

Fonctions orbitales sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel.

Pascale Harinck¹

Introduction

Soit G un groupe de Lie réductif complexe connexe de groupe dérivé simplement connexe et d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soit H une forme réelle de G d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . On note σ la conjugaison de \mathfrak{g} relativement à \mathfrak{h} . Elle définit une involution du groupe G que l'on notera encore σ et H est l'ensemble des points de G fixés par σ . L'espace symétrique réductif $\mathbb{X} = G/H$ est dit du type $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. L'application qui à $g \in G$ associe $g\sigma(g)^{-1}$ induit un isomorphisme φ de \mathbb{X} sur son image.

Soit $D_{\mathbb{X}}$ la fonction analytique sur \mathbb{X} définie par : $\det_{\mathbb{C}}(1 + z - \text{Ad } \varphi(x)) = z^n D_{\mathbb{X}}(x)$ modulo z^{n+1} où $n = \text{rang } \mathfrak{h}$. On définit l'ensemble \mathbb{X}_{reg} des éléments réguliers de \mathbb{X} formé des $x \in \mathbb{X}$ tels que $D_{\mathbb{X}}(x) \neq 0$.

A chaque sous-algèbre de Cartan \mathfrak{a} de \mathfrak{h} , on associe le sous-ensemble de Cartan A formé des $x \in \mathbb{X}$ tels que $\varphi(x)$ centralise \mathfrak{a} . Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ (fonction de classe C^∞ à support compact sur \mathbb{X}), on définit l'intégrale orbitale $\mathcal{M}(f)$ de f sur \mathbb{X}_{reg} de la manière suivante : soit $x \in \mathbb{X}_{reg}$ et soit \mathfrak{a} le centralisateur de x dans \mathfrak{h} (c'est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h}). On pose

$$\mathcal{M}(f)(x) = |D_{\mathbb{X}}(x)|^{1/2} \int_{H/Z_H(\mathfrak{a})} f(h.x) dh$$

où $Z_H(\mathfrak{a})$ désigne le centralisateur de \mathfrak{a} dans H et dh est une mesure invariante sur $H/Z_H(\mathfrak{a})$.

Le but de cet article est d'obtenir une formule d'inversion des intégrales orbitales. Il s'agit d'écrire

$$\mathcal{M}(f) = \int_{G^*} F_{g^*} \theta_{g^*}(f) d\mu(g^*)$$

où G^* est un ensemble paramétrant des distributions sphériques sur \mathbb{X} , θ_{g^*} est la distribution sphérique (c'est-à-dire H -invariante et propre pour l'action du centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g}) associée au paramètre g^* et F_{g^*} est une fonction H -invariante

¹CNRS-UMR 9994, UFR de Mathématiques, Tour 45-55 5ème étage, 2 Place Jussieu 75251 PARIS Cédex 05

sur \mathbb{X}_{reg} à déterminer. La description des θ_{g^*} est donnée dans [H6]. La moitié de cet article consiste en la construction des F_{g^*} . On démontre ensuite la formule d'inversion. En utilisant une formule limite (reliant $\mathcal{M}(f)$ et $f(eH)$), on obtient la formule de Plancherel pour l'espace symétrique \mathbb{X} .

Les intégrales orbitales $\mathcal{M}(f)$ sont H -invariantes sur \mathbb{X}_{reg} et elles sont caractérisées par une condition sur leur support et des conditions dites de sauts (qui traduisent l'éventuelle discontinuité de $\mathcal{M}(f)$ au voisinage des points non réguliers) (voir 2.1). On note $I(\mathbb{X})$ l'image par \mathcal{M} de $\mathcal{D}(\mathbb{X})$ et on le munit d'une topologie d'espace limite inductive de Fréchet. On définit l'espace $I(\mathbb{X})^\infty$ des fonctions orbitales : ce sont des fonctions H -invariantes sur \mathbb{X}_{reg} qui vérifient des propriétés analogues à celles des $\mathcal{M}(f)$ hormis la condition sur le support (paragraphe 2). On munit $I(\mathbb{X})^\infty$ d'une topologie d'espace de Fréchet. L'algèbre $Z(\mathfrak{g})$ agit sur $I(\mathbb{X})^\infty$ et laisse stable $I(\mathbb{X})$. Les fonctions F_{g^*} qui interviennent dans la formule d'inversion sont des fonctions orbitales propres pour l'action de $Z(\mathfrak{g})$.

Précisons le résultat obtenu : soit \mathfrak{a} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} . On note \mathfrak{a}_I sa partie compacte et soit $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ le sous-réseau de \mathfrak{a} formé des $X \in \mathfrak{a}$ tels que $\exp 2iX = 1$. Le réseau $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ engendre la partie déployée \mathfrak{a}_R de \mathfrak{a} . On note $\Gamma_{\mathfrak{a}}^*$ l'espace des formes linéaires μ sur \mathfrak{a}_R telles que, pour $X \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$ l'on ait $\mu(X) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Pour α une racine, on note H_α sa coracine. Soit $\mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$ un système de représentants de $\exp i\mathfrak{a} \backslash A$ dans A formé d'éléments y tels que $\varphi(y) \in H$. Soit $W_H(\mathfrak{a})$ le quotient du normalisateur de \mathfrak{a} dans H par $Z_H(\mathfrak{a})$. Pour $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$, on note $W_H^y(\mathfrak{a})$ l'ensemble des $h \in W_H(\mathfrak{a})$ tels que $h.y \in \exp i\mathfrak{a}.y$. Pour $h \in W_H^y(\mathfrak{a})$, on fixe $Y_h \in \mathfrak{a}$ tel que $h.y = \exp iY_h.y$. On a $2Y_h \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$. Soit $\gamma_{\mathfrak{a}}$ l'isomorphisme d'Harish-Chandra de $Z(\mathfrak{g})$ dans l'algèbre $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$ des invariants de l'algèbre symétrique de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ sous l'action du groupe de Weyl $W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$.

On fixe $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_I^*$, un élément $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$ et un système positif ψ de racines imaginaires de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. On notera \hat{A} l'ensemble de tels triplets (λ, y, ψ) . A ces données, on associe (théorème 5.3) une fonction orbitale $F(\lambda, y, \psi)$ sur \mathbb{X} , bornée sur \mathbb{X}_{reg} , propre pour le caractère $z \rightarrow \gamma_{\mathfrak{a}}(z)(i\lambda)$ telle que :

(i) si B est un sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} associé à la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{b} et $h\mathfrak{a}_R \subset \mathfrak{b}_R$ pour un certain $h \in H$, alors $F(\lambda, y, \psi)|_{B_{reg}} = 0$,

(ii) Soit $x \in A_{reg}$. Si $x \notin \exp i\mathfrak{a} W_H(\mathfrak{a}).y$, alors $F(\lambda, y, \psi)(x) = 0$. Si $x = \exp iX.y$ alors on a

$$(b_\psi F(\lambda, y, \psi))(x) = \xi_{\rho_\psi}(y) \sum_{w \in W_H^y(\mathfrak{a})} \varepsilon_I(w) e^{i\langle w\lambda, X+Y_w \rangle}$$

où b_ψ et $\xi_{\rho_\psi}(y)$ sont des signes (définis en 1.3) et $\varepsilon_I(w)$ est la signature imaginaire de w (défini en 5.2).

De plus, si pour toute racine réelle α de \mathfrak{a} , on a $\lambda(H_\alpha) \neq 0$, alors la fonction $F(\lambda, y, \psi)$ est uniquement déterminée par ces propriétés. La fonction $\lambda \rightarrow F(\lambda, y, \psi)$ dépend analytiquement de la variable de \mathfrak{a}_I^* .

Par un procédé d'induction (décrit dans le paragraphe 3), on ramène la construction des $F(\lambda, y, \psi)$ au cas où \mathfrak{h} est déployée (paragraphe 2 et paragraphe 4).

Supposons donc que \mathfrak{h} admet une sous-algèbre de Cartan déployée \mathfrak{a} . Dans ce cas, on a $\mathcal{W}_{\mathfrak{a}} = \{eH\}$, $\mathfrak{a}_I = \{0\}$ et $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ est un réseau de \mathfrak{a} . Soit $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$. La construction des fonctions orbitales $F(\mu)$ est analogue à la construction de la série discrète pour les groupes de Lie réductifs décrite par Harish-Chandra. Précisons ceci : on définit l'ensemble \mathbb{X}_{ell} (éléments elliptiques) des $x \in \mathbb{X}$ tels $Ad \varphi(x)$ n'ait que des valeurs propres propres de module 1. On a alors $\mathbb{X}_{ell} = H.A$ (proposition 4.8). De plus, il existe un ensemble fini F de A et pour chaque $y \in F$, un voisinage ouvert \mathcal{W}_y de y dans \mathbb{X} du type $HeXP i\mathcal{V}.y$ et \mathcal{V} contenu dans le centralisateur de $\varphi(y)$ dans \mathfrak{h} , tels que $\mathbb{X} = \cup_{y \in F} \mathcal{W}_y$ (proposition 4.9).

Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{reg}^*$, on définit la fonction $\Psi_{\lambda}^{\mathfrak{h}}$ sur \mathfrak{h}_{reg} de la manière suivante : soit $X \in \mathfrak{h}_{reg}$ et soit $\beta_{H.X}$ la mesure de Liouville de l'orbite $H.X$. On note $\hat{\beta}_{H.X}$ la transformée de Fourier de cette mesure et on pose $\Psi_{\lambda}^{\mathfrak{h}}(X) = \hat{\beta}_{H.X}(\lambda) |det(ad \lambda)_{/\mathfrak{h}^*/\mathfrak{a}^*}|^{1/2}$. D'après ([B4] lemme 4.1.1 et théorème 5.3.1), la fonction $\Psi_{\lambda}^{\mathfrak{h}}$ est l'unique fonction orbitale bornée sur \mathfrak{h}_{reg} , propre pour le caractère $z \rightarrow \gamma_{\mathfrak{a}}(z)(i\lambda)$ telle que, pour tout $X \in \mathfrak{a}$, l'on ait $\Psi_{\lambda}^{\mathfrak{h}}(X) = \sum_{w \in W_H(\mathfrak{a})} e^{i\langle w\lambda, X \rangle}$.

Soit $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$ régulier et soit $y \in F$. On fixe $X_y \in \mathfrak{a}$ tel que $exp 2iX_y = \varphi(y)$. Soit $x = heXP iX.y \in \mathcal{W}_y$. Les propriétés de \mathcal{W}_y permettent de définir la fonction orbitale F_{μ}^y sur \mathcal{W}_y par

$$F_{\mu}^y(x) = \sum_{w \in W_{H_y}(\mathfrak{a}) \setminus W_H(\mathfrak{a})} e^{i\langle w\mu, X_y \rangle} \Psi_{w\mu}^{\mathfrak{h}_y}(X) \quad (1)$$

où H_y est le centralisateur de $\varphi(y)$ dans H et \mathfrak{h}_y son algèbre de Lie.

On vérifie en utilisant un théorème d'unicité (théorème 4.11) que F_{μ}^y et F_{μ}^z coïncident sur $\mathcal{W}_y \cap \mathcal{W}_z$. Ceci permet de définir de manière licite $F(\mu)$ en posant, si $x \in \mathcal{W}_y$, $F(\mu)(x) = F_{\mu}^y(x)$. La fonction $F(\mu)$ vérifie bien les propriétés voulues.

On peut également définir les fonctions F_{μ}^y pour $\mu \in \mathfrak{a}_{reg}^*$ par le formule (1). Soit $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$. Soit Γ une composante connexe de \mathfrak{a}_{reg}^* telle que μ soit dans l'adhérence $\bar{\Gamma}$ de Γ . Dans ce cas, on montre que $\lim_{\lambda \rightarrow \mu, \lambda \in \Gamma} F_{\lambda}^y$ existe et définit une fonction orbitale $F_{\mu}^{y, \Gamma}$. En étudiant la dépendance en y des $F_{\mu}^{y, \Gamma}$, on montre que $F_{\mu}^{y, \Gamma}$ et $F_{\mu}^{z, \Gamma}$ coïncident sur $\mathcal{W}_y \cap \mathcal{W}_z$ si $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$ et ceci permet de définir $F(\mu)^{\Gamma}$ en posant, si $x \in \mathcal{W}_y$, $F(\mu)^{\Gamma}(x) = F_{\mu}^{y, \Gamma}(x)$. On note $C(\mu)$ l'ensemble des composantes connexes de \mathfrak{a}_{reg}^* telles que $\mu \in \bar{\Gamma}$. On pose alors

$$F(\mu) = \frac{1}{|C(\mu)|} \sum_{\Gamma \in C(\mu)} F(\mu)^{\Gamma}.$$

Soit A un sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} . A chaque $\xi = (\lambda, y, \psi) \in \hat{A}$ tel que, pour $\alpha \in \psi$, l'on ait $\lambda(H_{\alpha}) \neq 0$ (on notera alors $\xi \in \hat{A}_{I-reg}$), on peut également associer une fonction généralisée sphérique $\Theta(\xi)$ telle que, pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, l'on ait $z.\Theta(\xi) = \gamma_{\mathfrak{a}}(z)(i\lambda)\Theta(\xi)$ ([H6] théorème 6.1). D'après ([B3] théorème 8.2.2), l'application transposée de \mathcal{M} induit un isomorphisme du dual $I(\mathbb{X})'$ dans l'espace des distributions H -invariantes sur \mathbb{X} . Après

avoir fixé une mesure invariante dx sur \mathbb{X} , on associe donc à chaque $\Theta(\xi)$ un élément $\theta(\xi)$ de $I(\mathbb{X})'$. De plus, pour $\Phi \in I(\mathbb{X})$, la fonction $\lambda \rightarrow \sum_{w \in W_G(\mathfrak{a})} F(w\lambda, y, \psi) < \theta(w\lambda, y, \psi), \Phi >$ se prolonge analytiquement sur \mathfrak{a}_I^* ([H6] théorème 6.2). La croissance de ces fonctions est étudiée dans [H6] et ceci permet d'obtenir le résultat suivant (proposition 6.3) : soit $d_I \lambda$ une mesure de Lebesgue sur \mathfrak{a}_I^* . Alors, pour tout $\Phi \in I(\mathbb{X})$ et pour tout $x \in \mathbb{X}_{reg}$, la somme

$$\sum_{\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*} \int_{\mathfrak{a}_I^*} \sum_{w \in W_H(\mathfrak{a}) \setminus W_G(\mathfrak{a})} \sum_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} F(w(\mu + \lambda), y, \psi)(x) < \theta(-w(\mu + \lambda), y, \psi), \Phi > d_I \lambda = F_{\Phi}^{[A]}(x)$$

est convergente et ne dépend pas du choix de ψ . La fonction $F_{\Phi}^{[A]}$ ainsi définie est une fonction orbitale mais contrairement au cas des groupes (voir [B4]) ce n'est pas un élément de $I(\mathbb{X})$.

On établit alors la formule d'inversion (théorème 6.14) : pour $\Phi \in I(\mathbb{X})$, on a

$$\Phi = \sum_{A \in [Car \mathbb{X}]} c_A F_{\Phi}^{[A]}$$

où $[Car \mathbb{X}]$ désigne l'ensemble des classes modulo l'action à gauche de H de sous-ensembles de Cartan de \mathbb{X} et chaque c_A est une constante.

Indiquons les étapes de la preuve de cette formule. Pour un sous-ensemble de Cartan A et $U = A$ ou A_{reg} , on définit l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(U)$ de U et l'espace $\mathcal{S}(\hat{A})$ des transformées de Fourier des fonctions de $\mathcal{S}(A)$ (voir 6.5). Si $\Psi \in \mathcal{S}(\hat{A})$ alors Ψ est une fonction sur $\Gamma_{\mathfrak{a}}^* \times \mathfrak{a}_I^*$ vérifiant certaines conditions de croissance. On peut alors définir $\tilde{F}_{\Psi}^{[A]} = \sum_{\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*} \int_{\mathfrak{a}_I^*} F(\mu + \lambda, y, \psi) \Psi(\mu, \lambda) d_I \lambda$. C'est un élément de $I(\mathbb{X})^{\infty}$ et pour tout sous-ensemble de Cartan B , on a $\tilde{F}_{\Psi}^{[A]} /_{B_{reg}} \in \mathcal{S}(B_{reg})$ (lemme 6.7).

D'autre part, pour B un sous-ensemble de Cartan et $\xi = (\lambda, y, \psi) \in \hat{B}_{I-reg}$, l'intégrale $\int_{\mathbb{X}} \theta(\xi)(x) \tilde{F}_{\Psi}^{[A]}(x) dx = < \theta(\xi), \tilde{F}_{\Psi}^{[A]} >$ est convergente et vaut 0 si B n'est pas H -conjugué à A (proposition 6.12).

Ce résultat est le point clé de la preuve de la formule d'inversion. Pour le démontrer, on se ramène, en utilisant induction et restriction, au cas où la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{a} associée à A est déployée. Dans ce cas, on prouve que pour $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$ l'intégrale $\int_{\mathbb{X}} \theta(\xi)(x) F(\mu)(x) dx = < \theta(\xi), F(\mu) >$ converge et $< \theta(\xi), \tilde{F}_{\Psi}^{[A]} > = \sum_{\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*} < \theta(\xi), F(\mu) > \Psi(\mu)$. Bien que $F(\mu)$ ne soit pas dans $I(\mathbb{X})$, on a tout de même, pour $z \in Z(\mathfrak{g})$

$$\gamma_{\mathfrak{b}}(z)(i\lambda) < \theta(\xi), F(\mu) > = < z.\theta(\xi), F(\mu) > = < \theta(\xi), {}^t z.F(\mu) > = \gamma_{\mathfrak{a}}({}^t z)(i\mu) < \theta(\xi), F(\mu) >$$

où $z \rightarrow {}^t z$ est l'antiautomorphisme principal de $Z(\mathfrak{g})$. On en déduit que si B n'est pas H -conjugué à A alors $< \theta(\xi), F(\mu) > = 0$ (lemme 6.10).

Soit $k \in \mathbb{N}$. On note $Car_k(\mathbb{X})$ l'ensemble des sous-ensembles de Cartan A tels que $\dim \mathfrak{a}_R = k$ et $[Car_k(\mathbb{X})]$ l'ensemble des classes modulo H de $Car_k(\mathbb{X})$. Soit $I_k(\mathbb{X})^{\infty}$

l'ensemble des $\Phi \in I(\mathbb{X})^\infty$ telles que, pour tout $j > k$ et pour tout $A \in \text{Car}_j(\mathbb{X})$, l'on ait $\Phi|_{A_{reg}} = 0$. Soit $A \in \text{Car}_n(\mathbb{X})$. Si $\Phi \in I_n(\mathbb{X})^\infty$ vérifie $b_\psi \Phi \in \mathcal{S}(A)$, alors pour tout $\xi = (\lambda, y, \psi) \in \hat{A}_{I-reg}$, l'intégrale $\int_{\mathbb{X}} \theta(\xi) \Phi(x) dx = \langle \theta(\xi), \Phi \rangle$ converge et définit un élément Ψ_y de $\mathcal{S}(\hat{A})$. On peut alors comme précédemment définir $F_\Phi^{[A]}$. C'est à une constante multiplicative près $\sum_{y \in \mathcal{W}_a} \tilde{F}_{\Psi_y}^{[A]}$. C'est donc une fonction de $I(\mathbb{X})^\infty$ qui vérifie : si B est un sous-ensemble de Cartan non H -conjugué à A , alors, pour tout $\xi \in \hat{B}_{I-reg}$, on a $\langle \theta(\xi), F_\Phi^{[A]} \rangle = 0$. De plus, en utilisant la formule d'inversion de Fourier classique sur l'espace vectoriel \mathfrak{a} , on montre que, pour tout $a \in A_{reg}$, on a $F_\Phi^{[A]}(a) = c_A \Phi(a)$ (lemme 6.13).

Soit $\Phi \in I_n(\mathbb{X})$, on pose $\Phi_k = \Phi - \sum_{j \geq n-k} \sum_{A \in [\text{Car}_j \mathbb{X}]} c_A F_\Phi^{[A]}$. En utilisant les résultats précédents, on démontre par récurrence sur k que $\Phi_k \in I_{n-k-1}(\mathbb{X})^\infty$. Le cas $k = n$ donne la formule d'inversion.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$. En utilisant la formule limite d'Harish-Chandra sur les algèbres de Lie réductives, on prouve la formule limite suivante : soit \mathfrak{b} une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathfrak{h} . Soit P un système positif de racines et P_I les racines imaginaires de P . Pour un bon choix de P , on a (lemme 7.1),

$$\lim_{X \rightarrow 0} \partial \left(\prod_{\alpha \in P} H_\alpha \right) b_{P_I} \mathcal{M}(f)(Exp X) = cf(eH)$$

où c est une constante parfaitement déterminée. On montre que l'on peut dériver sous le signe somme dans la formule d'inversion. Soit A un sous-ensemble de Cartan. Si $(\lambda, y, \psi) \in \hat{A}$ avec $y \neq eH$, alors, par construction, la fonction $F(\lambda, y, \psi)$ est nulle au voisinage de eH et pour $X \in \mathfrak{b}_{reg}$, la fonction $F(\lambda, eH, \psi)(Exp X)$ s'exprime facilement en terme de transformée de Fourier $\hat{\beta}_{M.X}$ de l'orbite $M.X$ pour un certain sous-groupe M de H . Par la formule de Rossman, on a une expression explicite de $\hat{\beta}_{M.X}(Y)$ pour $Y \in \mathfrak{b}_{reg}$. Les propriétés de $\hat{\beta}_{M.X}$ (conditions de recollement) permettent de calculer $\partial(\prod_{\alpha \in P} H_\alpha) b_{P_I} F(\lambda, eH, \psi)(eH)$ (proposition 7.2). D'autre part, il existe une constante c_λ telles que les distributions $c_\lambda \Theta(\lambda, eH, \psi)$ soit de type positif ([D] théorème 3). On obtient ainsi la formule de Plancherel (théorème 7.4).

Je remercie A. Bouaziz pour ses nombreux conseils lors de ce travail.

Plan :

1 Notations et préliminaires	5
2 Fonctions orbitales	9
3 Restriction et induction de fonctions orbitales	11
4 Fonctions orbitales propres (cas déployé)	17
5 Fonctions orbitales propres (cas général)	26
6 Inversion des intégrales orbitales	30
7 Formule de Plancherel	44

1 Notations et préliminaires

Si M est une variété différentiable, on note $C^\infty(M)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur M , $\mathcal{D}(M)$ le sous-espace de $C^\infty(M)$ des fonctions à support compact et $\mathcal{D}(M)'$ l'espace des distributions sur M , c'est-à-dire le dual de $\mathcal{D}(M)$.

Si N est une partie de M et si f est une fonction sur M , on notera $f|_N$ ou f_N sa restriction à N .

Si X est un ensemble fini, on note $|X|$ son cardinal.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. On notera V^* son dual et $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié. Si V est un espace vectoriel topologique, on note V' son dual topologique.

Soit G un groupe de Lie réductif complexe connexe de groupe dérivé simplement connexe et d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soit H une forme réelle de G d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . On note σ la conjugaison de \mathfrak{g} relativement à \mathfrak{h} . Elle définit une involution du groupe G que l'on notera encore σ et H est l'ensemble des points de G fixés par σ . Soit $\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g}; \sigma(X) = -X\}$ de telle sorte que l'on ait $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$. On a alors $\mathfrak{q} = i\mathfrak{h}$. Soit \mathfrak{c} le centre de \mathfrak{h} .

Soit M un sous-groupe de G et U une partie de G ou de \mathfrak{g} . On note $Z_M(U)$ le centralisateur de U dans M et $N_M(U)$ le normalisateur de U dans M . On pose $W_M(U) = N_M(U)/Z_M(U)$.

On note e l'élément neutre de G .

Soit θ une involution de Cartan de \mathfrak{g} commutant à σ et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de \mathfrak{g} correspondante. Soit K le sous-groupe compact maximal de G formé des points de G fixés par θ .

On fixe sur \mathfrak{g} une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée, G -invariante κ qui coïncide avec la forme de Killing sur l'algèbre dérivée de \mathfrak{g} et telle que la forme $-\kappa(X, \theta(X))$ soit définie positive. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on pose alors $\|X\| = (-\kappa(X, \theta(X)))^{1/2}$. Ceci définit une norme sur \mathfrak{g} et donc également sur \mathfrak{g}^* par dualité.

Soit $\mathbb{X} = G/H$ et soit p la projection canonique de G sur \mathbb{X} . Soit φ l'application de \mathbb{X} dans G qui à $p(g)$ associe $g\sigma(g)^{-1}$. L'application φ est un isomorphisme sur son image.

Pour $x \in \mathbb{X}$, on note G_x le centralisateur de $\varphi(x)$ dans G . Soit \mathfrak{g}_x son algèbre de Lie. On pose $H_x = G_x \cap H$ et $\mathfrak{h}_x = \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{h}$.

Le groupe G agit par translation à gauche sur \mathbb{X} et on notera $g.x$ l'action de $g \in G$ sur $x \in \mathbb{X}$. On notera également pour $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$ l'action adjointe par $AdgX = g.X$.

On note exp l'application exponentielle de \mathfrak{g} dans G et soit Exp l'application de \mathfrak{h} dans G/H qui à X associe $p(exp iX)$. Soit J le jacobien de l'application Exp . On a, pour $X \in \mathfrak{h}$,

$$J(X) = \det \left(\begin{array}{c} sh \ iadX \\ iadX \end{array} \right)_{/\mathfrak{h}}$$

Soit $D_{\mathbb{X}}$ la fonction analytique sur \mathbb{X} définie par : si $x \in \mathbb{X}$ alors l'endomorphisme $1 + z - Ad\varphi(x)$ de \mathfrak{g} est \mathbb{C} -linéaire. On pose alors

$$\det_{\mathbb{C}}(1 + z - Ad\varphi(x)) = z^n D_{\mathbb{X}}(x) \text{ modulo } z^{n+1}$$

où $n = \text{rang}(\mathfrak{h})$.

Définition 1.1 *Un élément $x \in \mathbb{X}$ est dit semi-simple si $\varphi(x)$ est semi-simple dans G .*

Un élément x de \mathbb{X} est dit régulier si l'on a $D_{\mathbb{X}}(x) \neq 0$. Ceci est équivalent à dire que $\varphi(x)$ est régulier dans G . On note \mathbb{X}_{reg} l'ensemble des éléments réguliers de \mathbb{X} et si U est une partie de \mathbb{X} , on pose $U_{reg} = \mathbb{X}_{reg} \cap U$.

On appelle sous-espace de Cartan de \mathfrak{q} un sous-espace de \mathfrak{q} formé d'éléments semi-simples, abélien et maximal pour ces deux propriétés.

Comme $\mathfrak{q} = i\mathfrak{h}$, la multiplication par i induit une bijection de l'ensemble des sous-espaces de Cartan de \mathfrak{q} dans l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{h} , que l'on notera $Car(\mathfrak{h})$.

On notera \mathfrak{h}_{reg} l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de \mathfrak{h} et pour \mathfrak{s} une partie de \mathfrak{h} on pose $\mathfrak{s}_{reg} = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_{reg}$.

1.2 Pour $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$, on notera $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ (ou Δ quand il n'y aura pas d'ambiguïté) le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a} + i\mathfrak{a})$. Pour $\alpha \in \Delta$, on note H_{α} la coracine de α , \mathfrak{g}_{α} l'espace radiciel de \mathfrak{g} relatif à α et s_{α} la réflexion de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ relative à α .

On définit la partie compacte $\mathfrak{a}_I = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{k} + (\sum_{\alpha \in \Delta} i\mathbb{R}H_{\alpha}) \cap \mathfrak{a}$ et la partie déployée $\mathfrak{a}_R = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{p} + (\sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_{\alpha}) \cap \mathfrak{a}$ de \mathfrak{a} de telle sorte que l'on ait $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_I + \mathfrak{a}_R$.

