Dualité entre $G/G_{\mathbb{R}}$ et le groupe renversé ${}^{-}G_{\mathbb{R}}$

P. Harinck et M.-N. Panichi

En l'honneur de Jacques Carmona

Introduction

Soit G un groupe algébrique semi-simple connexe, simplement connexe, défini et déployé sur $\mathbb{R}$. On identifie G à l'ensemble de ses points complexes. On note σ la conjugaison par rapport à sa forme réelle déployée $G_{\mathbb{R}}$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G.

L'analyse harmonique sur $G/G_{\mathbb{R}}$ présente des similitudes avec celle sur $G_{\mathbb{R}}$ car l'espace tangent à $G/G_{\mathbb{R}}$ en $eG_{\mathbb{R}}$ est isomorphe à $i\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants sur $G/G_{\mathbb{R}}$ est isomorphe au centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et donc (par l'isomorphisme d'Harish-Chandra) à l'algèbre des opérateurs différentiels $G_{\mathbb{R}}$-invariants sur $G_{\mathbb{R}}$. Ceci est à la base des constructions et études des distributions sphériques et des fonctions orbitales (fonctions vérifiant des propriétés analogues à celles des intégrales orbitales, notion qui sera précisée ultérieurement) sur $G/G_{\mathbb{R}}$ données par le premier auteur dans [H1] et [H3]. La multiplication par i entre $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et $i\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ transforme les éléments elliptiques en éléments hyperboliques et vice-versa. Ce phénomène est appelé dualité par S. Sano ([Sa]). Par les travaux de A. Bouaziz ([B2]), il apparaît également que les fonctions orbitales propres sous l'action des opérateurs $G_{\mathbb{R}}$-invariants sur $G_{\mathbb{R}}$ sont construites sur un modèle analogue à celui des distributions sphériques sur $G/G_{\mathbb{R}}$ et celles sur $G/G_{\mathbb{R}}$ sur un modèle similaire à celui des distributions propres invariantes sur $G_{\mathbb{R}}$.

Lorsque le groupe $G_{\mathbb{R}}$ admet de plus un sous-groupe de Cartan compact, A. Bouaziz a précisé dans [B3] cette dualité entre l'espace symétrique $G/G_{\mathbb{R}}$ et le groupe $G_{\mathbb{R}}$ ce qui permet de comprendre l'analogie qu'il existe entre les différentes constructions.

Dans cet article, nous ne supposons plus que la forme réelle $G_{\mathbb{R}}$ admet un sous-groupe de Cartan compact. Nous introduisons alors la forme réelle ${}^{-}G_{\mathbb{R}}$ quasi-déployée ayant une série discrète (définie à conjugaison près) de G, appelée groupe renversé de $G_{\mathbb{R}}$, telle que l'on puisse obtenir une dualité analogue à celle de A. Bouaziz entre les espaces ${}^{-}G_{\mathbb{R}}$ et $G/G_{\mathbb{R}}$. Lorsque le groupe $G_{\mathbb{R}}$ admet un sous-groupe de Cartan compact, on a alors ${}^{-}G_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}}$ et on retrouve la dualité de A. Bouaziz. Cette idée a été introduite par le deuxième auteur dans sa thèse pour le groupe $G_{\mathbb{R}} = Sl(n, \mathbb{R})$ ([P]). On a alors $^{-}G_{\mathbb{R}} = SU([\frac{n+1}{2}], [\frac{n}{2}])$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.

On note σ' la conjugaison de G relativement au groupe renversé. Nous montrons qu'il existe une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan de $G^{\sigma'}$ et l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan de G^{σ} qui renverse l'ordre d'Hiraï défini sur ces classes de conjugaison (1.3.1 et 1.4.2).

Précisons maintenant cette dualité. On note $\mathbb{M}$ la composante connexe de l'identité de l'ensemble des $x \in G$ tels que $\sigma(x) = x^{-1}$. La variété $\mathbb{M}$ est isomorphe à G/G^{σ} par l'application $x \mapsto x\sigma(x)^{-1}$. Soit $(\mathbb{X}, \tau) = (\mathbb{M}, \sigma)$ ou $(G^{\sigma'}, \sigma')$. L'orbite stable ω_x d'un élément régulier x de $\mathbb{X}$ (on notera $x \in \mathbb{X}_{reg}$) est la trace sur $\mathbb{X}$ de son orbite sous l'action adjointe de G. On munit chaque orbite stable d'une mesure G^{τ}-invariante μ_x (convenablement normalisée).

Pour f une fonction de classe C^{∞} à support compact sur $\mathbb{X}$, on appelle intégrale orbitale stable de f la fonction définie sur $\mathbb{X}_{reg}$ par $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}^{st}(f)(x) = \mu_x(f)$. Elle est constante sur les orbites stables. On note $\mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{X})$ l'espace des intégrales orbitales stables. Les éléments de $\mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{X})$ sont caractérisés par quatre propriétés dont une condition sur le support (voir [B1] pour $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$ et [H2] pour $\mathbb{X} = \mathbb{M}$). On appelle fonction orbitale stable une fonction de classe C^{∞} sur $\mathbb{X}_{reg}$, constante sur les orbites stables qui vérifie les mêmes propriétés que les intégrales orbitales stables hormis la condition de support. On note $\mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{X})$ l'espace de telles fonctions.

L'espace $\mathcal{D}ist(\mathbb{X})^{st}$ des distributions stables est l'adhérence dans $\mathcal{D}ist(\mathbb{X})$ (espace des distributions sur $\mathbb{X}$), pour la topologie faible, du sous-espace engendré par les distributions $f \mapsto \mu_x(f)$ lorsque x parcourt $\mathbb{X}_{reg}$. D'après ([B1] pour $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$ et [H2] pour $\mathbb{X} = \mathbb{M}$), le dual $\mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{X})'$ de $\mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{X})$ est isomorphe à $\mathcal{D}ist(\mathbb{X})^{st}$.

Les propriétés du groupe renversé permettent d'obtenir une correspondance bijective ι entre l'ensemble des orbites stables des éléments réguliers de $G^{\sigma'}$ et l'ensemble des orbites stables des éléments réguliers de $\mathbb{M}$ (prop. 1.5.4). Cette correspondance permet de construire des applications explicites u de $\mathcal{I}^{\infty\, st}(G^{\sigma'})$ dans $\mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{M})' \simeq \mathcal{D}ist(\mathbb{M})^{st}$ d'une part et v de $\mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{M})$ dans $\mathcal{I}_c^{st}(G^{\sigma'})' \simeq \mathcal{D}ist(G^{\sigma'})^{st}$ d'autre part (Thm 3.1.3).

Le centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ agit comme algèbre d'opérateurs différentiels sur les espaces $\mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{X})$ (pour $\mathbb{X} = \mathbb{M}$ ou $G^{\sigma'}$) et les applications u et v commutent à cette action. Les restrictions de u et v aux sous-espaces propres de $\mathcal{I}^{\infty\, st}(G^{\sigma'})$ et $\mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{M})$ correspondant à un caractère régulier de $Z(\mathfrak{g})$ sont alors des bijections sur leur image (prop. 3.1.4). Nous en déduisons des théorèmes d'unicité dans $\mathcal{D}ist(\mathbb{X})^{st}$ (pour $\mathbb{X} = \mathbb{M}$ ou $G^{\sigma'}$) et précisons les images de fonctions orbitales stables particulières propres sous l'action de $Z(\mathfrak{g})$ (construites à partir des fonctions orbitales propres intervenant dans les formules d'inversion de [B2] et [H3]).

1 Groupe renversé

1.1 Notations

Si M est une variété différentiable, on note $C_c^\infty(M)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact sur M et $\mathcal{D}ist(M)$ l'espace des distributions sur M. Si N est une partie de M et si f est une fonction sur M, on notera $f_{|N}$ sa restriction à N.

Si X est un ensemble fini, on note $| X |$ son cardinal.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. On notera V^* son dual et $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié. L'algèbre symétrique $S(V_{\mathbb{C}})$ de $V_{\mathbb{C}}$ sera identifiée à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients complexes sur V. Pour $u \in S(V_{\mathbb{C}})$, on notera $\partial(u)$ l'opérateur différentiel correspondant.

Si V est un espace vectoriel topologique, on note V' son dual topologique.

Dans tout ce qui suit, on suppose que G est un groupe algébrique semi-simple, connexe et simplement connexe, défini et déployé sur $\mathbb{R}$. On l'identifie à l'ensemble de ses points complexes. On note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On désigne par σ la conjugaison de G relativement à sa forme réelle déployée $G_{\mathbb{R}}$.

Si τ est un automorphisme de G, on notera par la même lettre τ sa différentielle sur $\mathfrak{g}$ et G^τ désignera l'ensemble des points de G fixés par τ. On notera Ad l'action adjointe de G (sur lui-même ou sur $\mathfrak{g}$).

Pour H un sous-groupe de G, on notera $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. Soit T un tore maximal de G. On notera $N(H,T)$ (respectivement $Z(H,T)$) le normalisateur (respectivement centralisateur) de T dans H et on pose $W(H,T) = N(H,T)/Z(H,T)$. Lorsque $H = G$, on notera ces objets $N(T)$, $Z(T) = T$ et $W(T)$.

L'ensemble $R(T)$ désigne l'ensemble des racines de T dans G et R^+ un choix de racines positives dans $R(T)$. Pour λ un poids de T, on note e^λ le caractère de T correspondant.

Si τ est une conjugaison par rapport à une forme réelle de G, on note $\mathcal{T}_\tau(G)$ l'ensemble des tores maximaux τ-stables de G. On rappelle que l'application $T \mapsto T^\tau$ définit une bijection de $\mathcal{T}_\tau(G)$ dans l'ensemble $Car(G^\tau)$ des sous-groupes de Cartan de G^τ.

Soit $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$. L'involution τ agit sur $R(T)$ par $\tau(\alpha)(X) = \overline{\alpha(\tau(X))}$ pour $X \in \mathfrak{t}$. On dit que $\alpha \in R(T)$ est réelle si $\tau(\alpha) = \alpha$ et qu'elle est imaginaire si $\tau(\alpha) = -\alpha$. Si $\alpha \in R(T)$, on notera H_α la coracine de α, s_α la réflexion simple de $\mathfrak{t}$ d'hyperplan $Ker\,\alpha$ (le noyau de α) et $\mathfrak{g}_\alpha$ l'espace radiciel relatif à α.

On rappelle que deux racines α et β sont dites fortement orthogonales si $\alpha \pm \beta$ n'est pas une racine.

L'involution τ agit naturellement sur $N(T)$ et donc sur $W(T)$ par $\tau(w) = \tau \circ w \circ \tau$. On note $W(T)^\tau$ l'ensemble des $w \in W(T)$ qui commutent à τ.

1.2 Définition du groupe renversé

Dans toute la suite, on fixe A un tore maximal de G déployé sur $\mathbb{R}$. On fixe également un choix R^+ de racines positives dans $R(A)$. La conjugaison σ agit trivialement sur R^+ et $W(A)$.

On note Π l'ensemble des racines simples compatible avec le choix de R^+. On note B le sous-groupe de Borel contenant A et associé au choix de R^+. En particulier, B est σ-stable.

