l'ensemble des distributions stables de $\mathbb{X}_\tau$ dans l'ensemble des distributions stables de $\mathbb{X}_\sigma$. Nous donnons l'image par $\mathcal{C}$ des distributions sphériques stables construites au paragraphe 7.

Proposition 10.1 *Soit θ' une distribution stable sur $\mathbb{X}_\tau$. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\sigma)$ et $f' \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\tau)$ telles que f et f' soient en correspondance. Alors, on a*

(i) $< \theta', f' >$ ne dépend pas du choix de f' en correspondance avec f,

(ii) L'application θ qui à $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\sigma)$ associe $< \theta', f' >$ est une distribution stable sur $\mathbb{X}_\sigma$.

Définition 10.2 *On définit l'application correspondance* $\mathcal{C}$ *de* $\mathcal{D}(\mathbb{X}_\tau)_{st}$ *dans* $\mathcal{D}(\mathbb{X}_\sigma)_{st}$ *par*

$$< \mathcal{C}(\theta'), f >=< \theta', f' > \text{ si } f' \text{ est en correspondance avec } f$$

Démonstration : Comme la distribution θ' est stable, elle appartient à $(Ker\mathcal{M}_\tau^{st})^\perp$ et donc (i) est immédiat.

Il est facile de voir que l'application $\mathcal{C}^{st}$ de $I\mathcal{D}^{st}(\mathbb{X}_\sigma)$ dans $I\mathcal{D}^{st}(\mathbb{X}_\tau)$ définie dans le théorème 9.1 est continue. D'autre part, par le théorème 3.12, il existe $\Theta' \in I\mathcal{D}^{st}(\mathbb{X}_\tau)'$ telle que $\theta' ={}^t \mathcal{M}_\tau^{st}(\Theta')$. Par suite on a $< \theta, f >=< \Theta', \mathcal{C}^{st}(\mathcal{M}_\sigma^{st}(f)) >$. On en déduit donc que θ est continue et donc elle définie bien une distribution sur $\mathbb{X}_\sigma$.

Par définition même de θ, il est clair qu'elle est stable. ■

Théorème 10.3 *Soit* θ' *une distribution sphérique stable sur* $\mathbb{X}_\tau$ *propre pour un caractère* χ *de* $Z(\mathfrak{g})$*. Alors la distribution* $\theta = \mathcal{C}(\theta')$ *est une distribution sphérique stable sur* $\mathbb{X}_\sigma$ *propre pour le caractère* χ*.*

De plus, si $\gamma' \in \mathbb{X}_{\tau,reg}$ *et si* $\gamma \in \mathbb{X}_{\sigma,reg}$ *avec* $T_0(< \gamma >) =< \gamma' >$ *alors on a*

$$\theta(\gamma) = \theta'(\gamma')$$

Démonstration : Par ce qui précède, on sait que θ est stable et donc elle est G^σ-invariante.

Soit $\eta = \sigma$ ou τ. Soit $u \in Z(\mathfrak{g}) = Z((\mathfrak{g}^\eta)_\mathbb{C})$. On notera $\partial_\eta(u)$ l'action de u comme opérateur différentiel sur $\mathbb{X}_\eta$. Soit $u \to^t u$ l'antiautomorphisme principal de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ donné sur $\mathfrak{g}$ par $X \to -X$.

Dans toute la suite de cette démonstration on fixe $f' \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\tau)$ en correspondance avec $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\sigma)$.

On a donc pour $u \in Z(\mathfrak{g})$

$$< \partial_\tau(u)\theta', f' >=< \theta', \partial_\tau({}^t u)f' >$$

$$< \partial_\sigma(u)\theta, f >=< \theta, \partial_\sigma({}^t u)f >$$

Montrons que l'on a : $\mathcal{C}(\partial_\tau(u)\theta') = \partial_\sigma(u)\theta$.

Il suffit de prouver que les fonctions $\partial_\tau({}^t u)f'$ et $\partial_\sigma({}^t u)f$ sont en correspondance.

Soit $\gamma' \in \mathbb{X}_{\tau,reg}$ et $\gamma \in \mathbb{X}_{\sigma,reg}$ tels que $T_0(< \gamma >) =< \gamma' >$. Soit $A \in Car\mathbb{X}_\sigma$ et $B \in Car\mathbb{X}_\tau$ les sous-ensembles de Cartan contenant respectivement γ et γ'. Leurs algèbres de Lie respectives $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont donc G-conjuguées.