Une racine α est dite réelle (respectivement imaginaire) si $\alpha(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{R}$ (respectivement $\alpha(\mathfrak{a}) \subset i\mathbb{R}$), ceci est équivalent à $H_{\alpha} \in \mathfrak{a}_R$ (respectivement $H_{\alpha} \in i\mathfrak{a}_I$). Une racine est dite complexe si elle n'est ni réelle ni imaginaire. On notera Δ_R (respectivement Δ_I et Δ_{CP}) l'ensemble des racines réelles (respectivement imaginaires et complexes) de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans \mathfrak{g} .

Soit Δ^+ un système positif de Δ . Pour $S \subset \Delta$, on pose $S^+ = S \cap \Delta^+$. L'ensemble Δ_I^+ sera appelé système positif de racines imaginaires. On posera $\rho_{\Delta^+} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $\rho = \rho_{\Delta^+}$.

Soit α une racine imaginaire de Δ . La racine α est dite compacte si $(\mathfrak{g}_{\alpha} + \mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathbb{C}H_{\alpha}) \cap \mathfrak{h}$ est isomorphe à $su(2)$ et elle est non compacte si $(\mathfrak{g}_{\alpha} + \mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathbb{C}H_{\alpha}) \cap \mathfrak{h}$ est isomorphe à $sl(2, \mathbb{R})$.

On note Δ_{Inc} l'ensemble des racines imaginaires non compactes de Δ .

Soit $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}$ tels que $\exp 2iX = 1$. C'est un réseau de \mathfrak{a}_R . Soit $\Gamma_{\mathfrak{a}}^*$ l'ensemble des $\mu \in \mathfrak{a}_R^*$ tels que, pour tout $X \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$, l'on ait $\mu(X) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Soit \mathfrak{a}_{I-reg}^* l'ensemble des $\mu \in \mathfrak{a}_I^*$ tels que, pour toute racine imaginaire α de Δ , l'on ait $\mu(H_\alpha) \neq 0$. On note $\Gamma_{\mathfrak{a} reg}^*$ l'ensemble des $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$ tels que, pour toute racine réelle α de \mathfrak{a} , l'on ait $\mu(H_\alpha) \neq 0$.

1.3 A la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{a} de \mathfrak{h} , on associe l'ensemble A formé des $x \in \mathbb{X}$ tels que $\varphi(x)$ centralise \mathfrak{a} et on l'appelle le sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} associé à \mathfrak{a} . On note $Car(\mathbb{X})$ l'ensemble des sous-ensembles de Cartan de \mathbb{X} .

On rappelle que tout élément régulier de \mathbb{X} appartient à un unique sous-ensemble de Cartan ([O.M] paragraphe 6 théorème 2).

On a ([H 2] lemme 2.3)

$$A = N_G(\mathfrak{a})/N_H(\mathfrak{a})$$

Soit $\mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$ un système de représentant de $exp\ i\mathfrak{a} \setminus A$ dans A formé d'éléments y tels que $\varphi(y) \in H$. On rappelle que dans ce cas chaque $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$ admet un représentant dans G_y ([H6] lemme 1.4). On a

$$A = \cup_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} exp\ i\mathfrak{a}.y$$

et $\mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$ est isomorphe à $W_G(\mathfrak{a})/W_H(\mathfrak{a})$. Soit $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$. On note $W_H^y(\mathfrak{a})$ l'ensemble des $h \in W_H(\mathfrak{a})$ tels que $h.y \in exp\ i\mathfrak{a}.y$. Pour $h \in W_H^y(\mathfrak{a})$, il existe donc $Y_h \in \mathfrak{a}$ tel que $h.y = exp\ iY_h.y$ et donc comme $\varphi(y) \in H$ on a $2Y_h \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$. Si Y' est un autre élément vérifiant cette propriété, il est facile de voir que $Y_h - Y' \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$. On vérifie facilement que $Y_h = hY_{h^{-1}} = -hY_{h^{-1}}$ modulo $\Gamma_{\mathfrak{a}}$.

Pour β un poids de \mathfrak{a} , on définit la fonction ξ_β sur A par : si $a \in A$ alors $\varphi(a) = expX$ avec $X \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. On pose $\xi_\beta(a) = e^{\beta(X)}$.

On notera A_{In-reg} l'ensemble des $x \in A$ tels que pour tout $\alpha \in \Delta_{Inc}$, l'on ait $\xi_\alpha(x) \neq 1$.

Pour $S \subset \Delta$, on pose

$$b_S = \prod_{\alpha \in S} \frac{(1 - \xi_{-\alpha})}{|1 - \xi_{-\alpha}|}$$

Soit $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. A $X \in \mathfrak{a}$, on associe l'opérateur différentiel $\partial(X)$ sur A défini par : si $x \in A$ et $f \in C^\infty(A)$, alors

$$\partial(X)f(x) = \frac{d}{dt}f(expitX.x)_{/t=0}$$

Pour $u \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, on note $\partial(u)$ l'opérateur différentiel sur A défini par u .

On définit l'ordre d'Hirai sur les classes modulo H de sous-ensembles de Cartan de \mathbb{X} de la manière suivante :

soit A et B deux sous-ensembles de Cartan de \mathbb{X} associés respectivement aux sous-algèbres de Cartan \mathfrak{a} et \mathfrak{b} . On note $[A] = \cup_{h \in H} h.A$.

On dit que $[A] \leq [B]$ si et seulement si il existe $h \in H$ tel que $(h.\mathfrak{a})_R \subset \mathfrak{b}_R$. Lorsque cette inclusion est stricte, on dit alors que $[A] < [B]$.

On notera $[Car\mathbb{X}]$ l'ensemble des classes modulo H de sous-ensembles de Cartan de \mathbb{X} .

2 Fonctions orbitales

On définit l'espace $I(\mathbb{X})^\infty$ des fonctions F qui sont H -invariantes et de classe C^∞ sur \mathbb{X}_{reg} et qui vérifient les trois propriétés suivantes :

$I_1(\mathbb{X})$: Pour tout $A \in Car(\mathbb{X})$, pour tout compact U de A et pour tout $u \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ alors $\sup_{x \in U \cap A_{reg}} |\partial(u).F/A_{reg}(x)| < \infty$,

$I_2(\mathbb{X})$: Pour tout $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$ associée à $A \in Car \mathbb{X}$ et pour tout système positif de racines imaginaires ψ de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ dans \mathfrak{g} , alors $b_\psi F/A_{reg}$ se prolonge de façon C^∞ sur l'ensemble des $x \in A$ tels que, pour toute racine imaginaire non compacte β de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ l'on ait $\xi_\beta(x) \neq 1$,

2.1 Soit $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$ associée à $A \in Car(\mathbb{X})$. Soit α une racine imaginaire non compacte de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$. Soit $\gamma \in A$ tel que $\xi_\alpha(\gamma) = 1$ et pour toute racine β de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ distincte de $\pm\alpha$, l'on ait $\xi_\beta(\gamma) \neq 1$. On choisit des vecteurs radiciels X_α et $X_{-\alpha}$ relatifs respectivement à α et $-\alpha$.

On pose $\mathfrak{a}_\alpha = \mathbb{R}i(X_\alpha - X_{-\alpha}) + Ker \alpha$. C'est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} . Soit $c_\alpha = exp -i\frac{\pi}{4}(X_\alpha + X_{-\alpha})$. L'élément c_α est appelé une transformée de Cayley. On a $c_\alpha.\mathfrak{a}_\mathbb{C} = \mathfrak{a}_\alpha \mathbb{C}$. Soit ψ un système positif de racines imaginaires de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ qui contient toute racine imaginaire β telle que $\beta(H_\alpha) > 0$. Soit ψ_α l'ensemble des racines de ψ orthogonales à α . C'est un système positif de racines imaginaires de $\mathfrak{a}_\alpha \mathbb{C}$.

$I_3(\mathbb{X})$: Avec les notations précédentes, pour tout $u \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$, on a

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0^+} \partial(u).(b_\psi F/A_{reg})(exp tH_\alpha.\gamma) - \lim_{t \rightarrow 0^-} \partial(u).(b_\psi F/A_{reg})(exp tH_\alpha.\gamma) \\ &= b_{\psi - \{\psi_\alpha \cup \{\alpha\}\}}(\gamma) d(\alpha, \gamma) \partial(c_\alpha.u).(b_{\psi_\alpha} F/A_\alpha)(\gamma) \end{aligned}$$

où $d(\alpha, \gamma) = 2$ si la réflexion relative à α se réalise dans H_γ et 1 sinon.

Remarques : 1) Il est facile de voir que $b_{\psi - \{\psi_\alpha \cup \{\alpha\}\}}(\gamma)$ vaut ± 1 et que ce signe ne dépend que de la composante connexe de A qui contient γ .

2) Le deuxième membre de l'égalité est bien défini en vertu de $I_2(\mathbb{X})$.

3) Soit $\Phi \in I(\mathbb{X})^\infty$ telle que, pour tout $[B] > [A]$, l'on ait $\Phi/B_{reg} = 0$. Par la propriété $I_3(\mathbb{X})$, la fonction $b_\psi \Phi/A_{reg}$ se prolonge de façon C^∞ sur A .

Dans la suite, on adoptera la notation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \partial(u).(b_\psi F/A_{reg})(exp tH_\alpha.\gamma) - \lim_{t \rightarrow 0^-} \partial(u).(b_\psi F/A_{reg})(exp tH_\alpha.\gamma) = [(b_\psi F/A_{reg})(\gamma)]_-$$

Un élément de $I(\mathbb{X})^\infty$ est appelé une fonction orbitale.

On munit $I(\mathbb{X})^\infty$ de la topologie définie par les semi-normes $p_{A,U,u}(f) = \left| \sup_{x \in U \cap A_{reg}} \partial(u).f/A_{reg}(x) \right|$

où $A \in Car(\mathbb{X})$, U est un compact de A et $u \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$. L'espace $I(\mathbb{X})^\infty$ est un espace de Fréchet.

On note $I(\mathbb{X})$ le sous-ensemble de $I(\mathbb{X})^\infty$ formé des fonctions F qui vérifient de plus la propriété suivante :

$I_4(\mathbb{X})$: pour tout sous-ensemble de Cartan A de \mathbb{X} , il existe un compact U de A tel que $f|_{A_{reg}}$ soit à support dans U .

On le munit de la topologie définie dans ([H4] paragraphe 2). C'est une limite inductive d'espaces de Fréchet.

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$. On définit l'intégrale orbitale $\mathcal{M}_H(f)$ (ou \mathcal{M} lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés) de f de la manière suivante : si $x \in \mathbb{X}_{reg}$ alors $\mathfrak{h}_x = \mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} . Soit dY la mesure de Lebesgue sur $[\mathfrak{a}, \mathfrak{h}]$ définie par la forme de Killing. Soit dh la mesure H -invariante sur $H/Z_H(\mathfrak{a})$ tangente à dY . On pose

$$\mathcal{M}(f)(x) = |D_{\mathbb{X}}(x)|^{1/2} \int_{H/Z_H(\mathfrak{a})} f(h.x) dh$$

Théorème 2.2 ([B3]Thm 8.2.2).- *L'application \mathcal{M} est continue et surjective de $\mathcal{D}(\mathbb{X})$ dans $I(\mathbb{X})$ et sa transposée ${}^t\mathcal{M}$ est bijective de $I(\mathbb{X})'$ sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{X})'^H$ des distributions H -invariantes sur \mathbb{X} .*

On dit qu'une partie fermée H -invariante est un compact modulo H si son intersection avec tout sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} est compacte.

On définit l'espace $C_{comp}^\infty(\mathbb{X})$ des fonctions f de classe C^∞ sur \mathbb{X} telles que l'intersection du support de f avec toute partie compacte modulo H soit un compact. Il est clair que l'application \mathcal{M} se prolonge à $C_{comp}^\infty(\mathbb{X})$.

Proposition 2.3 *L'espace $I(\mathbb{X})^\infty$ est l'image par \mathcal{M} de $C_{comp}^\infty(\mathbb{X})$.*

Démonstration: D'après ([B3] lemme 8.1.1) on peut construire un recouvrement de \mathbb{X} par une famille localement finie de bons voisinages $(V_i)_{i \in I}$ et une famille $(\chi_i)_{i \in I}$ de fonctions sur \mathbb{X} qui vérifient les propriétés suivantes :

- (i) pour tout $i \in I$, la fonction χ_i est H -invariante de support contenu dans V_i et telle que, pour tout $x \in V_i$, l'on ait $0 \leq \chi_i(x) \leq 1$,
- (ii) $\sum_{i \in I} \chi_i(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{X}$.

En particulier chaque χ_i est à support compact modulo H .

Soit $\Psi \in I(\mathbb{X})^\infty$. Soit $i \in I$. On a alors $\Psi\chi_i \in I(\mathbb{X})$. Par le théorème 2.2 il existe donc $f_i \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ telle que $\mathcal{M}(f_i) = \Psi\chi_i$. Soit $f = \sum_{i \in I} f_i$. Il est alors clair que $\mathcal{M}(f) = \Psi$. D'autre part, par le choix des V_i, χ_i , l'ensemble des supports des f_i forme une famille localement finie. Ceci assure que $f \in C_{comp}^\infty(\mathbb{X})$. ■

Soit $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ l'algèbre des opérateurs G -invariants sur \mathbb{X} . On rappelle que cette algèbre est isomorphe au centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} . Dans toute la suite, nous identifierons ces deux algèbres.

Soit $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{h})$. On notera $\gamma_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ (ou $\gamma_{\mathfrak{a}}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) l'isomorphisme d'Harish-Chandra de $Z(\mathfrak{g})$ dans l'algèbre $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$ des invariants de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ sous l'action de $W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$.

Pour $\Psi \in I(\mathbb{X})^{\infty}$ et $z \in Z(\mathfrak{g})$, on définit $z.\Psi$ de la manière suivante : soit $x \in \mathbb{X}_{reg}$ et soit A l'unique sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} contenant x . On pose alors

$$(z.\Psi)(x) = \partial(\gamma_{\mathfrak{a}}(z)).\Psi|_{A_{reg}}(x)$$

Lemme 2.4 *On a $z.\Psi \in I(\mathbb{X})^{\infty}$. De plus, l'action de $Z(\mathfrak{g})$ préserve $I(\mathbb{X})$.*

Démonstration: D'après ([Sa2] lemme 12.1), pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ et pour tout $A \in \text{Car}(\mathbb{X})$, on a $(z.\mathcal{M}(f))|_{A_{reg}} = \mathcal{M}(z.f)|_{A_{reg}}$. D'autre part, d'après ([B3] paragraphe 8 et corollaire 2.3.2), pour tout $x \in \mathbb{X}$, il existe une fonction χ_x , H -invariante et à support compact modulo H qui vaut 1 au voisinage de x . Les fonctions $z.\Psi$ et $z.(\Psi\chi_x)$ coïncident donc au voisinage de x et on a, par ce qui précède, $z.(\Psi\chi_x) \in I(\mathbb{X})$. Les propriétés caractérisant les fonctions orbitales étant de nature locale, on en déduit le lemme. ■

Soit $z \rightarrow^t z$ l'anti-automorphisme principal de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} . L'algèbre $Z(\mathfrak{g})$ agit sur $I(\mathbb{X})^{\infty}$ par $z.\theta(\Psi) = \theta(^t z.\Psi)$. L'application \mathcal{M} et sa transposée commutent à l'action de $Z(\mathfrak{g})$.

3 Restriction et induction de fonctions orbitales

Nous allons d'abord considérer la restriction de fonctions orbitales.

Soit $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{h})$. On note, comme en 1.2, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_R + \mathfrak{a}_I$ et on pose $L = Z_G(\mathfrak{a}_R)$. D'après ([H4] paragraphe 6), c'est un groupe réductif complexe connexe de groupe dérivé simplement connexe σ -stable et $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}$ est de même rang que \mathfrak{h} . On note $\mathbb{X}_L = L/L \cap H$.

Soit $\Psi \in I(\mathbb{X})^{\infty}$. Soit $B \in \text{Car}(\mathbb{X}_L)$ associé à la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{b} . Les racines imaginaires de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$ sont les mêmes dans \mathfrak{g} et dans \mathfrak{l} et de même type (compactes ou non compactes). Par conséquent, on peut définir l'ouvert B_{I-reg} de B comme étant l'ensemble des $x \in B$ tels que, pour toute racine imaginaire α de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$, l'on ait $\xi_{\alpha}(x) \neq 1$ sans faire référence à \mathbb{X} ou \mathbb{X}_L . Maintenant si $x \in B$ est un élément régulier de \mathbb{X}_L alors il appartient à B_{I-reg} . Par la propriété $I_2(\mathbb{X})$, la restriction de Ψ à $\mathbb{X}_{reg} \cap \mathbb{X}_L$ se prolonge donc en une fonction de classe C^{∞} sur \mathbb{X}_{Lreg} . On note $R_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_L}\Psi$ cette fonction.

Soit $P = LN$ un sous-groupe parabolique de G de sous-groupe de Lévi L et de radical unipotent N . Soit \mathfrak{n} l'algèbre de Lie de N . On suppose que P est σ -stable.

Soit dX une mesure de Lebesgue sur \mathfrak{h} et soit dx la mesure invariante sur \mathbb{X} tangente à dX . On écrit $\mathfrak{h} = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{h}/(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h})$. Soit dX_1 et dX_2 des mesures de Lebesgue respectivement sur $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}/(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h})$ telles que $dX = dX_1 \wedge dX_2$. Ces mesures définissent des mesures

invariantes $d\dot{l}$ et $d\dot{h}$ respectivement sur \mathbb{X}_L et $H/H \cap L$. Comme $\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ et que $\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ est isomorphe à $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$, on en déduit des mesures invariantes dn et dk respectivement sur $N \cap H$ et $K \cap H$ et une mesure quasi-invariante $d\dot{n}$ sur $N/N \cap H$.

Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ et $l \in \mathbb{X}_L$, on pose

$$i_P(f)(l) = |\det(\text{Ad}(l)_{/\mathfrak{n}})|^{1/2} \int_{N/N \cap H} \int_{K \cap H} f(kln) dk d\dot{n}$$

L'application i_P est une application continue de $\mathcal{D}(\mathbb{X})$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{X}_L)$ ([H3] paragraphe 2).

Lemme 3.1 *On rappelle que pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ (respectivement $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X}_L)$), on note \mathcal{M}_H (respectivement $\mathcal{M}_{H \cap L}$) l'intégrale orbitale de f sur \mathbb{X} (respectivement \mathbb{X}_L).*

(i) *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mathcal{M}_{H \cap L} \circ i_P = CR_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_L} \circ \mathcal{M}_H$$

(ii) *L'application $R_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_L}$ est une application continue de $I(\mathbb{X})^\infty$ dans $I(\mathbb{X}_L)^\infty$. Sa restriction à $I(\mathbb{X})$ est continue de $I(\mathbb{X})$ dans $I(\mathbb{X}_L)$.*

Démonstration: Avec les normalisations des mesures faites précédemment et d'après ([H3] paragraphe 2), pour tout $f \in \mathcal{D}(H/H \cap L)$, on a

$$\int_{H/H \cap L} f(h) d\dot{h} = \int_{K \cap H} \int_{N \cap H} f(kn) dn dk$$

et pour tout $l \in \mathbb{X}_L$ et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$, on a

$$\int_{N \cap H} f(nl) dn = 2^r |\det(\text{Ad } l_{/\mathfrak{p}})|^{1/2} |D_{\mathbb{X}}(l)|^{-1/2} |D_{\mathbb{X}_L}(l)|^{1/2} \int_{N/N \cap H} f(ln) d\dot{n}$$

où $r = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n}$.

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ et soit $x \in \mathbb{X}_{reg} \cap \mathbb{X}_L$. Soit $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}_x$. On a alors :

$$\begin{aligned} R_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_L} \circ \mathcal{M}_H(f)(x) &= |D_{\mathbb{X}}(x)|^{1/2} \int_{H/Z_H(\mathfrak{b})} f(h.x) dh \\ &= |D_{\mathbb{X}}(x)|^{1/2} \int_{H/H \cap L} \int_{H \cap L/Z_{H \cap L}(\mathfrak{b})} f(hlx) dl d\dot{h} \\ &= |D_{\mathbb{X}}(x)|^{1/2} \int_{K \cap H} \int_{N \cap H} \int_{H \cap L/Z_{H \cap L}(\mathfrak{b})} f(knlx) dl dn dk \\ &= 2^r |D_{\mathbb{X}_L}(x)|^{1/2} \int_{K \cap H} \int_{H \cap L/Z_{H \cap L}(\mathfrak{b})} |\det(\text{Ad } lx)_{\mathfrak{p}}|^{1/2} \int_{N/N \cap H} f(klxn) d\dot{n} dl dk \\ &= 2^r |D_{\mathbb{X}_L}(x)|^{1/2} \int_{H \cap L/Z_{H \cap L}(\mathfrak{b})} i_P(f)(lx) dl = 2^r \mathcal{M}_{L \cap H} \circ i_P(f)(x) \end{aligned}$$

On obtient donc la première assertion du lemme.

Soit $\Psi \in I(\mathbb{X})$. Par le théorème 2.2, il existe $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$ telle que $\Psi = \mathcal{M}_H(f)$. L'assertion (i) assure que $R_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_L} \Psi \in I(\mathbb{X}_L)$. On procède comme dans la démonstration du lemme 2.4 pour montrer que $R_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_L}$ envoie $I(\mathbb{X})^\infty$ dans $I(\mathbb{X}_L)^\infty$.

La continuité de $R_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_L}$ est immédiate par la définition des différentes topologies. \blacksquare

Soit $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h})$. L'inclusion $W_L(\mathfrak{b}_\mathbb{C}) \subset W_G(\mathfrak{b}_\mathbb{C})$ donne une inclusion $S(\mathfrak{b}_\mathbb{C})^{W_G(\mathfrak{b}_\mathbb{C})} \subset S(\mathfrak{b}_\mathbb{C})^{W_L(\mathfrak{b}_\mathbb{C})}$. On en déduit donc un homomorphisme d'algèbres continu $\gamma_{\mathfrak{g}/\mathfrak{l}}$ de $Z(\mathfrak{g})$ dans $Z(\mathfrak{l})$. Ainsi, pour tout $\Psi \in I(\mathbb{X})^\infty$ et tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a

$$R_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_L}(z \cdot \Psi) = \gamma_{\mathfrak{g}/\mathfrak{l}}(z) \cdot R_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_L}(\Psi)$$

Remarque : Soit Θ une distribution sphérique sur \mathbb{X}_L (c'est-à-dire une distribution $H \cap L$ -invariante sur \mathbb{X}_L propre pour les opérateurs de $Z(\mathfrak{l})$). Dans ([H3] théorème 2.1), on a défini l'induite $ind_{\mathbb{X}_L}^{\mathbb{X}} \Theta$ de Θ . C'est une distribution sphérique sur \mathbb{X} . Soit θ et $ind_{\mathbb{X}_L}^{\mathbb{X}} \theta$ les distributions sur respectivement $I(\mathbb{X}_L)$ et $I(\mathbb{X})$ correspondant à Θ et $ind_{\mathbb{X}_L}^{\mathbb{X}} \Theta$ par l'isomorphisme du théorème 2.2(ii). Il est facile de voir que l'on a

$$ind_{\mathbb{X}_L}^{\mathbb{X}} \theta = {}^t R_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_L} \theta$$

Nous allons maintenant décrire un procédé d'induction concernant les fonctions orbitales.

On fixe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{a} de \mathfrak{h} . On note, comme en 1.2, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_I + \mathfrak{a}_R$. Soit M le centralisateur de \mathfrak{a}_I dans G et soit \mathfrak{m} son algèbre de Lie. Le groupe M est réductif complexe connexe. Il est σ -stable et $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$ est de même rang que \mathfrak{h} . Soit M_1 son groupe dérivé et \mathfrak{m}_1 l'algèbre de Lie de M_1 . On a $\pi_1(M_1) = \text{Ker } \exp(2i\pi \cdot) / \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})} \mathbb{Z} H_\alpha$. Soit $X \in \mathfrak{m}_1$ tel que $\exp 2iX = 1$. Le groupe dérivé de G étant simplement connexe, on a

$$X \in \mathfrak{m}_1 \cap \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})} \mathbb{Z} H_\alpha$$

D'après ([Bou], Chap.6, paragraphe 1, proposition 28), on a

$$\mathfrak{m}_1 \cap \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})} \mathbb{Z} H_\alpha = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})} \mathbb{Z} H_\alpha$$

On en déduit donc que M_1 est simplement connexe.

On note $\mathbb{X}_M = M/M \cap H$.

Soit $X_0 \in \mathfrak{a}_I$ tel que $\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{g}}(X_0)$ et soit $\mathfrak{u} = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\mathbb{C}); i\alpha(X_0) > 0} \mathfrak{g}_\alpha$. Pour $x \in \mathbb{X}_M \cap \mathbb{X}_{reg}$, on pose

$$d_{\mathfrak{u}}(x) = \frac{|\det(1 - Ad \varphi(x)^{-1})_{/\mathfrak{u}}|}{\det(1 - Ad \varphi(x)^{-1})_{/\mathfrak{u}}}$$

Pour $x \in \mathbb{X}_{reg}$, on note $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_M}(x)$ l'ensemble des $h \in H$ tels que $h \cdot x \in \mathbb{X}_M$.

Lemme 3.2 Soit $x \in \mathbb{X}_{reg}$ et soit $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}_x$. On note B le sous-ensemble de Cartan associé à \mathfrak{b} . On a alors :

- (i) si $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}^M}(x)$, on a $h.\mathfrak{b} \in Car(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$,
- (ii) l'ensemble $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}^M}(x)$ ne dépend que de la composante connexe de B qui contient x ,
- (iii) l'ensemble $H \cap M \setminus \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}^M}(x)$ est fini.

Démonstration: si $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}^M}(x)$ alors l'élément $h\varphi(x)h^{-1}$ est un élément régulier de M et donc $Z_{\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}}(h\varphi(x)h^{-1})$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$ contenue dans $h.\mathfrak{b}$. Comme \mathfrak{h} et $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$ ont même rang, on en déduit que $h.\mathfrak{b} \in Car(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$.

Soit $u \in \mathcal{W}_{\mathfrak{b}}$ tel que $x \in exp\ i\mathfrak{b}.u$. Par ce qui précède, il est clair $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}^M}(x)$ si et seulement si $h.\mathfrak{b} \in Car(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$ et $h.u \in \mathbb{X}_M$.

L'assertion (iii) découle de ([B1] Remarque 7.2.3). ■

Si x est un élément semi-simple de \mathbb{X} et si B est un sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} contenant x associé à la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{b} , on notera $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}^M}(\mathfrak{b}, x)$ l'ensemble des $h \in H$ tels que $h.x \in \mathbb{X}_M$ et $h.\mathfrak{b} \in Car(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$.

Pour $F \in I(\mathbb{X}_M)^\infty$, on définit la fonction $P_{\mathbb{X}_M, u}^{\mathbb{X}} F$ sur \mathbb{X}_{reg} de la manière suivante : si $x \in \mathbb{X}_{reg}$ alors

$$P_{\mathbb{X}_M, u}^{\mathbb{X}} F(x) = \sum_{h \in M \cap H \setminus \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}^M}(x)} F(h.x) d_u(h.x)$$

Proposition 3.3 L'opérateur $P_{\mathbb{X}_M, u}^{\mathbb{X}}$ définit une application continue de $I(\mathbb{X}_M)^\infty$ dans $I(\mathbb{X})^\infty$. De plus, sa restriction à $I(\mathbb{X}_M)$ est continue de $I(\mathbb{X}_M)$ dans $I(\mathbb{X})$.

Démonstration: Soit $F \in I(\mathbb{X})^\infty$. Il est clair que $P_{\mathbb{X}_M, u}^{\mathbb{X}} F$ vérifie la propriété $I_1(\mathbb{X})$ et si de plus $F \in I(\mathbb{X})$, elle vérifie clairement $I_4(\mathbb{X})$.