Soit w_0 l'élément de $W(A)$ de plus grande longueur associé à ces choix. C'est l'unique élément de $W(A)$ envoyant Π sur $-\Pi$ et donc $-w_0$ définit un automorphisme involutif de Π. On associe à $-w_0$ un automorphisme t_{-w_0} de $\mathfrak{g}$ qui commute à σ de la manière suivante ([ABV] prop. 2.12) : Pour chaque $\alpha \in \Pi$, on fixe un vecteur $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tel que $\sigma(X_\alpha) = X_\alpha$. Ceci est licite puisque toute racine de A est réelle. Ceci détermine $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $\sigma(X_{-\alpha}) = X_{-\alpha}$ et $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est alors l'algèbre de Lie engendrée par les vecteurs $H_\alpha, X_{\pm\alpha}$ pour $\alpha \in \Pi$.

On définit t_{-w_0} comme étant l'unique automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire tel que $t_{-w_0}(H_\alpha) = H_{-w_0(\alpha)}$, $t_{-w_0}(X_\alpha) = X_{-w_0(\alpha)}$ (et donc $t_{-w_0}(X_{-\alpha}) = X_{w_0(\alpha)}$). On note par la même lettre l'automorphisme de G correspondant.

Lemme 1.2.1. *L'automorphisme $\sigma' = \sigma \circ t_{-w_0}$ est une involution antiholomorphe de G et le groupe $G^{\sigma'}$ est une forme réelle quasi-déployée de G.*

Définition 1.2.2. Le groupe $G^{\sigma'}$ est appelé groupe renversé de G^σ.

Démonstration. Par construction, il est clair que t_{-w_0} est une involution de G qui commute à σ. Comme σ est antiholomorphe et t_{-w_0} holomorphe, on obtient bien que σ' est une involution antiholomorphe de G et donc elle définit bien une forme réelle $G^{\sigma'}$ de G. Comme t_{-w_0} laisse stable A et Π, les sous-groupes A et B sont σ'-stables ce qui assure que $G^{\sigma'}$ est quasi-déployée. □

Remarques.
(1) Dans son article [B3], A. Bouaziz considère le cas des groupes semi-simples connexes et simplement connexes dont le groupe de Weyl contient -1. On a donc dans ce cas $w_0 = -1$, $\sigma = \sigma'$ et le groupe réel G^σ est son propre renversé.
(2) Le groupe renversé est défini à conjugaison près. En effet, la définition de σ' dépend des choix de A, de R^+ et du prolongement de $-w_0$ à $\mathfrak{g}$. Les choix de A et de R^+ sont à conjugaison près. Si t'_{-w_0} est un autre prolongement de $-w_0$ commutant à σ alors $t'^{-1}_{-w_0} \circ t_{-w_0}$ est un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}$ ([ABV] prop. 2.11). Ainsi dans tous les cas, les deux formes réelles quasi-déployées obtenues sont intérieures l'une de l'autre et donc elles sont conjuguées d'après ([ABV] prop. 2.7).

1.3 Classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan de G^σ et $G^{\sigma'}$

Pour $\tau = \sigma$ ou σ', on note $Car(G^\tau)/G^\tau$ l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan de G^τ. Il est isomorphe à l'ensemble $\mathcal{T}_\tau(G)/G^\tau$ des classes de conjugaison sous l'action de G^τ des tores maximaux τ-stables de G. On notera $[T]$ la classe de T (étant sous-entendu que la classe est prise dans $\mathcal{T}_\tau(G)/G^\tau$ puisque $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$).

Soit $W_2(A)$ l'ensemble des involutions de $W(A)$. On note $W_2(A)/W(A)$ l'ensemble des classes de conjugaison d'involutions de $W(A)$. On notera $[u]$ la classe de u.

Les ensembles $\mathcal{T}_\sigma(G)/G^\sigma$ et $W_2(A)/W(A)$ sont en correspondance bijective ([B3] proposition 1.1.1). Cette bijection est donnée de la manière suivante : si $T = g^{-1}Ag$ alors l'élément $w_g = Ad(\sigma(g)g^{-1})$ est une involution de $W(A)$ dont la classe de conjugaison ne dépend que de $[T]$, on la note $[w_T]$. La bijection précédente est donnée par $[T] \mapsto [w_T]$.

Nous allons établir de la même manière une bijection entre $\mathcal{T}_{\sigma'}(G)/G^{\sigma'}$ et $W_2(A)/W(A)$ (résultat connu mais dont nous n'avons pas trouvé de références précises).

Soit T un tore maximal σ'-stable de G. Alors, il existe $g \in G$ tel que $gTg^{-1} = A$. Par suite, on a $\sigma'(g)^{-1}A\sigma'(g) = T = g^{-1}Ag$ et donc $\sigma'(g)g^{-1} \in N(A)$. Posons $w'_g = Ad(\sigma'(g)g^{-1}) \in W(A)$.

Pour tout $w \in W(A)$, on a

$$\sigma'(w) = \sigma' \circ w \circ \sigma' = \sigma(w_0ww_0) = w_0ww_0$$

puisque $t_{-w_0}(a) = w_0(a)^{-1}$ sur A et σ commute à tout élément de $W(A)$.

On obtient donc que $\sigma'(w'_g) = w_0w'_gw_0 = {w'}_g^{-1}$ et par suite l'élément $u_g = w_0w'_g$ est une involution de $W(A)$.

La classe de conjugaison de u_g ne dépend que de T. En effet, si $A = gTg^{-1} = sTs^{-1}$ alors $u = Ad(sg^{-1})$ appartient au groupe $W(A)$ et $w'_s = \sigma'(u)w'_gu^{-1} = w_0uw_0w'_gu^{-1}$. Ainsi les involutions u_s et u_g sont conjuguées par u. On note $[u_T]$ la classe de u_g dans $W_2(A)/W(A)$.

Soit $S \in \mathcal{T}_{\sigma'}(G)$, tel que $sTs^{-1} = S$ avec $s \in G^{\sigma'}$. On a alors $gs^{-1}Ssg^{-1} = A$ et $w'_{gs^{-1}} = Ad(\sigma'(gs^{-1})(gs^{-1})^{-1}) = Ad(\sigma'(g)g^{-1}) = w'_g$. On obtient donc $[u_S] = [u_T]$.

Proposition 1.3.1. *L'application de $\mathcal{T}_{\sigma'}(G)/G^{\sigma'}$ dans $W_2(A)/W(A)$ définie par $[T] \mapsto [u_T]$ est bijective.*

Démonstration. Ce qui précède assure que l'application ci-dessus est bien définie.

Montrons tout d'abord l'injectivité.

Soit $T, S \in \mathcal{T}_{\sigma'}(G)$ et $x, y \in G$ tels que $xTx^{-1} = ySy^{-1} = A$. On suppose qu'il existe $u \in W(A)$ tel que $uw_0w'_xu^{-1} = w_0w'_y$. On a donc $\sigma'(u)w'_x = w'_yu$.

Soit $n \in N(A)$ tel que $u = Ad(n)$. Il existe donc un élément $a \in A$ tel que $\sigma'(n)\sigma'(x)x^{-1} = \sigma'(y)y^{-1}na$, ce qui s'écrit encore $\sigma'(y^{-1}nx) = y^{-1}nax$. Ainsi, l'application φ de T dans S définie par $\varphi(t) = y^{-1}nxtx^{-1}n^{-1}y$ commute à σ'. D'après ([Sh1] corollaire 2.3) les tores T et S sont $G^{\sigma'}$-conjugués.

Montrons la surjectivité.

Soit $w \in W_2(A)$. Montrons tout d'abord que

$$\text{il existe } u \in W(A) \text{ tel que } \tilde{w} = uwu^{-1} \text{ commute à } w_0$$

(ceci est équivalent à $w_0\tilde{w} \in W_2(A)$).

D'après ([He] remarque 2.10), comme w est une involution, elle se décompose en un produit de réflexions élémentaires $s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_k}$ où les α_j sont des racines de A deux à deux fortement orthogonales. L'élément w_0 se décompose aussi de cette manière et l'ensemble F_0 de racines deux à deux fortement orthogonales correspondant est maximal pour cette propriété. Comme deux ensembles de racines deux à deux fortement orthogonales maximaux sont conjugués par $W(A)$ ([Su] Thm.6), on en déduit qu'il existe $u \in W(A)$ tel que $u(\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}) \subset F_0$. Il est alors clair que uwu^{-1} commute à w_0.

On note $\tilde{\sigma}'_A = w_0\tilde{w}\sigma'_{|A}$. Ceci est une conjugaison complexe sur A puisque $\tilde{w}$ est une involution qui commute à σ et w_0 et donc à $\sigma'_{|A}$. Le même raisonnement que dans la démonstration de ([B3] proposition 1.1.1) prouve alors qu'il existe $g \in G$ tel que $T = g^{-1}Ag$ est σ'-stable et $w_0\tilde{w} = Ad(\sigma'(g)g^{-1})$. On a alors $[w] = [\tilde{w}] = [u_T]$. Ceci achève la démonstration. $\square$

Ainsi, par ce qui précède, on dispose d'une bijection

$$\begin{array}{lccl} \mathcal{T} : \mathcal{T}_{\sigma'}(G)/G^{\sigma'} & \to & \mathcal{T}_\sigma(G)/G^\sigma & \\ [T] & \mapsto & [S] & \text{tel que } [u_T] = [w_S]. \end{array} \tag{1.3.1}$$

De plus, si $\mathcal{T}([T]) = [S]$, il existe x et y dans G tel que $xTx^{-1} = A = ySy^{-1}$ et $Ad(\sigma'(x)x^{-1}) = w_0Ad(\sigma(y)y^{-1})$. On peut écrire $w_0 = Ad(n_0)$ et $\sigma'(n_0) = n_0a_0$ avec $n_0 \in N(A)$ et $a_0 \in A$. On obtient donc $\sigma'(x)x^{-1} = n_0\sigma(y)y^{-1}a_1$ avec $a_1 \in A$. D'autre part, pour tout $a \in A$, on a $\sigma'(a) = \sigma(n_0a^{-1}n_0^{-1})$. On en déduit que pour tout $t \in T$, on a

$$\sigma(xtx^{-1}) = \sigma'(n_0^{-1}xt^{-1}x^{-1}n_0) = a_0^{-1}\sigma(y)y^{-1}a_1x\sigma'(t)^{-1}x^{-1}a_1^{-1}y\sigma(y)^{-1}a_0.$$

Ainsi, si $g = y^{-1}x$, on a $\sigma(gtg^{-1}) = g\sigma'(t)^{-1}g^{-1}$.

Définition 1.3.2. Soit $T \in \mathcal{T}_{\sigma'}(G)$. On dit que $g \in G$ est une inversion de T si
(i) $\mathcal{T}([T]) = [gTg^{-1}]$,
(ii) pour tout $t \in T$, on a $\sigma(gtg^{-1}) = g\sigma'(t)^{-1}g^{-1}$.

Remarques.
(1) Lorsque $-1 \in W(A)$, l'application $\mathcal{T}$ et la notion d'inversion coïncident avec celles définies par A. Bouaziz dans [B3].
(2) On garde les notations de la définition précédente. Si g est une inversion de T, on a

$$gT^{-\sigma'}g^{-1} = (gTg^{-1})^\sigma.$$

De plus, si α est une racine réelle (respectivement imaginaire) de T alors $g.\alpha$ est une racine imaginaire (respectivement réelle) de gTg^{-1}.

Ainsi, si $[T_0] = \mathcal{T}^{-1}([A])$ alors $T_0^{\sigma'}$ est un sous-groupe de Cartan compact de $G^{\sigma'}$ et si $[S] = \mathcal{T}([A])$ alors S^σ est un sous-groupe de Cartan maximalement compact de G^σ. La forme $G^{\sigma'}$ admet donc bien une série discrète.