On note γ_σ (respectivement γ_τ) l'isomorphisme d'Harish-Chandra de $Z(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{a}_\mathbb{C})}$ (respectivement sur $S(\mathfrak{b}_\mathbb{C})^{W(\mathfrak{g},\mathfrak{b}_\mathbb{C})}$). Par le lemme 12.1 de [Sa 2], on a

$$\mathcal{M}_\tau^{st}(\partial_\tau({}^t u)f')_B = \partial_\tau(\gamma_\tau({}^t u))\mathcal{M}_\tau^{st}(f')_B$$

Il faut donc prouver que l'on a :

$$\partial_\tau(\gamma_\tau({}^t u))\mathcal{M}_\tau^{st}(f')_B(\gamma') = \partial_\sigma(\gamma_\sigma({}^t u))\mathcal{M}_\sigma^{st}(f)_A(\gamma)$$

Comme les algèbres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont G-conjuguées et comme f' et f sont en correspondance, ceci est immédiat. On obtient donc

$$\mathcal{C}(\partial_\tau(u)\theta') = \partial_\sigma(u)\theta$$

Or, par hypothèse, on a $\partial_\tau(u)\theta' = \chi(u)\theta'$. Par suite, la distribution θ est sphérique et stable sur $\mathbb{X}_\sigma$ propre pour le caractère χ.

Montrons maintenant la deuxième assertion du théorème. On fixe comme précédemment $f' \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\tau)$ en correspondance avec $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\sigma)$. Nous allons utiliser les formules d'intégration de Weyl sur $\mathbb{X}_\tau$ et $\mathbb{X}_\sigma$ et nous rappelons les notations utilisées lors de la démonstration du théorème 7.1.

Soit $< Car\mathfrak{g}^\sigma >$ un système de représentants de classes de G^σ-conjugaison de sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}^\sigma$.

Soit $\mathfrak{a} \in < Car\mathfrak{g}^\sigma >$ et soit $A \in Car\mathbb{X}_\sigma$ le sous-ensemble de Cartan associé. Soit $\mathcal{C}_A$ l'ensemble des composantes connexes de A. On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{C}_A$ par

$C \,\mathcal{R}\, C'$ si et seulement si il existe $w \in \mathcal{S}(A)$ tel que $w\varphi_\sigma(C)w^{-1} = \varphi_\sigma(C')$.

On choisit $(A_1 \dots A_{k_A})$ un système de représentants de $\mathcal{C}_A/\mathcal{R}$. Soit $n(A_j)$ le cardinal de l'ensemble des $w \in \mathcal{S}(A)$ tel que $w\varphi_\sigma(A_j)w^{-1} = \varphi_\sigma(A_j)$. La formule d'intégration de Weyl s'écrit alors :

$$< \theta, f >= \sum_{\mathfrak{a}\in< Car\mathfrak{g}^\sigma >} \frac{1}{\mid W_{G^\sigma}(\mathfrak{a}) \mid} \sum_{j=1}^{k_A} \frac{1}{n(A_j)} \int_{A_j} \theta(a) \mid D_{\mathbb{X}_\sigma}(a) \mid^{1/2} \mathcal{M}_\sigma^{st}(f)(a)da$$

Formulons de la même manière $< \theta', f' >$.

Soit $B \in Car\mathbb{X}_\tau$. Si $< B > \notin ImT$ alors la fonction $\mathcal{M}_\tau^{st}(f')$ est nulle sur B.

On définit $T < Car\mathfrak{g}^\sigma >$ comme étant l'ensemble des classes de G^τ-conjugaison des $\mathfrak{b} \in Car\mathfrak{g}^\tau$ tel qu'il existe $\mathfrak{a} \in < Car\mathfrak{g}^\sigma >$ et $x \in G$ vérifiant $x.\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

On a alors :

$$< \theta', f' >= \sum_{\mathfrak{b}\in T< Car\mathfrak{g}^\sigma >} \frac{1}{\mid W_{G^\tau}(\mathfrak{b}) \mid} \sum_{j=1}^{k_B} \frac{1}{n(B_j)} \int_{B_j} \theta'(b) \mid D_{\mathbb{X}_\tau}(b) \mid^{1/2} \mathcal{M}_\tau^{st}(f')(b)db$$