Soit $\mathfrak{b} \in Car(\mathfrak{h})$ et soit B le sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} associé à \mathfrak{b} . On fixe un système positif ψ de racines imaginaires de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$ dans \mathfrak{g} .

Si \mathfrak{b} n'est pas H -conjuguée à une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$, alors la fonction $P_{\mathbb{X}_M, u}^{\mathbb{X}} F$ est nulle sur B_{reg} . Elle vérifie donc $I_2(\mathbb{X})$.

On suppose maintenant que $\mathfrak{b} \in Car(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$. On a donc $\mathfrak{a}_I \subset \mathfrak{b}_I$. On note alors $\psi_{\mathfrak{m}} = \psi \cap \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$. Soit $x \in B_{reg}$. On a alors

$$d_u(x) = \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})} \frac{|1 - \xi_{-\alpha}(x)|}{(1 - \xi_{-\alpha}(x))}$$

L'ensemble $\Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ coïncide avec l'ensemble des $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ telles que $i\alpha(X_0) > 0$. Comme $X_0 \in \mathfrak{a}_I$, toutes les racines prennent des valeurs imaginaires pures sur X_0 . On a donc $\Delta_R(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}) \cap \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}) = \emptyset$. Si α est une racine complexe de $\Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ alors il en est de même de $-\bar{\alpha}$. Dans ce cas, on a

$$(1 - \xi_{-\alpha}(x))(1 - \xi_{\bar{\alpha}}(x)) > 0$$

Finalement, on obtient

$$d_{\mathbf{u}}(x) = \prod_{\alpha \in \Delta_I(\mathbf{u}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})} \frac{|1 - \xi_{-\alpha}(x)|}{(1 - \xi_{-\alpha}(x))}$$

Par conséquent, on peut écrire $(b_{\psi}d_{\mathbf{u}})(x) = b_{\psi_{\mathfrak{m}}}\varepsilon(\mathbf{b})(x)$ avec

$$\varepsilon(\mathbf{b})(x) = \prod_{\alpha \in \psi - \psi_{\mathfrak{m}}} \frac{1 - \xi_{-\alpha}(x)}{|1 - \xi_{-\alpha}(x)|} \prod_{\alpha \in \Delta_I(\mathbf{u}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})} \frac{|1 - \xi_{-\alpha}(x)|}{1 - \xi_{-\alpha}(x)}$$

Soit $\alpha \in \psi - \psi_{\mathfrak{m}}$. On a soit $\alpha \in \Delta_I(\mathbf{u}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ soit $-\alpha \in \Delta_I(\mathbf{u}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$. On obtient ainsi $\varepsilon(\mathbf{b})(x) = \prod_{\alpha \in (\psi - \psi_{\mathfrak{m}}) \cap -\Delta_I(\mathbf{u}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})} \frac{-|\xi_{\alpha}(x)|}{\xi_{\alpha}(x)}$. On écrit $x = \exp iX.y$ avec $X \in \mathfrak{b}$ et $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{b}}$ et on a $\xi_{\alpha}(x) = e^{2i\alpha(X)}\xi_{\alpha}(y)$ et $\xi_{\alpha}(y) = \pm 1$. On a donc $\varepsilon(\mathbf{b})(x) = \prod_{\alpha \in (\psi - \psi_{\mathfrak{m}}) \cap -\Delta_I(\mathbf{u}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})} (-\xi_{\alpha}(y))$.

Donc $\varepsilon(\mathbf{b})(x)$ est un signe qui ne dépend que de la composante connexe de B qui contient x .

On obtient donc, si $x = \exp iX.y$ alors

$$(b_{\psi}P_{\mathbb{X}_M, \mathbf{u}}^{\mathbb{X}}F)(x) = \sum_{h \in M \cap H \setminus \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}M}(\mathfrak{b}, y)} \varepsilon(h.\mathbf{b})(h.y) b_{h.\psi_{\mathfrak{m}}}(h.x) F(h.x)$$

Comme pour $h \in H$, on a $h.(B_{In-reg}) = (h.B)_{In-reg}$, il est alors clair que $P_{\mathbb{X}_M, \mathbf{u}}^{\mathbb{X}}F$ vérifie la propriété $I_2(\mathbb{X})$.

Montrons la propriété $I_3(\mathbb{X})$. On reprend les notations de 2.1. Soit $x \in B$ semi-simple tel qu'il existe une racine imaginaire non compacte α de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ vérifiant $\xi_{\alpha}(x) = 1$ et pour toute racine $\beta \neq \pm\alpha$, l'on ait $\xi_{\beta}(x) \neq 1$.

On pose $x = \exp iX.y$ avec $X \in \mathfrak{b}$ et $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{b}}$. Comme $\xi_{\alpha}(x) = 1$ et que α est une racine imaginaire, on a donc $\xi_{\alpha}(y) = 1$ et donc $y \in B \cap B_{\alpha}$.

Par ce qui précède, pour tout $v \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$, on a

$$[\partial(v)(b_{\psi}P_{\mathbb{X}_M, \mathbf{u}}^{\mathbb{X}}F)(x)]_- = \sum_{h \in M \cap H \setminus \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}M}(\mathfrak{b}, y)} \varepsilon(h.\mathbf{b})(h.x) [\partial(h.v)(b_{(h.\psi)_{\mathfrak{m}}}F)(h.x)]_-$$

Soit $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}M}(\mathfrak{b}, y)$. Si $h.\alpha$ n'est pas une racine de $h.\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$ dans \mathfrak{m} alors la fonction $\partial(h.v)(b_{(h.\psi)_{\mathfrak{m}}}F)$ est continue au point $h.x$. Donc dans la somme précédente, ne sont à considérer que les $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}M}(\mathfrak{b}, y)$ tels que $h.\alpha$ soit une racine imaginaire non compacte de $h.\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$. Soit h un tel élément. Il est clair que dans ce cas on a $h.\mathfrak{b}_{\alpha} = \mathfrak{b}_{h.\alpha} \in \text{Car}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$ et donc $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}M}(\mathfrak{b}_{\alpha}, y)$.

Réciproquement si $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}M}(\mathfrak{b}_{\alpha}, y)$ alors $h.\mathfrak{b}_{\alpha} \in \text{Car}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$. La racine $c_{h.\alpha}h.\alpha$ est une racine réelle de $h.\mathfrak{b}_{\alpha}$ et toutes les racines réelles de $h.\mathfrak{b}_{\alpha}$ sont dans \mathfrak{m} . Par transformée de Cayley inverse, on en déduit que $h.\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$ et $h.\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$. On vient donc de prouver que l'application identité est une bijection de l'ensemble des $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}M}(\mathfrak{b}, y)$ tels que $h.\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ dans $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}M}(\mathfrak{b}_{\alpha}, y)$.

On obtient ainsi

$$[\partial(v)(b_{\psi}P_{\mathbb{X}_M, \mathbf{u}}^{\mathbb{X}}F)(x)]_-$$

$$= \sum_{h \in M \cap H \setminus \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_M}(\mathfrak{b}_\alpha, y)} \varepsilon(h.\mathfrak{b})(h.y) d(h.\alpha, h.x) b_{\psi_{\mathfrak{m}} - (\psi_{\mathfrak{m}, \alpha} \cup \{\alpha\})}(x) \partial(c_{h.\alpha}.h.v)(b_{(h.\psi)_{\mathfrak{m}, h.\alpha}} F / (h.B)_{h.\alpha})(h.x)$$

Il est clair que pour tout $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_M}(\mathfrak{b}_\alpha, y)$, l'on a $d(h.\alpha, h.x) = d(\alpha, x)$. D'autre part, soit $u \in H_x$ représentant la réflexion relative à $h.\alpha$ dans H . Comme $h.\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, h.\mathfrak{b})$, la restriction de $Ad(u)$ au centre de \mathfrak{m} , qui contient \mathfrak{b}_I , est l'identité. On a donc également $u \in H \cap M_x$. La constante $d(h.\alpha, h.x)$ est donc la même pour H et $M \cap H$.

Pour avoir le résultat voulu, il suffit donc de prouver que l'on a

$$\varepsilon(h.\mathfrak{b})(h.y) b_{\psi_{\mathfrak{m}} - (\psi_{\mathfrak{m}, \alpha} \cup \{\alpha\})}(x) = \varepsilon(h.\mathfrak{b}_\alpha)(h.y) b_{\psi - (\psi_\alpha \cup \{\alpha\})}(x)$$

Or, on a

$$\varepsilon(h.\mathfrak{b})(h.y) = \varepsilon(h.\mathfrak{b})(h.x) = \frac{b_{h.\psi - \{h.\psi\}_{\mathfrak{m}}}(h.x)}{b_{\Delta_I(u, h.\mathfrak{b}_\mathbb{C})}(h.x)}$$

Il faut donc prouver que l'on a

$$b_{\Delta_I(u, h.\mathfrak{b}_\mathbb{C})}(h.x) = b_{\Delta_I(u, h.\mathfrak{b}_{\alpha, \mathbb{C}})}(h.x)$$

et

$$b_{\psi_\alpha - \psi_{\mathfrak{m}, \alpha}}(x) b_{\psi - (\psi_\alpha \cup \{\alpha\})}(x) = b_{\psi - \psi_{\mathfrak{m}}}(x) b_{\psi_{\mathfrak{m}} - (\psi_{\mathfrak{m}, \alpha} \cup \{\alpha\})}(x)$$

Ces deux assertions sont immédiates.

La continuité de $P_{\mathbb{X}_M, u}^{\mathbb{X}}$ est claire. ■

Soit $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{m})$. On note $\gamma_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}} = \gamma_{\mathfrak{m}, \mathfrak{b}}^{-1} \circ \gamma_{\mathfrak{g}, \mathfrak{b}}$ l'homomorphisme de $Z(\mathfrak{g})$ dans $Z(\mathfrak{m})$. Il est alors clair que, pour tout $\Psi \in I(\mathbb{X}_M)^\infty$ et tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, l'on a

$$z.P_{\mathbb{X}_M, u}^{\mathbb{X}} \Psi = P_{\mathbb{X}_M, u}^{\mathbb{X}} (\gamma_{\mathfrak{g}, \mathfrak{m}}(z). \Psi)$$

Remarque : Soit $y \in \mathcal{W}_\alpha$. D'après ([H4] corollaire 1.7), il existe $X \in \mathfrak{a}$ et un ensemble \mathcal{S} formé de racines imaginaires non compactes deux à deux fortement orthogonales tels que, si g_α représente s_α dans G , alors on a $y = p(\exp iX \prod_{\alpha \in \mathcal{S}} g_\alpha)$. Par conséquent, l'élément y admet un représentant dans $M = Z_G(\mathfrak{a}_I)$ si et seulement si $y = eH$ et donc $\mathcal{W}_\alpha \cap \mathbb{X}_M = \{eH\}$.

Soit $\Psi \in I(\mathbb{X}_M)^\infty$. Par ce qui précède, si $x \in A_{reg} - \text{Exp } \mathfrak{a}_{reg}$ alors on a $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_M}(x) = \emptyset$ et donc, la restriction de $P_{\mathbb{X}_M, u}^{\mathbb{X}} \Psi$ à A_{reg} ne vit que sur $\text{Exp } \mathfrak{a}_{reg}$.

Soit $y \in \mathcal{W}_\alpha$. D'après ([O-V] 4 problem 10 et théorème 9), le groupe G_y est réductif complexe connexe. Il est facile de voir qu'il est σ -stable et de groupe dérivé simplement connexe ([H6] lemme 2.4). On note $\mathbb{X}_y = G_y/H_y$.

Soit $X_0 \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{g}_y = Z_{\mathfrak{g}}(X_0)$. On note $\mathfrak{v} = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}); i\alpha(X_0) > 0} \mathfrak{g}_{\alpha}$ et pour $x \in \mathbb{X}_y \cap \mathbb{X}_{reg}$, on pose

$$d_{\mathfrak{v}}(x) = \frac{| \det(1 - Ad(\varphi(x)^{-1})_{/\mathfrak{v}}) |}{\det(1 - Ad(\varphi(x)^{-1})_{/\mathfrak{v}})}$$

Pour $x \in \mathbb{X}_{reg}$, on note $\mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$ l'ensemble des $h \in H$ tels que $h.x \in \mathbb{X}_y$. Pour $F \in I(\mathbb{X}_y)^{\infty}$, on pose

$$P_{\mathbb{X}_y, \mathfrak{v}}^{\mathbb{X}} F(x) = \sum_{h \in H_y \setminus \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)} F(h.x) d_{\mathfrak{v}}(h.x)$$

Lemme 3.4 *L'application $P_{\mathbb{X}_y, \mathfrak{v}}^{\mathbb{X}}$ définit une application continue de $I(\mathbb{X}_y)^{\infty}$ dans $I(\mathbb{X})^{\infty}$ et sa restriction à $I(\mathbb{X}_y)$ est continue de $I(\mathbb{X}_y)$ dans $I(\mathbb{X})$.*

Démonstration: La démonstration de ce lemme est la même que celle de la proposition 3.3. ■

3.5 Pour $F \in I(\mathbb{X}_y)^{\infty}$, on peut définir la fonction F^{\sim} sur $\mathbb{X}_{y reg}$ par $F^{\sim}(x) = F(x.y)$. Il est clair que $F^{\sim} \in I(\mathbb{X}_y)^{\infty}$.

Pour $F \in I(\mathbb{X}_M)^{\infty}$, on pose alors

$$P_{\mathbb{X}_M, \mathfrak{u} \mathfrak{v}}^{\mathbb{X}, y} F = P_{\mathbb{X}_y, \mathfrak{v}}^{\mathbb{X}} (P_{\mathbb{X}_M, \mathfrak{u}}^{\mathbb{X}_y} F)^{\sim}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés sur le choix de \mathfrak{u} et \mathfrak{v} , on notera $P_{\mathbb{X}_M, \mathfrak{u} \mathfrak{v}}^{\mathbb{X}, y} = P_{\mathbb{X}_M}^{\mathbb{X}, y}$. Ceci définit donc une application continue de $I(\mathbb{X}_M)^{\infty}$ dans $I(\mathbb{X})^{\infty}$.

4 Fonctions orbitales propres (cas déployé)

Dans toute cette partie, on suppose que H est déployé et on fixe \mathfrak{a} une sous-algèbre de Cartan déployée de \mathfrak{h} . Dans ce cas, le réseau $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ est un réseau de \mathfrak{a} .

Théorème 4.1 *Soit $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$. Alors il existe une fonction orbitale $F(\mu) \in I(\mathbb{X})^{\infty}$ telle que :*

- (i) pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, alors $z.F(\mu) = \gamma_{\mathfrak{a}}(z)(i\mu)F(\mu)$,
- (ii) la fonction $F(\mu)$ est bornée sur \mathbb{X}_{reg} ,
- (iii) pour tout $X \in \mathfrak{a}$, on a

$$F(\mu)(X) = \sum_{w \in W_H(\mathfrak{a})} e^{i \langle w\mu, X \rangle}$$

De plus, si μ est régulier, alors la fonction $F(\mu)$ est déterminée de manière unique par ces trois propriétés.

La construction de la fonction $F(\mu)$ est analogue à celle de la série discrète faite par Harish-Chandra dans le cas du groupe. La suite de ce paragraphe consiste en cette construction.

Nous allons tout d'abord donner un recouvrement de \mathbb{X} par des voisinages ouverts d'éléments elliptiques.

Définition 4.2 *Un élément γ de \mathbb{X} est dit elliptique si $\varphi(\gamma)$ est elliptique dans G c'est-à-dire si $\varphi(\gamma)$ est semi-simple et toutes les valeurs propres de $Ad \varphi(\gamma)$ sont de module 1. On note \mathbb{X}_{ell} l'ensemble des éléments elliptiques de \mathbb{X} .*

Proposition 4.3 *([O-M] paragraphe 5 Prop.2) Soit $x \in \mathbb{X}$. Il existe un unique élément semi-simple x_s de \mathbb{X} et un unique élément nilpotent X_u de \mathfrak{h} tels que $Ad(\varphi(x_s)).X_u = X_u$ et $x = \exp(iX_u).x_s$. On appelle x_s la partie semi-simple de x et $x_u = \exp iX_u$ la partie unipotente de x . Une telle décomposition s'appelle la décomposition de Jordan de x .*

Soit $\gamma \in \mathbb{X}_{ell}$. Le groupe G_γ est réductif complexe connexe, σ -stable et de groupe dérivé simplement connexe (voir [H6] lemme 2.4). Soit \mathfrak{g}_γ son algèbre de Lie.

Soit U un voisinage ouvert de 0 dans le centre \mathfrak{c} de \mathfrak{h} et soit $\varepsilon > 0$.

On définit l'ouvert $\mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}$ comme étant l'ensemble des $X \in (U + [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) \cap \mathfrak{h}_\gamma$ tels que, pour toute valeur propre λ de adX (considéré comme endomorphisme de \mathfrak{h}), l'on ait $|\operatorname{Re}(\lambda)| < \varepsilon$

Soit \mathfrak{r} l'image de $1 - Ad \varphi(\gamma)$ de telle sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\gamma + \mathfrak{r}$. Soit $\mathbb{X}_\gamma = G_\gamma/H_\gamma$ et soit \mathbb{X}_γ l'ensemble des $x \in \mathbb{X}_\gamma$ tels que $\det(1 - Ad \varphi(x)\varphi(\gamma))_{/\mathfrak{r}} \neq 0$.

Lemme 4.4 *On peut choisir ε et U de telle sorte que :*

(i) *L'application Exp est difféomorphisme de $\mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}$ sur son image et on a*

$Exp \mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U} \subset \mathbb{X}_\gamma$,

(ii) *On a $x \in \exp i\mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}.\gamma$ si et seulement si la partie semi-simple de x appartient à $\exp i\mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}.\gamma$.*

Démonstration: On rappelle que le jacobien J de Exp de \mathfrak{h}_γ dans \mathbb{X}_γ , est donné par $J(X) = \det\left(\frac{sh iadX}{iadX}\right)_{\mathfrak{h}_\gamma}$. Donc pour $\varepsilon < \pi$ et pour U suffisamment petit, l'application Exp est un difféomorphisme sur son image.

Soit $x \in \exp \mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}$. On a $x \in \mathbb{X}_\gamma$ si et seulement si $\det(1 - Ad \varphi(x)\varphi(\gamma))_{/\mathfrak{r}} \neq 0$. Si ξ est une valeur propre de $Ad \varphi(\gamma)_{/\mathfrak{r}}$ alors on a $|\xi| = 1$ et $\xi \neq 1$. Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que si λ et μ sont deux réels avec $|\lambda| < 2\varepsilon_0$ alors pour tout ξ valeur propre de $Ad \varphi(\gamma)_{/\mathfrak{r}}$ on ait $|1 - \xi e^{i\lambda - \mu}| > 0$. Soit $Y \in \mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon_0,U}$. Par ce qui précède l'endomorphisme $Ad(\varphi(\gamma)\exp 2iY)_{/\mathfrak{r}}$ n'admet pas la valeur propre 1. On obtient donc $Exp \mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon_0,U} \subset \mathbb{X}_\gamma$ ce qui donne l'assertion (i).

On choisit ε et U comme précédemment. Soit $x \in \exp i\mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}.\gamma$. On écrit $x = \exp iY.\gamma$ avec $Y \in \mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}$. Soit Y_s la partie semi-simple de Y et Y_u sa partie nilpotente. On a

donc $Y_s \in \mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U}$. Si x_s désigne la partie semi-simple de x , on a $x_s = \exp iY_s \cdot \gamma$ et donc $x_s \in \exp i\mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U} \cdot \gamma$.

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{X}$ et soit x_s et x_u ses parties semi-simple et nilpotente. On suppose que $x_s \in \exp i\mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U} \cdot \gamma$. On peut donc écrire $x_s = \exp iX_s \cdot \gamma$ avec $X_s \in \mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U}$ et $x_u = \exp X_u$ avec $X_u \in \mathfrak{h}_\gamma$ nilpotent. Comme $\varphi(x_s)$ et $\varphi(x_u)$ commutent, on a $\exp(2i\text{Ad}(\varphi(x_u)).X_s) = \exp 2iX_s$. Comme $X_s \in \mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U}$ ceci implique, d'après (i) que $\text{Ad}(\varphi(x_u)).X_s = X_s$ ou encore $[X_u, X_s] = 0$. On obtient donc $x = \exp i(X_u + X_s) \cdot \gamma \in \exp i\mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U} \cdot \gamma$. ■

Lemme 4.5 *Soit x un élément semi-simple de \mathbb{X} .*

(i) *Il existe deux éléments uniques $x_e \in \mathbb{X}_{ell}$ et $X_h \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ semi-simple tels que $\text{Ad}(\varphi(x_e)).X_h = X_h$ et $x = \exp iX_h \cdot x_e$. On appelle alors x_e la partie elliptique de x .*

(ii) *Soit Y un élément semi-simple de $\mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U}$. Soit $Y = Y_I + Y_R$ sa décomposition relative à la décomposition de Cartan de \mathfrak{g} . Alors Y_I et Y_R sont dans \mathfrak{h}_γ et $Y_R \in \mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U}$. De plus, on a $((\exp iY) \cdot \gamma)_e = \exp iY_R \cdot \gamma$.*

Démonstration: Soit x un élément semi-simple de \mathbb{X} . Soit B un sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} contenant x et soit \mathfrak{b} la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} associée à B . Il existe alors $X \in \mathfrak{b}$ et $x_0 \in B \cap \mathbb{X}_{ell}$ tel que $x = \exp iX \cdot x_0$. On écrit $X = X_I + X_R \in \mathfrak{b}_I + \mathfrak{b}_R$ et donc $x = \exp iX_R \exp iX_I \cdot x_0$. Les éléments $X_h = X_I$ et $x_e = \exp iX_R \cdot x_0$ vérifient les propriétés de (i).

Maintenant, on a $\varphi(x) = \exp 2iX_h \varphi(x_e)$ et donc $\text{Ad} \varphi(x) = \exp 2i\text{ad}(X_h) \text{Ad} \varphi(x_e)$. Comme $X_h \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, l'unicité de la décomposition polaire des éléments de $\text{Ad}(G)$ assure l'unicité de X_h et donc de x_e .

L'assertion (ii) est immédiate par ce qui précède. ■

Lemme 4.6 *Pour ε et U suffisamment petit, on a :*

(i) *si $h \in H$ vérifie $h \exp i\mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U} \cdot \gamma \cap \exp i\mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U} \cdot \gamma \neq \emptyset$ alors $h \in H_\gamma$,*

(ii) *soit $\mathcal{W}_{\gamma, \varepsilon, U} = \cup_{h \in H} h \exp i\mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U} \cdot \gamma$. Alors $\mathcal{W}_{\gamma, \varepsilon, U}$ est un voisinage ouvert de γ dans \mathbb{X} .*

Démonstration: Soit x_1 et x_2 dans $\exp i\mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U} \cdot \gamma$ tels que $h \cdot x_1 = x_2$. D'après les deux lemmes précédents, on peut supposer que x_1 et x_2 sont elliptiques. Pour $j = 1$ ou 2 , il existe donc X_j dans $\mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U}$ tel que toutes les valeurs propres de $\text{ad} X_j$ soient réelles et $x_j = \exp iX_j \cdot \gamma$. Soit $\mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U}^0$ l'ensemble des $X \in (U + [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) \cap \mathfrak{h}_\gamma$ tels que toutes les valeurs propres de $\text{ad} X$ (considéré comme endomorphisme de \mathfrak{h}) soient de module strictement inférieur à ε . Il est clair que $X_j \in \mathcal{V}_{\gamma, \varepsilon, U}^0$.

Par ([V] partie II p 32 Prop. 11 (ii)), on en déduit que $h \in H_\gamma$ ce qui donne l'assertion (i).

D'après ([H1] lemme 2.9), l'application de $H \times' \mathbb{X}_\gamma$ dans \mathbb{X} qui à (h, x) associe $h \cdot x$ est submersive en tout point. L'assertion (ii) en découle. ■

On définit l'ensemble $\mathcal{E}(\mathbb{X})$ des ouverts Ω de \mathbb{X} vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (1) Ω est complètement invariant (c'est-à-dire Ω est H -invariant et contient la partie semi-simple de chacun de ses éléments),
- (2) si $y \in \Omega$ est semi-simple alors sa partie elliptique y_e est dans Ω et Ω contient tous les éléments semi-simples de partie elliptique y_e .

Proposition 4.7 *Soit $\gamma \in \mathbb{X}_{ell}$ et soit ε et U comme dans les lemmes précédents. On a alors $\mathcal{W}_{\gamma,\varepsilon,U} \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$. De plus si $\Omega \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$ et si $x \in \Omega \cap \mathbb{X}_{ell}$ alors il existe ε' et U' tels que $\mathcal{W}_{x,\varepsilon',U'} \subset \Omega$.*

Démonstration: Il est clair en utilisant le lemme 4.4 (ii) que $\mathcal{W}_{\gamma,\varepsilon,U}$ est complètement invariant. Soit y un élément semi-simple de $\exp i\mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}.\gamma$. Par le lemme 4.5, sa partie elliptique y_e est dans $\exp i\mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}.\gamma$.

Soit z un élément semi-simple de \mathbb{X} tel que $z_e = y_e$. On écrit $z = \exp iZ.z_e$ avec $Z \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ où Z et z_e sont comme dans (i) du lemme 4.5. Comme on a choisi ε et U de telle sorte que $\text{Exp } \mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U} \subset' \mathbb{X}_\gamma$, on a $Z \in \mathfrak{h}_\gamma$. Par hypothèse sur z , on a $z_e \in \exp i\mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}.\gamma$. On écrit $z_e = \exp iX.\gamma$ avec $X \in \mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}$ et toutes les valeurs propres de adX sont réelles.

La relation $Ad(z_e)Z = Z$ implique alors que $[X, Z] = 0$. On a donc $z = \exp i(Z + X).\gamma \in \exp i\mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}.\gamma$.

Les mêmes propriétés sont valables pour $\mathcal{W}_{\gamma,\varepsilon,U}$.

