Quelques solutions d'exercices de concours

David Hernandez

1 ENS Ulm

1.1 Enoncé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} Id & A \\ A* & Id \end{pmatrix}$. Montrer que B positive $\Longleftrightarrow \|A\| \leqslant 1$, où $\|A\|$ désigne la norme héritée du produit hermitien canonique sur $\mathbb{C}^n$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $F = \{{}^t\bar{X}AX, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\|X\| = 1\}$. Soit (H) la propriété : $\exists(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ et F est contenu dans le triangle de sommets z_1, z_2, z_3. Montrer que $(H) \Longrightarrow \|A\| \leqslant 1$.

On pourra d'abord montrer que $(H) \Longleftrightarrow (H')$ avec (H') la proprité $\exists(A_1, A_2, A_3) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^3$, hemitiennes positives, $\exists(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, tels que $A = z_1A_1 + z_2A_2 + z_3A_3, |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ et $Id = A_1 + A_2 + A_3$.

1.2 Une solution

Soit $X \in \mathbb{C}^{2n}$. On pose $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ où $(X_1, X_2) \in (\mathbb{C}^n)^2$. Alors :

$$ {}^t\bar{X}BX = {}^t\bar{X}_1X_1 + {}^t\bar{X}_2X_2 + {}^t\bar{X}_1AX_2 + {}^t\bar{X}_2A^*X_1 $$

Supposons que $\|A\| \leqslant 1$. Alors l'inégalitée de Cauchy-Schwartz implique :

$$ |{}^t\bar{X}_1AX_2| \leqslant \|X_1\|\|X_2\| $$

et

$$ |{}^t\bar{X}_2A^*X_1| \leqslant \|X_1\|\|X_2\| $$

car $\|A\| = \|A^*\|$. D'où

$$ {}^t\bar{X}BX \geqslant \|X_1\|^2 + \|X_2\|^2 - 2\|X_1\|\|X_2\| = (\|X_1\| - \|X_2\|)^2 \geqslant 0 $$

Ceci étant vrai quelque soit $X \in \mathbb{C}^n$, B est positive.

Réciproquement, supposons à présent que B est positive. Soit $Y \in \mathbb{C}^n$. Pour $X_2 = Y$ et $X_1 = -AY$, on obtient ${}^t\bar{X}BX = \|Y\|^2 - \|AY\|^2 \geqslant 0$, soit $\|AY\| \leqslant \|Y\|$. Ceci étant vrai quelque soit $Y \in C^n$, on obtient $\|A\| \leqslant 1$.

Montrons à présent le résultat de l'indication :

Lemme 1. *Les propriétés (H) et (H') sont équivalentes.*

Démonstration: : Supposons (H') vérifiée. Soit $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|X\| = 1$. Alors

$$ {}^t\bar{X}AX = ({}^t\bar{X}A_1X)z_1 + (t\bar{X}A_2X)z_2 + ({}^t\bar{X}A_3X)z_3 $$

avec

$$ {}^t\bar{X}A_1X + {}^t\bar{X}A_2X + {}^t\bar{X}A_3X = \|X\|^2 = 1 $$

On obtient ainsi une écriture de ${}^t\bar{X}AX$ comme barycentre de z_1, z_2, z_3 à coefficients positifs. Donc z_1, z_2, z_3 conviennent pour (H).

Supposons (H) vérifiée. Soit $X \in \mathbb{C}^n, \|X\| = 1$. On peut alors écrire :

$$ {}^t\bar{X}AX = z_1 + \beta(X)(z_2 - z_1) + \gamma(X)(z_3 - z_1) $$

avec

$$\beta(X) \geqslant 0, \gamma(X) \geqslant 0, 1-(\beta(X)+\gamma(X)) \geqslant 0$$

On peut toujours supposer que $(z_2 - z_1, z_3 - z_1)$ est une base de $\mathbb{C}$. Pour $(Y, Z) \in (C^n)^2$, on peut alors définir $f(Y, Z)$ et $g(Y, Z)$ de manière unique par :

$$^t\bar{Y}AZ = z_1{}^t\bar{Y}Z + (z_2 - z_1)f(Y, Z) + (z_3 - z_1)g(Y, Z)$$

On vérifie alors immédiatement que f et g sont sesquilinéaires. Soient B_2 et B_3 les matrices associées respectivement à f et g, puis

$$A_2 = \frac{B_2 + B_2{}^*}{2} \;,\; A_3 = \frac{B_3 + B_3{}^*}{2} \;,\; A_1 = Id - A_2 - A_3$$

Alors A_1, A_2, A_3 sont hemitiennes. Pour $X \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\|X\| = 1 \Longrightarrow {}^t\bar{X}A_2X = \beta(X), {}^t\bar{X}A_3X = \gamma(X), {}^t\bar{X}A_1X = 1 - \beta(X) - \gamma(X)$$

donc A_1, A_2, A_3 sont positives, et finalement $A = z_1A_1 + z_2A_2 + z_3A_3$, d'où (H'). □