1.4 Ordre sur $\mathcal{T}_\tau(G)$

Nous rappelons succintement ici la définition de l'ordre (inverse de celui d'Hiraï) sur $\mathcal{T}_\tau(G)$ où $\tau = \sigma$ ou σ' ([Hi] ou [Sc]).

Soit $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$. Soit β une racine imaginaire de T et soit $\mathfrak{s}$ l'algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$ engendrée par H_β, $\mathfrak{g}_\beta$ et $\mathfrak{g}_{-\beta}$. On dit que β est compacte ou non compacte selon que $\mathfrak{s}^\tau$ est isomorphe à $so(3,\mathbb{R})$ ou $sl_2(\mathbb{R})$.

Nous rappelons le lemme 9.2 de [Sh2] qui joue un rôle essentiel dans toute la suite de cet article.

Lemme 1.4.1. *Soit* $\mathbf{H}$ *un groupe semi-simple quasi-déployé sur* $\mathbb{R}$*. Soit* $\mathbf{T}$ *un tore maximal défini sur* $\mathbb{R}$*. Soit* $\mathbf{M}$ *le centralisateur de la composante déployée de* $\mathbf{T}$*. Si* α *est une racine imaginaire de* $\mathbf{T}$ *alors il existe* $w \in W(\mathbf{M},\mathbf{T})$ *défini sur* $\mathbb{R}$ *tel que* $w.\alpha$ *soit une racine imaginaire non compacte.*

Soit α une racine réelle de T. On choisit $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ tels que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ et $\tau(X_{\pm\alpha}) = X_{\pm\alpha}$. On définit la transformation de Cayley ν_α par

$$\nu_\alpha = Ad(exp\ -i\frac{\pi}{4}(X_\alpha + X_{-\alpha})).$$

On a $\tau(\nu_\alpha)^{-1}\nu_\alpha = s_\alpha$. Le tore $T_\alpha = \nu_\alpha(T)$ est τ-stable et sa classe $[T_\alpha]$ ne dépend pas des choix de $X_{\pm\alpha}$. Son algèbre de Lie est $\mathfrak{t}_\alpha = \mathbb{C}(X_\alpha - X_{-\alpha}) + Ker(\alpha)$ et la racine $\nu_\alpha.\alpha$ est une racine imaginaire non compacte de T_α. On a $T_\alpha \cap T = \{x \in T; e^\alpha(x) = 1\}$.

Définition 1.4.2. On dit que $[T] \geq [S]$ s'il existe une suite $T_1, \dots, T_k$ de $\mathcal{T}_\tau(G)$ telle que $[T_1] = [T]$, $[T_k] = [S]$ et T_j est l'image de T_{j-1} par une transformation de Cayley ν_α où α est une racine réelle de T_{j-1}.

De même, si β est une racine imaginaire non compacte de T, on peut choisir $X_{\pm\beta} \in \mathfrak{g}_{\pm\beta}$ tels que $[X_\beta, X_{-\beta}] = H_\beta$ et $\tau(X_\beta) = X_{-\beta}$. On définit la transformation de Cayley c_β par

$$c_\beta = Ad(exp\,\frac{\pi}{4}(X_{-\beta} - X_\beta)).$$

On a $\tau(c_\beta)^{-1}c_\beta = s_\beta$. Le tore $T_\beta = c_\beta(T)$ est τ-stable et sa classe $[T_\beta]$ ne dépend pas de choix de $X_{\pm\beta}$. Son algèbre de Lie est $\mathfrak{t}_\beta = \mathbb{C}(X_\beta + X_{-\beta}) + Ker(\beta)$ et la racine $c_\beta(\beta) = \alpha$ est une racine réelle de T_β. De plus, on a $[\nu_\alpha c_\beta(T)] = [T]$ et $[T_\beta] \geq [T]$.

Soit $T \in \mathcal{T}_{\sigma'}(G)$ et α une racine réelle de T. D'après le lemme 1.4.1, il existe une inversion g de T telle que $g.\alpha$ soit une racine imaginaire non compacte de gTg^{-1}. Dans ce cas, on a $Ad(g) \circ \nu_\alpha = c_{g.\alpha}$.

Ainsi on a

$$\text{si} \quad [T] \geq [S] \quad \text{dans} \quad \mathcal{T}_{\sigma'}(G) \ \text{alors}\ \mathcal{T}([T]) \leq \mathcal{T}([S]) \quad \text{dans} \quad \mathcal{T}_\sigma(G). \tag{1.4.2}$$

1.5 Correspondance d'orbites stables

Soit $\mathbb{M}$ la composante neutre de l'ensemble des éléments g de G tels que $\sigma(g) = g^{-1}$. Le groupe G agit sur $\mathbb{M}$ par σ-conjugaison : $g.x = gx\sigma(g)^{-1}$ pour $g \in G$ et $x \in \mathbb{M}$ et le groupe G^σ par automorphismes intérieurs. Si p désigne la projection canonique de G sur G/G^σ, alors l'application π qui à $p(g)$ associe $g\sigma(g)^{-1}$ est un difféomorphisme G-équivariant de G/G^σ sur $\mathbb{M}$.

Définition 1.5.1. On appelle sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{M}$ l'intersection de $\mathbb{M}$ avec un tore maximal σ-stable de G.

Pour $(\mathbb{X}, \tau) = (\mathbb{M}, \sigma)$ ou $(G^{\sigma'}, \sigma')$ et pour $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$, on notera $T_\mathbb{X} = T \cap \mathbb{X}$. On désigne par G_{reg} l'ensemble des éléments réguliers de G et pour $U \subset G$, on pose $U_{reg} = G_{reg} \cap U$.

Définition 1.5.2. Soit $x \in \mathbb{X}_{reg}$. Si M est un sous-groupe de G, on note $M[x]$ l'orbite de x sous l'action adjointe de M. L'orbite stable de $x \in \mathbb{X}_{reg}$ est alors l'ensemble $\omega_x = G[x] \cap \mathbb{X}$. On notera $\mathcal{O}_\mathbb{X}$ l'ensemble des orbites stables d'éléments réguliers de $\mathbb{X}$.

Soit $x \in \mathbb{X}_{reg}$. L'orbite stable de x est une réunion finie de G^τ-orbites. De manière plus précise, si T est l'unique tore maximal τ-stable contenant x, on a :
si $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$ alors $\omega_\mathbb{X} = \bigcup_{w \in W(G^{\sigma'},T)\backslash W(T)^{\sigma'}} G^{\sigma'}[wx]$
et si $\mathbb{X} = \mathbb{M}$ alors $\omega_\mathbb{X} = \bigcup_{w \in W(G^{\sigma},T)\backslash \mathcal{D}_x(T)^{\sigma}} G^{\sigma}[wx]$
où $\mathcal{D}_x(T)^\sigma$ est l'ensemble des $w \in W(T)^\sigma$ tels que $wx \in \mathbb{M}$ ([B3] paragraphe 2.1 et [H2] paragraphe 3.3).

Lemme 1.5.3. *Soit $T \in \mathcal{T}_\sigma(G)$. Alors pour toute composante connexe C de $T^{-\sigma}$, il existe $w \in W(T)^\sigma$ tel que $w(C) \subset \mathbb{M}$.*

Démonstration. A. Bouaziz démontre ce résultat (lemme 2.2.1) lorsque $-1 \in W(A)$ mais sa preuve n'utilise pas ce dernier point et donc reste valable dans notre situation. □

Proposition 1.5.4. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \iota : \mathcal{O}_{G^{\sigma'}} & \to & \mathcal{O}_\mathbb{M} \\ \omega & \mapsto & G[\omega] \cap \mathbb{M} \end{array}$$

est bijective.

Démonstration. Soit $\omega \in \mathcal{O}_{G^{\sigma'}}$ et $x \in \omega$. On note $T \in \mathcal{T}_{\sigma'}(G)$ l'unique tore maximal contenant x. D'après le lemme 1.5.3, on peut choisir une inversion g de T de telle sorte que $gxg^{-1} \in \mathbb{M}$. Ainsi $G[\omega] \cap \mathbb{M} = G[gxg^{-1}] \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$ est l'orbite stable de gxg^{-1} dans $\mathbb{M}$.

Soit $y \in \mathbb{M}_{reg}$ et soit S l'unique élément de $\mathcal{T}_\sigma(G)$ le contenant. Soit $T \in \mathcal{T}^{-1}([S])$ et soit g une inversion de T. Alors $g^{-1}yg \in G^{\sigma'}$ et $\iota(G[g^{-1}yg] \cap \mathbb{M}) = G[y] \cap \mathbb{M}$. □

2 Deux espaces de fonctions

Dans ce paragraphe, nous rappelons d'une part, la définition et les propriétés de l'espace des fonctions orbitales stables et d'autre part, nous introduisons comme dans [B3] un espace de fonctions particulier. Ceci nous permettra de décrire la dualité entre $G^{\sigma'}$ et $\mathbb{M}$ dans le paragraphe suivant.

2.1 Formules intégrales

Nous fixons tout d'abord les normalisations de mesures.

On note κ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, tel que la restriction de κ à V soit non dégénérée. On note μ_V la densité sur V définie par $\mu_V(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \mid det(\kappa(\xi_i, \xi_j)_{i,j}) \mid^{1/2}$ où $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ désigne une base de V. Si X est un sous-groupe fermé de G (ou si $X = \mathbb{M}$), tel que la restriction de κ à l'espace tangent en e à X est non dégénérée, on notera dx la mesure invariante sur X définie par la densité $\mu_{T_e(X)}$. Soit $H \subset K$ deux sous-groupes fermés d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$. On suppose que la restriction de κ à $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ est non dégénérée. On peut alors munir K/H de la mesure K-invariante définie par la densité $\mu_{\mathfrak{r}}$ où $\mathfrak{r}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{k}$.

Avec ces normalisations, pour toute fonction intégrable f sur $\mathbb{M}$, on a :

$$\int_{\mathbb{M}} f(m)dm = 2^{dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}} \int_{G/G^{\sigma}} f(\pi(g))dg.$$

Dans toute la suite de ce paragraphe, $(\mathbb{X}, \tau)$ désigne soit $(\mathbb{M}, \sigma)$ soit $(G^{\sigma'}, \sigma')$.

Nous rappelons tout d'abord la formule d'intégration de Weyl.

On note l le rang de G et on définit la fonction analytique complexe D sur G par : si $x \in G$ alors $det(1 + t - Ad\ x) = t^l D(x)$ modulo t^{l+1}.

Soit γ un élément régulier de $\mathbb{X}$ et soit T l'unique tore de $\mathcal{T}_\tau(G)$ le contenant. La classe de conjugaison $G^\tau[\gamma]$ s'identifie à G^τ/T^τ. Pour toute fonction intégrable f sur $\mathbb{X}$, on a alors la formule d'intégration de Weyl suivante sur $\mathbb{X}$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{X}} f(x)dx &= \sum_{<T>_\tau} \frac{1}{\mid W(G^\tau, T) \mid} \int_{T_{\mathbb{X}\, reg}} \int_{G^\tau[\gamma]} f(y)dy\, d\gamma \\ &= \sum_{<T>_\tau} \frac{1}{\mid W(G^\tau, T) \mid} \int_{T_{\mathbb{X}\, reg}} \mid D(\gamma) \mid \int_{G^\tau/T^\tau} f(g\gamma g^{-1})dg\, d\gamma,\end{aligned}$$

la sommation étant prise sur un système de représentants $< T >_\tau$ des classes de conjugaison de $\mathcal{T}_\tau(G)$ sous l'action de G^τ.