Soit $\mathfrak{b} \in T < Car\mathfrak{g}^\sigma >$ et soit B le sous-ensemble de Cartan associé. On note $B_1, \dots B_{k_B}$ un système représentatif de classes pour la relation $\mathcal{R}$ des composantes connexes de B. Soit $l \in \{1, \dots k_B\}$. Soit b et b' dans $B_{l,reg}$. Il existe alors $X \in \mathfrak{b}$ tel que $\varphi_\tau(b) = \varphi_\tau(b')exp\, iX$. Par conséquent $< b > \in ImT_0$ si et seulement si $< b' > \in ImT_0$.

Si $b \in B_{l,reg}$ avec $< b >\notin ImT_0$ alors $\mathcal{M}_\tau^{st}(f')$ est nulle sur $B_{l\,reg}$ par ce qui précède.

Donc dans la somme défissant $< \theta', f' >$, on ne doit considérer que les $l \in \{1 \dots k_B\}$ tel que $B_l \cap ImT_0 \neq \emptyset$. Dans ce cas, il existe un unique $j \in \{1 \dots k_A\}$ tel que $\varphi_\sigma(A_j)$ et $\varphi_\tau(B_l)$ soient conjugués.

En utilisant le lemme 8.2, on peut supposer qu'on est dans la situation suivante :

pour tout $j \in \{1, \dots k_A\}$, il existe $x_j \in G$ tel que $x_j.\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ et $x_j \varphi_\sigma(A_j) x_j^{-1} = \varphi_\tau(B_j)$
pour tout $l \in \{k_A + 1, \dots k_B\}$ et pour tout $b \in B_{l,reg}$, on a $< b >\notin ImT_0$.

Par définition de θ, on a $< \theta, f >=< \theta', f' >$. Pour avoir le résultat voulu, il suffit de prouver que pour tout $j \in \{1, \dots k_A\}$, on a :

$$n(B_j) \mid W_{G^\tau}(\mathfrak{b}) \mid = n(A_j) \mid W_{G^\sigma}(\mathfrak{a}) \mid$$

On pose $\varphi_\sigma(A_j) = exp\ i\mathfrak{a}\ u_j$ et $\varphi_\tau(B_j) = exp\ i\mathfrak{b}\ v_j$ avec $x_j u_j x_j^{-1} = v_j$. On note $\mathcal{S}(A)_j$ l'ensemble des $w \in \mathcal{S}(A)$ tels que $w\varphi_\sigma(A_j)w^{-1} \subset M_\sigma$.

Par définition, on a

$$n(A_j) = \mid \mathcal{S}(A)_j \cap Z_G(u_j) \mid$$

Or, on a

$$\mathcal{S}(A)_j \cap Z_G(u_j) = W_{G^\sigma(\mathfrak{a})} \setminus W_G(\mathfrak{a}) \cap Z_G(u_j)$$

On obtient donc

$$n(A_j) \mid W_{G^\sigma}(\mathfrak{a}) \mid = \mid W_G(\mathfrak{a}) \cap Z_G(u_j) \mid$$

De même on a

$$n(B_j) \mid W_{G^\tau}(\mathfrak{b}) \mid = \mid W_G(\mathfrak{b}) \cap Z_G(v_j) \mid$$

Comme on a $x_j.\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ et $x_j u_j x_j^{-1} = v_j$, il est clair que l'application qui à w associe $x_j w x_j^{-1}$ est une bijection de $W_G(\mathfrak{a}) \cap Z_G(u_j)$ dans $W_G(\mathfrak{b}) \cap Z_G(v_j)$.

La démonstration du théorème est donc achevée. ∎

Soit $\mathfrak{a} \in Car\mathfrak{g}^\sigma$. Soit $L = Z_G(\mathfrak{a}_\mathbb{R})$ et $\mathfrak{l} = Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_\mathbb{R})$. On note $\mathfrak{l}_1$ la partie réductive de $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{z}$ son centre. Soit $\Gamma_\mathfrak{a}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}^\sigma$ tels que $exp\ 2iX = 1$ et soit $\Gamma_\mathfrak{a}^*$ le dual de $\Gamma_\mathfrak{a}$, c'est-à-dire l'ensemble des $\lambda \in (\mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}^\sigma)^*$ tels que pour tout $X \in \Gamma_\mathfrak{a}$ l'on ait $\lambda(X) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Soit $\mu \in \Gamma_\mathfrak{a}^* + \mathfrak{a}_{1reg}^*$. On a défini dans le paragraphe 7 une distribution sphérique stable sur $\mathbb{X}_\sigma$. On la notera $\theta^{st}(\sigma, \mu)$ pour préciser sur quel espace symétrique elle est définie.