Soit maintenant $\Omega \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$ et si $x \in \Omega \cap \mathbb{X}_{ell}$. On peut choisir ε et U tels que $\exp i\mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}^0.x \subset \Omega$. Soit $Y \in \mathcal{V}_{\gamma,\varepsilon,U}$. Soit Y_s et Y_u ses parties semi-simple et nilpotente. Soit $Y_s = Y_{s,I} + Y_{s,R}$ la décomposition de Cartan de Y_s . On a alors $Y_{s,R} \in \mathcal{V}_{x,\varepsilon,U}^0$ et donc $(\exp iY_{s,R}.x) \in \Omega$. L'élément $y = \exp iY_s.x \in \Omega$ est semi-simple de partie elliptique $\exp iY_{s,R}.x$. Comme $\Omega \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$, on a donc $y \in \Omega$. D'autre part Ω est complètement invariant. Il existe donc ε' et U' tels que $\exp i\mathcal{V}_{y,\varepsilon',U'}^0.y \subset \Omega$. Il est clair que $Y_u \in \mathcal{V}_{y,\varepsilon',U'}^0$. On obtient ainsi $\exp iY.x = \exp iY_u.y \in \Omega$. ■

Proposition 4.8 *On a $\mathbb{X}_{ell} = H.\text{Exp } \mathfrak{a}$.*

Démonstration: Soit $x \in \mathbb{X}_{ell}$. Soit B un sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} contenant x et soit \mathfrak{b} la sous-algèbre de Cartan associée. On peut supposer que $\mathfrak{b}_R \subset \mathfrak{a}$. D'après ([H4] corollaire 1.7), il existe un ensemble ψ de racines imaginaires non compactes deux à deux fortement orthogonales de $\mathfrak{b}_\mathbb{C}$ et $X \in \mathfrak{b}$ tels que $\varphi(x) = \exp i(X + \sum_{\alpha \in \psi} \pi H_\alpha)$. Comme x est elliptique, on a $X \in \mathfrak{b}_R \subset \mathfrak{a}$. Soit $c_\psi = \prod_{\alpha \in \psi} c_\alpha$ la transformée de Cayley relative à ψ . On a alors $\exp i\pi \sum_{\alpha \in \psi} H_\alpha = \exp i\pi \sum_{\beta \in c_\psi.\psi} H_\beta$ et si $\beta \in c_\psi.\psi$ alors $H_\beta \in \mathfrak{a}$. On a donc bien $\varphi(x) \in \exp i\mathfrak{a}$. ■

Proposition 4.9 *Soit $\Omega \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$. Pour tout $y \in \text{Exp } \mathfrak{a} \cap \Omega$, on choisit ε et U tel que $\mathcal{W}_{y,\varepsilon,U} \subset \Omega$. Alors il existe un ensemble fini F de $\text{Exp } \mathfrak{a}$ tel que*

$$\Omega = \cup_{y \in F} \mathcal{W}_{y,\varepsilon,U}$$

Démonstration: Soit $y \in \text{Exp } \mathfrak{a}$ et soit ε et U tel que $\mathcal{W}_{y,\varepsilon,U} \subset \Omega$. Comme $\text{Exp } \mathfrak{a}$ est compact, il existe un ensemble fini F de $\text{Exp } \mathfrak{a}$ tel que

$$\Omega \cap \text{Exp } \mathfrak{a} \subset \cup_{y \in F} \mathcal{W}_{y,\varepsilon,U} \subset \Omega$$

On pose $\Omega_1 = \cup_{y \in F} \mathcal{W}_{y,\varepsilon,U}$. Pour montrer que $\Omega_1 = \Omega$, il suffit de prouver que Ω_1 contient tous les éléments semi-simples de Ω ([H2] lemme 2.12). Soit s un élément semi-simple de Ω . On a donc $s_e \in \Omega$ puisque $\Omega \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$. Par la proposition précédente, il existe $h \in H$ et $y \in \text{Exp } \mathfrak{a}$ tel que $s_e = h.y$. Par suite $y \in \Omega \cap \text{Exp } \mathfrak{a} \subset \Omega_1$ et donc $s \in \Omega_1$. On obtient donc le résultat voulu. ■

Lemme 4.10 Soit $y \in \text{Exp } \mathfrak{a}$ et $\varepsilon > 0$ et $U \subset \mathfrak{c}$ comme précédemment. On a alors :

- (i) $\text{Exp } \mathfrak{a} \cap \text{exp } i\mathcal{V}_{y,\varepsilon,U}.y = \text{exp } i(\mathfrak{a} \cap \mathcal{V}_{y,\varepsilon,U}).y$,
- (ii) $\text{Exp } \mathfrak{a} \cap \mathcal{W}_{y,\varepsilon,U} = \cup_{u \in N_H(\mathfrak{a})} u \text{exp } i(\mathfrak{a} \cap \mathcal{V}_{y,\varepsilon,U}).y$

Démonstration: Soit $\gamma \in (\text{Exp } \mathfrak{a})_{\text{reg}} \cap \text{exp } i\mathcal{V}_{y,\varepsilon,U}.y$. On écrit $\gamma = \text{exp } iX.y$ avec $X \in \mathcal{V}_{y,\varepsilon,U}$. Comme γ est régulier dans \mathbb{X} , l'élément X est régulier dans \mathfrak{g}_y . Par conséquent l'algèbre $Z_{\mathfrak{h}_y}(X)$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h}_y qui contient \mathfrak{a} . On a donc $X \in \mathfrak{a}$. On obtient alors facilement l'assertion (i).

Soit maintenant $\gamma \in \text{Exp } \mathfrak{a} \cap \mathcal{W}_{y,\varepsilon,U}$. On écrit alors $\gamma = h \text{exp } iY.y$ avec $h \in H$ et $Y \in \mathcal{V}_{y,\varepsilon,U}$. Comme y et γ sont elliptiques, il en est de même de $\text{Exp } Y$ et donc toutes les valeurs propres de $ad Y$ sont réelles. Il existe donc $u \in H_y$ et $X \in \mathfrak{a}$ tels que $Y = u.X$.

On note $x = hu$ et $\gamma' = \text{exp } iX.y$ de telle sorte que $\gamma = x\gamma'$. Il est clair que $x.\mathfrak{h}_{\gamma'} = \mathfrak{h}_\gamma$. On a donc $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_\gamma$ et $x.\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_\gamma$ et donc il existe $x' \in H_\gamma$ tel que $x'.x.\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

Maintenant, on a clairement $\gamma = x'\gamma'$ avec $\gamma' \in \text{exp } i(\mathfrak{a} \cap \mathcal{V}_{y,\varepsilon,U}).y$ et $x'.x \in N_H(\mathfrak{a})$. ■

Pour $\Omega \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$, on note $I(\Omega)^\infty$ l'espace des fonctions orbitales sur Ω .

Théorème 4.11 Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{\text{reg}}^*$. Soit $\Omega \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$. Si $F \in I(\Omega)^\infty$ vérifie

- (i) pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a $z.F = \gamma_{\mathfrak{a}}(z)(i\lambda)F$,
- (ii) F est bornée sur Ω_{reg} ,
- (iii) F est nulle sur A_{reg} .

Alors la fonction F est identiquement nulle sur Ω_{reg} .

Démonstration: Soit $F \in I(\Omega)^\infty$ vérifiant les assertions (i), (ii) et (iii). Supposons que F soit non nulle. Soit B un sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} associé à la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{b} et vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) $F|_{B_{\text{reg}}} \neq 0$,
- (2) $\dim \mathfrak{b}_R$ est maximale parmi les $\dim \mathfrak{b}'_R$ telles que si B' est le sous-ensemble de Cartan associé à \mathfrak{b}' alors $F|_{B'_{\text{reg}}} \neq 0$.

Soit Δ un système positif de racines imaginaires de $\mathfrak{b}_\mathbb{C}$ dans \mathfrak{g} . D'après $I_3(\Omega)$ et (2), la fonction $b_\Delta F|_B$ se prolonge de façon C^∞ sur $B \cap \Omega$.

On fixe $x \in G$ tel que $x.\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$. Par l'équation différentielle (i), pour tout $w \in W_G(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ et pour tout $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{b}}$, il existe des constantes $c(y, w)$ telles que pour tout $X \in \mathfrak{b}$ vérifiant $\exp iX.y \in \Omega$ alors on a

$$(b_{\Delta}F)(\exp iX.y) = \sum_{w \in W_G(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})} c(y, w) e^{i\langle wx.\lambda, X \rangle}$$

Comme $b_{\Delta}F/B$ est non nulle, il existe $w \in W_G(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ et $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{b}}$ tels que $c(y, w) \neq 0$.

Comme la fonction F est bornée, pour tout $X \in \mathfrak{b}$ tel que $\exp iX.y \in \Omega$, on a $\text{Im} \langle wx.\lambda, X \rangle \geq 0$. Or, il est clair que pour tout $X \in \mathfrak{b}_I$ on a $\exp iX.y \in \Omega$. On en déduit donc que pour tout $X \in \mathfrak{b}_I$ on a $\text{Re}(i \langle wx.\lambda, X \rangle) = 0$. Par suite, l'élément $iw.x.\lambda$ ne prend que des valeurs imaginaires pures sur \mathfrak{b}_I . D'après ([B4] lemme 5.1.2) ceci implique que $\dim \mathfrak{b}_R \geq \dim \mathfrak{a}$ et donc les algèbres \mathfrak{b} et \mathfrak{a} seraient H -conjuguées. Ceci est contradictoire avec l'hypothèse (iii) puisque F est H -invariante. ■

Construction de la fonction $F(\mu)$.

Nous rappelons tout d'abord certains résultats de A. Bouaziz.

Soit $I(\mathfrak{h})^{\infty}$ l'espace des fonctions orbitales sur \mathfrak{h} ([B2] paragraphe 3.2). Soit $Y \in \mathfrak{h}_{reg}$. On note $\beta_{H.Y}$ la mesure de Liouville de l'orbite $H.Y$ et soit $\hat{\beta}_{H.Y}$ la transformée de Fourier de cette mesure. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{reg}^*$. Pour $X \in \mathfrak{h}_{reg}$, on pose

$$\Psi_{\lambda}^{\mathfrak{h}}(X) = \hat{\beta}_{H.X}(\lambda) | \det(ad \lambda)_{\mathfrak{h}^*/\mathfrak{a}^*} |^{1/2}$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 4.12 ([B4] lemme 4.1.1 et théorème 5.3.1) *Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{reg}^*$. Alors la fonction $\Psi_{\lambda}^{\mathfrak{h}}$ est l'unique élément de $I(\mathfrak{h})^{\infty}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

- (i) *pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$ alors on a $z.\Psi_{\lambda}^{\mathfrak{h}} = \gamma_{\mathfrak{a}}(z)(i\lambda)\Psi_{\lambda}^{\mathfrak{h}}$,*
- (ii) *la fonction $\Psi_{\lambda}^{\mathfrak{h}}$ est bornée sur \mathfrak{h}_{reg} ,*
- (iii) *pour tout $X \in \mathfrak{a}$, on a $\Psi_{\lambda}^{\mathfrak{h}}(X) = \sum_{w \in W_H(\mathfrak{a})} e^{i\langle w\lambda, X \rangle}$.*

Soit $\Omega \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$. Soit $\mu \in (\Gamma_{\mathfrak{a}}^*)_{reg}$. D'après la proposition 4.9, il existe un ensemble fini F de $\text{Exp } \mathfrak{a}$ et pour tout $y \in F$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert U de 0 dans le centre de \mathfrak{h} tels que l'on ait

$$\Omega = \cup_{y \in F} \mathcal{W}_{y, \varepsilon, U}$$

Soit $y \in F$. Soit $X_y \in \mathfrak{a}$ tel que $\varphi(y) = \exp 2iX_y$. Comme $\mu \in (\Gamma_{\mathfrak{a}}^*)_{reg}$, pour tout $w \in W_G(\mathfrak{a})$ le scalaire $e^{i\langle w\mu, X_y \rangle}$ ne dépend pas du choix de X_y tel que $\varphi(y) = \exp 2iX_y$. On définit alors la fonction F_{μ}^y sur $(\mathcal{W}_{y, \varepsilon, U})_{reg}$ en posant

$$F_{\mu}^y(\exp iX.y) = \sum_{w \in W_{H_y}(\mathfrak{a}) \setminus W_H(\mathfrak{a})} e^{i\langle w\mu, X_y \rangle} \Psi_{w\mu}^{\mathfrak{h}_y}(X)$$

Cette définition est licite d'après le lemme 4.6 (i). D'après ([B3] lemme 8.2.1), la fonction F_μ^y est une fonction orbitale sur $(\mathcal{W}_{y,\varepsilon,U})$. D'après le lemme 4.10, pour $x = \text{Exp } X \in \text{Exp } \mathfrak{a} \cap (\mathcal{W}_{y,\varepsilon,U})_{reg}$, il existe $u \in W_H(\mathfrak{a})$ et $X' \in \mathfrak{a} \cap \mathcal{V}_{y,\varepsilon,U}$ tel que $x = u \exp iX'.y$. On a alors

$$\begin{aligned} F_\mu^y(x) &= \sum_{w \in W_{H_y}(\mathfrak{a}) \setminus W_H(\mathfrak{a})} e^{i\langle w\mu, X_y \rangle} \sum_{v \in W_{H_y}(\mathfrak{a})} e^{i\langle vw\mu, X' \rangle} \\ &= \sum_{w \in W_H(\mathfrak{a})} e^{i\langle w\mu, X' + X_y \rangle} = \sum_{w \in W_H(\mathfrak{a})} e^{i\langle w\mu, X \rangle} \end{aligned}$$

Il est alors clair que la fonction F_μ^y vérifie les assertions du théorème 4.1 sur $\mathcal{W}_{y,\varepsilon,U}$. Soit maintenant z un autre élément de F . Par ce qui précède, pour tout $x \in \text{Exp } \mathfrak{a}_{reg} \cap \mathcal{W}_{y,\varepsilon,U} \cap \mathcal{W}_{z,\varepsilon',U'}$, on a

$$F_\mu^y(x) = F_\mu^z(x)$$

et donc par le théorème d'unicité 4.11, les fonctions F_μ^y et F_μ^z coïncident sur $\mathcal{W}_{y,\varepsilon,U} \cap \mathcal{W}_{z,\varepsilon',U'}$.

Par conséquent, on peut définir de manière licite la fonction $F(\mu)$ sur Ω en posant, si $x \in \mathcal{W}_{y,\varepsilon,U}$, alors $F(\mu)(x) = F_\mu^y(x)$.

Par ce qui précède, la fonction $F(\mu)$ vérifie les propriétés du théorème 4.1. Ce théorème est donc prouvé pour $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}_{reg}}^*$.

Soit $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*$ et soit Γ une composante connexe de \mathfrak{a}_{reg}^* telle que λ_0 soit dans l'adhérence $\bar{\Gamma}$ de Γ .

Soit $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{h})$ et soit $x \in G$ tel que $x.\mathfrak{b}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. Pour toute composante connexe \mathcal{C} de \mathfrak{b}_{reg} , il existe des constantes $c(w, \Gamma, \mathcal{C})$ telles que, pour tout $X \in \mathcal{C}$ et pour tout $\lambda \in \Gamma$, l'on ait :

$$\Psi_\lambda^{\mathfrak{h}}(X) = \sum_{w \in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} c(w, \Gamma, \mathcal{C}) e^{i\langle wx, X, \lambda \rangle}$$

On peut donc définir la fonction $\Psi_{\lambda_0}^{\mathfrak{h}, \Gamma}$ sur \mathfrak{h}_{reg} par

$$\Psi_{\lambda_0}^{\mathfrak{h}, \Gamma}(X) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0, \lambda \in \Gamma} \Psi_\lambda^{\mathfrak{h}}(X)$$

Comme les propriétés caractérisant les fonctions orbitales se traduisent par des relations entre les constantes $d(w, \Gamma, \mathcal{C})$, la fonction $\Psi_{\lambda_0}^{\mathfrak{h}, \Gamma}$ ainsi définie est un élément de $I(\mathfrak{h})^\infty$.

Maintenant, il existe une unique composante connexe Γ_y de \mathfrak{a}_{reg}^* dans \mathfrak{h}_y^* telle que $\Gamma \subset \Gamma_y$. On pose alors, pour $\text{hexp } iX.y \in \mathcal{W}_{y,\varepsilon,U}$,

$$F_{\lambda_0}^{y, \Gamma}(\text{hexp } iX.y) = \sum_{w \in W_{H_y}(\mathfrak{a}) \setminus W_H(\mathfrak{a})} e^{i\langle w\lambda_0, X_y \rangle} \Psi_{w\lambda_0}^{\mathfrak{h}_y, w.\Gamma_y}(X)$$

On a donc

$$F_{\lambda_0}^{y, \Gamma} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0, \lambda \in \Gamma} F_\lambda^y$$

Ceci détermine uniquement la fonction $F_{\lambda_0}^{y,\Gamma}$ sur $\mathcal{W}_{y,\varepsilon,U}$. De plus, on a $F_{\lambda_0}^{y,\Gamma} \in I(\mathcal{W}_{y,\varepsilon,U})^\infty$ (car $\Psi_{w\lambda_0}^{h_y,w,\Gamma_y} \in I(\mathfrak{h}_y)^\infty$) et elle vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème 4.1 vue son expression en fonction de $\Psi_{w\lambda_0}^{h_y,w,\Gamma_y}$.

Dans toute la suite, on fixe $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$ et Γ une composante connexe de \mathfrak{a}_{reg}^* telle que $\mu \in \bar{\Gamma}$. Pour $y \in \text{Exp } \mathfrak{a}$, on fixe $X_y \in \mathfrak{a}$ tel que $y = \text{Exp } X_y$. Pour un tel y , on fixe un voisinage U de 0 dans \mathfrak{c} et $\varepsilon > 0$ tels que $\mathcal{V}_{y,\varepsilon,U}$ vérifient les propriétés des lemmes précédents. Pour simplifier les notations, on pose $\mathcal{V}_y = \mathcal{V}_{y,\varepsilon,U}$ et $\mathcal{W}_y = \text{Hexp } i\mathcal{V}_{y,\varepsilon,U} \cdot y$.

Nous allons étudier la dépendance en y des fonctions F_λ^y pour $\lambda \in \Gamma$.

Soit $u \in W_H(\mathfrak{a})$. Il est clair que $\mathcal{W}_{uy} = \mathcal{W}_y$. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{reg}^*$. Soit $x = \text{Exp } X \in \text{Exp } \mathfrak{a} \cap \mathcal{W}_y$. On peut donc écrire $x = \text{hexp } iX'.y$ avec $h \in W_H(\mathfrak{a})$ et $X' \in \mathfrak{a} \cap \mathcal{V}_y$. On a alors

$$\begin{aligned} F_\lambda^{uy}(x) &= F_\lambda^{uy}(hu^{-1}\text{exp } iuX'.uy) = \\ &= \sum_{w \in W_{Huy}(\mathfrak{a}) \setminus W_H(\mathfrak{a})} e^{i\langle w\lambda, uX_y \rangle} \Psi_{w,\lambda}^{h_{uy}}(uX') \\ &= \sum_{w \in W_H(\mathfrak{a})} e^{i\langle w\lambda, X_y + X' \rangle} = F_\lambda^y(x) \end{aligned}$$

Par le théorème d'unicité 4.11 sur \mathcal{W}_y , on en déduit que $F_\lambda^y = F_\lambda^{uy}$. Par conséquent, on obtient :

$$F_\mu^{y,\Gamma} = F_\mu^{uy,\Gamma}$$

Soit $Y \in \mathfrak{a} \cap \mathcal{V}_y$ et soit $\bar{y} = \text{exp } iY.y$. Comme \mathcal{V}_y vérifie la propriété (i) du lemme 4.4, l'espace $\mathfrak{h}_{\bar{y}}$ est formé des $X \in \mathfrak{h}_y$ tels que $[X, Y] = 0$. Soit $Y_{\mathfrak{c}} \in \mathfrak{c}$ et $Y_1 \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ tels que $Y = Y_{\mathfrak{c}} + Y_1$. Soit \bar{U} un voisinage ouvert de 0 dans \mathfrak{c} tel que $\bar{U} + Y_{\mathfrak{c}} \subset U$. D'autre part, on fixe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que pour toute racine α de \mathfrak{a} l'on ait $\bar{\varepsilon} + \alpha(Y) < \varepsilon$. Quitte à réduire \bar{U} et $\bar{\varepsilon}$, on peut supposer que $\mathcal{V}_{\bar{y},\bar{U},\bar{\varepsilon}}$ vérifient les propriétés des lemmes précédents. Il est également clair que l'on a $\mathcal{V}_{\bar{y}} + Y \subset \mathcal{V}_y$ et donc $\mathcal{W}_{\bar{y}} \subset \mathcal{W}_y$. De même que précédemment, pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{reg}^*$, le théorème d'unicité et un simple calcul assurent que l'on a

$$F_\lambda^y = F_\lambda^{\bar{y}}$$

sur $\mathcal{W}_{\bar{y}}$ et donc, on en déduit que :

$$F_\mu^{y,\Gamma} = F_\mu^{\bar{y},\Gamma}$$

sur $\mathcal{W}_{\bar{y}}$.

Montrons maintenant que l'on a $F_\mu^{y,\Gamma} = F_\mu^{z,\Gamma}$ sur $\Omega = \mathcal{W}_y \cap \mathcal{W}_z$. Pour $\gamma \in \Omega \cap \text{Exp } \mathfrak{a}$, il existe $\mathcal{W}_\gamma \subset \Omega$ et Ω est recouvert par un nombre fini de tels \mathcal{W}_γ d'après la proposition 4.9. Il suffit donc de prouver que pour tout $\gamma \in \Omega \cap \text{Exp } \mathfrak{a}$, l'on a $F_\mu^{y,\Gamma} = F_\mu^{z,\Gamma}$ sur \mathcal{W}_γ . On va montrer que $F_\mu^{y,\Gamma} = F_\mu^{\gamma,\Gamma}$ sur \mathcal{W}_γ . Le même raisonnement appliqué à $F_\mu^{z,\Gamma}$ donnera le résultat voulu.

Soit $\gamma \in \text{Exp } \mathfrak{a} \cap \mathcal{W}_y$. Il existe alors $u \in W_H(\mathfrak{a})$ et $Y \in \mathfrak{a}$ tel que $\gamma = u \exp iY.y$. Par ce qui précède, on a sur \mathcal{W}_γ

$$F_\mu^{\gamma, \Gamma} = F_\mu^{u \exp iY.y, \Gamma} = F_\mu^{y, \Gamma}$$

On peut donc définir de manière licite la fonction $F(\mu)^\Gamma$ par

$$F(\mu)^\Gamma_{/\mathcal{W}_y} = F_\mu^{y, \Gamma}$$

Comme les fonctions $F_\mu^{y, \Gamma}$ vérifient les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème 4.1 sur chaque \mathcal{W}_y et que F est fini, la fonction $F(\mu)^\Gamma$ vérifie ces mêmes propriétés sur \mathbb{X} .

Notons $C(\mu)$ l'ensemble des composantes connexes Γ de \mathfrak{a}_{reg}^* telles que $\mu \in \bar{\Gamma}$. On pose alors

$$F(\mu) = \frac{1}{|C(\mu)|} \sum_{\Gamma \in C(\mu)} F(\mu)^\Gamma$$

La fonction orbitale $F(\mu)$ vérifie les propriétés du théorème 4.1 ce qui achève la démonstration de ce théorème.

4.13 Remarque : Soit $B \in \text{Car } \mathbb{X}$. Soit $x \in G$ tel que $x.\mathfrak{a}_\mathbb{C} = \mathfrak{b}_\mathbb{C}$. Soit \mathcal{C} une composante connexe de $B_{In\ reg}$. Soit Σ un système positif de racines imaginaires de $\mathfrak{b}_\mathbb{C}$. On peut alors écrire pour tout $\gamma = \exp iX.z \in \mathcal{C}$

$$(b_\Sigma F(\mu))(\gamma) = \sum_{w \in W_G(\mathfrak{b}_\mathbb{C})} d_z(w, \mu, \mathcal{C}) e^{i\langle wx\lambda, X \rangle}$$

Il existe alors une constante $C > 0$ telle que pour tout $\mu \in \Gamma_\mathfrak{a}^*$, pour tout $w \in W_G(\mathfrak{b}_\mathbb{C})$ et toute composante connexe \mathcal{C} de $B_{In\ reg}$, l'on ait

$$|d_z(w, \mu, \mathcal{C})| < C \quad (*)$$

En effet, si $z \in \mathcal{W}_\mathfrak{b}$, avec les notations précédentes, il existe $y \in F$ tel que $z \in \mathcal{W}_{y, \varepsilon, U}$. On peut donc écrire $z = h \exp iZ.y$ avec $h \in N_H(\mathfrak{b})$ et $Z \in \mathfrak{b} \cap \mathcal{V}_{y, \varepsilon, U}$ (ceci se démontre comme le lemme 4.10). Ainsi pour montrer (*), on peut supposer $z = y \in F$ et $X \in \mathfrak{b} \cap \mathcal{V}_{y, \varepsilon, U}$.

On suppose tout d'abord que μ est régulier. Par définition de $F(\mu)$, on a alors

$$(b_\Sigma F(\mu))(\exp iX.y) = \sum_{w \in W_{H_y}(\mathfrak{a}) \setminus W_H(\mathfrak{a})} e^{i\langle w\mu, X_y \rangle} \Psi_{w\mu}^{\mathfrak{h}_y}(X)$$

D'autre part, si Γ est la composante connexe de \mathfrak{a}_{reg}^* contenant μ , on peut écrire $\Psi_{w\mu}^{\mathfrak{h}_y}(X) = \sum_{v \in W_G(\mathfrak{b}_\mathbb{C})} c(v, w\Gamma, \mathcal{C}) e^{i\langle vx.w\mu, X \rangle}$ où $c(v, w\Gamma, \mathcal{C})$ est une constante. On obtient ainsi :

$$(b_\Sigma F(\mu))(\exp iX.y) = \sum_{w \in W_{H_y}(\mathfrak{a}) \setminus W_H(\mathfrak{a})} \sum_{v \in W_G(\mathfrak{b}_\mathbb{C})} e^{i\langle w\mu, X_y \rangle} c(v, w\Gamma, \mathcal{C}) e^{i\langle vx.w\mu, X \rangle}$$

Lorsque μ est dans l'adhérence de Γ , ceci coïncide avec l'expression de $b_\Sigma F(\mu)^\Gamma$.

Maintenant, les ensembles \mathfrak{a}_{reg}^* et $B_{In\ reg}$ ont un nombre fini de composantes connexes. On obtient donc la majoration (*).

5 Fonctions orbitales propres (cas général)

Théorème 5.1 Soit $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{h})$. Soit $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}, \text{reg}}^* + \mathfrak{a}_I^*$. Soit $F \in I(\mathbb{X})^\infty$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a $z.F = \gamma_{\mathfrak{a}}(z)(i\lambda)F$,
 - (ii) La fonction F est bornée sur \mathbb{X}_{reg} ,
 - (iii) Soit $B \in \text{Car}(\mathbb{X})$ avec $[B] \geq [A]$. Alors, on a $F|_{B_{\text{reg}}} = 0$.
- Alors la fonction F est nulle sur \mathbb{X}_{reg} .

Démonstration: La démonstration de ce théorème est exactement la même que celle du théorème 4.11. ■

5.2 Soit $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{h})$ et soit ψ un système positif de racines imaginaires de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans \mathfrak{g} . Soit $w \in W_H(\mathfrak{a})$. On définit la signature imaginaire $\varepsilon_I(w)$ par : $\varepsilon_I(w) = (-1)^{|\psi \cap -w^{-1}.\psi|}$. La signature ainsi définie ne dépend pas du choix de ψ .

D'autre part, pour tout $a \in A_{\text{reg}}$ et pour tout $w \in W_H(\mathfrak{a})$, on a $b_\psi(w^{-1}.a) = \varepsilon_I(w) \frac{\xi_{\rho_\psi - w\rho_\psi}(a)}{|\xi_{\rho_\psi - w\rho_\psi}(a)|} b_\psi(a)$.

Théorème 5.3 Soit $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{h})$. Soit $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$ et $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_I^*$. Soit ψ un système positif de racines imaginaires de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans \mathfrak{g} . Alors il existe une fonction $F(\lambda, y, \psi) \in I(\mathbb{X})^\infty$ vérifiant les quatres propriétés suivantes :

- (i) pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a $z.F(\lambda, y, \psi) = \gamma_{\mathfrak{a}}(z)(i\lambda)F(\lambda, y, \psi)$,
- (ii) la fonction $F(\lambda, y, \psi)$ est bornée sur \mathbb{X}_{reg} ,
- (iii) pour tout $B \in \text{Car}(\mathbb{X})$ tel que $[B] > [A]$, alors $F(\lambda, y, \psi)|_{B_{\text{reg}}} = 0$,
- (iv) Soit $x \in A_{\text{reg}}$ Si $x \notin \exp i\mathfrak{a} W_H(\mathfrak{a}).y$, alors $F(\lambda, y, \psi)(x) = 0$. Si $x = \exp iX.y$ alors on a

$$(b_\psi F(\lambda, y, \psi))(x) = \xi_{\rho_\psi}(y) \sum_{w \in W_H^y(\mathfrak{a})} \varepsilon_I(w) e^{i\langle w\lambda, X + Y_w \rangle}$$

De plus, si $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}, \text{reg}}^* + \mathfrak{a}_I^*$, alors la fonction $F(\lambda, y, \psi)$ est déterminée de manière unique par ces quatres propriétés.