Définition 2.1.1. L'intégrale orbitale stable d'une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{X})$ est la fonction définie sur $\mathbb{X}_{reg}$ par :

$$\mathcal{M}^{st}_{\mathbb{X}}(f)(x) = \mid D(x) \mid^{-1/2} \int_{\omega_x} f(y)dy$$

où $\omega_x = G[x] \cap \mathbb{X}$ désigne l'orbite stable de x.

La formule d'intégration de Weyl s'écrit de la manière suivante en fonction de l'intégrale orbitale stable :

$$\int_{\mathbb{X}} f(x)dx = \sum_{<T>_\tau} \int_{T_{\mathbb{X}}} \frac{1}{c_T(\gamma)} \mid D(\gamma) \mid^{1/2} \mathcal{M}_{\mathbb{X}}^{st}(f)(\gamma)d\gamma \tag{2.1.3}$$

où $c_T(\gamma) =\mid G[\gamma] \cap T_{\mathbb{M}} \mid$ si $\mathbb{X} = \mathbb{M}$ et $c_T(\gamma) =\mid W(G,T)^{\sigma'} \mid$ si $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$.

Soit f une fonction constante sur les orbites stables de $\mathbb{M}_{reg}$ (on dira également que f est stablement invariante sur $\mathbb{M}_{reg}$). Soit $x \in G_{reg}^{\sigma'}$ et $y \in \iota(\omega_x)$. Le scalaire $f(y)$ ne dépend que de l'orbite stable ω_x. En le notant $f \circ \iota(x)$, on définit ainsi une fonction $f \circ \iota$ stablement invariante sur $G_{reg}^{\sigma'}$. De manière analogue, on définit pour une fonction h stablement invariante sur $G_{reg}^{\sigma'}$ la fonction $h \circ \iota^{-1}$ stablement invariante sur $\mathbb{M}_{reg}$.

2.2 L'espace des fonctions orbitales stables

On note $\mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{X})$ l'espace des fonctions ψ stablement invariantes de classe C^∞ sur $\mathbb{X}_{reg}$ qui vérifient les quatre propriétés suivantes (voir [B1] pour $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$ et [H2] pour $\mathbb{X} = \mathbb{M}$). Cette présentation est licite car toute racine imaginaire d'un tore T est conjuguée à une racine imaginaire non compacte (lemme 1.4.1 dû à D. Shelstad).

On note $\mathfrak{t}_{\mathbb{X}}$ l'ensemble des $\xi \in \mathfrak{t}$ tel que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'on ait $exp(s\xi) \in T_{\mathbb{X}}$. Pour $\xi \in \mathfrak{t}_{\mathbb{X}}$, on définit le champ de vecteur $\tilde{\xi}$ sur $T_{\mathbb{X}}$ par : $\tilde{\xi}.f(t) = \frac{d}{ds} f(texp(s\xi))_{/s=0}$.

$(\mathbf{I_1})(\mathbb{X})$ Pour toute partie compacte K de $T_{\mathbb{X}}$ et pour tout $u \in S(\mathfrak{t})$, on a

$$\sup_{x \in K \cap T_{\mathbb{X}\,reg}} \mid \partial(u)\psi_{|T_{\mathbb{X}\,reg}} \mid < \infty.$$

$(\mathbf{I_2})(\mathbb{X})$ La fonction $\psi_{|T_{\mathbb{X}\,reg}}$ se prolonge de manière C^∞ sur l'ensemble $T_{\mathbb{X}}(I-reg)$ des $x \in T_{\mathbb{X}}$ tels que $e^\beta(x) \neq 1$ pour toute racine imaginaire β de T.

$(\mathbf{I_3})(\mathbb{X})$ Soit β une racine imaginaire non compacte de T. Comme dans le paragraphe 1.4, on note c_β la transformation de Cayley relative à β et $T_\beta = c_\beta(T)$.
Alors, pour tout $u \in S(\mathfrak{t})$ tel que $s_\beta u = u$, la fonction $\partial(u)(\psi_{|T_{\mathbb{X}\,reg}})$ se prolonge de manière C^∞ sur l'ensemble Σ'_β des $x \in T_{\mathbb{X}} \cap T_\beta$ tels que, pour tout $\gamma \neq \pm\beta$, l'on ait $e^\gamma(x) \neq 1$. De plus, pour $t \in \Sigma'_\beta$, on a la relation

$$\partial(u)(\psi)(t) = \partial(c_\beta.u)(\psi)(t).$$

$(\mathbf{I_4})(\mathbb{X})$ L'ensemble des $x \in T_{\mathbb{X}\,reg}$ tels que $\psi(x) \neq 0$ est relativement compact dans $T_{\mathbb{X}}$.

On note $\mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{X})$ l'espace des fonctions, appelées fonctions orbitales stables, qui vérifient les propriétés $\mathbf{I_1}(\mathbb{X})$, $\mathbf{I_2}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{I_3}(\mathbb{X})$ (on omet la condition de support).

La structure topologique de ces deux espaces est définie de la manière suivante : on note $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ l'ensemble des parties fermées L de $\mathbb{X}$ telles que L contient l'orbite stable de chacun de ses éléments et son intersection avec tout sous-ensemble de Cartan est compacte. Pour $L \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, on note $\mathcal{I}_c^{st}(L)$ l'espace des intégrales orbitales stables nulles sur $\mathbb{X}_{reg} \setminus L$ que l'on munit de la topologie définie par les semi-normes $p_{T,u}(\psi) = \sup\limits_{x \in T_{\mathbb{X}\, reg}} \mid \partial(u)\psi_{|T}(x) \mid$ où $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$ et $u \in S(\mathfrak{t})$. Muni de cette topologie, $\mathcal{I}_c^{st}(L)$ est un espace de Fréchet. Comme réunion des $\mathcal{I}_c^{st}(L)$ pour L parcourant $\mathcal{K}(\mathbb{X})$, on munit l'espace $\mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{X})$ de la topologie de la limite inductive des $\mathcal{I}_c^{st}(L)$.

L'espace $\mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{X})$ est muni de la topologie définie par les semi-normes

$$p_{L,T,u}(\psi) = \sup_{x \in L \cap T_{\mathbb{X}\, reg}} \mid \partial(u)\psi_{|T}(x) \mid$$

où $L \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$ et $u \in S(\mathfrak{t})$. C'est un espace de Fréchet.

Définition 2.2.1. On rappelle qu'une distribution sur $\mathbb{X}$ est dite stablement invariante (ou stable) si elle est dans l'adhérence, pour la topologie faible, de l'espace vectoriel engendré par les distributions $f \mapsto \mathcal{M}_{\mathbb{X}}^{st}(f)(x)$ lorsque x parcourt $\mathbb{X}_{reg}$. On notera $\mathcal{D}ist^{st}(\mathbb{X})$ l'espace des distributions stables sur $\mathbb{X}$.

Théorème 2.2.2. *([B1] thm 6.2.1 pour $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$ et [H2] thm 3.12 pour $\mathbb{X} = \mathbb{M}$).*

L'application $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}^{st}$ de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{X})$ dans $\mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{X})$ est continue et surjective. Sa transposée ${}^t\mathcal{M}_{\mathbb{X}}^{st}$ définit une bijection continue du dual $\mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{X})'$ de $\mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{X})$ dans l'espace $\mathcal{D}ist(\mathbb{X})^{st}$.

Nous donnons maintenant l'action des opérateurs différentiels sur l'espace $\mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{X})$.

Soit $Z(\mathfrak{g})$ le centre de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. Cette algèbre s'identifie naturellement à l'algèbre des opérateurs différentiels sur $G^{\sigma'}$ invariants par translation à gauche et à droite.

L'algèbre $\mathbb{D}(\mathbb{M})$ des opérateurs différentiels G-invariants sur $\mathbb{M}$ est également isomorphe à $Z(\mathfrak{g})$ ([Bo] ou [B3] paragraphe 3.6). Rappelons la définition de cet isomorphisme, noté μ. Pour $\xi \in \mathfrak{g}$, on note $\nu(\xi)$ le champ de vecteurs sur $\mathbb{M}$ défini par $\nu(\xi)f(m) = \frac{d}{dt} f\big(exp(-t\xi)\, m\, exp(t\sigma(\xi))\big)_{/t=0}$. L'application ν se prolonge en un morphisme d'algèbres $\mathbb{C}$-linéaire de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ dans l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathbb{M}$, l'image de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ étant égale à $\mathbb{D}(\mathbb{M})$. Notons J la structure complexe de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. L'injection de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ qui à X associe $\frac{1}{2}(X - iJX)$ induit une injection $\mathbb{C}$-linéaire de $Z(\mathfrak{g})$ dans $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. La restriction de ν à $Z(\mathfrak{g})$ induit un isomorphisme de $Z(\mathfrak{g})$ dans $\mathbb{D}(\mathbb{M})$. On note $\mu(z) = \nu({}^t z)$ où $z \mapsto^t z$ désigne l'antiautomorphisme principal de $U(\mathfrak{g})$.

D'autre part, à chaque $X \in \mathfrak{g}$, on peut associer le champ de vecteurs $\tilde{X}$ sur G défini par $\tilde{X}f(g) = \dfrac{d}{dt} f(gexp\ tX)_{|t=0}$. Ceci définit une action de $Z(\mathfrak{g})$ comme algèbre d'opérateurs différentiels sur G. Si $z \in Z(\mathfrak{g})$ et F est une fonction holomorphe sur G, on a $(z.F)_{|\mathbb{M}} = \mu(z)F_{|\mathbb{M}}$.

Soit $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$. On note γ_T l'isomorphisme d'Harish-Chandra de $Z(\mathfrak{g})$ dans l'espace des invariants de $S(\mathfrak{t})$ sous l'action de $W(T)$. Soit R^+ un système de racines positives de $R(T)$. On pose

$$\Delta_{R^+} = \prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}).$$

On a alors, pour toute fonction $F \in C^\infty(\mathbb{X})$, G^τ-invariante ([Sa] ou [Bo] pour $\mathbb{X} = \mathbb{M}$ et [HC3] pour $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$) :

$$(z.F)_{|T_{\mathbb{X}\,reg}} = \Delta_{R^+}^{-1} \gamma_T(z).(\Delta_{R^+} F_{|T_{\mathbb{X}\,reg}}).$$

On définit l'action de $Z(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{I}^{\infty\,st}(\mathbb{X})$ de la manière suivante : pour $\psi \in \mathcal{I}^{\infty\,st}(\mathbb{X})$, pour $z \in Z(\mathfrak{g})$ et $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$, on pose

$$(z.\psi)(x) = \gamma_T(z).\psi_{|T_{\mathbb{X}\,reg}}(x) \quad \text{pour } x \in T_{\mathbb{X}\,reg}.$$

Avec cette définition, on a ([Sa] ou [Bo] pour $\mathbb{X} = \mathbb{M}$ et [HC3] pour $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$)

$$z.\mathcal{M}^{st}_{\mathbb{M}}(f) = \mathcal{M}^{st}_{\mathbb{M}}(\mu(z).f) \text{ si } \ f \in C_c^\infty(\mathbb{M})$$

et

$$z.\mathcal{M}^{st}_{G^{\sigma'}}(f) = \mathcal{M}^{st}_{G^{\sigma'}}(z.f) \text{ si } \ f \in C_c^\infty(G^{\sigma'}).$$

2.3 Un espace de fonctions

Comme dans [B3] paragraphe 4.1, nous introduisons les espaces de fonctions $\mathcal{F}_c^{st}(\mathbb{X})$ et $\mathcal{F}^{\infty\,st}(\mathbb{X})$. La motivation de ces définitions est donnée dans le théorème 2.3.1 ci-après.