Soit $x \in G$ tel que $x.\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ soit une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^\tau$. L'élément $x.\mu$ dépend du choix de x tel que $x.\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, par contre la distribution $\theta^{st}(\tau, x.\mu)$ est indépendante de ce choix d'après 7.2.

Pou $\eta = \sigma$ ou τ on note K^η un sous-groupe compact maximal de G^η et on pose

$$q_{G^\eta} = \frac{1}{2} dim(G^\eta / K^\eta)$$

D'après ([W] page 225), on a $q_{G^\tau} - q_{G^\sigma}$ est un entier.

Théorème 10.4 *Soit $\gamma' \in \mathbb{X}_{\tau,reg}$ provenant de $\gamma \in \mathbb{X}_{\sigma,reg}$. Alors on a*

$$\theta^{st}(\sigma,\mu)(\gamma) = (-1)^{q_{G^\tau}-q_{G^\sigma}}\theta^{st}(\tau,x.\mu)(\gamma')$$

Démonstration :

1^{er} cas : on suppose tout d'abord que G^σ admet une série discrète et que $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{g}^\sigma$. Dans ce cas, l'algèbre $\mathfrak{b}$ est également une sous-algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{g}^\tau$.

Soit $\Theta = \mathcal{C}(\theta^{st}(\tau,x.\mu))$. D'après le théorème 10.3, il suffit de prouver que l'on a $\Theta = (-1)^{q_{G^\tau}-q_{G^\sigma}}\theta^{st}(\sigma,\mu)$.

Or par le théorème d'unicité et le théorème 4.6, la distribution $\theta^{st}(\sigma,\mu)$ est l'unique distribution sphérique telle que :

(i) pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a $z.\theta^{st}(\sigma,\mu) = \gamma_\sigma(z)(i\mu)\theta^{st}(\sigma,\mu)$ (γ_σ est l'isomorphisme d'Harish-Chandra)

(ii) si $x \in A_{reg} \setminus Exp\ \mathfrak{a}$ alors $\theta^{st}(\sigma,\mu)(x) = 0$

(iii) si $X \in \mathfrak{a}_{reg}$ alors

$$\theta^{st}(\sigma,\mu)(ExpX) = (-1)^{|\Delta^+_{Inc}(\mathfrak{g}^\sigma,\mathfrak{a})|}(2i)^{|\Delta^+(\mathfrak{g}^\sigma,\mathfrak{a})|}\frac{\sum_{w\in W_G(\mathfrak{a})}\varepsilon(w)e^{i<w\mu,X>}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+_\mu}(e^{i\alpha(X)}-e^{-i\alpha(X)})}$$

(où Δ^+_μ est l'ensemble des racines α telles que $i<\mu,H_\alpha>>0$)

Par le théorème 10.3, il est clair que Θ vérifie (i).

Soit $a \in A_{reg}$ et soit $b \in B_{reg}$ provenant de a. Si $a \notin Exp\ \mathfrak{a}$ alors on a $b \notin Exp\ \mathfrak{b}$ et donc

$$\Theta(a) = \theta^{st}(\tau,x.\mu)(b) = 0$$

Si $a = ExpX \in A_{reg}$ alors il existe $g \in N_G(\mathfrak{b})$ tel que $b = Exp\ gx.X$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\Theta(a) &= (-1)^{|\Delta^+_{Inc}(\mathfrak{g}^\tau,\mathfrak{b})|}(2i)^{|\Delta^+(\mathfrak{g}^\tau,\mathfrak{b})|}\frac{\sum_{w\in W_G(\mathfrak{b})}\varepsilon(w)e^{i<wx.\mu,gx.X>}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+_{x.\mu}}(e^{i\alpha(gx.X)}-e^{-i\alpha(gx.X)})}\\ &= (-1)^{|\Delta^+_{Inc}(\mathfrak{g}^\tau,\mathfrak{b})|}(2i)^{|\Delta^+(\mathfrak{g}^\tau,\mathfrak{b})|}\frac{\sum_{w\in W_G(\mathfrak{a})}\varepsilon(w)e^{i<w\mu,X>}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+_\mu}(e^{i\alpha(X)}-e^{-i\alpha(X)})}\end{aligned}$$