Remarque : L'expression de $F(\lambda, y, \psi)$ sur A_{reg} donnée dans ce théorème diffère de celle annoncée dans [H5] théorème 3. Ceci provient du fait suivant : pour $u \in W_H(\mathfrak{a})$ tel que $u.y \in \exp i\mathfrak{a}.y$ alors on n'a pas obligatoirement $u \in W_{H_y}(\mathfrak{a})$ (l'élément Y_u n'est pas forcément dans $\Gamma_{\mathfrak{a}}$). Cette erreur est corrigée ici. Le même type d'erreur est à corriger pour la fonction généralisée sphérique $\Theta(\lambda, y, \psi)$ définie dans le théorème 1 de [H5] (voir [H6] paragraphe 2). Ces corrections n'influent pas sur les autres résultats de [H5] comme nous allons le voir ultérieurement.

La suite de ce paragraphe consiste en la démonstration de ce théorème.

On fixe donc une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{a} de \mathfrak{h} que l'on décompose en partie vectorielle et partie compacte $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_R + \mathfrak{a}_I$ (voir 1.2). Soit $M = Z_G(\mathfrak{a}_I)$ et soit \mathfrak{m} son algèbre de Lie.

On a vu précédemment (voir paragraphe 3) que M est un groupe réductif complexe, connexe, σ -stable de groupe dérivé M_1 simplement connexe. Soit \mathfrak{m}_1 l'algèbre de Lie de M_1 et soit \mathfrak{c}_m le centre de \mathfrak{m} . On a alors $\mathfrak{c}_m = \mathfrak{a}_I \mathbb{C} + \mathfrak{v}_\mathbb{C}$ où \mathfrak{v} est l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}_R$ tels que pour toute racine réelle α de \mathfrak{a} l'on ait $\alpha(X) = 0$.

On pose $M_0 = \exp \mathfrak{v}_\mathbb{C} M_1$ et $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{v}_\mathbb{C}$. Le groupe M_0 est un groupe réductif complexe connexe, σ -stable de groupe dérivé M_1 et \mathfrak{a}_R est une sous-algèbre de Cartan déployé de \mathfrak{m}_0 . De plus, il est clair que l'on a $M = \exp \mathfrak{a}_I \mathbb{C} M_0$.

On pose $\mathbb{X}_M = M/M \cap H$ et $\mathbb{X}_{M_0} = M_0/M_0 \cap H$. On a alors $\mathbb{X}_M = \exp i\mathfrak{a}_I \mathbb{X}_{M_0}$.

Soit $\mu \in \Gamma_\mathfrak{a}^*$ et soit $\lambda \in \mathfrak{a}_I^*$. On note $F(\mathbb{X}_{M_0}, \mu)$ la fonction orbitale sur \mathbb{X}_{M_0} définie par le théorème 4.1.

Lemme 5.4 *Soit X et Y sont deux éléments de \mathfrak{a}_I et x et y deux éléments de $\mathbb{X}_{M_0}^{reg}$ tels que $\exp iX.x = \exp iY.y$. Alors, on a $e^{i\langle \lambda, X \rangle} F(\mathbb{X}_{M_0}, \mu)(x) = e^{i\langle \lambda, Y \rangle} F(\mathbb{X}_{M_0}, \mu)(y)$.*

Démonstration: On écrit $x = p(\exp iX'g)$ et $y = p(\exp iY'g')$ avec X' et Y' dans \mathfrak{v} et g et g' dans M_1 . La relation $\exp iX.x = \exp iY.y$ implique qu'il existe $h \in M \cap H$ tel que $g^{-1}g'h$ soit central dans M et donc $g^{-1}g'\varphi(g^{-1}g')$ est central dans M_1 . Il existe donc $Z \in \mathfrak{a}_R$ tel que, pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{a}_\mathbb{C})$, l'on ait $\alpha(Z) \in \mathbb{Z}$ et $g^{-1}g' = \exp i\pi Z$ modulo $M_1 \cap H$.

On obtient ainsi $\exp iY.y = \exp i(Y + Y' + \pi Z - X').x = \exp iX.x$. Par conséquent, on a $Y + Y' + \pi Z - X - X' \in \Gamma_\mathfrak{a}$.

Pour prouver le lemme, il suffit donc de démontrer l'assertion suivante :

5.5 Soit $(Y, Y', Z) \in \mathfrak{a}_I \times \mathfrak{v} \times \mathfrak{a}_R$ tels que $\exp 2iZ$ soit central dans M_1 et $Y + Y' + Z \in \Gamma_\mathfrak{a}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{X}_{M_0}^{reg}$, on a

$$e^{i\langle w\lambda, Y \rangle} F(\mathbb{X}_{M_0}, \mu)(\exp i(Y' + Z).x) = F(\mathbb{X}_{M_0}, \mu)(x)$$

La fonction qui à x associe $F(\mathbb{X}_{M_0}, \mu)(\exp i(Y' + Z).x)$ est clairement une fonction orbitale sur \mathbb{X}_{M_0} propre pour les opérateurs de $Z(\mathfrak{m}_0)$ pour le caractère $z \rightarrow \gamma_\mathfrak{a}(z)(i\mu)$.

On suppose tout d'abord que $\mu \in \Gamma_\mathfrak{a}^*{}_{reg}$. Pour démontrer 5.5, par le théorème d'unicité 4.11, il suffit de prouver l'égalité pour $x \in (\exp \mathfrak{a}_R)_{reg}$. Soit $x = \exp X$. On a alors

$$e^{i\langle \lambda, Y \rangle} F(\mathbb{X}_{M_0}, \mu)(\exp i(Y' + Z).x) = e^{i\langle \lambda, Y \rangle} \sum_{w \in W_{M_0 \cap H}(\mathfrak{a}_R)} e^{i\langle w\mu, Y' + Z + X \rangle}$$

Comme $Y + Y' + Z \in \Gamma_\mathfrak{a}$, on obtient $e^{i\langle w\mu, Y' + Z + X \rangle} e^{i\langle \lambda, Y \rangle} = e^{i\langle w(\lambda + \mu), X \rangle} = e^{i\langle w\mu, X \rangle}$. Par conséquent, on a bien $e^{i\langle w\lambda, Y \rangle} F(\mathbb{X}_{M_0}, \mu)(\exp i(Y' + Z).x) = F(\mathbb{X}_{M_0}, \mu)(x)$.

Maintenant si μ ne vérifie pas de condition de régularité, il est facile d'obtenir la relation 5.5 vu la construction de $F(\mathbb{X}_{M_0}, \mu)$.

On obtient donc le lemme. ■

Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_I^*$ et $\mu \in \Gamma_\mathfrak{a}^*$. Pour $X \in \mathfrak{a}_I$ et $x \in \mathbb{X}_{M_0}$, on pose

5.6
$$F(\mathbb{X}_M, \lambda + \mu)(\exp iX.x) = e^{i\langle \lambda, X \rangle} F(\mathbb{X}_{M_0}, \mu)(x)$$

Lemme 5.7 On a $F(\mathbb{X}_M, \lambda + \mu) \in I(\mathbb{X}_M)^\infty$ et pour tout $z \in Z(\mathfrak{m})$, on a $z.F(\mathbb{X}_M, \lambda + \mu) = \gamma_{\mathfrak{a}}(z)(i(\lambda + \mu))F(\mathbb{X}_M, \lambda + \mu)$.

Les assertions de ce lemme sont immédiates.

Soit $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_I^*$. Soit $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$. Soit $G_y = Z_G(\varphi(y))$ et $\mathbb{X}_y = G_y/H_y$. On fixe un système positif ψ de racines imaginaires de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans \mathfrak{g} . L'ensemble ψ_y formé des $\alpha \in \psi$ telles que $\xi_{\alpha}(y) = 1$ est alors un système positif de racines imaginaires de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans \mathfrak{g}_y . On note comme précédemment $\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_I)$. Soit $X_0 \in \mathfrak{a}_I$ tel que $\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{g}}(X_0)$ et si $\alpha \in \psi$ alors $i\alpha(X_0) > 0$. On note

$$\mathfrak{u} = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_y, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) ; i\alpha(X_0) > 0} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

et

$$\mathfrak{v} = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) - \Delta(\mathfrak{g}_y, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) ; i\alpha(X_0) > 0} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

On pose

$$F(\mathbb{X}_y, \lambda, eH_y, \psi_y) = P_{\mathbb{X}_M, \mathfrak{u}}^{\mathbb{X}_y} F(\mathbb{X}_M, \lambda) \quad (\text{où } P_{\mathbb{X}_M, \mathfrak{u}}^{\mathbb{X}_y} \text{ est défini dans la proposition 3.3})$$

C'est une fonction orbitale propre sur \mathbb{X}_y . On note, pour $x \in \mathbb{X}_y$,

$$F(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)(x) = F(\mathbb{X}_y, \lambda, eH_y, \psi_y)(x.y)$$

et

$$F(\lambda, y, \psi) = \xi_{\rho_{\psi}}(y) P_{\mathbb{X}_y, \mathfrak{v}}^{\mathbb{X}} F(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y) \quad (\text{où } P_{\mathbb{X}_y, \mathfrak{v}}^{\mathbb{X}} \text{ est défini dans le lemme 3.4})$$

Théorème 5.8 On a $F(\lambda, y, \psi) \in I(\mathbb{X})^\infty$. La fonction $F(\lambda, y, \psi)$ vérifie les quatre propriétés suivantes :

- (i) pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a $z.F(\lambda, y, \psi) = \gamma_{\mathfrak{a}}(z)(i\lambda)F(\lambda, y, \psi)$,
- (ii) la fonction $F(\lambda, y, \psi)$ est bornée,
- (iii) si $[B] \not\leq [A]$ alors $F(\lambda, y, \psi)_{/B_{reg}} = 0$,
- (iv) soit $x \in A_{reg}$. Si $x \notin \exp i\mathfrak{a}W_H(\mathfrak{a}).y$ alors $F(\lambda, y, \psi)(x) = 0$.
Si $x = \exp iX.y$ alors

$$[b_{\psi}F(\lambda, y, \psi)](x) = \xi_{\rho_{\psi}}(y) \sum_{w \in W_H^y(\mathfrak{a})} \varepsilon_I(w) e^{i\langle w\lambda, X+Y_w \rangle}$$

Elle ne dépend pas du choix de \mathfrak{u} et de \mathfrak{v} et elle dépend analytiquement de la variable de \mathfrak{a}_I^* . De plus, si pour tout $\alpha \in \Delta_R(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ on a $\lambda(H_{\alpha}) \neq 0$ alors la fonction $F(\lambda, y, \psi)$ est uniquement déterminée par ces quatre propriétés.

- (v) Pour tout $h \in W_H(\mathfrak{a})$, on a

$$F(h.\lambda, y, \psi) = \varepsilon_I(h)F(\lambda, h^{-1}.y, \psi)$$

Démonstration: Les propriétés (i) et (ii) découlent directement du théorème 4.1 et de la construction de la fonction $F(\lambda, y, \psi)$. D'après 5.6, le lemme 3.3 et le corollaire 3.4, il est clair qu'elle dépend analytiquement de la variable de \mathfrak{a}_J^* .

Il reste donc à prouver les assertions (iii), (iv) et (v).

On considère tout d'abord la fonction $F = F(\mathbb{X}_y, \lambda, eH_y, \psi_y)$. Soit $x \in \mathbb{X}_y \text{ reg}$ et soit B l'unique sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X}_y contenant x . Soit \mathfrak{b} la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h}_y associée à B . Par l'induction, il est clair que $F(x) \neq 0$ si et seulement si il existe $h \in H_y$ tel que $h.\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}_y)$. Ceci est équivalent à dire que $[B] \leq [A]$. Maintenant pour $x \in A_{\text{reg}}$, on a $F(x) \neq 0$ si et seulement si il existe $h \in N_{H_y}(\mathfrak{a})$ tel que $h.x \in \text{Exp } \mathfrak{a}$. Donc si $x \notin \text{Exp } \mathfrak{a}$ alors $F(x) = 0$.

Si $x = \text{Exp } X \in \text{Exp } \mathfrak{a}$, on a alors

$$[b_{\psi_y} F](x) = b_{\psi_y}(x) \sum_{w \in W_{M \cap H_y}(\mathfrak{a}) \setminus W_{H_y}(\mathfrak{a})} F(\mathbb{X}_M, \lambda)(\text{Exp } wX) d_{\mathfrak{u}}(\text{Exp } wX)$$

Par le choix de \mathfrak{u} , on a $d_{\mathfrak{u}}(\text{Exp } wX) = b_{\psi_y}(\text{Exp } wX) = \varepsilon_I(w) b_{\psi_y}(\text{Exp } X)$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} [b_{\psi_y} F](x) &= \sum_{w \in W_{M \cap H_y}(\mathfrak{a}) \setminus W_{H_y}(\mathfrak{a})} \varepsilon_I(w) \sum_{v \in W_{M \cap H_y}(\mathfrak{a})} e^{i \langle v\lambda, wX \rangle} \\ &= \sum_{w \in W_{H_y}(\mathfrak{a})} \varepsilon_I(w) e^{i \langle w\lambda, X \rangle} \end{aligned}$$

Soit $x \in A_{\text{reg}}$. Par ce qui précède, la fonction $F(\mathbb{X}_y, \lambda, eH_y, \psi_y)_{/A_{\text{reg}}}$ ne vit que sur $(\text{Exp } \mathfrak{a})_{\text{reg}}$ et donc la fonction $F(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)_{/A_{\text{reg}}}$ ne vit que sur $(\text{exp } i\mathfrak{a}.y)_{\text{reg}}$. D'autre part, par ce qui précède, la fonction $F(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)$ est nulle sur les B_{reg} pour $B \in \text{Car}(\mathbb{X}_y)$ et $[B] \not\leq [A]$. Maintenant, par définition de $P_{\mathbb{X}_y, \mathfrak{v}}^{\mathbb{X}} F(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)$, si $F(\lambda, y, \psi)(x) \neq 0$ alors il existe $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(x)$ tel que $F(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)(h.x) \neq 0$. On a donc $h.\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{h}_y)$ et il existe $u \in H_y$ tel que $uh.\mathfrak{a}_R \subset \mathfrak{a}_R$. Pour une raison de dimension, on en déduit que $uh.\mathfrak{a}_R = \mathfrak{a}_R$ et donc $h.\mathfrak{a}$ et \mathfrak{a} sont H_y -conjuguées. On peut donc supposer que $h \in W_H(\mathfrak{a})$. Dans ce cas $F(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)(h.x) \neq 0$ implique que $h.x \in \text{exp } i\mathfrak{a}.y$ ou encore $x \in W_H(\mathfrak{a}) \text{exp } i\mathfrak{a}.y$. On obtient donc la première partie de (iv).

Soit maintenant $X \in \mathfrak{a}$ tel que $x = \text{exp } iX.y$. Soit $h \in W_H(\mathfrak{a})$. On a $h.x \in \text{exp } i\mathfrak{a}.y$ si et seulement si $h \in W_H^y(\mathfrak{a})$.

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned} (b_{\psi} F(\lambda, y, \psi))(x) &= b_{\psi}(x) \xi_{\rho_{\psi}}(y) \sum_{h \in W_{H_y}(\mathfrak{a}) \setminus W_H^y(\mathfrak{a})} F(\mathbb{X}_y, \lambda, y, \psi_y)(h.x) d_{\mathfrak{v}}(h.x) \\ &= b_{\psi}(x) \xi_{\rho_{\psi}}(y) \sum_{h \in W_{H_y}(\mathfrak{a}) \setminus W_H^y(\mathfrak{a})} F(\mathbb{X}_y, \lambda, eH, \psi_y)(\text{Exp } (h.X + Y_h)) d_{\mathfrak{v}}(h.x) \end{aligned}$$

Or, pour tout $Z \in \mathfrak{a}$ on a $d_{\mathfrak{v}}(\exp iZ.y) = b_{\psi-\psi_y}(\exp iZ.y)$ et $b_{\psi_y}(\exp iZ.y) = b_{\psi_y}(\text{Exp } Z)$. Comme $b_{\psi}(h.x) = \varepsilon_I(h)b_{\psi}(x)$, on obtient donc

$$[b_{\psi}F(\lambda, y, \psi)](x) = \xi_{\rho_{\psi}}(y) \sum_{h \in W_{H_y}(\mathfrak{a}) \setminus W_H^y(\mathfrak{a})} \varepsilon_I(h) [b_{\psi_y}F(\mathbb{X}_y, \lambda, eH_y, \psi_y)](\text{Exp } (h.X + Y_h))$$

L'expression de $[b_{\psi_y}F(\mathbb{X}_y, \lambda, eH_y, \psi_y)](\text{Exp } (h.X + Y_h))$ donnée ci-dessus prouve la première partie de l'assertion (iv).

Par la construction de $F(\lambda, y, \psi)$ lorsque λ ne vérifie aucune condition de régularité, il suffit de prouver l'assertion (v) et l'indépendance de $F(\lambda, y, \psi)$ par rapport à \mathfrak{u} et \mathfrak{v} pour $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a} \text{ reg}}^* + \mathfrak{a}_I^*$.

Maintenant, le théorème d'unicité 5.1 et l'expression de $F(\lambda, y, \psi)$ sur A_{reg} permettent d'obtenir facilement les deux résultats voulus. \blacksquare

5.9 Remarque : Soit $B \in \text{Car } \mathbb{X}$ tel que $[B] \leq [A]$. Soit $x \in G$ tel que $x.\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$. Soit \mathcal{C} une composante connexe de $B_{In \text{ reg}}$. Soit Σ un système positif de racines imaginaires de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$. On peut alors écrire pour tout $\gamma = \exp iX.z \in \mathcal{C}$

$$(b_{\Sigma}F(\lambda, y, \psi))(\gamma) = \sum_{w \in W_G(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})} d_z(w, \lambda, \mathcal{C}) e^{i\langle wx\lambda, X \rangle}$$

Maintenant, par définition on a

$$F(\lambda, y, \psi)(\gamma) = \sum_{h \in H_y \setminus \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\gamma)} \sum_{v \in M \cap H \setminus \mathcal{N}_{H_y}^{\mathbb{X}_M}((h.\gamma).y)} F(\mathbb{X}_M, \lambda)(v((h.\gamma).y)) d_{\mathfrak{u}}(v((h.\gamma).y)) d_{\mathfrak{v}}((h.\gamma).y)$$

Comme les ensembles $H_y \setminus \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_y}(\gamma)$ et $M \cap H \setminus \mathcal{N}_{H_y}^{\mathbb{X}_M}((h.\gamma).y)$ sont finis et ne dépendent que de la composante connexe de B contenant γ , on déduit de la définition de $F(\mathbb{X}_M, \lambda)$ (voir 5.6) et de la remarque 4.13 qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_I^*$, pour tout $w \in W_G(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ et toute composante connexe \mathcal{C} de $B_{In \text{ reg}}$ on a $|d(w, \lambda, \mathcal{C})| < C$.

6 Inversion des intégrales orbitales

Nous rappelons tout d'abord les résultats de [H6] concernant les fonctions généralisées sphériques sur \mathbb{X} . On rappelle qu'une fonction généralisée sphérique sur \mathbb{X} est une fonction généralisée H -invariante sur \mathbb{X} solution propre des opérateurs différentiels de $Z(\mathfrak{g})$. Ce sont des fonctions localement intégrables sur \mathbb{X} et analytiques sur \mathbb{X}_{reg} ([Sa1] thm 4.3).

Soit $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{h})$. On écrit $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_R + \mathfrak{a}_I$ comme en 1.2 et on note $L = Z_G(\mathfrak{a}_R)$. Soit $\mathbb{X}_L = L/L \cap H$. On fixe $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_{I-\text{reg}}^*$ et $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$. Soit ψ un système positif de

racines imaginaires de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans \mathfrak{g} . A ces données, on peut associer une fonction généralisée sphérique $\Theta(\lambda, y, \psi)$ qui vérifie les propriétés suivantes ([H6] théorème 6.1) :

- 6.1** (i) pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a $z.\Theta(\lambda, y, \psi) = \gamma_{\mathfrak{a}}(z)(i\lambda)\Theta(\lambda, y, \psi)$,
(ii) si $[B] \not\supseteq [A]$ alors $\Theta(\lambda, y, \psi)_{/B_{reg}} = 0$,
(iii) Soit $a \in A_{reg}$. Si $a \notin \exp i\mathfrak{a}W_H(\mathfrak{a}).y$ alors $\Theta(\lambda, y, \psi)(a) = 0$ et si $a = \exp iX.y$ alors

$$\Theta(\lambda, y, \psi)(a) = \frac{\sum_{w \in W_H^y(\mathfrak{a})} \varepsilon_I(w) e^{i\langle w\lambda, X+Y_w \rangle}}{|D_{\mathbb{X}}(a)|^{1/2} \xi_{\rho_{\psi}}(y) b_{\psi}(a)}$$

- (iv) Soit $\lambda_0 \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$. Soit ψ_y l'ensemble des $\alpha \in \psi$ telles que $\xi_{\alpha}(y) = 1$. Alors la fonction $\lambda \rightarrow \prod_{\alpha \in \psi_y} (1 - e^{-i\pi\lambda(H_{\alpha})}) \Theta(\lambda + \lambda_0, y, \psi)$ se prolonge analytiquement à \mathfrak{a}_I^* ,
(v) pour tout $u \in W_{L \cap H}(\mathfrak{a})$ on a $\Theta(u.\lambda, y, \psi) = \varepsilon_I(u) \Theta(\lambda, u^{-1}y, \psi)$,
(vi) si $2Y \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$ alors $\Theta(\lambda, \exp iY.y, \psi) = e^{i\langle \lambda, Y \rangle} \Theta(\lambda, y, \psi)$.

La construction de $\Theta(\lambda, y, \psi)$ est obtenue par induction ([H3] paragraphe 2) :

$$\Theta(\lambda, y, \psi) = \text{ind}_{\mathbb{X}_L}^{\mathbb{X}} \Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)$$

où $\Theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)$ est l'unique fonction généralisée sur \mathbb{X}_L vérifiant les propriétés (i) et (iii) sur \mathbb{X}_L ([H6] théorème 2.2).

D'autre part, par la remarque 5.9, on peut appliquer les théorèmes 6.1 et 6.2 de [H6]. On a alors les propriétés suivantes :

- 6.2** Pour tout $\lambda_0 \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{X}_{reg}$, la fonction qui à λ associe $\sum_{w \in W_{L_y}(\mathfrak{a})} F(w(\lambda_0 + \lambda), y, \psi)(x) \Theta(-w(\lambda_0 + \lambda), y, \psi)$ est analytique sur \mathfrak{a}_I^* .

- 6.3** La fonction $|D_{\mathbb{X}}|^{1/2} \Theta(\lambda, y, \psi)$ est bornée sur \mathbb{X}_{reg} ,

Soit $B \in \text{Car}(\mathbb{X})$ et soit $x \in B_{reg}$ et soit U un voisinage compact de x dans B . Soit $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$. Alors, pour toute densité à support compact μ et pour tout entier positif $k > 0$, il existe $C > 0$ telle que, pour tout $\gamma \in U_{reg}$, l'on ait

$$\left| \sum_{w \in W_{L_y}(\mathfrak{a})} \partial(u) F(w\lambda, y, \psi)(\gamma) \langle \Theta(-w\lambda, y, \psi), \mu \rangle \right| < \frac{C}{(1 + \|\lambda\|)^k}$$

Normalisation des mesures :

Soit dX une mesure de Lebesgue sur \mathfrak{h} . Soit dx la mesure invariante sur \mathbb{X} tangente à dX . Soit $d\lambda$ la mesure sur \mathfrak{h}^* duale de dX . Pour $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{h})$, on pose $\mathfrak{r} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{h}]$. Soit $d_{\mathfrak{r}}X$ la mesure de Lebesgue sur \mathfrak{r} définie par la forme de Killing et soit $d_{\mathfrak{a}}X$ la mesure de Lebesgue sur \mathfrak{a} telle que $dX = d_{\mathfrak{a}}X \wedge d_{\mathfrak{r}}X$.

Soit $d_\tau\lambda$ la mesure duale de $d_\tau X$. On choisit $d_I\lambda$ et $d_R\lambda$ des mesures de Lebesgue respectivement sur \mathfrak{a}_I^* et \mathfrak{a}_R^* telles que l'on ait $d\lambda = d_I\lambda \wedge d_R\lambda \wedge d_\tau\lambda$. On note $vol(\Gamma_{\mathfrak{a}})$ le volume de $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ relatif à $d_R\lambda$. On confond, une fois ces choix faits, fonctions généralisées et distributions sur \mathbb{X} . Soit $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$. Pour $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_I^*$, $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$ et un système positif ψ de racines imaginaires de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, on pose $\theta(\lambda, y, \psi) = |D_{\mathbb{X}}|^{1/2} \Theta(\lambda, y, \psi)$. Par le théorème 2.2, c'est un élément de $I(\mathbb{X})'$.

On a alors la formule d'inversion suivante : soit \mathfrak{a}_Γ un domaine fondamental de $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ dans \mathfrak{a} . Alors, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{a}_\Gamma)$, on a

$$\sum_{\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*} \int_{\mathfrak{a}_I^*} e^{-i\langle \mu + \lambda, X \rangle} \int_{\mathfrak{a}_\Gamma} e^{i\langle \mu + \lambda, Y \rangle} f(Y) d_{\mathfrak{a}} Y d_I \lambda = vol(\Gamma_{\mathfrak{a}}) f(X)$$

On définit la mesure da sur A par

$$\int_A f(a) da = \sum_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} \int_{\mathfrak{a}_\Gamma} f(\exp iX.y) d_{\mathfrak{a}} X$$

Notations : Pour simplifier les notations, nous adopterons dans toute la suite de ce paragraphe les conventions suivantes : soit $A \in Car(\mathbb{X})$ associé à $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$. On pose $\hat{A}_0 = \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_I^*$ et $\hat{A} = \hat{A}_0 \times \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$. Pour $\xi = (\lambda, y) \in \hat{A}$, on dit que $\xi \in \hat{A}_{I-reg}$ si $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_{I-reg}^*$ et $\xi \in \hat{A}_{R-reg}$ si $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_I^*$.

On note $\xi^* = (-\lambda, y)$. Le groupe de Weyl $W_G(\mathfrak{a})$ agit sur \hat{A} de la manière suivante : pour $w \in W_G(\mathfrak{a})$, on pose $w.\xi = (w.\lambda, y)$.

On définit la mesure $d_0\lambda$ sur \hat{A}_0 en posant

$$\int_{\hat{A}_0} F(\lambda) d_0\lambda = \frac{1}{vol(\Gamma_{\mathfrak{a}})} \sum_{\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*} \int_{\lambda \in \mathfrak{a}_I^*} F(\mu + \lambda) d_I \lambda$$

et on définit la mesure $d\xi$ sur \hat{A} en posant

$$\int_{\hat{A}} F(\xi) d\xi = \int_{\hat{A}_0} \sum_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} F(\lambda, y) d_0\lambda$$

Proposition 6.4 Soit $\Phi \in I(\mathbb{X})$. On a alors :

(i) pour tout $x \in \mathbb{X}_{reg}$, l'intégrale

$$\int_{\hat{A}} \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}^{-1}} F(w.\xi, \psi)(x) < \theta(w.\xi^*, \psi), \Phi > d\xi$$

est convergente et ne dépend pas du choix de ψ . On la note $F_{\Phi}^{[A]}$,

(ii) $F_{\Phi}^{[A]} \in I(\mathbb{X})^\infty$ et pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a

$$z.F_{\Phi}^{[A]} = \int_{\hat{A}_0} \gamma_{\mathfrak{a}}(z)(i\lambda) \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}^{-1}} \sum_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} F(w.\lambda, y, \psi) < \theta(-w.\lambda, y, \psi), \Phi > d_0\lambda$$

Dans toute la suite de ce paragraphe, on fixe un système positif ψ de racines imaginaires de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ et on pose, pour $\xi \in \hat{A}$, $F_{\xi} = F(\xi, \psi)$ et $\theta_{\xi} = \theta(\xi, \psi)$.