Soit $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$ et soit R^+ un système de racines positives de T. On note

$$\varepsilon_{R^+} = \frac{\Delta_{R^+}}{\mid \Delta_{R^+} \mid}.$$

C'est une fonction sur T_{reg}, localement constante sur $T_{\mathbb{X}\,reg}$ à valeurs dans l'ensemble des racines quatrièmes de l'unité.

On note $\mathcal{F}_c^{st}(\mathbb{X})$ l'espace des fonctions φ de classe C^∞ sur $\mathbb{X}_{reg}$ et stablement invariantes vérifiant les quatre propriétés ci-dessous. Soit $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$, alors :

$(\mathbf{F_1})(\mathbb{X})$ Pour toute partie compacte K de $T_{\mathbb{X}}$ et pour tout $u \in S(\mathfrak{t})$, on a

$$\sup_{x \in K \cap T_{\mathbb{X}\,reg}} \mid \partial(u)\varphi_{|T_{\mathbb{X}\,reg}} \mid < \infty.$$

$(\mathbf{F_2})(\mathbb{X})$ La fonction $\varepsilon_{R^+}\varphi_{|T_{\mathbb{X}\,reg}}$ se prolonge de manière C^∞ sur l'ensemble $T_{\mathbb{X}}(R-reg)$ des $x \in T_{\mathbb{X}}$ tel que $e^\alpha(x) \neq 1$ pour toute racine réelle α de T.

$(\mathbf{F_3})(\mathbb{X})$ Soit α une racine réelle de T. Comme dans le paragraphe 1.4, on note ν_α la transformation de Cayley relative à α et $T_\alpha = \nu_\alpha(T)$. Soit Σ'_α l'ensemble des $x \in T_{\mathbb{X}} \cap T_\alpha$ tels que pour toute racine réelle $\beta \neq \pm\alpha$, l'on ait $e^\beta(x) \neq 1$.
Alors, pour tout $u \in S(\mathfrak{t})$ tel que $s_\alpha u = -u$, la fonction $\partial(u)(\varepsilon_{R^+}\varphi_{|T_{\mathbb{X}\,reg}})$ se prolonge de manière C^∞ sur Σ'_α. De plus, pour $t \in \Sigma'_\alpha$, on a la relation

$$\partial(u)(\varepsilon_{R^+(T)}\varphi)(t) = \partial(c_\alpha.u)(\varepsilon_{R^+(T_\alpha)}\varphi)(t).$$

$(\mathbf{F_4})(\mathbb{X})$ L'ensemble des $x \in T_{\mathbb{X}\,reg}$ tels que $\varphi(x) \neq 0$ est relativement compact dans $T_{\mathbb{X}}$.

On note $\mathcal{F}^{\infty\,st}(\mathbb{X})$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{X}_{reg}$ qui vérifient les propriétés $\mathbf{F_1}(\mathbb{X})$, $\mathbf{F_2}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{F_3}(\mathbb{X})$ (on omet la condition de support).

On définit une structure topologique sur chacun de ces deux espaces comme pour les fonctions orbitales : pour $L \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, on note $\mathcal{F}^{st}_c(L)$ l'espace des fonctions de $\mathcal{F}^{st}_c(\mathbb{X})$ nulles sur $\mathbb{X}_{reg} \setminus L$ que l'on munit de la topologie définie par les semi-normes $p_{T,u}(\varphi) = \sup\limits_{x \in T_{\mathbb{X}\,reg}} \mid \partial(u)\varphi_{|T}(x) \mid$ où $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$ et $u \in S(\mathfrak{t})$. Muni de cette topologie, $\mathcal{F}^{st}_c(L)$ est un espace de Fréchet. Comme réunion des $\mathcal{F}^{st}_c(L)$ pour L parcourant $\mathcal{K}(\mathbb{X})$, l'espace $\mathcal{F}^{st}_c(\mathbb{X})$ est muni de la topologie de la limite inductive des $\mathcal{F}^{st}_c(L)$.

L'espace $\mathcal{F}^{\infty\,st}(\mathbb{X})$ est muni de la topologie définie par les semi-normes

$$p_{L,T,u}(\varphi) = \sup_{x \in L \cap T_{\mathbb{X}\,reg}} \mid \partial(u)\varphi_{|T}(x) \mid$$

où $L \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$ et $u \in S(\mathfrak{t})$.

On définit une action de $Z(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{F}^{\infty\,st}(\mathbb{X})$ de la manière suivante : pour $z \in Z(\mathfrak{g})$ et $\varphi \in \mathcal{F}^{\infty\,st}(\mathbb{X})$, on pose

$$(z.\varphi)_{|T_{\mathbb{X}\,reg}} = \gamma_T(z).\varphi_{|T_{\mathbb{X}\,reg}} \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{T}_\tau(G).$$

Le résultat suivant concernant la structure des distributions propres invariantes sur $\mathbb{X}$ motive la définition de $\mathcal{F}^{\infty\,st}(\mathbb{X})$. On rappelle qu'une distribution G^τ-invariante sur $\mathbb{X}$, vecteur propre pour l'action de $Z(\mathfrak{g})$ est définie par une fonction localement intégrable sur $\mathbb{X}$, analytique sur $\mathbb{X}_{reg}$ ([HC] thm 2 pour $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$ et [Sa] thm 5.1 pour $\mathbb{X} = \mathbb{M}$).

Théorème 2.3.1. *([Hi] thm 3 et [HC] pour $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$ et [Sa] thm 5.1 pour $\mathbb{X} = \mathbb{M}$).*
L'application $\Theta \mapsto \mid D \mid^{1/2} \Theta$ définit une bijection du sous-espace de $\mathcal{D}ist^{st}(\mathbb{X})$ formé des éléments propres sous l'action de $Z(\mathfrak{g})$ dans le sous-espace de $\mathcal{F}^{\infty\,st}(\mathbb{X})$ formé des éléments propres sous l'action de $Z(\mathfrak{g})$.

D'après (2.1.3), si Θ est une distribution stable sur $\mathbb{X}$ propre sous l'action de $Z(\mathfrak{g})$, alors pour tout $f \in C^\infty_c(\mathbb{X})$, on a

$$\langle \Theta, f \rangle = \sum_{<T>_\tau} \int_{T_{\mathbb{X}}} \frac{1}{c_T(\gamma)} \mid D(\gamma) \mid^{1/2} \Theta(\gamma)\mathcal{M}^{st}_{\mathbb{X}}(f)(\gamma)d\gamma.$$

Il est donc naturel d'introduire la forme bilinéaire suivante : pour $\varphi \in \mathcal{F}^{\infty\, st}(\mathbb{X})$ et $\psi \in \mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{X})$ (ou $\varphi \in \mathcal{F}_c^{st}(\mathbb{X})$ et $\psi \in \mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{X})$), on pose :

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{<T>_\tau} \int_{T_{\mathbb{X}}} \frac{1}{c_T(\gamma)} \varphi(\gamma)\psi(\gamma) d\gamma.$$

Lemme 2.3.2. *([B3] lemme 4.2.1) La forme bilinéaire $(\varphi, \psi) \mapsto \langle \varphi, \psi \rangle$ est séparément continue. De plus, pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a $\langle z.\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, z.\psi \rangle$.*

3 Dualité

3.1 Description de la dualité

Soit $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$. On rappelle que $R(T)$ désigne son système de racines et soit R^+ un choix de racines positives. Pour chaque racine α de T, on note h_α l'unique élément de $\mathfrak{t}$ tel que, pour tout $X \in \mathfrak{t}$, l'on ait $\alpha(X) = \kappa(X, h_\alpha)$. On pose $\omega_{T,R^+} = \prod_{\alpha \in R^+} h_\alpha$. D'après ([HC] lemme 36), il existe un opérateur différentiel invariant $\nabla_{G^{\sigma'}}$ sur $G^{\sigma'}_{reg}$ tel que pour toute fonction $f \in C^\infty(G^{\sigma'}_{reg})$, pour tout $T \in \mathcal{T}_{\sigma'}(G)$, pour tout choix de R^+ et pour tout $x \in T^{\sigma'}_{reg}$, l'on ait

$$\nabla_{G^{\sigma'}}.f(x) = \frac{1}{\varepsilon_{R^+}(x)} \partial(\omega_{T,R^+}) f_{|T^{\sigma'}_{reg}}(x).$$

De même, il existe un opérateur différentiel invariant $\nabla_{\mathbb{M}}$ sur $\mathbb{M}_{reg}$ tel que, pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{M})$, pour tout $T \in \mathcal{T}_\sigma(G)$, pour tout choix de R^+, et pour tout $x \in T_{\mathbb{M}\, reg}$, l'on ait

$$\nabla_{\mathbb{M}}.f(x) = \varepsilon_{R^+}(x) \partial(\omega_{T,R^+}) f_{|T_{\mathbb{M}\, reg}}(x).$$

Soit $\eta_{\mathbb{X}}$ la fonction stablement invariante sur $\mathbb{X}_{reg}$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$ telle que, $\eta_{\mathbb{X}}(x) = \varepsilon^2_{R^+}(x)$ pour tout $x \in T_{\mathbb{X}\, reg}$. Alors on a la relation

$$\nabla_{G^{\sigma'}}.(f \circ \iota) = (\eta_{\mathbb{M}} \circ \iota)(\nabla_{\mathbb{M}}.f) \circ \iota.$$

Proposition 3.1.1.

(i) Pour $\psi \in \mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{M})$, on pose

$$\tau_{\mathbb{M}}^{G^{\sigma'}}(\psi) = \nabla_{G^{\sigma'}}.(\psi \circ \iota).$$

Alors, l'application $\tau_{\mathbb{M}}^{G^{\sigma'}}$ définit une application continue de $\mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{M})$ dans $\mathcal{F}^{\infty\, st}(G^{\sigma'})$. Elle commute à l'action de $Z(\mathfrak{g})$ et sa restriction à $\mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{M})$ est à valeurs dans $\mathcal{F}_c^{st}(G^{\sigma'})$.

(ii) De même, pour $\varphi \in \mathcal{F}^{\infty\, st}(G^{\sigma'})$, on pose

$$\tau^{\mathbb{M}}_{G^{\sigma'}}(\varphi) = \nabla_{\mathbb{M}}.(\varphi \circ \iota^{-1}).$$

Alors, l'application $\tau^{\mathbb{M}}_{G^{\sigma'}}$ définit une application continue de $\mathcal{F}^{\infty\, st}(G^{\sigma'})$ dans $\mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{M})$. Celle-ci commute à l'action de $Z(\mathfrak{g})$ et sa restriction à $\mathcal{F}^{st}_c(G^{\sigma'})$ est à valeurs dans $\mathcal{I}^{st}_c(\mathbb{M})$.

Démonstration. La preuve est la même que celle de [B3] prop. 5.1.1 et prop. 5.1.2. Nous en rappelons les étapes essentielles pour commodité de lecture.