Le lemme étant acquis, supposons (H), et considérons $z_1, z_2, z_3, A_1, A_2, A_3$ comme dans (H'). Alors :

$$B = \begin{pmatrix} Id & A \\ A^* & Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & z_1A_1 \\ \bar{z_1}A_1 & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 & z_2A_2 \\ \bar{z_2}A_2 & A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_3 & z_3A_3 \\ \bar{z_3}A_3 & A_3 \end{pmatrix}$$

Or si $z \in \mathbb{C}$, A est hermitienne positive et $|z| = 1$, alors $C = \begin{pmatrix} A & zA \\ \bar{z}A & A \end{pmatrix}$ est positive. En effet $C = \begin{pmatrix} 1 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $P(X) = X(X-2)$, et se laisse donc diagonaliser sous la forme $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que C est semblable à $\begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est diagonalisable à valeurs propres positives puisque A l'est. Donc toutes les valeurs propres de C hermitienne sont positives, donc C est positive. Ainsi B est positive comme somme de matrices hermitiennes positives, donc $\|A\| \leqslant 1$ d'après la première partie de l'exercice.

2 Ecole Polytechnique

2.1 Enoncé

On considère l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ (E). Que dire des racines ?

Soit α la racine réelle. Etudier $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{sin(\alpha^n \frac{\pi}{2})}{n}$.

Que dire de $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{cos(\alpha^n \frac{\pi}{2})}{n}$?

2.2 Une solution

Une étude de la fonction réelle $f : x \mapsto x^3 - x - 1$ montre que (E) admet une unique racine réelle α et que $\alpha > 1$ (car $f(1) < 0$). Le polynôme associé à f étant à coefficients réels, notons β et γ les deux autres racines complexes conjuguées. On a alors : $\alpha\beta\gamma = 1$ et $\beta\gamma = |\beta|^2 = |\gamma|^2 \Longrightarrow |\beta| < 1$.

Soit $u_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ pour $n \in N$. Alors $\forall n \in N, u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$. Or $u_0 = 3, u_1 = 0, 0 = u_1^2 = u_2 - 2 \Longrightarrow u_2 = 2$. On obtient donc par une récurrence immédiate $\forall n \in N, u_n \in Z$.

Soit

$$w_n = \frac{1}{n}[sin(\alpha^n \frac{\pi}{2}) - sin(u_n \frac{\pi}{2})] = \frac{2}{n}cos[(\alpha^n + u_n)\frac{\pi}{4}]sin[-(\beta^n + \gamma^n)\frac{\pi}{4}]$$

Alors

$$|w_n| \leqslant \frac{2}{n}|sin[(\beta^n + \gamma^n)\frac{\pi}{4}]| \underset{n \longrightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n}|\beta^n + \gamma^n|\frac{\pi}{4}$$

car $|\beta| < 1$. Or ceci est le terme général d'une série convergente, donc $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{sin(\alpha^n \frac{\pi}{2})}{n}$ est de même nature que $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{sin(u_n \frac{\pi}{2})}{n}$.

Notons encore u_n la suite vue dans $Z/4Z$. La quantité $sin(u_n\frac{\pi}{2})$ est bien définie. On calcule :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
u_n	3	0	2	3	2	1	1	3	2	0	1	2	1	3	3	0	2

Soit $v_n = u_{n+14}$. On a alors pour $n = 0,1,2, u_n = v_n$ et on obtient donc par une récurrence immédiate $\forall n \in N, u_n = v_n$. C'est à dire que $(u_n)_n$ est 14-pèriodique.

Le nombre de termes 14 étant fixé, et comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sin(u_n\frac{\pi}{2})}{n} = 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{sin(u_n\frac{\pi}{2})}{n}$ est de même nature que $\sum\limits_{n\geq 1}\left[\sum\limits_{k=0}^{13} \frac{sin(u_{n+k}\frac{\pi}{2})}{n+k}\right]$.

Or

$$\sum_{k=0}^{13}\frac{sin(u_{n+k}\frac{\pi}{2})}{n+k} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+5} + \frac{1}{n+6} - \frac{1}{n+7} + \frac{1}{n+10} + \frac{1}{n+12} - \frac{1}{n+13} \underset{n\to\infty}{=} O(\frac{1}{n^2})$$

D'où la convergence des séries.

De manière analogue, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{cos(\alpha^n\frac{\pi}{2})}{n}$ est de même nature que $\sum\limits_{n\geq 1}\left[\sum\limits_{k=0}^{13} \frac{cos(u_{n+k}\frac{\pi}{2})}{n+k}\right]$. Mais $\sum\limits_{k=0}^{13} \frac{cos(u_{n+k}\frac{\pi}{2})}{n+k}$ est en $\frac{1}{n}$, d'où la divergence des séries.