Démonstration: D'après ([Sh] théorème 2.1), on a $W_H(\mathfrak{a}) \setminus W_G(\mathfrak{a}) = W_{L \cap H}(\mathfrak{a}) \setminus W_L(\mathfrak{a})$. D'autre part, d'après le théorème 5.8 (v) et la propriété (v) de 6.1, pour tout $v \in W_{L \cap H}(\mathfrak{a})$ et pour tout $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_{I-reg}^*$, on a

$$F(v\lambda, y, \psi)\theta(-v\lambda, y, \psi) = F(\lambda, v^{-1}y, \psi)\theta(-\lambda, v^{-1}y, \psi)$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} |W_{L \cap H}(\mathfrak{a})| & \sum_{w \in W_{L \cap H}(\mathfrak{a}) \setminus W_L(\mathfrak{a})} \sum_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} F(w\lambda, y, \psi) \langle \theta(-w\lambda, y, \psi), \Phi \rangle \\ & = \sum_{w \in W_L(\mathfrak{a})} \sum_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} F(w\lambda, y, \psi) \langle \theta(-w\lambda, y, \psi), \Phi \rangle \\ & = \sum_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} \sum_{w \in W_{L_y}(\mathfrak{a}) \setminus W_L(\mathfrak{a})} \sum_{v \in W_{L_y}(\mathfrak{a})} F(vw\lambda, y, \psi) \langle \theta(-vw\lambda, y, \psi), \Phi \rangle \end{aligned}$$

Maintenant, il est clair que la propriété 6.3 assure la convergence de l'intégrale donnée en (i).

Soit $B \in Car(\mathbb{X})$ et soit U un compact de B_{reg} . Toujours d'après la propriété 6.3, on a immédiatement que $F_{\Phi}^{[A]}$ vérifie la propriété $I_1(\mathbb{X})$. D'autre part, on peut appliquer le théorème convergence dominé sur l'intérieur de U . On obtient ainsi que pour tout $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$, on a

$$\partial(u).(F_{\Phi}^{[A]})_{/B_{reg}} = \int_{\hat{A}_0} \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}^{-1}} \sum_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} \partial(u).F(w.\lambda, y, \psi)_{/B_{reg}} \langle \theta(-w.\lambda, y, \psi), \Phi \rangle d_0\lambda$$

Le théorème de convergence dominée assure alors que $F_{\Phi}^{[A]}$ vérifie $I_2(\mathbb{X})$ et $I_3(\mathbb{X})$ et donc $F_{\Phi}^{[A]} \in I(\mathbb{X})^{\infty}$.

D'autre part, il est clair que pour $v \in W_L(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, on a $F(\lambda, y, v\psi) = \varepsilon(v)F(\lambda, y, \psi)$ et $\theta(\lambda, y, v\psi) = \varepsilon(v)\theta(\lambda, y, \psi)$. On obtient donc que $F_{\Phi}^{[A]}$ est indépendante du choix de ψ . ■

Nous allons maintenant étudier la croissance des fonctions $F_{\Phi}^{[A]}$.

6.5 Pour x un élément semi-simple de \mathbb{X} , on définit $|x|$ de la manière suivante : soit A un sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} contenant x associé à la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{a} . On peut écrire $x = \exp i(X_I + X_R).y$ avec $X_I \in \mathfrak{a}_I$, $X_R \in \mathfrak{a}_R$ et $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$. On pose alors $|x|_A = \|X_I\|$.

Montrons que $|x|_A$ ne dépend pas du choix de A . Soit α une racine réelle de \mathfrak{a} et soit X_{α} et $X_{-\alpha}$ respectivement dans $\mathfrak{g}_{\alpha} \cap \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha} \cap \mathfrak{h}$ tels que $[X_{\alpha}, X_{-\alpha}] = H_{\alpha}$. Soit

$\mathfrak{a}(\alpha) = \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}) + Ker \alpha$. C'est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} . Soit $A(\alpha)$ le sous-ensemble de Cartan associé à $\mathfrak{a}(\alpha)$. D'après ([H2] proposition 3.9), $A \cap A(\alpha)$ est formé des $exp iX.y$ et $exp iX.y'$ où X parcourt $Ker \alpha$, y parcourt \mathcal{W}_α et $\varphi(y') = \varphi(y)exp i\pi H_\alpha$. Si $x = exp iX.y$ avec $X \in Ker \alpha$, il est clair que $|x|_A = |x|_{A_\alpha}$. Maintenant, si $x = exp iX.y'$ avec $X \in Ker \alpha$, alors on a la décomposition suivante dans A : $x = exp i(X + \pi H_\alpha/2).y$. Or il est clair que $(X + \pi H_\alpha/2)_I = X_I$. On en déduit donc que l'on a $|x|_A = |x|_{A_\alpha}$.

Pour $x \in \mathbb{X}$, on pose $|x| = |x_s|$ où x_s est la partie semi-simple de x .

Il est clair que l'application $x \rightarrow |x|$ est H -invariante. Montrons que cette application est continue. Il suffit de prouver qu'elle est continue en tout point semi-simple de \mathbb{X} . On fixe donc $x \in \mathbb{X}$ semi-simple. Soit $\varepsilon > 0$ et soit U un voisinage ouvert de 0 dans \mathfrak{c} . On note $\mathcal{V}_{x,U,\varepsilon}^0$ l'ensemble des $X \in (U + [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) \cap \mathfrak{h}_x$ tels que, pour toute valeur propre λ de $ad X$ (considéré comme endomorphisme de \mathfrak{h}), l'on ait $|\lambda| < \varepsilon$. Soit $\mathbb{X}_{x,U,\varepsilon} = \cup_{h \in H} h exp i\mathcal{V}_{x,U,\varepsilon}^0.x$. D'après ([H1] lemme 2.9), pour ε et U suffisamment petit, l'ensemble $\mathbb{X}_{x,U,\varepsilon}$ est un voisinage ouvert de x et l'application de $H \times \mathcal{V}_{x,U,\varepsilon}^0$ dans $\mathbb{X}_{x,U,\varepsilon}$, qui à (h, X) associe $h exp iX.x$ est surjective et submersive en tout point.

Maintenant, si $y \in \mathbb{X}_{x,U,\varepsilon}$ de partie semi-simple y_s , alors on a $|y| = |y_s|$ et $y_s \in \mathbb{X}_{x,U,\varepsilon}$. Soit $B \in Car(\mathbb{X})$ tel que $y_s \in B$. On peut donc écrire $y_s = h exp(iX).x$ avec $h \in H$ et $X \in \mathfrak{b} \cap \mathcal{V}_{x,U,\varepsilon}^0$. On a alors $|y_s| = \|X_I\| + |x|$. Pour tout $\eta > 0$, on peut choisir U et ε de telle sorte que pour tout $Y \in \mathcal{V}_{x,U,\varepsilon}^0$, l'on ait $\|Y_I\| < \eta$. Dans ce cas, on a $\|y| - |x|\| < \eta$ ce qui assure la continuité de $|\cdot|$ au point x .

6.6 Soit $A \in Car(\mathbb{X})$. Pour $U = A$ ou $U = A_{reg}$, on note $\mathcal{S}(U)$ (espace de Schwartz de U) l'espace des fonctions Φ de classe C^∞ sur U vérifiant la condition de croissance suivante :

pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ et pour tout $r > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in U$, l'on ait

$$(1 + |x|)^r |\partial(u)\Phi(x)| < C$$

On munit $\mathcal{S}(U)$ de la topologie définie par les semi-normes

$$p_{u,r}(\Phi) = sup_{x \in U} (1 + |x|)^r |\partial(u)\Phi(x)|$$

L'espace $\mathcal{S}(U)$ est alors un espace de Fréchet.

On note $\mathcal{S}(\mathfrak{a}_I^*)$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide sur \mathfrak{a}_I^* et $\mathcal{S}(\Gamma_\alpha^*)$ l'espace des fonctions F sur Γ_α^* telles que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{\mu \in \Gamma_\alpha^*} (1 + \|\mu\|)^r |F(\mu)|$ soit finie.

Pour $\Phi \in \mathcal{S}(A)$, on note $\hat{\Phi}$ la fonction définie sur $\Gamma_\alpha^* + \mathfrak{a}_I^*$ par

$$\hat{\Phi}(\lambda) = \sum_{y \in \mathcal{W}_\alpha} \int_{\mathfrak{a}_\Gamma} e^{i\langle \lambda, X \rangle} \Phi(exp iX.y) d_\alpha X.$$

Soit $\mathcal{S}(\hat{A})$ l'espace des $\hat{\Phi}$ pour $\Phi \in \mathcal{S}(A)$. L'espace $\mathcal{S}(\hat{A})$ est alors formé des fonctions Ψ de $\Gamma_\alpha^* + \mathfrak{a}_I^*$ dans \mathbb{C} qui vérifie les conditions suivantes :

(i) pour tout $\mu \in \Gamma_\alpha^*$, la fonction $\lambda \rightarrow \Psi(\mu + \lambda)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathfrak{a}_I^*)$,

(ii) pour tout u et v dans $S(\mathfrak{a}_I^*_{\mathbb{C}})$ et pour tout $r > 0$, il existe une constante strictement positive C telle que

$$\sup_{\lambda_I \in \mathfrak{a}_I^*} \sum_{\lambda_R \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*} (1 + \|\lambda_R\|)^r |v(\lambda_I) \partial(u) \Psi(\lambda_R + \lambda_I)| < C$$

On munit $\mathcal{S}(\hat{A})$ de la topologie définie par les semi-normes

$$p_{u,v,r}(\Psi) = \sup_{\lambda_I \in \mathfrak{a}_I^*} \sum_{\lambda_R \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*} (1 + \|\lambda_R\|)^r |v(\lambda_I) \partial(u) \Psi(\lambda_R + \lambda_I)|$$

C'est un espace de Fréchet.

Lemme 6.7 *On suppose que \mathfrak{h} admet une sous-algèbre de Cartan déployée \mathfrak{a} . Soit $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$ et soit $F(\mu) = F(\mu, eH, \emptyset)$ la fonction orbitale construite dans le paragraphe 4. Soit $B \in \text{Car} \mathbb{X}$. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$, il existe une constante $C > 0$ et un entier positif k tels que, pour tout $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*_{reg}$ et pour tout $x \in B_{reg}$, l'on ait*

$$|(1 + \|x\|)^r | \partial(u) F(\mu)(x) | < C(1 + \|\mu\|)^k$$

Démonstration: On reprend les notations du paragraphe 4. D'après la proposition 4.9, il existe un ensemble fini F de A et pour chaque $y \in F$, un voisinage ouvert H -invariant $\mathcal{W}_{y,\varepsilon,U}$ de y dans \mathbb{X} tels que

$$\mathbb{X} = \bigcup_{y \in F} \mathcal{W}_{y,\varepsilon,U}$$

On va prouver le lemme sur chaque $\mathcal{W}_{y,\varepsilon,U}$.

Soit $y \in F$ et soit $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}_y$. Soit $x \in (\mathcal{W}_{y,\varepsilon,U})_{reg}$. On écrit $x = h \exp iX.y$ avec $h \in H$ et $X \in \mathfrak{h}$ tel que pour toute valeur propre λ de $ad X$ l'on ait $|Re(\lambda)| < \varepsilon$.

On fixe $X_y \in \mathfrak{a}$ tel que $y = \text{Exp } X_y$. Par définition, on a

$$F(\mu)(x) = \sum_{w \in W_{H_y}(\mathfrak{a}) \setminus W_H(\mathfrak{a})} e^{i \langle w\mu, X_y \rangle} \Psi_{w\mu}^{\mathfrak{h}_y}(X)$$

Il faut donc prouver que, pour tout $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{h}_y)$, pour tout $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ et pour tout $r > 0$, il existe une constante $C > 0$ et un entier positif k tels que, pour tout $X \in \mathcal{V}_{y,\varepsilon,U} \cap \mathfrak{b}$ et pour tout $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*_{reg}$, l'on ait

$$(1 + \|X\|)^r | \partial(u) \Psi_{\mu}^{\mathfrak{h}_y}(X) | < C(1 + \|\mu\|)^k \quad (*)$$

Soit $\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{h}_y)$. On note $L = Z_{G_y}(\mathfrak{b}_R)$ d'algèbre de Lie \mathfrak{l} . Soit $X \in \mathfrak{b}_{reg}$ et $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$. On note $\mathcal{N}_{H_y}^{L_y}(\mathfrak{a})$ l'ensemble des $h \in H_y$ tels que $h.\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{l}_y \cap \mathfrak{h})$. Par définition de $\Psi_{\mu}^{\mathfrak{h}_y}$ et d'après le lemme 4.2.1 de [B1], on a

$$\Psi_{\mu}^{\mathfrak{h}_y}(X) = \hat{\beta}_{H_y.X}(\mu) | \det(ad \mu)_{/\mathfrak{h}_y^*/\mathfrak{a}^*} |^{1/2}$$

$$= \sum_{h \in L_y \cap H \setminus \mathcal{N}_{H_y}^{L_y}(\mathfrak{a})} \hat{\beta}_{(L \cap H)_y, X}(h \cdot \mu) | \det(\text{ad } h \cdot \mu)_{/(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h})^*/\mathfrak{a}^*} |^{1/2}$$

Comme \mathfrak{b} est une sous-algèbre de Cartan de type compacte de $\mathfrak{l}_y \cap \mathfrak{h}$, on se ramène au cas où \mathfrak{h} admet une sous-algèbre de Cartan de type compact \mathfrak{t} . D'autre part, par les propriétés de $\hat{\beta}_{H, X}$ (voir par exemple [H4] 5.8 (ii)), on peut supposer \mathfrak{h} semi-simple.

Soit $x \in G$ tel que $x \cdot \mathfrak{t} = i\mathfrak{a}$. Soit \mathcal{C} une composante connexe de \mathfrak{a}_{reg}^* et soit \mathcal{F} une composante connexe de \mathfrak{t}_{reg} . Pour tout $w \in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, il existe des constantes $d(w, \mathcal{C}, \mathcal{F}, x)$ telles que pour tout $\mu \in \mathcal{C}$ et pour tout $X \in \mathcal{F}$, l'on ait

$$\hat{\beta}_{H, X}(\mu) | \det(\text{ad } \mu)_{/\mathfrak{h}^*/\mathfrak{a}^*} |^{1/2} = \sum_{w \in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} d(w, \mathcal{C}, \mathcal{F}, x) e^{i \langle wx \cdot X, \mu \rangle}$$

et donc

$$\partial(u) \Psi_{\mu}^{\mathfrak{h}}(X) = \sum_{w \in W_G(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} u(ix^{-1}w^{-1}\mu) d(w, \mathcal{C}, \mathcal{F}, x) e^{i \langle wx \cdot X, \mu \rangle} \quad (**)$$

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la base de \mathfrak{a}^* définie par \mathcal{C} . La chambre \mathcal{C} est alors l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tels que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, l'on ait $\lambda(H_{\alpha_j}) > 0$. Soit $\omega_1, \dots, \omega_n$ la base duale de $H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_n}$. Soit $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}_{reg}}^* \cap \mathcal{C}$. On peut donc écrire $\mu = 2 \sum_{j=1}^n n_j \omega_j$ où les n_j sont des entiers strictement positifs. En particulier, pour tout $j \in \{1 \dots n\}$, on a $n_j \geq 1$.

Maintenant, comme la distribution $\hat{\beta}_{H, X}$ est tempérée, si $d(w, \mathcal{C}, \mathcal{F}, x) \neq 0$ alors, pour tout $X \in \mathcal{F}$ et pour tout $\mu \in \mathcal{C}$, on a $i \langle wx \cdot X, \mu \rangle \leq 0$ et donc dans ce cas on a $iwx \cdot X = \sum_{j=1}^n x_j H_{\alpha_j}$ avec $x_j \leq 0$ pour $j = 1, \dots, n$ et les x_j sont non tous nuls. On obtient ainsi :

$$\text{si } d(w, \mathcal{C}, \mathcal{F}, x) \neq 0 \text{ alors pour tout } \mu \in \mathcal{C} \cap \Gamma_{\mathfrak{a}}^* \text{ et pour tout } X \in \mathcal{F}, \text{ on a } e^{i \langle wx \cdot X, \mu \rangle} \leq e^{\sum_{j=1}^n x_j}$$

L'expression (**) permet alors d'obtenir le résultat voulu. ■

Lemme 6.8 *Soit $A \in \text{Car}(\mathbb{X})$. Soit $\Psi \in \mathcal{S}(\hat{A})$ et soit $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$.*

(i) *pour tout $x \in A_{reg}$, l'intégrale $\int_{\hat{A}_0} F(\lambda, y)(x) \Psi(\lambda) d_0 \lambda$ converge. On la note $\tilde{F}_{\Psi}^{[A]}(x)$.*

On a $\tilde{F}_{\Psi}^{[A]} \in I(\mathbb{X})^{\infty}$ et l'application qui à Ψ associe $\tilde{F}_{\Psi}^{[A]}$ est continue de $\mathcal{S}(\hat{A})$ dans $I(\mathbb{X})^{\infty}$,

(ii) *Pour tout $B \in \text{Car}(\mathbb{X})$, on a $\tilde{F}_{\Psi/B_{reg}}^{[A]} \in \mathcal{S}(B_{reg})$.*

Démonstration:

On reprend les notations du paragraphe 3 et plus précisément celles de 3.5. On note M le centralisateur de \mathfrak{a}_I dans G . Soit $x \in \mathbb{X}_{reg}$.

On a $F(\lambda, y)(x) = (P_{\mathbb{X}_M}^{\mathbb{X}, y} F(\mathbb{X}_M, \lambda))(x)$. Par définition du prolongement $P_{\mathbb{X}_M}^{\mathbb{X}, y}$, pour avoir le résultat voulu, il suffit de prouver que, pour tout $x \in \mathbb{X}_{M, reg}$ l'intégrale

$$\int_{\hat{A}_0} F(\mathbb{X}_M, \lambda)(x) \Psi(\lambda) d_0 \lambda \text{ converge.}$$

On écrit $\mathbb{X}_M = \exp i\mathfrak{a}_I \cdot \mathbb{X}_{M_0}$ comme dans le paragraphe 3. Pour $x = \exp iX \cdot x_0$ avec $X \in \mathfrak{a}_I$ et $x_0 \in \mathbb{X}_{M_0 \text{ reg}}$ et $\lambda = \lambda_I + \lambda_R \in \mathfrak{a}_I^* + \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$, on a donc

$F(\mathbb{X}_M, \lambda)(x) = e^{i\langle \lambda_I, X \rangle} F(\mathbb{X}_{M_0}, \lambda_R)(x_0)$. D'après le lemme 6.7, pour tout $r > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda_R \in \Gamma_{\mathfrak{a} \text{ reg}}^*$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{X}_{M_0 \text{ reg}}$, l'on ait

$$(1 + \|x_0\|)^r |F(\mathbb{X}_{M_0}, \lambda_R)(x_0)| < C$$

Comme $\Psi \in \mathcal{S}(\hat{A})$, on obtient la convergence de l'intégrale $\int_{\hat{A}_0} F(\mathbb{X}_M, \lambda)(x) \Psi(\lambda) d_0\lambda$.

Par la relation de croissance précédemment obtenue, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et obtenir ainsi $\tilde{F}_{\Psi}^{[A]} \in I(\mathbb{X})^{\infty}$. La continuité de $\Psi \rightarrow \tilde{F}_{\Psi}^{[A]}$ est immédiate.

Soit maintenant $B \in \text{Car}(\mathbb{X}_M)$ et $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$. Pour $x \in B_{\text{reg}}$, on écrit $x = \exp iX \cdot x_0 \in \exp i\mathfrak{a}_I \cdot \mathbb{X}_{M_0}$. L'intégrale $\partial(u) \int_{\hat{A}_0} F(\mathbb{X}_M, \lambda)(x) \Psi(\lambda) d_0\lambda$ est somme d'expression du type $\int_{\hat{A}_0} P(i\lambda_I) e^{i\langle \lambda_I, X \rangle} \partial(v) F(\mathbb{X}_{M_0}, \lambda_R)(x_0) \Psi(\lambda) d_0\lambda$ où $P \in S(\mathfrak{a}_I^*)$ et $v \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$.

D'après le lemme 6.7, pour tout $r > 0$, il existe une constante $C > 0$ et un entier $k > 0$ tels que, pour tout $x_0 \in B_{\text{reg}}$ et pour tout $\lambda_R \in \Gamma_{\mathfrak{a} \text{ reg}}^*$, l'on ait :

$$|(1 + \|x_0\|)^r | \partial(v) F(\mathbb{X}_{M_0}, \lambda_R)(x_0) | < C(1 + \|\lambda_R\|)^k$$

Comme $\Psi \in \mathcal{S}(\hat{A})$, on en déduit que, pour tout $r > 0$ et pour tout $u \in S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$, il existe une constante $C' > 0$ telle que, pour tout $x \in B_{\text{reg}}$ l'on ait

$$|(1 + \|x\|)^r \partial(u) \int_{\hat{A}_0} F(\mathbb{X}_M, \lambda)(x) \Psi(\lambda) d_0\lambda | < C'$$

On obtient ainsi l'assertion (ii). ■

Lemme 6.9 *On suppose que \mathfrak{h} admet une sous-algèbre de Cartan de type compact \mathfrak{t} . Soit T le sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} associé à \mathfrak{t} . Soit $A \in \text{Car}(\mathbb{X})$ associé à $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{h})$. On suppose que $\mathfrak{a}_I \subset \mathfrak{t}$. Soit $M = Z_G(\mathfrak{a}_I)$.*

Soit $\text{Res}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_M, z}$ la transposée de l'application de prolongement $P_{\mathbb{X}_M}^{\mathbb{X}, z}$ définie dans le paragraphe 3.

Alors, pour tout $(\lambda, y) \in \hat{T}_{I-\text{reg}}$ et pour tout $z \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$, la distribution $\text{Res}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_M, z} \theta(\lambda, y, \psi)$ est une combinaison linéaire finie des distributions $\theta(\mathbb{X}_M, w\lambda, t, \psi)$ définies sur \mathbb{X}_M où $w \in W_G(\mathfrak{t})$ et $t \in \mathcal{W}_t$.

Démonstration: On note $\gamma_{\mathfrak{g}, \mathfrak{m}}$ l'injection de $Z(\mathfrak{g})$ dans $Z(\mathfrak{m})$ et $\gamma_{\mathfrak{m}, \mathfrak{t}}$ l'isomorphisme d'Harish-Chandra de $Z(\mathfrak{m})$ dans $S(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})^{W_M(\mathfrak{t})}$. Pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a alors

$\gamma_{\mathfrak{g}, \mathfrak{m}}(z) \cdot \text{Res}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_M, z} \theta(\lambda, y, \psi) = \text{Res}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_M, z} z \cdot \theta(\lambda, y, \psi) = \gamma_{\mathfrak{t}}(z)(i\lambda) \text{Res}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_M, z} \theta(\lambda, y, \psi)$. Par un argument classique (voir les démonstrations des lemmes I7.14 et I7.17 de [V]), la distribution $\text{Res}_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_M, z} \theta(\lambda, y, \psi)$ est donc somme de distributions propres pour les caractères

$z \rightarrow \gamma_{\mathfrak{m}, \mathfrak{t}}(z)(iw\lambda)$ où $w \in W_G(\mathfrak{t})$. Comme $\mathfrak{a}_I \subset \mathfrak{t}$, l'algèbre \mathfrak{t} est une sous-algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$. En utilisant la base de distributions sphériques sur \mathbb{X}_M pour de tels caractères ([H6] corollaire 2.3), on obtient le résultat voulu. ■

Lemme 6.10 *Soit A et B dans $\text{Car}(\mathbb{X})$ tels que $\mathfrak{a}_R \subset \mathfrak{b}_R$. Soit $\xi = (\lambda, y) \in \hat{B}$. On note $L = Z_G(\mathfrak{a}_R)$ et $\mathbb{X}_L = L/L \cap H$. On rappelle que l'application de restriction $R_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_L}$ de fonctions orbitales est définie au paragraphe 3.*

Soit $F(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)$ la fonction orbitale vérifiant les propriétés du théorème 5.3 sur \mathbb{X}_L . Alors, on a

$$R_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_L} F_{\xi} = \sum_{w \in W_H^y(\mathfrak{b})/W_{(L \cap H)}^y(\mathfrak{b})} \varepsilon_I(w) F(\mathbb{X}_L, w^{-1} \cdot \xi)$$

Démonstration: On suppose tout d'abord que $\lambda \in \Gamma_{\mathfrak{b} \text{ reg}}^* + \mathfrak{b}_I^*$. On note $F = R_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}_L} F_{\xi}$. Soit $\gamma_{\mathfrak{g}, \mathfrak{l}}$ l'injection canonique de $Z(\mathfrak{g})$ dans $Z(\mathfrak{l})$. Pour tout $u \in Z(\mathfrak{g})$, on a $\gamma_{\mathfrak{g}, \mathfrak{l}}(u) \cdot F = \gamma_{\mathfrak{b}}(u)(i\lambda)F$. Comme dans le lemme précédent, on obtient que F est somme de fonctions orbitales propres pour les caractères $z \rightarrow \gamma_{\mathfrak{l}, \mathfrak{b}}(iw\lambda)$ pour $w \in W_G(\mathfrak{b})$. Par le théorème d'unicité, il suffit donc de prouver l'égalité des deux fonctions orbitales considérées sur B_{reg} . Ceci s'obtient par simple calcul. La construction de F_{ξ} pour ξ ne vérifiant aucune condition de régularité (voir paragraphe 4) permet d'obtenir ce résultat pour tout ξ . ■

Lemme 6.11 *On suppose que \mathfrak{h} admet une sous-algèbre de Cartan déployée \mathfrak{a} . Soit A le sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} associé à \mathfrak{a} . Soit $B \in \text{Car}(\mathbb{X})$ et soit $\xi \in \hat{B}_{I\text{-reg}}$. Alors pour tout $\Psi \in \mathcal{S}(\hat{A})$, l'intégrale $\int_{\mathbb{X}} \theta_{\xi}(x) \tilde{F}_{\Psi}^{[A]}(x) dx$ est convergente. On la note $\langle \theta_{\xi}, \tilde{F}_{\Psi}^{[A]} \rangle$.*

Si $B \notin [A]$ on a alors $\langle \theta_{\xi}, \tilde{F}_{\Psi}^{[A]} \rangle = 0$.

Démonstration: D'après la propriété 6.3, la fonction $\theta_{\xi}/_{\mathbb{X}_{\text{reg}}}$ est bornée. De plus, d'après le lemme 6.7, pour tout $r > 0$, il existe une constante $C_r > 0$ et un entier $k > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{X}_{\text{reg}}$ et pour tout $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a} \text{ reg}}^*$, l'on ait

$$|\theta_{\xi}(x) F(\mu)(x)| \leq \frac{C_r (1 + \|\mu\|)^k}{(1 + |x|)^r}$$

On obtient donc que l'intégrale $\int_{\mathbb{X}} \theta_{\xi}(x) F(\mu)(x) dx$ est convergente, on la note $\langle \theta_{\xi}, F(\mu) \rangle$. D'autre part, comme $\Psi \in \mathcal{S}(\hat{A})$, l'intégrale $\int_{\mathbb{X}} \theta_{\xi}(x) \tilde{F}_{\Psi}^{[A]}(x) dx$ converge et vaut $\sum_{\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*} \langle \theta_{\xi}, F(\mu) \rangle \Psi(\mu)$ (en utilisant le théorème de Fubini).

Nous allons prouver que, pour tout $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$, pour tout $\xi \in \hat{B}_{I\text{-reg}}$, on a $\langle \theta_{\xi}, F(\mu) \rangle = 0$.