Or on a $|\Delta^+_{Inc}(\mathfrak{g}^\tau,\mathfrak{b})| = q_{G^\tau}$ ([W] page 225). On obtient donc :

$$\Theta(a) = (-1)^{q_{G^\tau}-q_{G^\sigma}}\theta^{st}(\sigma,\mu)(a)$$

2^{eme} cas : On traite maintenant le cas général. Comme précédemment, on note $L = Z_G(\mathfrak{a}_\mathbb{R})$ et $\mathfrak{l} = Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_\mathbb{R})$.

Dans ce cas, on a $L' = xLx^{-1} = Z_G(\mathfrak{b}_\mathbb{R})$ et $\mathfrak{l}' = Adx\mathfrak{l} = Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{b}_\mathbb{R})$.

Par construction, on peut écrire (voir 7.2)

$$\theta^{st}(\sigma,\mu) = ind_L^G T(L,\sigma,\mu)$$

et

$$\theta^{st}(\tau,x.\mu) = ind_{L'}^G T(L',\tau,x.\mu)$$

où $T(L,\sigma,\mu) = \sum_{w\in\mathcal{S}(A)} C_{w.\mu}$ est définie en 5.8. C'est une distribution sphérique stable sur L/L^σ. Pour montrer que $\theta^{st}(\sigma,\mu)$ et $\theta^{st}(\tau,x.\mu)$ sont en correspondance, on veut utiliser le premier cas. Pour cela, on définit l'involution τ' sur G par :

$$\tau'(g) = x^{-1}\tau(xgx^{-1})x$$

Cet automorphisme vérifie les propriétés immédiates suivantes :

(i) l'application de $G^{\tau'}$ dans G^τ qui à g associe xgx^{-1} est un isomorphisme et donc $G^{\tau'}$ est quasi-déployé et $\mathfrak{g}^{\tau'}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$,

(ii) il existe $l_0 \in L$ tel que $\sigma\tau' = Adl_0$.

Il est clair que $\mathfrak{a} \in Car\mathfrak{g}^\sigma \cap \mathfrak{g}^{\tau'}$ et par conséquent le groupe L est σ et τ'-stable. Vu les propriétés précédentes, on peut appliquer le premier cas aux espaces symétriques L/L^σ et $L/L^{\tau'}$. On obtient donc, pour $\gamma' \in (L/L^{\tau'})_{reg}$ provenant de $\gamma \in (L/L^\sigma)_{reg}$

$$(*) \qquad T(L,\sigma,\mu)(\gamma) = (-1)^{q_{L^{\tau'}}-q_{L^\sigma}} T(L,\tau',\mu)(\gamma')$$

On veut maintenant induire ces distributions et prouver l'assertion suivante :

(**) pour tout $\gamma' \in (G/G^{\tau'})_{reg}$ provenant de $\gamma \in (G/G^\sigma)_{reg}$, on a

$$ind_L^G T(L,\sigma,\mu)(\gamma) = (-1)^{q_{G^{\tau'}}-q_{G^\sigma}} ind_L^G T(L,\tau',\mu)(\gamma')$$

Pour cela, nous allons utiliser l'expression des distributions induites sur chaque sous-ensembles de Cartan (6.1).

Soit $A_0 \in Car\mathbb{X}_\sigma$ associé à $\mathfrak{a}_0 \in Car\mathfrak{g}^\sigma$. Soit $x_0 \in G$ tel que $x_0.\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{g}^\tau$ et soit $B_0 \in Car\mathbb{X}_{\tau'}$ associé à $\mathfrak{b}_0$.

L'ensemble $\mathcal{N}_L^{G^\sigma}(A_0)$ est vide si et seulement si on a $< A > \geq < A_0 >$. Comme $x_0.\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_0$, il est clair que $< A > \geq < A_0 >$ si et seulement si $< A > \geq < B_0 >$.

Dans ce cas, les distributions $ind_L^G T(L,\sigma,\mu)$ et $ind_L^G T(L,\tau',\mu)$ sont nulles respectivement sur A_{0reg} et B_{0reg}.