Soit $\psi \in \mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{M})$. Soit $T \in \mathcal{T}_{\sigma'}(G)$ et soit C une composante connexe de $T^{\sigma'}$. Par le lemme 1.5.3, il existe une inversion g de T telle que $gCg^{-1} \subset \mathbb{M}$. Notons $S = gTg^{-1}$. Pour tout $t \in C_{reg}$, on a $\psi \circ \iota(t) = \psi(gtg^{-1})$. Ainsi, on obtient $\tau^{G^{\sigma'}}_{\mathbb{M}}(\psi)(t) = \frac{1}{\varepsilon_{R^+}(t)}\partial(\omega_{S,g.R^+})\psi_{|S}(gtg^{-1})$.

D'autre part $Ad(g)$ échange les racines réelles de T et les racines imaginaires de S. On déduit alors facilement que $\tau^{G^{\sigma'}}_{\mathbb{M}}(\psi)$ vérifie les propriétés $\mathbf{F_1}(\mathbf{G}^{\sigma'})$ et $\mathbf{F_2}(\mathbf{G}^{\sigma'})$ à partir du fait que ψ vérifie $\mathbf{I_1}(\mathbb{M})$ et $\mathbf{I_2}(\mathbb{M})$.

Pour obtenir la relation $\mathbf{F_3}(\mathbf{G}^{\sigma'})$, il est nécessaire de prouver le résultat plus précis suivant (assertion (A) de [B3]) :

Soit α une racine réelle de T. Soit C une composante connexe de T telle que $C \cap \Sigma'_\alpha \neq \emptyset$ (où $\Sigma'_\alpha = \{x \in T \cap T_\alpha; e^\gamma(x) \neq 1 \text{ pour tout } \gamma \neq \pm\alpha\}$). Alors il existe une inversion x de T telle que $x.\alpha$ soit une racine imaginaire non compacte de S et $xCx^{-1} \subset \mathbb{M}$.

Soit g l'inversion choisie comme ci-dessus. D'après le lemme 1.4.1, on sait que $g.\alpha$ est conjuguée par un élément $w \in W(S)$ à une racine imaginaire non compacte. Il suffit de prouver qu'on peut choisir w de telle sorte que $w(gCg^{-1}) \subset \mathbb{M}$.

Dans ([B3] démonstration de la proposition 5.1.1), A. Bouaziz prouve ceci lorsque $-1 \in W(A)$ (c'est-à-dire $\sigma = \sigma'$). Outre le lemme 1.4.1, sa démonstration utilise le fait suivant ([Sc] proposition 2.44) : soit T_d la partie déployée de T. Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie engendrée par $\mathfrak{t}_d$ et les $\mathfrak{g}_\gamma$ pour γ racine réelle de T. Soit H le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Alors, il existe c dans le centre de H tel que $C = exp\, \mathfrak{t}^\sigma\, c$.

Cette assertion est encore vraie pour σ' car $G^{\sigma'}$ admet un sous-groupe de Cartan compact ([Sc] prop. 2.44).

Revenons à la relation $\mathbf{F_3}(\mathbf{G}^{\sigma'})$. En fait, elle s'obtient par simple calcul à partir de $\mathbf{I_3}(\mathbb{M})$.

On garde les notations précédentes et celles du paragraphe 1.4. On pose $\beta = x.\alpha$. Dans ce cas, l'élément $y = c_\beta x v_\alpha^{-1}$ est une inversion de T_α et $yT_\alpha y^{-1} = T_\beta$.

La relation $\mathbf{I_3}(\mathbb{M})$ assure que, pour tout $v \in S(\mathfrak{s})$ tel que $s_\beta v = v$, on a $\partial(v)\psi_{|S} = \partial(c_\beta.v)\psi_{|S_\beta}$ sur $\Sigma'_\beta = \{s \in S_{\mathbb{M}} \cap S_\beta; e^\gamma(s) \neq 1 \text{ pour tout } \gamma \neq \pm\beta\}$.

Soit $u \in S(\mathfrak{t})$ tel que $s_\alpha u = -u$. Alors, pour tout $t \in \Sigma'_\alpha \cap C$, on a

$$\begin{aligned}\partial(u)(\varepsilon_{R^+}\tau_{\mathbb{M}}^{G^{\sigma'}}(\psi))(t) &= \partial(x.(u\omega_{T,R^+}))\psi_{|S}(xtx^{-1})\\ &= \partial(c_\beta x.(u\omega_{T,R^+}))\psi_{|S_\beta}(xtx^{-1}) \quad (\text{par } \mathbf{I_3}(\mathbb{M}))\\ &= \partial(y\nu_\alpha.(u\omega_{T,R^+}))\psi_{|S_\beta}(yty^{-1}) \quad (\text{car } yty^{-1} = xtx^{-1})\\ &= \partial(\nu_\alpha.(u\omega_{T,R^+}))\psi_{|S_\beta} \circ Ad(y)(t)\\ &= \partial(\nu_\alpha.u)(\varepsilon_{\nu_\alpha.R^+}\tau_{\mathbb{M}}^{G^{\sigma'}}(\psi))(t).\end{aligned}$$

On obtient ainsi l'assertion (i). L'assertion (ii) se démontre de même. □

On note $\omega_\mathfrak{g}$ l'élément de $Z(\mathfrak{g})$ tel que $\gamma_T(\omega_\mathfrak{g}) = \prod_{\alpha \in R^+} h_\alpha^2$.

Corollaire 3.1.2. *Pour* $\psi \in \mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{M})$, *on a* $\tau_{G^{\sigma'}}^{\mathbb{M}} \circ \tau_{\mathbb{M}}^{G^{\sigma'}}(\psi) = \omega_\mathfrak{g}.\psi$.
et pour $\Psi \in \mathcal{I}^{\infty\, st}(G^{\sigma'})$, *on a* $\tau_{\mathbb{M}}^{G^{\sigma'}} \circ \tau_{G^{\sigma'}}^{\mathbb{M}}(\Psi) = \omega_\mathfrak{g}.\Psi$

Démonstration. Ceci découle des définitions. □

Nous pouvons maintenant donner la dualité de Bouaziz.

Pour $\varphi \in \mathcal{I}_c^{st}(G^{\sigma'})$ et $\psi \in \mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{M})$ (respectivement $\varphi \in \mathcal{I}^{\infty\, st}(G^{\sigma'})$ et $\psi \in \mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{M})$), on pose

$$\langle\langle \varphi, \psi \rangle\rangle = \langle \varphi, \tau_{\mathbb{M}}^{G^{\sigma'}}(\psi)\rangle.$$

Théorème 3.1.3. *La forme bilinéaire* $(\varphi, \psi) \mapsto \langle\langle \varphi, \psi \rangle\rangle$ *est séparément continue sur* $\mathcal{I}_c^{st}(G^{\sigma'}) \times \mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{M})$ *(respectivement* $\mathcal{I}^{\infty\, st}(G^{\sigma'}) \times \mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{M})$*). De plus, on a*

$$\langle\langle z.\varphi, \psi \rangle\rangle = \langle\langle \varphi, \mu(z).\psi \rangle\rangle.$$

Démonstration. Ceci découle du lemme 2.3.2 et de la proposition 3.1.1(i). □

Cette dualité permet de définir les deux applications linéaires suivantes :

$$u\ : \mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{M}) \mapsto \mathcal{I}_c^{st}(G^{\sigma'})' \simeq \mathcal{D}ist^{st}(G^{\sigma'})$$

et

$$v\ : \mathcal{I}^{\infty\, st}(G^{\sigma'}) \mapsto \mathcal{I}_c^{st}(\mathbb{M})' \simeq \mathcal{D}ist^{st}(\mathbb{M}).$$

Ces applications sont continues lorsque $\mathcal{D}ist^{st}(G^{\sigma'})$ et $\mathcal{D}ist^{st}(\mathbb{M})$ sont munis de la topologie forte. Elles commutent avec l'action de $Z(\mathfrak{g})$.

On a une formule explicite de ces applications ([B3] lemme 5.2.4). Soit $T \in \mathcal{T}_{\sigma'}(G)$ et $\psi \in \mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{M})$. Alors pour $t \in T_{reg}^{\sigma'}$, on a

$$u(\psi)(t) = \frac{1}{\mid D(t) \mid^{1/2}} \nabla_{G^{\sigma'}}.(\psi \circ \iota)(t) = \frac{1}{\Delta_{R^+}(t)}\partial(\omega_{T,R^+}).(\psi \circ \iota)(t).$$

Soit $S \in \mathcal{T}_\sigma(G)$ et $\varphi \in \mathcal{I}^{\infty\, st}(G^{\sigma'})$. Alors pour tout $s \in S_{\mathbb{M}\, reg}$, on a

$$v(\varphi)(s) = (-1)^{\frac{1}{2}(dim\ \mathfrak{g} - rang\ \mathfrak{g})} \frac{1}{\Delta_{R^+}(s)} \partial(\omega_{S,R^+}).(\varphi \circ \iota^{-1})(s).$$

Soit χ un caractère de $Z(\mathfrak{g})$. Pour $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$ ou $\mathbb{M}$, on note $\mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{X})_\chi$ (respectivement $\mathcal{D}ist^{st}(\mathbb{X})_\chi$) le sous-espace de $\mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{X})$ (respectivement $\mathcal{D}ist^{st}(\mathbb{X})$) propre sous l'action de $Z(\mathfrak{g})$ relativement au caractère χ. Notons u_χ et v_χ les restrictions de u et v respectivement à $\mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{M})_\chi$ et $\mathcal{I}^{\infty\, st}(G^{\sigma'})_\chi$. On a alors :

Proposition 3.1.4. *([B3] prop. 5.2.5) Les applications*

$$u_\chi \ : \mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{M})_\chi \mapsto \mathcal{D}ist^{st}(G^{\sigma'})_\chi$$

et

$$v_\chi \ : \mathcal{I}^{\infty\, st}(G^{\sigma'})_\chi \mapsto \mathcal{D}ist^{st}(\mathbb{M})_\chi$$

sont des isomorphismes lorsque χ est régulier et elles sont nulles pour χ singulier.

3.2 Applications

Dans ce paragraphe, nous voulons exprimer les images respectivement par u^{-1} et v des distributions stables $\Theta^{st}_{t^*}$ et des fonctions orbitales stables $\Psi^{st}_{t^*}$ définies dans [B3] paragraphe 6.2 en terme des fonctions $F(\mu)$ et $\Theta(\mu)$ qui interviennent dans la formule d'inversion de [H3] thm. 6.15. Les objets de [H3] sont définis sur G/G^σ. Si f est une fonction définie sur un ouvert U de G/G^σ on notera f_0 la fonction définie sur $\pi(U)$ par $f_0 \circ \pi = f$.

L'isomorphisme de $Z(\mathfrak{g})$ dans l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants sur G/G^σ considéré dans [H3] induit donc un isomorphisme η de $Z(\mathfrak{g})$ dans $\mathbb{D}(\mathbb{M})$ qui diffère de l'isomorphisme μ considéré ici : soit $T \in \mathcal{T}_\sigma(G)$ et soit r_T l'isomorphisme de $S(\mathfrak{t})$ induit par l'application $X \mapsto 2iX$. On a alors $\eta = \mu \circ \gamma_T^{-1} \circ r_T \circ \gamma_T$.