On note $u \rightarrow {}^t u$ l'antiautomorphisme principal de $Z(\mathfrak{g})$. Soit $z \in Z(\mathfrak{g})$. Soit $\xi = (\lambda, y) \in \hat{B}_{I\text{-reg}}$. On a $\tilde{F}_{\Psi}^{[A]} \in I(\mathbb{X})^{\infty}$ et bien que $\tilde{F}_{\Psi}^{[A]} \notin I(\mathbb{X})$, comme $|D_{\mathbb{X}}|^{-1/2} \theta_{\xi}$ est une distribution sphérique, on a tout de même

$$\langle z \cdot \theta_{\xi}, \tilde{F}_{\Psi}^{[A]} \rangle = \langle \theta_{\xi}, {}^t z \cdot \tilde{F}_{\Psi}^{[A]} \rangle$$

On obtient ainsi

$$\sum_{\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*} \langle \theta_{\xi}, F(\mu) \rangle (\gamma_{\mathfrak{b}}(z)(i\lambda) - \gamma_{\mathfrak{a}}({}^t z)(i\mu)) \Psi(\mu) = 0$$

Ceci étant valable pour tout $\Psi \in \mathcal{S}(\hat{A})$, on obtient que pour tout $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$, pour tout $\xi \in \hat{B}_{I-reg}$ et pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, on a

$$\langle \theta_{\xi}, F(\mu) \rangle (\gamma_{\mathfrak{b}}(z)(i\lambda) - \gamma_{\mathfrak{a}}({}^t z)(i\mu)) = 0$$

Maintenant, les caractères $z \rightarrow \gamma_{\mathfrak{b}}(z)(i\lambda)$ et $z \rightarrow \gamma_{\mathfrak{a}}({}^t z)(i\mu)$ de $Z(\mathfrak{g})$ ne coïncident que pour un nombre fini de valeurs de λ ([Bou2] chapitre 8, paragraphe 8, 5 corollaire 1). On obtient donc que $\langle \theta_{\xi}, F(\mu) \rangle = 0$ presque partout. Il est facile de voir que cette égalité est valable pour tout $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*$ et pour tout $\xi \in \hat{B}_{I-reg}$. ■

Lemme 6.12 *On suppose que \mathfrak{a} est une sous-algèbre de Cartan de type déployée de \mathfrak{h} , c'est-à-dire que \mathfrak{a}_I est central dans \mathfrak{h} . Soit $B \in \text{Car}(\mathbb{X})$ et $\xi \in \hat{B}_{I-reg}$. Alors, pour tout $\Psi \in \mathcal{S}(\hat{A})$, l'intégrale $\langle \theta_{\xi}, \tilde{F}_{\Psi}^{[A]} \rangle = \int_{\mathbb{X}} \theta_{\xi}(x) \tilde{F}_{\Psi}^{[A]}(x) dx$ est convergente. Si $B \notin [A]$ alors on a $\langle \theta_{\xi}, \tilde{F}_{\Psi}^{[A]} \rangle = 0$.*

Démonstration: Soit G_1 le groupe dérivé de G et $G_0 = \exp(\mathfrak{a}_R)_{\mathbb{C}} G_1$. On pose $\mathbb{X}_0 = G_0/G_0 \cap H$. Par hypothèse sur \mathfrak{h} , on peut écrire $\mathbb{X} = \exp i\mathfrak{a}_I \mathbb{X}_0$. Soit $\mu = \mu_0 + \mu_1 \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_I^*$. Pour $x = \exp iX.x \in \mathbb{X}$, on a alors (par construction) $F(\mu_0 + \mu_1)(x) = e^{i\langle \mu_1, X \rangle} F(\mathbb{X}_0, \mu_0)(x_0)$.

On note $\xi = (\lambda, y)$ et on écrit $\lambda = \lambda_1 + \lambda_0$ avec $\lambda_1 \in \mathfrak{b}_I^*$ et $\lambda_0 \in \Gamma_{\mathfrak{b}}^*$. On a alors $\theta(\lambda, y)(\exp iX.x_0) = e^{i\langle \lambda_1, X \rangle} \theta(\mathbb{X}_0, \lambda_0, y)(x_0)$. Pour $\Psi_0 \in \mathcal{S}(\Gamma_{\mathfrak{a}}^*)$, on note $\tilde{F}_{\Psi_0}^{[A], \mathbb{X}_0} = \sum_{\mu_0 \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*} F(\mathbb{X}_0, \mu_0) \Psi_0(\mu_0)$. Par conséquent, pour tout $\Psi = \Psi_0 \otimes \Psi_1 \in \mathcal{S}(\Gamma_{\mathfrak{a}}^*) \otimes \mathcal{S}(\mathfrak{a}_I^*)$, on a $\tilde{F}_{\Psi_0 \otimes \Psi_1}^{[A]}(\exp iX.x_0) = \tilde{F}_{\Psi_0}^{[A], \mathbb{X}_0}(x_0) \hat{\Psi}_1(X)$ où $\hat{\Psi}_1$ désigne la transformée de Fourier de Ψ_1 .

On obtient ainsi que $\int_{\mathbb{X}} \theta(\lambda, y)(x) \tilde{F}_{\Psi}^{[A]}(x) dx$ est convergente et vaut $\langle \theta(\mathbb{X}_0, \lambda_0, y), \tilde{F}_{\Psi_0}^{[A], \mathbb{X}_0} \rangle \Psi_1(-\lambda_1)$. De plus, par lemme précédent, si $[B] \neq [A]$, on a $\langle \theta(\lambda, y), \tilde{F}_{\Psi}^{[A]} \rangle = 0$. Comme $\mathcal{S}(\Gamma_{\mathfrak{a}}^*) \otimes \mathcal{S}(\mathfrak{a}_I^*)$ est dense dans $\mathcal{S}(\hat{A})$ et l'application $\Psi \rightarrow \tilde{F}_{\Psi}^{[A]}$ est continue, on obtient le résultat voulu. ■

Proposition 6.13 *Soit A et B dans $\text{Car}(\mathbb{X})$. Soit $\xi \in \hat{A}_{I-reg}$, $z \in \mathcal{W}_{\mathfrak{b}}$ et $\Psi \in \mathcal{S}(\hat{B})$. Alors l'intégrale $\int_{\mathbb{X}} \theta_{\xi}(x) \tilde{F}_{\Psi}^{[B]}(x) dx$ existe. On la note $\langle \theta_{\xi}, \tilde{F}_{\Psi}^{[B]} \rangle$.*

Si $[A] \neq [B]$, alors pour tout $\xi \in \hat{A}_{I-reg}$, on a $\langle \theta_{\xi}, \tilde{F}_{\Psi}^{[B]} \rangle = 0$.

Démonstration: Soit $C \in \text{Car}(\mathbb{X})$ et $x \in C_{reg}$. On a $\theta_{\xi}(x) = 0$ si $[C] \not\leq [A]$ et $\tilde{F}_{\Psi}^{[B]}(x) = 0$ si $[C] \not\leq [B]$. Donc, si $[A] \not\leq [B]$ alors pour tout $x \in \mathbb{X}_{reg}$, on a $\theta_{\xi}(x) \tilde{F}_{\Psi}^{[B]}(x) = 0$ et le lemme est immédiat.

On suppose donc que $[A] \leq [B]$. Dans ce cas, l'intégrale $\int_{\mathbb{X}} \theta_{\xi}(x) \tilde{F}_{\Psi}^{[B]}(x) dx$ converge puisque θ_{ξ} est bornée sur \mathbb{X}_{reg} (propriété 6.3) et pour tout $C \in Car(\mathbb{X})$, on a $\tilde{F}_{\Psi}^{[B]}|_{C_{reg}} \in \mathcal{S}(C_{reg})$ (lemme 6.8 (ii)).

On note $\xi = (\lambda, y)$. Par définition, on a $\theta_{\xi} = ind_{\mathbb{X}_L}^{\mathbb{X}} \theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi)$ où $L = Z_G(\mathfrak{a}_R)$ et $\mathbb{X}_L = L/L \cap H$. Maintenant, en utilisant l'expression de θ_{ξ} sur chaque sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} ([H3] corollaire 2.4) et la formule d'intégration de Weyl, on obtient que (démonstration du même type que celle de [H3] corollaire 2.4), bien que $\tilde{F}_{\Psi}^{[B]}$ ne soit pas dans $I(\mathbb{X})$, on a

$$\langle \theta_{\xi}, \tilde{F}_{\Psi}^{[B]} \rangle = \langle \theta(\mathbb{X}_L, \lambda, y, \psi), R_{\mathbb{X}_L}^{\mathbb{X}} \tilde{F}_{\Psi}^{[B]} \rangle$$

Or, on a $R_{\mathbb{X}_L}^{\mathbb{X}} \tilde{F}_{\Psi}^{[B]} = \int_{\hat{B}} R_{\mathbb{X}_L}^{\mathbb{X}} F_{\eta} \Psi(\eta) d\eta$. En utilisant le lemme 6.10, on se ramène à démontrer la proposition lorsque la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{a} est de type compact. C'est ce que l'on supposera dans la suite.

Avec les notations utilisées précédemment, on a $F(\mu, z) = P_{\mathbb{X}_M}^{\mathbb{X}} z F(\mathbb{X}_M, \mu, z)$. On note alors $\tilde{F}_{\Psi}^{[B], \mathbb{X}_M} = \int_{\hat{B}_0} F(\mathbb{X}_M, \mu, z) \Psi(\mu) d_0 \mu$ et il suffit donc de prouver que, si $[A] \neq [B]$, alors pour tout $\xi \in \hat{A}_{I-reg}$, on a $\langle \theta_{\xi}, P_{\mathbb{X}_M}^{\mathbb{X}, z} \tilde{F}_{\Psi}^{[B], \mathbb{X}_M} \rangle = 0$. De même que précédemment, en utilisant la formule d'intégration de Weyl et la définition de $P_{\mathbb{X}_M}^{\mathbb{X}, z}$, on obtient que $\langle \theta_{\xi}, P_{\mathbb{X}_M}^{\mathbb{X}, z} \tilde{F}_{\Psi}^{[B], \mathbb{X}_M} \rangle = \langle Res_{\mathbb{X}_M}^{\mathbb{X}, z} \theta_{\xi}, \tilde{F}_{\Psi}^{[B], \mathbb{X}_M} \rangle$. En utilisant le lemme 6.9, il suffit de prouver que, si $[A] \neq [B]$, alors pour tout $(\lambda, y) \in \hat{A}_{I-reg}$, on a

$$\langle \theta(\mathbb{X}_M, \lambda, y, \psi), \tilde{F}_{\Psi}^{[B], \mathbb{X}_M} \rangle = 0$$

Ceci découle du lemme 6.12 ■

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $Car_k(\mathbb{X})$ l'ensemble des $A \in Car \mathbb{X}$ tels que la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{a} associée à A vérifie $dim(\mathfrak{a}_R \cap [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = k$ et $[Car_k(\mathbb{X})]$ l'ensemble des classes modulo H de $Car_k(\mathbb{X})$. Pour $j \geq -1$, on note $I_j(\mathbb{X})^{\infty}$ l'ensemble des fonctions $\Phi \in I(\mathbb{X})^{\infty}$ telles que, pour tout $l > j$ et pour tout $A \in Car_l(\mathbb{X})$, l'on ait $\Phi|_{A_{reg}} = 0$.

Lemme 6.14 *Soit $\Phi \in I(\mathbb{X})^{\infty}$ et soit k le plus petit entier tel que $\Phi \in I_k(\mathbb{X})^{\infty}$. Soit $A \in Car_k(\mathbb{X})$. On suppose que $b_{\psi} \Phi|_A \in \mathcal{S}(A)$.*

(i) *pour tout $\xi \in \hat{A}_{I-reg}$, l'intégrale $\int_{\mathbb{X}} \theta_{\xi}(x) \Phi(x) dx$ converge. On la note $\langle \theta_{\xi}, \Phi \rangle$.*

De plus, pour tout $y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$, la fonction $\Psi_y(\lambda) = \langle \theta(-\lambda, y), \Phi \rangle$ appartient à $\mathcal{S}(\hat{A})$.

(ii) *pour tout $x \in \mathbb{X}_{reg}$, la somme*

$$F_{\Phi}^{[A]}(x) = \int_{\hat{A}_0} \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}^{-1}} \sum_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} F(w.\lambda, y)(x) \langle \theta(-w.\lambda, y), \Phi \rangle d_0 \lambda$$

est convergente et on a $F_{\Phi}^{[A]} = \frac{|W_G(\mathfrak{a})|}{|W_H(\mathfrak{a})|} \sum_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} \tilde{F}_{\Psi_y}^{[A]}$.

(iii) *pour tout $a \in A_{reg}$, on a $F_{\Phi}^{[A]}(a) = |W_G(\mathfrak{a})| \Phi(a)$.*

Démonstration: Soit $A \in Car_k(\mathbb{X})$ et $\xi \in \hat{A}_{I-reg}$. Soit $B \in Car(\mathbb{X})$ et soit $x \in B_{reg}$. Par construction, on a $\theta_\xi(x) \neq 0$ si et seulement si $[B] \geq [A]$. Pour un tel B , comme $\Phi \in I_k(\mathbb{X})^\infty$, on a $\Phi(x) \neq 0$ si et seulement si $[B] = [A]$. Il suffit donc de prouver que l'intégrale $\int_A \theta_\xi(x)\Phi(x)dx$ est convergente. Or la fonction θ_ξ est bornée sur A_{reg} (propriété 6.3). D'autre part, pour $r > dim \mathfrak{a}_I$, l'intégrale $\int_A \frac{1}{(1+|x|)^r} dx$ est convergente. Par la relation de croissance vérifiée par Φ , on obtient la convergence de $\int_{\mathbb{X}} \theta_\xi(x)\Phi(x)dx$.

D'autre part, notons $\xi = (\lambda, y)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_A \theta_{\xi^*}(a)\Phi(a)da &= \sum_{z \in W_H(\mathfrak{a}).y} \int_{\mathfrak{a}_\Gamma} \theta_{\xi^*}(exp iX.z)\Phi(exp iX.z)d_{\mathfrak{a}}X \\ &= \sum_{u \in W_H(\mathfrak{a})/W_H^y(\mathfrak{a})} \int_{\mathfrak{a}_\Gamma} \theta(\lambda, y)(exp iX.uy)\Phi(exp iX.uy)d_{\mathfrak{a}}X \\ &= \sum_{u \in W_H(\mathfrak{a})/W_H^y(\mathfrak{a})} \sum_{v \in W_H^y(\mathfrak{a})} \varepsilon_I(v)\xi_{\rho_\psi}(y) \int_{\mathfrak{a}_\Gamma} e^{-i\langle v.\lambda, u^{-1}.X+Y_v \rangle} (b_\psi\Phi)(exp iu^{-1}X.y)d_{\mathfrak{a}}X \\ &= \sum_{u \in W_H(\mathfrak{a})/W_H^y(\mathfrak{a})} \sum_{v \in W_H^y(\mathfrak{a})} \xi_{\rho_\psi}(y) \int_{\mathfrak{a}_\Gamma} \varepsilon_I(v)e^{-i\langle \lambda, X+v^{-1}Y_v \rangle} (b_\psi\Phi)(exp ivX.y)d_{\mathfrak{a}}X \end{aligned}$$

Comme $exp iv.X.y = vexp i(X + Y_{v^{-1}}).y$, on a $b_\psi(exp ivX.y) = \varepsilon_I(v)b_\psi(exp i(X + Y_{v^{-1}}).y)$. Comme $Y_{v^{-1}} = v^{-1}Y_v$ modulo $\Gamma_{\mathfrak{a}}$, on obtient

$$\int_A \theta_{\xi^*}(a)\Phi(a)da = |W_H(\mathfrak{a})| \xi_{\rho_\psi}(y) \int_{\mathfrak{a}_\Gamma} e^{-i\langle \lambda, X \rangle} (b_\psi\Phi)(exp iX.y)d_{\mathfrak{a}}X$$

En particulier, en utilisant la propriété 5.2 vérifiée par b_ψ , pour tout $u \in W_H(\mathfrak{a})$, on a $\langle \theta(-u.\lambda, y), \Phi \rangle = \varepsilon_I(u) \langle \theta(-\lambda, u^{-1}y), \Phi \rangle$.

Par hypothèse, on a $b_\psi\Phi/A \in \mathcal{S}(A)$, et donc il est clair que $\Psi_y \in \mathcal{S}(\hat{A})$. Le lemme 6.8 (i) assure que

$$F_\Phi^{[A]} = \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}^{-1}} \sum_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} \int_{\hat{A}_0} F(w.\lambda, y)\Psi_y(w.\lambda)d_0\lambda = \frac{|W_G(\mathfrak{a})|}{|W_H(\mathfrak{a})|} \sum_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} \tilde{F}_{\Psi_y}^{[A]}$$

La fonction $b_\psi F_\Phi^{[A]}$ est continue sur A et on a

$$(b_\psi F_\Phi^{[A]})(x) = \int_{\hat{A}} \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}^{-1}} (b_\psi F_{w.\xi})(x) \langle \theta_{w.\xi^*}, \Phi \rangle d\xi$$

Si $x = exp iX.z$ avec $z \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}$, on obtient

$$(b_\psi F_\Phi^{[A]})(x) = \int_{\hat{A}_0} \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}^{-1}} \sum_{y \in W_H(\mathfrak{a}).z} (b_\psi F(w\lambda, y, \psi))(x) \langle \theta(-w\lambda, y, \psi), \Phi \rangle d_0\lambda$$

$$= \int_{\hat{A}_0} \sum_{w \in \mathcal{W}_a^{-1}} \sum_{u \in W_H(\mathfrak{a})/W_H^z(\mathfrak{a})} (b_\psi F(w\lambda, uz, \psi))(x) < \theta(-w\lambda, uz, \psi), \Phi > d_0\lambda$$

Comme pour $u \in W_H(\mathfrak{a})$, on a $F(w\lambda, uz, \psi)(x) < \theta(-w\lambda, uz, \psi), \Phi > = F(u^{-1}w\lambda, z, \psi)(x) < \theta(-u^{-1}w\lambda, z, \psi), \Phi >$, on obtient

$$\begin{aligned} (b_\psi F_\Phi^{[A]})(x) &= \int_{\hat{A}_0} \sum_{w \in W_H^z(\mathfrak{a}) \setminus W_G(\mathfrak{a})} (b_\psi F(w\lambda, z, \psi))(x) < \theta(-w\lambda, z, \psi), \Phi > d_0\lambda \\ &= \int_{\hat{A}_0} \sum_{w \in W_H^z(\mathfrak{a}) \setminus W_G(\mathfrak{a})} \sum_{u \in W_H^z(\mathfrak{a})} \xi_{\rho_\psi}(z) \varepsilon_I(u) e^{i\langle uw\lambda, X+Z_u \rangle} < \theta(-w\lambda, z, \psi), \Phi > d_0\lambda \end{aligned}$$

Or, pour $u \in W_H^z(\mathfrak{a})$, on a

$$\begin{aligned} < \theta(-uw\lambda, z, \psi), \Phi > &= \varepsilon_I(u) < \theta(-w\lambda, u^{-1}z, \psi), \Phi > \\ &= \varepsilon_I(u) < \theta(-w\lambda, \exp iu^{-1}Z_u z, \psi), \Phi > = \varepsilon_I(u) e^{-i\langle w\lambda, u^{-1}Z_u \rangle} < \theta(-w\lambda, z, \psi), \Phi > \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant la formule d'inversion de Fourier sur \mathfrak{a} , que l'on a

$$\begin{aligned} (b_\psi F_\Phi^{[A]})(x) &= |W_G(\mathfrak{a})| \int_{\hat{A}_0} e^{i\langle \lambda, X \rangle} \int_{\mathfrak{a}_\Gamma} e^{-i\langle \lambda, Y \rangle} (b_\psi \Phi)(\exp iY.z) d_a Y d_0\lambda \\ &= |W_G(\mathfrak{a})| (b_\psi \Phi)(\exp iX.z) \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme. ■

Théorème 6.15 Soit $\Phi \in I(\mathbb{X})$. On a la formule suivante

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{A \in [\text{Car}(\mathbb{X})]} \frac{1}{|W_G(\mathfrak{a})|} F_\Phi^{[A]} \\ &= \sum_{A \in [\text{Car}(\mathbb{X})]} \frac{1}{|W_G(\mathfrak{a})|} \int_{\hat{A}} \sum_{w \in \mathcal{W}_a^{-1}} F_{w.\xi} < \theta_{w.\xi^*}, \Phi > d\xi \end{aligned}$$

Démonstration: Soit n le plus petit entier tel que $\Phi \in I_n(\mathbb{X})^\infty$. Pour $k \leq n$, on pose

$$\Phi_k = \Phi - \sum_{j=n-k}^n \sum_{A \in [\text{Car}_j(\mathbb{X})]} \frac{1}{|W_G(\mathfrak{a})|} F_\Phi^{[A]}.$$

On va démontrer par récurrence sur k , les trois assertions suivantes :

H_k(1) $\Phi_k \in I_{n-k-1}(\mathbb{X})^\infty$,

H_k(2) pour tout $j \leq n - k - 1$, pour tout $B \in \text{Car}_j(\mathbb{X})$ et pour tout $\xi \in \hat{B}_{I-reg}$,

l'intégrale $\int_{\mathbb{X}} \theta_\xi(x) \Phi_k(x) dx$ est convergente. On la note $< \theta_\xi, \Phi_k >$.

On a alors $< \theta_\xi, \Phi_k > = < \theta_\xi, \Phi >$,

H_k(3) pour tout $A \in \text{Car}(\mathbb{X})$, on a $\Phi_k / A_{reg} \in \mathcal{S}(A_{reg})$.

On suppose tout d'abord $k = 0$. Par hypothèse sur Φ et construction des $F_{\Phi}^{[A]}$, il est clair que $\Phi_0 \in I_n(\mathbb{X})^\infty$.

Soit $B \in Car_n(\mathbb{X})$. On veut prouver que $\Phi_{0/B_{reg}} = 0$. Par construction, on a

$$\left(\sum_{A \in [Car_n(\mathbb{X})]} \frac{1}{|W_G(\mathbf{a})|} F_{\Phi}^{[A]} \right)_{/B_{reg}} = \frac{1}{|W_G(\mathbf{b})|} F_{\Phi/B_{reg}}^{[B]}$$

Par le lemme 6.14 (iii), on a $(F_{\Phi}^{[B]})_{/B_{reg}} = |W_G(\mathbf{b})| \Phi_{/B_{reg}}$. On obtient donc $\Phi_0 \in I_{n-1}(\mathbb{X})^\infty$.

Soit $j \leq n-1$, soit $B \in Car_j(\mathbb{X})$ et $\xi \in \hat{B}_{I-reg}$. Par la proposition 6.13 et le lemme 6.14 (ii), l'intégrale $\int_{\mathbb{X}} \theta_{\xi}(x) \Phi_0(x) dx$ converge et vaut $\langle \theta_{\xi}, \Phi \rangle$. On obtient donc **H₀(2)**.

L'assertion **H₀(3)** découle des lemmes 6.14 (ii) et 6.8 (ii) puisque $\Phi \in I(\mathbb{X})$.

On suppose l'hypothèse de récurrence vraie jusqu'au rang $k-1$. On a alors

$$\Phi_k = \Phi_{k-1} - \sum_{A \in [Car_{n-k}(\mathbb{X})]} \frac{1}{|W_G(\mathbf{a})|} F_{\Phi}^{[A]}$$

Comme par hypothèse de récurrence, on a $\Phi_{k-1} \in I_{n-k}(\mathbb{X})^\infty$ et pour tout $A \in Car_{n-k}(\mathbb{X})$, on a $F_{\Phi}^{[A]} \in I_{n-k}(\mathbb{X})^\infty$, on obtient $\Phi_k \in I_{n-k}(\mathbb{X})^\infty$.

Soit $B \in Car_{n-k}(\mathbb{X})$. On a également

$$\left(\sum_{A \in [Car_{n-k}(\mathbb{X})]} \frac{1}{|W_G(\mathbf{a})|} F_{\Phi}^{[A]} \right)_{/B_{reg}} = \frac{1}{|W_G(\mathbf{b})|} F_{\Phi/B_{reg}}^{[B]}$$

Comme la fonction Φ_{k-1} vérifie la condition de croissance **H_{k-1}(3)**, on peut appliquer le lemme 6.14 (iii) à Φ_{k-1} . On obtient ainsi $(F_{\Phi_{k-1}}^{[B]})_{/B_{reg}} = |W_G(\mathbf{b})| (\Phi_{k-1})_{/B_{reg}}$.

Maintenant par **H_{k-1}(2)**, pour tout $\xi \in \hat{B}_{I-reg}$, on a $\langle \theta_{\xi}, \Phi_{k-1} \rangle = \langle \theta_{\xi}, \Phi \rangle$ et donc $F_{\Phi}^{[B]} = F_{\Phi_{k-1}}^{[B]}$. On en déduit donc que $(\Phi_k)_{/B_{reg}} = 0$ ce qui donne **H_k(1)**.

Soit $j \leq n-k-1$, $B \in Car_j(\mathbb{X})$ et $\xi \in \hat{B}_{I-reg}$. Par **H_{k-1}(2)** appliquée à Φ_{k-1} , on a $\langle \theta_{\xi}, \Phi_{k-1} \rangle = \langle \theta_{\xi}, \Phi \rangle$ et pour tout $A \in Car_{n-k}(\mathbb{X})$, on a $\langle \theta_{\xi}, F_{\Phi}^{[A]} \rangle = \langle \theta_{\xi}, F_{\Phi_{k-1}}^{[A]} \rangle$. L'assertion **H_k(2)** découle alors de la proposition 6.13 et du lemme 6.14 (ii) appliqués à Φ_{k-1} .

La fonction Φ_{k-1} vérifie la condition de croissance **H_{k-1}(3)** et par **H_k(2)**, on a $F_{\Phi}^{[A]} = F_{\Phi_{k-1}}^{[A]}$ pour tout $A \in Car_{n-k}(\mathbb{X})$. L'assertion **H_k(3)** découle alors des lemmes 6.8 et 6.14 (ii) appliquée à Φ_{k-1} .

On considère maintenant $k = n$. Dans ce cas, on a $\Phi_n \in I_{-1}(\mathbb{X})^\infty$. Donc Φ_n est identiquement nulle sur \mathbb{X}_{reg} . Ceci est équivalent à

$$\Phi = \sum_{j=0}^n \sum_{A \in [Car_j(\mathbb{X})]} \frac{1}{|W_G(\mathbf{a})|} F_{\Phi}^A = \sum_{A \in [Car(\mathbb{X})]} \frac{1}{|W_G(\mathbf{a})|} F_{\Phi}^A$$

Ceci achève la démonstration du théorème. ■

7 Formule de Plancherel

Dans tout ce paragraphe, on fixe une sous-algèbre de Cartan fondamentale \mathfrak{b} de \mathfrak{h} . Soit Δ^+ un système positif de racines de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$ dans \mathfrak{g} tel que, si α est une racine complexe de Δ^+ alors $\bar{\alpha} \in \Delta^+$. On note Δ_{CP}^+ l'ensemble des racines complexes de Δ^+ et Σ l'ensemble des racines imaginaires de Δ^+ . Soit Σ_{Inc} l'ensemble des racines imaginaires non compactes de Σ .

Pour $\alpha \in \Delta^+$, on note h_α l'élément de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$ correspondant à α par la forme de Killing. Soit $\omega_{\mathfrak{b}} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} h_\alpha$. Soit B le sous-ensemble de Cartan de \mathbb{X} associé à \mathfrak{b} .

Lemme 7.1 (i) Soit $\Psi \in I(\mathbb{X})^\infty$. Alors la fonction $\partial(\omega_{\mathfrak{b}})b_\Sigma \Psi_{/B_{reg}}$ se prolonge continument en eH ,

(ii) Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$. On a la formule limite suivante :

$$|W_H(\mathfrak{b})| (4\pi i)^{|\Delta^+|} (-1)^{\Sigma_{Inc}} f(eH) = \partial(\omega_{\mathfrak{b}})b_\Sigma \mathcal{M}(f)(eH)$$

Démonstration: Soit $x_0 = eH$. D'après ([B3], paragraphe 8 et corollaire 2.3.2), il existe une fonction χ_{x_0} , H -invariante et à support compact modulo H qui vaut 1 au voisinage de x_0 . Il suffit donc de prouver que $\partial(\omega_{\mathfrak{b}})(b_\Sigma \chi_{x_0} \Psi_{/B_{reg}})$ se prolonge continument en x_0 . Mais on a $\chi_{x_0} \Psi \in I(\mathbb{X})$. Il suffit donc de prouver l'assertion (i) pour $\Psi = \mathcal{M}(f)$ avec $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$.