On suppose maintenant que $\mathfrak{a}_0 \in Car\mathfrak{l}^\sigma$, $\mathfrak{b}_0 \in Car\mathfrak{l}^{\tau'}$ et $x_0 \in L$.

Pour prouver (**), nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme : (i) Soit $g \in \mathcal{N}_L^{G^\sigma}(A_0)$. Alors il existe $g' \in G^{\tau'}$ tel que $g'x_0g^{-1} \in L$,

(ii) On a $g' \in \mathcal{N}_L^{G^{\tau'}}(B_0)$ et si g'' est un autre élément de $G^{\tau'}$ tel que $g''x_0g^{-1} \in L$ alors $g'' \in L^{\tau'}g'$,

(iii) L'application I de $\mathcal{N}_L^{G^\sigma}(A_0)$ dans $L^{\tau'} \setminus \mathcal{N}_L^{G^{\tau'}}(B_0)$ qui à g associe $L^{\tau'}g'$ induit un isomorphisme de $L^\sigma \setminus \mathcal{N}_L^{G^\sigma}(A_0)$ dans $L^{\tau'} \setminus \mathcal{N}_L^{G^{\tau'}}(B_0)$.

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit $g \in \mathcal{N}_L^{G_\sigma}(A_0)$ et soit $\mathfrak{a}_1 = g.\mathfrak{a}_0$. On construit tout d'abord une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de composante de Levi $\mathfrak{l}$. Il existe $X_1 \in \mathfrak{a}_{1\mathbb{R}}$ tel que pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{1\mathbb{C}}) \setminus \Delta_I(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{1\mathbb{C}})$ l'on ait $\alpha(X_1) \neq 0$.

On pose $\mathfrak{u} = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{1\mathbb{C}}); \alpha(X_1) > 0} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$. L'algèbre $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre parabolique σ-stable de composante de Levi $\mathfrak{l}$.

Soit $z = x_0 g^{-1}$ et $X_0 = z.X_1$. On a alors $X_0 \in \mathfrak{b}_{0\mathbb{R}}$ et pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}_{0\mathbb{C}}) \setminus \Delta_I(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}_{0\mathbb{C}})$, on a $\alpha(X_0) \neq 0$.

Par suite, on a $z.\mathfrak{p} = z.\mathfrak{l} + \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}_{0\mathbb{C}}); \alpha(X_0) > 0} \mathfrak{g}_\alpha$. L'algèbre $z.\mathfrak{l}$ contient $\mathfrak{b}_0$, elle est donc τ'-stable. On en déduit que $z.\mathfrak{p}$ est τ'-stable.

D'après ([Bo.T] théorème 20.9 page 228), il existe $g' \in G^{\tau'}$ tel que $g'z.\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ et $g'z.\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$.

On en déduit donc que $g'z = g'x_0 g^{-1} \in L$, ce qui prouve l'assertion (i).

On a $g'.\mathfrak{b}_0 = g'x_0 g^{-1} g.\mathfrak{a}_0$ et donc $g'.\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{l}^{\tau'}$. Par suite, on a $g' \in \mathcal{N}_L^{G^{\tau'}}(B_0)$. Si g'' est un autre élément de $G^{\tau'}$ vérifiant (i), alors on a $g'^{-1}g'' \in L \cap G^{\tau'} = L^{\tau'}$. On obtient donc (ii).

Un raisonnement analogue à celui utilisé précédemment prouve facilement la surjectivité de I. Maintenant si g et g' sont dans $\mathcal{N}_L^{G^\sigma}(A_0)$ avec $I(g) = I(g')$ alors on a $g'^{-1}g \in G^\sigma \cap L = L^\sigma$. Ceci achève la démonstration du lemme.

<u>Démonstration de (**)</u> : Soit $\gamma \in B_{0reg}$ provenant de $\gamma \in A_{0reg}$. On peut supposer que l'on a $x_0 \varphi_\sigma(\gamma) x_0^{-1} = \varphi_{\tau'}(\gamma')$.

Soit $g \in \mathcal{N}_L^{G^\sigma}(A_0)$ et soit $g' \in I(g)$. Alors on a

$$g'x_0 g^{-1}\; g\varphi_\sigma(\gamma)g^{-1}\; g x_0^{-1} g'^{-1} = g'\varphi_{\tau'}(\gamma')g'^{-1}$$

c'est-à-dire $\gamma'^{g'}$ provient de γ^g.