D'autre part, si $\delta \in (\mathfrak{t}^{-\sigma})^*$, on notera par la même lettre l'élément de $(\mathfrak{t}^\sigma)^*$ défini par $X \mapsto \delta(iX)$.
On note toujours $(\mathbb{X}, \tau) = (G^{\sigma'}, \sigma')$ ou $(\mathbb{M}, \sigma)$. On rappelle que $\mathfrak{t}_{\mathbb{X}} = \mathfrak{t}^{\sigma'}$ ou $\mathfrak{t}^{-\sigma}$ selon que $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$ ou $\mathbb{M}$.

Théorème 3.2.1. *Soit $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$ et soit $\lambda \in (\mathfrak{t}_{\mathbb{X}})^*$ régulier.*
Soit $\psi \in \mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{X})$ telle que :
(a) pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, l'on ait $z.\psi = \gamma_T(z)(i\lambda)\psi$,
(b) pour tout $[S] \geq [T]$ alors $\psi_{|S_{\mathbb{X}\, reg}} = 0$.
Alors :
(i) si $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$, on a $\psi = 0$ sur $G^{\sigma'}_{reg}$,
(ii) si $\mathbb{X} = \mathbb{M}$ et si de plus la fonction ψ est bornée, on a $\psi = 0$ sur $\mathbb{M}_{reg}$.

Démonstration. Ceci est l'analogue pour les fonctions orbitales stables des théorèmes d'unicité pour les fonctions orbitales de [B3] thm 5.1.1 et [H3] thm 5.1. La preuve est identique à celle de ces deux théorèmes. □

Corollaire 3.2.2. *Soit $T \in \mathcal{T}_\tau(G)$ et soit $\lambda \in (\mathfrak{t}_{\mathbb{X}})^*$ régulier.*
Soit $\Theta \in \mathcal{D}ist^{st}(\mathbb{X})$ telle que :
(a) pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, l'on ait $z.\Theta = \gamma_T(z)(i\lambda)\Theta$,
(b) pour tout $[S] \leq [T]$ alors $\Theta_{|S_{\mathbb{X}\,reg}} = 0$.
Alors :
(i) si $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$ et si de plus la fonction $| D |^{1/2}\ \Theta$ est bornée sur $G^{\sigma'}_{reg}$, on a $\Theta = 0$,
(ii) si $\mathbb{X} = \mathbb{M}$, on a $\Theta = 0$.

Démonstration. Ceci découle des définitions de u_χ et v_χ, de la proposition 3.1.4 et du théorème précédent. □

Soit $T \in \mathcal{T}_{\sigma'}(G)$. On fixe dans toute la suite un choix Δ de racines imaginaires positives de T. Soit $\rho = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\beta\in\Delta}\beta$. On note $b_\Delta = \displaystyle\prod_{\beta\in\Delta}\dfrac{(1-e^{-\beta})}{| 1-e^{-\beta} |}$. Pour $w \in W(T)^{\sigma'}$, on définit la signature imaginaire $\varepsilon_I(w)$ de w par $\displaystyle\prod_{\beta\in\Delta} w.\beta = \varepsilon_I(w)\prod_{\beta\in\Delta}\beta$.

On note $\widehat{T^{\sigma'}}$ le groupe des caractères unitaires de $T^{\sigma'}$. Soit $t^* \in \widehat{T^{\sigma'}}$. On note $i\lambda \in i(\mathfrak{t}^{\sigma'})^*$ la différentielle de t^*e^ρ . Soit χ_{t^*} et $\tilde{\chi}_{t^*}$ les caractères de $Z(\mathfrak{g})$ définis par $\chi_{t^*}(z) = \gamma_T(z)(i\lambda)$ et $\tilde{\chi}_{t^*}(z) = \gamma_T(z)(-i\lambda)$.

A tout $t^* \in \widehat{T^{\sigma'}}$, on associe comme dans ([B2] page 171) une distribution invariante Θ_{t^*} sur $G^{\sigma'}$, solution propre de $Z(\mathfrak{g})$ pour le caractère χ_{t^*}. On définit une action de $W(T)^{\sigma'}$ sur $\widehat{T^{\sigma'}}$ de la manière suivante : on pose $w \bullet t^*(x) = t^*(w^{-1}x)e^{w\rho-\rho}(x)$. Comme dans ([B3] paragraphe 6.2), on définit alors la distribution stablement invariante

$$\Theta^{st}_{t^*} = \frac{1}{| W(G^{\sigma'}, T) |}\sum_{w\in W(G,T)^{\sigma'}}\varepsilon_I(w)\Theta_{w\bullet t^*}.$$

La distribution $\Theta^{st}_{t^*}$ est propre pour le caractère χ_{t^*} et vérifie :
(i) $| D |^{1/2}\ \Theta^{st}_{t^*}$ est bornée sur $G^{\sigma'}_{reg}$,
(ii) $\Theta^{st}_{t^*}$ est nulle sur $S^{\sigma'}_{reg}$ pour $[S] < [T]$,
(iii) pour $t \in G^{\sigma'}_{reg}$, on a

$$\Theta^{st}_{t^*}(t) = \frac{1}{| D(t) |^{1/2}\, b_\Delta(t)}\sum_{w\in W(G,T)^{\sigma'}}\varepsilon_I(w)e^{w\rho-\rho}(t)tr(wt^*)(t).$$

D'après le corollaire précédent, lorsque χ_{t^*} est régulier, la distibution $\Theta^{st}_{t^*}$ est uniquement déterminée par ces propriétés.

D'autre part, on peut définir l'espace $\mathcal{I}^\infty(\mathbb{X})$ des fonctions orbitales sur $\mathbb{X}$ (pour $\mathbb{X} = G^{\sigma'}$ ou $\mathbb{M}$) de manière analogue à $\mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{X})$ où la conjugaison stable est remplacée par la conjugaison ordinaire ([B1] et [H3]). Si ψ est une fonction orbitale sur $\mathbb{X}$, on lui associe l'élément $\mathcal{S}(\psi) \in \mathcal{I}^{\infty\, st}(\mathbb{X})$ en posant

$$\mathcal{S}(\psi)(x) = \sum_{y\in G^\tau\backslash\omega_x}\psi(y).$$

A $t^* \in \widehat{T^{\sigma'}}$, on associe également comme dans ([B2] page 161) une fonction orbitale $\Psi_{t^*,\Delta}$. On note $\tilde{t^*}$ le caractère de $\widehat{T^{\sigma'}}$ défini par $\tilde{t^*}(x) = t^*(x^{-1})$. On pose alors

$$\Psi^{st}_{t^*} = \mathcal{S}(\Psi_{\tilde{t^*},-\Delta}).$$

Cette fonction orbitale stable est propre pour le caractère $\tilde{\chi}_{t^*}$ et vérifie :
(i) $\Psi^{st}_{t^*}$ est nulle sur $S^{\sigma'}_{reg}$ pour $[S] > [T]$,
(ii) pour $t \in G^{\sigma'}_{reg}$, on a

$$b_{-\Delta}(t)\Psi^{st}_{t^*}(t) = \sum_{w \in W(G,T)^{\sigma'}} \varepsilon_I(w) e^{-w\rho+\rho}(t) tr(w\tilde{t^*})(t).$$

Par le théorème 3.2.1, lorsque le caractère $\tilde{\chi}_{t^*}$ est régulier, la fonction $\Psi^{st}_{t^*}$ est uniquement déterminée par ces propriétés.

La formule d'inversion des intégrales orbitales stables s'écrit alors de la manière suivante ([B3] paragraphe 6.2) :

$$\mathcal{M}^{st}_{G^{\sigma'}}(f) = \sum_{<T>_{\sigma'}} \frac{1}{\mid W(G,T)^{\sigma'} \mid} \int_{\widehat{T^{\sigma'}}} \langle \Theta^{st}_{t^*}, f \rangle \Psi^{st}_{t^*} dt^*.$$

De là, A. Bouaziz déduit la formule de Plancherel sur $\mathbb{M}$ sous la forme suivante : soit $B \in \mathcal{T}_\sigma(G)$ tel que B^σ soit fondamental dans G^σ. Alors, il existe une constante $c_{\mathbb{M}}$ telle que, pour tout $f \in C^\infty_c(\mathbb{M})$, la fonction $\nabla_{\mathbb{M}} \mathcal{M}^{st}_{\mathbb{M}}(f)_{|B_{\mathbb{M}}\, reg}$ se prolonge continûment sur $B_{\mathbb{M}}$ et $\nabla_{\mathbb{M}} \mathcal{M}^{st}_{\mathbb{M}}(f)_{|B_{\mathbb{M}}}(1) = c_{\mathbb{M}} f(1)$ ([H3] lemme 7.1). D'autre part, par ([Hi] thm. 1), pour tout $t^* \in \widehat{T^{\sigma'}}$, la fonction $\mid D \mid^{1/2} \Theta^{st}_{t^* \mid A^{\sigma'}_{reg}}$ se prolonge continûment sur $A^{\sigma'}$ (A désigne toujours le tore maximal déployé de G). On note $(\mid D \mid^{1/2} \Theta^{st}_{t^*})(1)$ sa valeur en 1. A. Bouaziz montre alors que, pour tout $f \in C^\infty_c(\mathbb{M})$, l'on a

$$c_{\mathbb{M}} f(1) = \sum_{<T>_{\sigma'}} \frac{1}{\mid W(T)^{\sigma'} \mid} \int_{\widehat{T^{\sigma'}}} (\mid D \mid^{1/2} \Theta^{st}_{t^*})(1) \langle\langle \Psi^{st}_{t^*}, \mathcal{M}^{st}_{\mathbb{M}}(f) \rangle\rangle dt^*.$$

Nous allons calculer, lorsque χ_{t^*} est régulier, les images de $\Psi^{st}_{t^*}$ et de $\Theta^{st}_{t^*}$ par les applications $v_{\tilde{\chi}_{t^*}}$ et $u^{-1}_{\chi_{t^*}}$. Ceci permettra de retrouver la formule de Plancherel explicite donnée dans [H3] thm. 7.4.

Dans la suite, on omettra les indices χ_{t^*} et $\tilde{\chi}_{t^*}$ pour simplifier les notations.

On fixe un système positif R^+ de racines de T tel que, d'une part $\Delta \subset R^+$ et d'autre part, si $\gamma \in R^+$ est une racine complexe (c'est-à-dire $\sigma'(\gamma) \neq \pm\gamma$) l'on ait $\sigma'(\gamma) \in R^+$. Un tel choix est fait pour simplifier les calculs. On note Φ l'ensemble des racines réelles de R^+.

On fixe une inversion g de T et on note $T_0 = gTg^{-1}$. L'ensemble $R^+_0 = g.R^+$ est alors un système positif de racines de T_0, les ensembles $\Delta_0 = g.\Delta$ et $\Phi_0 = g.\Phi$ sont respectivement l'ensemble des racines réelles et imaginaires positives de T_0. On pose $\rho_0 = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi_0} \beta$ et $b_{\Phi_0} = \prod_{\alpha \in \Phi_0} \frac{1 - e^{-\alpha}}{\mid 1 - e^{-\alpha} \mid}$.