Soit \mathcal{V} un voisinage ouvert de 0 dans \mathfrak{h} tel que l'application Exp soit un difféomorphisme de \mathcal{V} sur son image. On rappelle que le jacobien J de l'application Exp est donné par $J(X) = \det\left(\frac{sh \ i \ ad(X)}{i \ ad(X)}\right)_{/\mathfrak{h}}$.

On définit la fonction \tilde{f} sur \mathcal{V} par $\tilde{f}(X) = f(Exp X)$. Soit $\Psi_{\tilde{f}}^{\mathfrak{b}}$ l'intégrale orbitale de \tilde{f} définie par Harish-Chandra. On a alors, pour $X \in \mathfrak{b}_{reg}$,

$$\Psi_{\tilde{f}}^{\mathfrak{b}}(X) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(X) \int_{H/Z_H(\mathfrak{b})} \tilde{f}(h.X) dh$$

Par conséquent, on a

$$(b_\Sigma \mathcal{M}(f))(Exp X) = \frac{\prod_{\alpha \in \Delta_{CP}^+} |e^{i\alpha(X)} - e^{-i\alpha(X)}| \prod_{\alpha \in \Sigma} (e^{i\alpha(X)} - e^{-i\alpha(X)})}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(X)} \Psi_{\tilde{f}}^{\mathfrak{b}}(X)$$

Vu l'hypothèse sur Δ_{CP}^+ , on a

$$\prod_{\alpha \in \Delta_{CP}^+} |e^{i\alpha(X)} - e^{-i\alpha(X)}| = (-1)^{|\Delta_{CP}^+|/2} \prod_{\alpha \in \Delta_{CP}^+} (e^{i\alpha(X)} - e^{-i\alpha(X)})$$

On a donc

$$(b_\Sigma \mathcal{M}(f))(Exp X) = (2i)^{|\Delta^+|} (-1)^{|\Delta_{CP}^+|/2} J(X)^{1/2} \Psi_{\tilde{f}}^{\mathfrak{b}}(X)$$

Comme $J(X)^{1/2}$ est invariant par $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ et analytique et que la fonction $\partial(\omega_{\mathfrak{b}})\Psi_{\tilde{f}}^{\mathfrak{b}}$ se prolonge continument en O ([V] partie I, Théorème 3.26), on en déduit que la fonction $\partial(\omega_{\mathfrak{b}})b_\Sigma \mathcal{M}(f)$ se prolonge continument en eH .

De plus, on a

$$[\partial(\omega_{\mathfrak{b}})J^{1/2}\Psi_{\tilde{f}}^{\mathfrak{b}}](0) = J(0)^{1/2}\partial(\omega_{\mathfrak{b}})\Psi_{\tilde{f}}^{\mathfrak{b}}(0) = \partial(\omega_{\mathfrak{b}})\Psi_{\tilde{f}}^{\mathfrak{b}}(0)$$

La formule limite d'Harish-Chandra donne (voir par exemple [D-V] II 1.2)

$$\frac{(-1)^{|\Sigma_{Inc}|+|\Delta_{CP}^+|/2}}{|W_H(\mathfrak{b})| (2\pi)^{\frac{1}{2}dim\mathfrak{h}/\mathfrak{b}}}\partial(\omega_{\mathfrak{b}})\Psi_{\tilde{f}}^{\mathfrak{b}}(0) = \tilde{f}(0)$$

On obtient ainsi

$$\partial(\omega_{\mathfrak{b}})(b_{\Sigma}\mathcal{M}(f))(eH) = |W_H(\mathfrak{b})| (4\pi i)^{|\Delta^+|}(-1)^{\Sigma_{Inc}} f(eH)$$

■

Soit $\mathfrak{a} \in Car(\mathfrak{h})$. On suppose que $\mathfrak{a}_I \subset \mathfrak{b}_I$ et $\mathfrak{b}_R \subset \mathfrak{a}_R$ (ceci est toujours possible à conjugaison par un élément de H près). On fixe $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_I^*$.

Soit $\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_I)$. On note $\Sigma_{Inc}^{\mathfrak{m}}$ l'ensemble des racines imaginaires non compactes de $\Sigma \cap \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$. On fixe $X_0 \in \mathfrak{a}_I$ tel que $\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{g}}(X_0)$ et on pose $\mathfrak{u} = \sum_{\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}); i\alpha(X_0) > 0} \mathfrak{g}_{\alpha}$. On

suppose en outre que $\Delta_I(\mathfrak{u}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}) \subset \Sigma$. Soit $\psi = \Delta_I^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. On note w_{μ} l'élément de $Z_G(\mathfrak{a}_R)$ tel que $w_{\mu} \cdot \psi$ soit l'ensemble des racines imaginaires α de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ vérifiant $-i\mu(h_{\alpha}) > 0$. Pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, on note h_{α} l'élément de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ correspondant à α par la forme de Killing et on pose $\omega_{\mathfrak{a}} = \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} h_{\alpha}$.

Proposition 7.2 *On a*

$$\partial(\omega_{\mathfrak{b}})(b_{\Sigma}F(\mu, eH, \psi))(eH) = s(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) |\omega_{\mathfrak{a}}(\mu)|$$

$$\text{où } s(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = |W_H(\mathfrak{b})| (-1)^{\frac{|\Delta_{CP}^+| - |\Delta_{CP}^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})|}{2}} \varepsilon(w_{\mu})(-1)^{|\psi|} (i)^{|\Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a})|} (-1)^{|\Sigma_{Inc}^{\mathfrak{m}}|}$$

Démonstration: On suppose tout d'abord que $\mu \in (\Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_I^*)_{reg}$. Soit $X \in \mathfrak{b}$. Par définition, on a

$$F(\mu, eH, \psi)(Exp X) = \sum_{h \in H \cap M \setminus \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_M}(Exp X)} F(\mathbb{X}_M, \mu)(Exp h.X) d_{\mathfrak{u}}(Exp h.X)$$

Si $h \in \mathcal{N}_H^{\mathbb{X}_M}(Exp X)$ alors $h \cdot \mathfrak{b} \in Car(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$. Les sous-algèbres \mathfrak{b} et $h \cdot \mathfrak{b}$ sont deux sous-algèbres de Cartan fondamentales de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$, elles sont donc $M \cap H$ conjuguées. On obtient ainsi :

$$F(\mu, eH, \psi)(Exp X) = \sum_{h \in W_{H \cap M}(\mathfrak{b}) \setminus W_H(\mathfrak{b})} F(\mathbb{X}_M, \mu)(Exp h.X) d_{\mathfrak{u}}(Exp h.X)$$

Or, pour $h \in W_H(\mathfrak{b})$, on a $b_{\Sigma}(Exp h.X) = \varepsilon_I(h) b_{\Sigma}(Exp X)$. Maintenant, si $\alpha \in \Delta_{CP}^+$ et $h \in W_H(\mathfrak{b})$ sont tels que $h \cdot \alpha \in -\Delta_{CP}^+$ alors $\bar{\alpha} \in \Delta_{CP}^+$ et $\overline{h \cdot \alpha} = h \cdot \bar{\alpha} \in -\Delta_{CP}^+$. On obtient donc $\varepsilon_I(h) = \varepsilon(h)$.

D'autre part, on a supposé que $\Delta_I(\mathfrak{u}, \mathfrak{b}_\mathbb{C}) \subset \Sigma$. Si on note $\Sigma_{\mathfrak{m}} = \Sigma \cap \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})$, on a donc $b_\Sigma d_{\mathfrak{u}} = b_{\Sigma_{\mathfrak{m}}}$.

On obtient ainsi

$$(b_\Sigma F(\mu, eH, \psi))(Exp X) = \sum_{h \in W_{H \cap M}(\mathfrak{b}) \setminus W_H(\mathfrak{b})} \varepsilon(h) (b_{\Sigma_{\mathfrak{m}}} F(\mathbb{X}_M, \mu))(Exp h.X)$$

et donc

$$\partial(\omega_{\mathfrak{b}})(b_\Sigma F(\mu, eH, \psi))(eH) = \frac{|W_H(\mathfrak{b})|}{|W_{H \cap M}(\mathfrak{b})|} \partial(\omega_{\mathfrak{b}})(b_{\Sigma_{\mathfrak{m}}} F(\mathbb{X}_M, \mu))(eH)$$

On écrit $\omega_{\mathfrak{b}} = \omega_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{m}} P$ où $\omega_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{m}} = \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})} h_\alpha$ et $P = \prod_{\alpha \in \Delta^+ - \Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})} h_\alpha$. Le polynôme P est $W(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})$ -invariant. On fixe $x \in M$ tel que $x.\mathfrak{a}_\mathbb{C} = \mathfrak{b}_\mathbb{C}$. Par conséquent, on a $\partial(P)(b_{\Sigma_{\mathfrak{m}}} F(\mathbb{X}_M, \mu)_{/B_{reg}}) = P(ix\mu)(b_{\Sigma_{\mathfrak{m}}} F(\mathbb{X}_M, \mu)_{/B_{reg}})$.

Nous allons maintenant calculer $\partial(\omega_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{m}})(b_{\Sigma_{\mathfrak{m}}} F(\mathbb{X}_M, \mu))(eH)$. Dans ce qui suit, on fixe $Z \in \mathfrak{b}_{reg}$ tel que $b_{\Sigma_{\mathfrak{m}}}(Exp Z) = 1$.

Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, on note $\pi(\lambda) = |det(ad \lambda)_{/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{m})^*/\mathfrak{a}^*}|^{1/2}$. Par définition, on a

$$F(\mathbb{X}_M, \mu)(Exp Z) = \hat{\beta}_{H \cap M.Z}(\mu) \pi(\mu)$$

On note $\Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a}) = x^{-1}.\Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})$. Cet ensemble n'est formé que de racines réelles. On pose $\pi_{\mathfrak{m}, \mathfrak{a}}^+ = \prod_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a})} \alpha$ et $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{m}} = \prod_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a})} h_\alpha$. Soit \mathcal{C} une chambre de Weyl de \mathfrak{a} dans $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$. Pour tout $Y \in \mathcal{C}$, on peut alors écrire

$$\hat{\beta}_{H \cap M.Z}(Y) = \frac{1}{\pi_{\mathfrak{m}, \mathfrak{a}}^+(Y)} \sum_{w \in W_M(\mathfrak{a}_\mathbb{C})} d(x, w, \mathcal{C}, \Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a})) e^{i \langle wx^{-1}.Z, Y \rangle}$$

où les $d(x, w, \mathcal{C}, \Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a}))$ sont des constantes.

On obtient donc

$$\partial(\omega_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{m}})((b_{\Sigma_{\mathfrak{m}}} F(\mathbb{X}_M, \mu))(eH) = \frac{\pi(\mu)}{\pi_{\mathfrak{m}, \mathfrak{a}}^+(\mu)} \omega_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{m}}(ix.\mu) \sum_{w \in W_M(\mathfrak{a}_\mathbb{C})} \varepsilon(w) d(x, w, \mathcal{C}, \Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a}))$$

Par le choix de $\Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a})$, on a $\frac{\pi(\mu)}{\pi_{\mathfrak{m}, \mathfrak{a}}^+(\mu)} \omega_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{m}}(ix.\mu) = (i)^{|\Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a})|} |\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{m}}(\mu)|$

Maintenant la distribution $\hat{\beta}_{H \cap M.Z}$ est invariante et propre pour l'action de $Z(\mathfrak{m})$ sur $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$. On note $\omega_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{m}} = \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})} h_\alpha$ et $\pi_{\mathfrak{m}, \mathfrak{b}}^+ = \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})} \alpha$. On a donc ([V] Partie I, 6 Théorème 5)

$$\partial(\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{m}})(\pi_{\mathfrak{m}, \mathfrak{a}}^+ \hat{\beta}_{H \cap M.Z})(0) = \partial(\omega_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{m}})(\pi_{\mathfrak{m}, \mathfrak{b}}^+ \hat{\beta}_{H \cap M.Z})(0)$$

Par l'expression précédente, on a

$$\partial(\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{m}})(\pi_{\mathfrak{m}, \mathfrak{a}}^+ \hat{\beta}_{H \cap M.Z})(0) = \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{m}}(ix^{-1}.Z) \sum_{w \in W_M(\mathfrak{a}_\mathbb{C})} \varepsilon(w) d(x, w, \mathcal{C}, \Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a}))$$

On note Σ_{Inc}^m l'ensemble des racines imaginaires non compactes de $\mathfrak{b}_\mathbb{C}$ dans \mathfrak{m} . D'après ([B1] corollaire 4.2.26), pour tout $X \in \mathfrak{b}_{reg}$, on a

$$\hat{\beta}_{H \cap M.Z}(X) = \frac{(-1)^{|\Sigma_{Inc}^m|}}{\pi_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}}^+(X)} \sum_{w \in W_{H \cap M}(\mathfrak{b})} \varepsilon(w) e^{i \langle wZ, X \rangle}$$

Par conséquent, on obtient

$$\partial(\omega_{\mathfrak{b}}^m)(\pi_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}}^+ \hat{\beta}_{H \cap M.Z})(0) = \omega_{\mathfrak{b}}^m(iZ) (-1)^{|\Sigma_{Inc}^m|} |W_{H \cap M}(\mathfrak{b})|$$

Comme on a supposé $\Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a}) = x^{-1} \cdot \Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})$, on obtient donc

$$\partial(\omega_{\mathfrak{b}}^m)((b_{\Sigma_{\mathfrak{m}}} F(\mathbb{X}_M, \mu))(eH)) = (i)^{|\Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a})|} |\omega_{\mathfrak{a}}^m(\mu)| (-1)^{|\Sigma_{Inc}^m|} |W_{H \cap M}(\mathfrak{b})|$$

Considérons maintenant $P(ix \cdot \mu) = \prod_{\alpha \in \Delta^+ - \Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})} ix \cdot \mu(h_\alpha)$.

On note ψ_μ l'ensemble des racines imaginaires de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ dans \mathfrak{g} telles que $-i\mu(h_\alpha) > 0$ et soit w_μ l'élément de $Z_G(\mathfrak{a}_\mathbb{R})$ tel que $w_\mu \cdot \psi_\mu = \psi$. Comme on a supposé que $\Delta_I(\mathfrak{u}, \mathfrak{b}_\mathbb{C}) \subset \Sigma$, on a $x \cdot \psi \subset \Sigma$ et donc, on peut écrire $x^{-1} \cdot (\Delta^+ - \Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})) = w_\mu \cdot \psi_\mu \cup \Delta_0 \cup \Delta_1$ où Δ_0 est l'ensemble des racines complexes α de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ telles que $x \cdot \alpha \in \Sigma$ et Δ_1 est l'ensemble des racines complexes α de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ telles que $x \cdot \alpha \in \Delta_{CP}^+$. De plus, on a $\Delta_0 \subset \Delta_{CP}(\mathfrak{u}, \mathfrak{a}_\mathbb{C})$. Par conséquent, si $\alpha \in \Delta_0$ alors $-\bar{\alpha} \in \Delta_0$. Dans ce cas, on a $\prod_{\alpha \in \Delta_0} i\mu(h_\alpha) = |\prod_{\alpha \in \Delta_0} \mu(h_\alpha)|$

Vu le choix de Δ_{CP}^+ , il existe $X_1 \in \mathfrak{b}_\mathbb{R}$ tel que Δ_{CP}^+ soit l'ensemble des racines de $\mathfrak{b}_\mathbb{C}$ dans \mathfrak{g} telles que $\alpha(X_1) > 0$. Par conséquent si $\alpha \in \Delta_1$ alors $\bar{\alpha} \in \Delta_1$ et donc $\prod_{\alpha \in \Delta_1} i\mu(h_\alpha) = (-1)^{|\Delta_1|/2} |\prod_{\alpha \in \Delta_1} i\mu(h_\alpha)|$. Si $\alpha \in \Delta_{CP}^+$ alors soit $x^{-1} \cdot \alpha$ est une racine réelle de \mathfrak{a} et dans ce cas $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})$, soit $x^{-1} \cdot \alpha$ est une racine complexe de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$. On a donc $|\Delta_1| = |\Delta_{CP}^+| - |\Delta_{CP}^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})|$. On obtient donc

$$P(ix \cdot \mu) = (-1)^{\frac{|\Delta_{CP}^+| - |\Delta_{CP}^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})|}{2}} (-1)^{|\psi|} \varepsilon(w_\mu) |P(\mu)|$$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned} & \partial(\omega_{\mathfrak{b}})(b_\Sigma F(\mu, eH, \psi)(eH)) \\ &= |W_H(\mathfrak{b})| (-1)^{\frac{|\Delta_{CP}^+| - |\Delta_{CP}^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_\mathbb{C})|}{2}} \varepsilon(w_\mu) (-1)^{|\psi|} (i)^{|\Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a})|} (-1)^{|\Sigma_{Inc}^m|} |\omega_{\mathfrak{a}}(\mu)| \end{aligned}$$

En utilisant la construction de $F(\mathbb{X}_M, \mu)$ pour des valeurs non régulières, on obtient que ce résultat est valable pour μ non régulier. \blacksquare

Lemme 7.3 *On rappelle que θ est une involution de Cartan de \mathfrak{g} commutant à σ . Soit $K_0 = K \cap H$ le sous-groupe compact maximal de H fixé par θ . Soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ la décomposition de Cartan de \mathfrak{h} relative à θ . Soit \mathfrak{a} une sous-algèbre de Cartan θ -stable de \mathfrak{h} et soit $M = Z_H(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}_0)$. Soit Δ_{Inc} et Δ_{CP} respectivement l'ensemble des racines imaginaires non compactes et complexes de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ dans \mathfrak{g} . On a alors*

$$|\Delta_{Inc}| + \frac{|\Delta_{CP}|}{2} = \dim(H/K_0) - \dim(M/M \cap K_0)$$

Démonstration: On a $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} + (\sum_{\alpha \in \Delta_I} \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta_{CP}} \mathfrak{g}_\alpha) \cap \mathfrak{h}$. On pose $\mathfrak{n} = (\sum_{\alpha \in \Delta_{CP}} \mathfrak{g}_\alpha) \cap \mathfrak{h}$. Cette algèbre est θ -stable. On choisit un système positif Δ^+ de racines tel que si on note $\mathfrak{n}^+ = (\sum_{\alpha \in \Delta_{CP}^+} \mathfrak{g}_\alpha) \cap \mathfrak{h}$, on a alors $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^+ + \theta(\mathfrak{n}^+)$. De plus, les applications $X \rightarrow X + \theta(X)$ et $X \rightarrow X - \theta(X)$ sont des injections de \mathfrak{n}^+ dans respectivement $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{k}_0$ et $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{p}_0$. On obtient ainsi

$$\dim \mathfrak{n}^+ \leq \dim(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{k}_0) \text{ et } \dim \mathfrak{n}^+ \leq \dim(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{p}_0)$$

Comme on a clairement $\dim \mathfrak{n} = 2\dim \mathfrak{n}^+ = \dim(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{k}_0) + \dim(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{p}_0)$, on obtient $|\Delta_{CP}^+| = \dim \mathfrak{n}^+ = \dim(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{p}_0)$.

D'autre part, on a $|\Delta_{Inc}| = \dim(\sum_{\alpha \in \Delta_I} \mathfrak{g}_\alpha) \cap \mathfrak{p}_0$.

On obtient ainsi

$$\dim \mathfrak{p}_0 - \dim \mathfrak{m} \cap \mathfrak{p}_0 = |\Delta_{Inc}| + |\Delta_{CP}^+|$$

Ceci achève la démonstration du lemme. ■

Soit $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{h})$. Soit $\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}_{I-reg}^*$. On note ψ_μ l'ensemble des racines imaginaires α de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ telles que $-i\mu(h_\alpha) > 0$. Soit ψ_{Inc} l'ensemble des racines imaginaires non compactes de ψ_μ . On rappelle que la fonction généralisée

$$C(\mu) = (-1)^{|\psi_{Inc}|} (i)^{|\psi_\mu|} \Theta(-\mu, eH, \psi_\mu)$$

est de type positif ([D] théorème 3, [H6] théorème 5.1 et proposition 6.4).

Théorème 7.4 (Formule de Plancherel) *Pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$, on a*

$$f(eH) = \sum_{\mathfrak{a} \in [\text{Car} \mathfrak{h}]} c_{\mathfrak{a}} \sum_{\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*} \int_{\lambda \in \mathfrak{a}_I^*} \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}^{-1}} \langle C(w(\mu + \lambda)), f \rangle | \det(ad(\mu + \lambda)_{/\mathfrak{h}^*/\mathfrak{a}^*}) |^{1/2} d_I \lambda$$

$$\text{où } c_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{b}}} \frac{1}{\text{vol}(\Gamma_{\mathfrak{a}}) |W_G(\mathfrak{a})|}$$

Démonstration: On pose $\Phi = \mathcal{M}(f)$ Par le théorème 6.15, on a

$$\Phi = \sum_{[A] \in [\text{Car}(\mathbb{X})]} \frac{1}{|W_G(\mathfrak{a})|} F_{\Phi}^{[A]}$$

Soit $A \in [\text{Car}(\mathbb{X})]$. Par la relation 6.3, il est clair que l'on a

$$\partial(\omega_{\mathfrak{b}})(b_{\Sigma} F_{\Phi}^{[A]})(eH) = \int_{\hat{A}_0} \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}^{-1}} \sum_{y \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}} \partial(\omega_{\mathfrak{b}})(b_{\Sigma} F(w.\lambda, y, \psi))(eH) \langle \theta(-w.\lambda, y, \psi), \Phi \rangle d_0 \lambda$$

Soit $(\lambda, y) \in \hat{A}$ et soit $X \in \mathfrak{b}_{reg}$. Reprenons la construction par prolongement de $F(\lambda, y, \psi)$ (théorème 5.8). La sous-algèbre \mathfrak{b} est également une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathfrak{h}_y . On a donc

$$F(\lambda, y, \psi)(Exp X) = \sum_{h \in W_{H_y}(\mathfrak{b}) \setminus W_H(\mathfrak{b})} F(\mathbb{X}_y, \lambda, eH_y, \psi_y)(exp ih.X.y) d_{\mathfrak{v}}(Exp h.X)$$

Maintenant, on a $F(\mathbb{X}_y, \lambda, eH_y, \psi_y)(\exp ih.X.y) \neq 0$ si et seulement si, il existe $v \in H_y$ tel que $v.\mathfrak{b} \in \text{Car}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$ et $v.y = y \in \mathbb{X}_M$. Or par construction, on a $\mathcal{W}_\mathfrak{a} \cap \mathbb{X}_M = \{eH\}$. On obtient ainsi que si $y \neq eH$ alors $F(\lambda, y, \psi)(\text{Exp } X) = 0$.

On a donc

$$\partial(\omega_{\mathfrak{b}})(b_{\Sigma}F_{\Phi}^{[A]})(eH) = \int_{\hat{A}_0} \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}^{-1}} \partial(\omega_{\mathfrak{b}})(b_{\Sigma}F(w.\lambda, eH, \psi))(eH) < \Theta(-w.\lambda, y, \psi), f > d_0\lambda$$

En utilisant le lemme 7.1 et la proposition 7.2, on obtient alors

$$(4\pi)^{|\Delta^+|} f(eH) = \sum_{\mathfrak{a} \in [\text{Car}(\mathfrak{h})]} \frac{s(\mathfrak{a})}{|W_G(\mathfrak{a})| \text{vol}(\Gamma_{\mathfrak{a}})} \sum_{\mu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^*} \int_{\lambda \in \mathfrak{a}_I^*} \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{a}}^{-1}} < C(w(\mu + \lambda)), f > |\omega_{\mathfrak{a}}(\mu + \lambda)| d_I \lambda$$

où $s(\mathfrak{a}) = (-1)^{\frac{|\Delta_{CP}^+| - |\Delta_{CP}^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})|}{2}} (-1)^{|\psi|} (i)^{|\Delta_{\mathfrak{m}}^+(\mathfrak{a})|} (-1)^{|\Sigma_{Incl}^{\mathfrak{m}}|} (-1)^{|\Sigma_{Incl}|} (-i)^{|\Delta^+|} (-1)^{|\psi_{Incl}|} (-i)^{|\psi|}$.
On a donc $s(\mathfrak{a}) = (-1)^{\frac{|\Delta_{CP}^+| - |\Delta_{CP}^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})|}{2}} (-1)^{|\Delta_{CP}^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})|/2} (-1)^{|\Sigma_{Incl}|} (-1)^{|\Sigma_{Incl}^{\mathfrak{m}}|} (-1)^{|\psi_{Incl}|}$. D'après ([W] page 225), on a (avec les notations du lemme précédent)

$$|\Sigma_{Incl}| + \frac{|\Delta_{CP}^+|}{2} = \frac{1}{2}[\dim H/K_0 - \text{rg } H + \text{rg } K_0]$$

$$\text{et } |\Sigma_{Incl}^{\mathfrak{m}}| + \frac{|\Delta_{CP}^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})|}{2} = \frac{1}{2}[\dim M \cap H/M \cap K_0 - \text{rg } M \cap H + \text{rg } M \cap K_0].$$

Or il est clair que $\text{rg}(H \cap M) = \text{rg}(H)$ et $\text{rg}(K_0) = \text{rg}(K_0 \cap M)$. On a donc $\frac{1}{2}[\dim H/K_0 - \dim M \cap H/M \cap K_0] = \frac{|\Delta_{CP}^+| - |\Delta_{CP}^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})|}{2} + |\Sigma_{Incl}| - |\Sigma_{Incl}^{\mathfrak{m}}|$. Le lemme précédent assure alors que $s(\mathfrak{a}) = 1$ ce qui achève la démonstration du théorème. ■

References

- [B1] A. Bouaziz, Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes, J. Funct. Anal. 70 (1987), 1-79,
- [B2] A. Bouaziz, Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives, Inv. Math. 115 (1994), 163-207,
- [B3] A. Bouaziz, Intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 27 (1994) 573-609,
- [B4] A. Bouaziz, Formule d'inversion des intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs (à paraître au J. Funct. Anal.),
- [Bou] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6, Hermann Paris (1981),
- [Bou2] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chapitres 7 et 8, Diffusion C.C.L.S. 1975,

- [D] P. Delorme, Coefficients généralisés de séries principales sphériques et distributions sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, *Invent. Math.* 105 (1991), 305-346,
- [D-V] M. Duflo et M. Vergne, La formule de Plancherel des groupes de Lie semi-simples réels, *Adv. Studies in Pure Mathematics* 14 (1988), 289-336,
- [H1] P. Harinck, Fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, thèse de doctorat, université Paris 7,
- [H2] P. Harinck, Fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 23 (1990), 1-38,
- [H3] P. Harinck, Fonctions généralisées sphériques induites sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ et applications, *J. of Funct. Anal.* 103 (1992), 104-127,
- [H4] P. Harinck, Correspondance de distributions sphériques entre deux espaces symétriques du type $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, *J. of Funct. Anal.* 124 (1994), 427- 474,
- [H5] P. Harinck, Inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel pour $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, *C.R.Acad. Sci. Paris*, t 320 (1995), 1295-1298,
- [H6] P. Harinck, Base de la série la plus continue de fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, prépublication,
- [O-V] A.L. Onishik et E. B. Vinberg, *Lie Groups and Algebraic Groups*, Springer- Verlag Berlin Heidelberg (1990),
- [Sa1] S. Sano, Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples $G_{\mathbb{C}}/G$, *J. of Math. of Kyoto univ.*, 31 (1991), 377-417,
- [Sa2] S. Sano, Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples $G_{\mathbb{C}}/G$, *J. of Math. of Kyoto univ.*, 31 (1991), 377-417,
- [V] V. S. Varadarajan, *Harmonic analysis on real reductive groups*, *Lecture Notes in Mathematics* 576, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New-York 1977,
- [W] G. Warner, *Harmonic analysis on semisimple Lie groups II*, Springer Verlag, Berlin, New-York (1972).