Par (*), on a

$$T(L, \sigma, \mu)(\gamma^g) = (-1)^{q_{L^{\tau'}} - q_{L^\sigma}} T(L, \tau', \mu)(\gamma'^{g'})$$

D'autre part, d'après ([S] proposition 6.6), on a $q_{L^{\tau'}} - q_{L^\sigma} = q_{G^{\tau'}} - q_{G^\sigma}$.

En utilisant l'expression des distributions induites (6.1) et le lemme précédent, on obtient (**).

Les espaces $\mathbb{X}_{\tau'}$ et $\mathbb{X}_\tau$ sont isomorphes par l'application Φ qui à $p_{\tau'}(g)$ associe $p_\tau(xgx^{-1})$. Les espaces $L/L^{\tau'}$ et L/L^τ sont isomorphes par la même application.

Donc, pour tout $p_{\tau'}(l) \in (L/L^{\tau'})_{reg}$ et tout $g \in G$, on a

$$T(L, \tau', \mu)(p_{\tau'}(l)) = T(L', \tau, x.\mu)(p_\tau(xlx^{-1}))$$

et

$$ind_L^G T(L,\tau',\mu)(p_{\tau'}(g) = ind_{L'}^G T(L',\tau,x.\mu)(p_\tau(xgx^{-1})$$

Maintenant si $\gamma' \in \mathbb{X}_{\tau,reg}$ provient de $\gamma \in \mathbb{X}_{\sigma,reg}$ il est clair que $\Phi^{-1}(\gamma') \in \mathbb{X}_{\tau' reg}$ provient de γ.

On en déduit donc le théorème. ∎

Corollaire 10.5 *Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\sigma)$ est en correspondance avec $f' \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_\tau)$ alors on a*

$$< \theta^{st}(\sigma,\mu), f >= (-1)^{q_{G^\tau} - q_{G^\sigma}} < \theta^{st}(\tau, x.\mu), f' >$$

References

[B1] A. Bouaziz, Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes, J. Funct. Anal. 70 (1987), 1-79,

[B2] A. Bouaziz, Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives, (prébublication),

[B3] A. Bouaziz, Intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs, (prépublication),

[Bou] Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6, Hermann Paris (1983),

[Bo.T] A. Borel and J. Tits, Groupes réductifs, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 27 (1965), 55-152,

[D] P. Delorme, Coefficients généralisés de séries principales sphériques et distributions sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, Invent. Math. 105 (1991), 305-346,

[H1] P. Harinck, Fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, thèse de doctorat, université Paris 7,

[H2] P. Harinck, Fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 23 (1990), 1-38,

[H3] P. Harinck, Fonctions généralisées sphériques induites sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ et applications, Journal of Funct. Anal. 103 (1992), 104-127,

[O.M] T. Oshima et T. Matsuki, Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups, J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 399-414,

[Po] N. S. Poulsen, On C^∞-vectors and interwining bilinear forms for representations of Lie groups, J. Funct. Anal. 9 (1972), 87-120,

[S.V] P.J. Sally and D. Vogan, Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups, Math. Surveys and Mon. A.M.S. 31 (1989), [Sa 1] S. Sano, Distributions sphériques invariantes sur l'espace semi-simple et son c-dual, Springer-Verlag, Berlin, New-York 1243 (1985),

[Sa 2] S. Sano, Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétiques semi-simples $G_{\mathbb{C}}/G$, J. of Math. of Kyoto univ., 31 (1991), 377-417,

[S] D. Shelstad, Characters and inner forms of a quasi-split group over $\mathbb{R}$, Compositio Mathematica 39 (1979), 1-45,

[Sc] W. Schmid, On the characters of the discrete series. The hermitian symmetric case, Inv. Math. 29-30 (1975), 47-144,

[T1] F. Trèves,Topological vector spaces, distributions and kernels. New-York. London : Academic Press 1967,

[T2] F. Trèves, Locally convex spaces and linear partial differential equations, Berlin Heidelberg New-York : Springer Verlag 1967,

[V] V. S. Varadarajan, The theory of characters and the discrete series for semisimple Lie groups, Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., 26 (1973), 45-100,

[W] G. Warner, Harmonic analysis on semisimple Lie groups II, Springer Verlag, Berlin, New-York (1972).