Proposition 3.2.3. *Pour $x \in T_0\mathbb{M}_{reg}$, on a*

$$v(\Psi^{st}_{t^*})(x) = (-1)^{\frac{1}{2}(dim\,\mathfrak{g} - rang\,\mathfrak{g})}\omega_{T_0,R_0^+}(-ig.\lambda) \times \frac{\mid e^{\rho_0}(x)\mid}{\mid D(x)\mid^{1/2} b_{\Phi_0}(x)e^{\rho_0}(x)} \sum_{w\in W(G,T_0)^\sigma} \varepsilon_I(w)e^{-w\rho_0}(x)tr\, wg.\tilde{t^*}(x)$$

et

$$u^{-1}(\Theta^{st}_{t^*})(x) = \frac{1}{\omega_{T_0,R_0^+}(ig.\lambda)} b_{\Phi_0}(x)\frac{e^{\rho_0}(x)}{\mid e^{\rho_0}(x)\mid} \sum_{w\in W(G,T_0)^\sigma} \varepsilon_I(w)e^{w\rho_0}(x)tr\, wg.t^*(x).$$

Démonstration. Les deux assertions se montrent par les mêmes arguments. Considérons la première. Soit $c_{\mathfrak{g}} = (-1)^{\frac{1}{2}(dim\,\mathfrak{g} - rang\,\mathfrak{g})}$. On fixe $x \in T_0\mathbb{M}_{reg}$ et $t \in T^{\sigma'}$ tel que $gtg^{-1} = x$. Par définition, on a

$$v(\Psi^{st}_{t^*})(x) = \frac{c_{\mathfrak{g}}}{\Delta_{R_0^+}(x)}\partial(\omega_{T_0,R_0^+})(\Psi^{st}_{t^*}\circ \iota^{-1})(x)$$

$$= \frac{c_{\mathfrak{g}}}{\Delta_{R^+}(t)}\partial(\omega_{T,R^+})\Psi^{st}_{t^*}(t).$$

La fonction $b_{-\Delta}e^{-\rho}$ est localement constante sur $T^{\sigma'}_{reg}$. Ainsi, on obtient

$$v(\Psi^{st}_{t^*})(x) = \frac{c_{\mathfrak{g}}}{\left(\Delta_{R^+}b_{-\Delta}e^{-\rho}\right)(t)}\omega_{T,R^+}(-i\lambda) \sum_{w\in W(G,T)^{\sigma'}} \varepsilon_I(w)\varepsilon(w)e^{-w\rho}(t)tr\, w\tilde{t^*}(t).$$

Maintenant, l'application $w \mapsto Ad\,g\circ w\circ Ad\,g^{-1} = w_0$ est une bijection de $W(G,T)^{\sigma'}$ dans $W(G,T_0)^\sigma$ puisque g est une inversion de T. Par le choix de R^+, si γ est une racine complexe positive avec $w(\gamma)$ positive, alors la racine $\sigma'(\gamma)$ vérifie la même propriété. Ainsi, comme Adg permute les racines réelles de T et les racines imaginaires de T_0, on a $\varepsilon_I(w)\varepsilon(w) = \varepsilon_I(w_0)$.

D'autre part, on a

$$(\Delta_{R^+}e^{-\rho}b_{-\Delta})(t) = \prod_{\alpha\in\Phi}\frac{e^{\alpha/2}(t) - e^{-\alpha/2}(t)}{|e^{\alpha/2}(t) - e^{-\alpha/2}(t)|}|D(t)|^{1/2} = \frac{\left(|D|^{1/2}b_{\Phi_0}e^{\rho_0}\right)(x)}{|e^{\rho_0}(x)|}.$$

L'expression de $v(\Psi^{st}_{t^*})(x)$ s'obtient alors facilement. □

Soit $\mu \in (\mathfrak{t}_0^\sigma)^*$ tel que, pour tout $X \in \mathfrak{t}_0^\sigma$ vérifiant $exp 2iX = 1$, l'on ait $\mu(X) \in \mathbb{Z}$. On note $\Theta_0(\mu)$ (respectivement $F_0(\mu)$) la distribution sphérique (respectivement la fonction orbitale) sur $\mathbb{M}$ correspondant à la distribution $\Theta(\mu, e, \Phi_0)$ (respectivement la fonction orbitale $F(\mu, e, \Phi_0)$) définie sur G/G^σ dans [H3] 6.1 (respectivement thm 5.8).

On définit alors la distribution sphérique

$$\Theta_0(\mu)^{st} = \sum_{w \in W(G^\sigma, T_0)\backslash W(G,T_0)^\sigma} \Theta_0(w\mu).$$

C'est une distribution sphérique stable d'après ([H2] thm. 7.1).

On note $F_0^{st}(\mu) = \mathcal{S}(F_0(\mu))$.

Précisons la structure de $\widehat{T^{\sigma'}}$. Les composantes connexes de $T^{\sigma'}$ sont décrites par les éléments de $F = exp(i\mathfrak{t}^{\sigma'}) \cap T^{\sigma'}$. On note $\Gamma_R = \sum_{\beta \in R} \mathbb{Z} H_\beta$. Comme G est simplement connexe, pour $Y \in \mathfrak{t}$, on a $expY = 1$ si et seulement si $Y \in 2i\pi\Gamma_R$. Ainsi on a $F = exp\, i\big(\mathfrak{t}^{\sigma'} \cap \pi\Gamma_R\big)$. Comme $G^{\sigma'}$ admet un sous-goupe de Cartan compact, d'après ([H1] lemme 3.4), on a $\Gamma_R \cap \mathfrak{t}^{\sigma'} = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{Z}H_\alpha = \Gamma_\Phi$ et Γ_Φ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{t}_R^{\sigma'} = \mathfrak{t}^{\sigma'} \cap (\sum_{\beta\in R} \mathbb{R}H_\beta)$. Pour $\alpha \in \Phi$, on note $\gamma_\alpha = expi\pi H_\alpha$. Soit $H_{\alpha_1}, \ldots, H_{\alpha_l}$ la base du système des coracines H_α pour $\alpha \in \Phi$. L'ensemble F est alors l'ensemble des $\gamma_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \ldots \gamma_{\alpha_l}^{\varepsilon_l}$ où les ε_j valent 0 ou 1. Soit $x \in F \cap exp\, \mathfrak{t}^{\sigma'}$. On a $x = exp\, X = exp\, iY$ avec $X \in \mathfrak{t}^{\sigma'}$ et $Y \in \pi\Gamma_\Phi$ et donc $X - iY \in 2i\pi\Gamma_R$. La décomposition $\mathfrak{t}^{\sigma'} = \mathfrak{t}_I^{\sigma'} + \mathfrak{t}_R^{\sigma'}$ où $\mathfrak{t}_I^{\sigma'} = \mathfrak{t}^{\sigma'} \cap (\sum_{\beta\in R} \mathbb{R}iH_\beta)$ assure alors que $Y \in 2\pi\Gamma_\Phi$ et donc $x = 1$.

Soit Λ l'ensemble des $\lambda \in (t^{\sigma'})^*$ tels que, pour tout $X \in 2i\pi\Gamma_R$, l'on ait $\xi_{i\lambda}(exp\, X) = 1$. Ainsi tout élément t^* de $\widehat{T^{\sigma'}}$ s'écrit $\delta \otimes \xi_{i\lambda}$ avec $\delta \in \hat{F}$ et $\lambda \in \Lambda$. De plus si $\gamma \in F$ est distinct de 1 alors pour tout $\delta \in \hat{F}$, on a $\delta(\gamma) = \pm 1$ et $\sum_{\delta\in\hat{F}} \delta(\gamma) = 0$.

Corollaire 3.2.4. *Soit $\lambda \in \Lambda$ régulier. On a alors*

$$\sum_{\delta\in\hat{F}} v(\Psi^{st}_{\delta\otimes\xi_{i\lambda-\rho}}) = 2^l(-1)^{\frac{1}{2}(dim\mathfrak{g} - rang\mathfrak{g})}\omega_{T_0,R_0^+}(-ig.\lambda)\Theta_0^{st}(-g.\lambda/2)$$

et

$$\sum_{\delta\in\hat{F}} u^{-1}(\Theta^{st}_{\delta\otimes\xi_{i\lambda-\rho}}) = 2^l \frac{1}{\omega_{T_0,R_0^+}(ig.\lambda)} F_0^{st}(g.\lambda/2).$$

Démonstration. Les distributions sphériques $\Theta_0^{st}(-g.\lambda/2)$ et $\sum_{\delta\in\hat{F}} v(\Psi^{st}_{\delta\otimes\xi_{i\lambda-\rho}})$ sont stables, propres pour le caractère $\chi_{\xi_{i\lambda}}$ et nulles sur $S_{\mathbb{M}\, reg}$ pour tout $S \in \mathcal{T}_\sigma(G)$ vérifiant $[S] < [T_0]$. Donc, d'après le corollaire 3.2.2, il suffit de considérer leurs valeurs sur $T_{0\mathbb{M}\, reg}$ pour les comparer. Le résultat se déduit alors du corollaire précédent et de la définition de $\Theta_0^{st}(-g.\lambda/2)$. La deuxième assertion se montre de même. □

Références

[ABV] J. Adams, D. Barbasch and D. A. Vogan, *The Langlands Classification and Irreducible Characters for Real Reductive Groups*, Prog. Math., Birkhäuser Boston, 1992.

[B1] A. Bouaziz, Intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* **27** (1994), 573–609.

[B2] A. Bouaziz, Formule d'inversion des intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs, *J. of Funct. Anal.* **134** (1995), 100–182.

[B3] A. Bouaziz, Une dualité entre $G_{\mathbb{R}}$ et $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, *Journal of Lie Theory* **10** (2001), 221–254.

[Bo] N. Bopp, Analyse sur un espace symétrique pseudo-Riemannien, Thèse, Strasbourg, 1987.

[HC] Harish-Chandra, Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **119** (1965), 457–508.

[H1] P. Harinck, Fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, *Annales Scientifiques de l'E.N.S* **23** (1990), 1–38.

[H2] P. Harinck, Correspondance de distributions sphériques entre deux espaces symétriques du type $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, *J. Funct. Anal.* **124** (1994), 427–474.

[H3] P. Harinck, Fonctions orbitales sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel, *J. Funct. Anal.* **153** (1998), 52–107.

[He] A.G. Helminck, Tori Invariant under an Involutorial Automorphism I, *Adv. in Math.* **85** (1991), 1–38.

[Her] R. Herb, Fourier inversion and the Plancherel theorem for semisimple real Lie groups, *Amer. J. Math.* **104** (1982), 9–58.

[Hi] T. Hiraï, Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semisimple groups II, *Japan J. Math.* **2** (1976), 27–89.

[P] M.-N. Panichi, Caractérisations du spectre tempéré de $Gl_n(\mathbb{C})/Gl_n(\mathbb{R})$, thèse de doctorat, Université Paris 7, (2001).

[Sa] S. Sano, *Distributions sphériques invariantes sur l'espace semi-simple et son c-dual*, Lect. Notes in Math., Vol. 1243, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 1985.

[Sc] W. Schmid, On the characters of the discrete series, the hermitian symmetric case, *Invent. Math.* **30** (1995), 47–144.

[Sh1] D. Shelstad, Characters and inner forms of a quasi-split group over $\mathbb{R}$, *Compositio Mathematica* **39** (1979), 1–45.

[Sh2] D. Shelstad, Orbital integrals and a family of groups attached to a real reductive group, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série* **12** (1979), 1–31.

[Su] M. Sugiura, Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras, *J. Math. Soc. Japan* **11** (1959), 374–434.

Pascale Harinck
Université Paris 7-Denis Diderot
CNRS-UMR 7586
Case 7012
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05, France
Email:harinck@math.jussieu.fr

Marie-Noëlle Panichi
Université Paris 7-Denis Diderot
UMR 7586
Case 7012
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05, France
Email:panichi@math.jussieu.fr