3 ENS Lyon

3.1 Enoncé

Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}^+ - \{0\})^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -(b+1)x(t) + x^2(t)y(t) + a \\ y'(t) = x(t) - x^2(t)y(t) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où les fonctions inconnues x et y sont définies sur un intervalle contenu dans $\mathbb{R}^+$ et contenant 0.

Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale définie sur $[0, t_m[$ où $t_m \in (\mathbb{R}^+ - \{0\}) \cup \{+\infty\}$.

On suppose de plus que $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Montrer que $t_m = +\infty$ et que :

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} x(t) \geqslant \frac{a}{b+1}$$

3.2 Une solution

La fonction $(u,v) \mapsto (-(b+1)u + u^2v + a, u - u^2v)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est à dire qu'il existe une unique solution maximale $(x, y,]t_1, t_m[)$ telle que $0 \in]t_1, t_m[$ et $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. En particulier cette solution restreinte à $[0, t_m[$ vérifie les conditions de l'énoncé.

On suppose à présent que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

Supposons de plus que x s'annule. Soit alors $t_0 = inf\{t > 0, x(t) = 0\}$. La fonction x étant continue, on a $t_0 > 0$ et $x(t_0) > 0$. Or $x'(t_0) = a > 0$. Donc un développement limité de x au voisinage de t_0 montre l'existence d'un $\epsilon > 0$ tel que $t_0 - \epsilon > 0$ et $x(t_0 - \epsilon) > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne une annulation de x sur $]0, t_0 - \epsilon[$, contradiction. Donc, $\forall t \in [0, t_m[, x(t) > 0$.

Supposons que y s'annule. Soit alors $t_1 = inf\{t > 0, y(t) = 0\}$. Alors $y'(t_1) = x(t_1) > 0$, et on obtient de même que précédemment une contradiction. Donc $\forall t \in [0, t_m[, y(t) > 0$.

Supposons que $t_m < +\infty$. Remarquons :

$$\forall t \in [0, t_m[, (x+y)'(t) = -bx(t) + a \leqslant a$$

Et donc par intégration

$$\forall t \in [0, t_m[, (x+y)(t) \leqslant x_0 + y_0 + at_m$$

Ces fonctions étant positives, elles sont bornées sur $[0, t_m[$, puis x' et y' sont aussi bornées sur $[0, t_m[$. Les fonctions x et y vérifient alors le critère de Cauchy en t_m, ce qui permet de les prolonger par continuité en t_m, puis de prolonger x' et y', et on obtient en appliquant le théorème de prolongement des applications de classe $\mathcal{C}^1$ une solution sur $[0, t_m]$. Contradiction. Donc $t_m = +\infty$.

Distinguons à présent deux cas :

Premier cas : $\exists t_0 \in R, x(t_0) > \frac{a}{b+1}$.
Supposons alors :

$$\exists t > t_0, x(t) = \frac{a}{b+1}$$

Soit alors

$$t_1 = inf\{t \geqslant t_0, x(t) = \frac{a}{b+1}\}$$

On a alors $t_1 > t_0$ et $x'(t_1) = x^2(t_1)y(t_1) > 0$. Donc

$$\exists t_2 \in]t_0, t_1[, x(t_2) < \frac{a}{b+1}$$

et

$$\exists t_3 \in]t_0, t_2[, x(t_3) = \frac{a}{b+1}$$

contradiction. Donc

$$\forall t \geqslant t_0, x(t) > \frac{a}{b+1} \Longrightarrow \underline{\lim}_{t \to +\infty} x(t) \geqslant \frac{a}{b+1}$$

Deuxième cas : $\forall t \geqslant 0, x(t) \leqslant \frac{a}{b+1}$.
Alors $x' \geqslant x^2 y > 0$. La fonction x est croissante et majorée, admet donc une limite ξ en $+\infty$. Supposons :

$$\xi < \frac{a}{b+1}, \exists t_0 \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall t \geqslant t_0, a - (b+1)x(t) \geqslant \epsilon$$

Alors $\forall t \geqslant t_0, x'(t) \geqslant \epsilon$ en contradiction avec le fait que x est bornée. Donc

$$\xi = \frac{a}{b+1} = \underline{\lim}_{t \to +\infty} x(t)$$

4 ENS Cachan

4.1 Enoncé

Soient $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, et

$$E = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^2), u(0) = A, u(1) = B\}$$

Soit $n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{+*}$, de classe $\mathcal{C}^2$.Pour $u \in E$, on pose :

$$F(u) = \int_0^1 n(u(t))|u'(t)|^2 dt$$

On suppose $\exists u_0 \in E, F(u_0) = \min_{u \in E} F(u)$.

Montrer que u_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ et trouver une équation différentielle vérifiée par u_0.

4.2 Une solution

Soit $\Lambda \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^2)$, telle que $\Lambda(0) = \Lambda(1) = 0$, et $g(\lambda) = F(u_0 + \lambda\Lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Les théorèmes classiques s'appliquent,donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$g'(\lambda) = \int_0^1 < grad(n)_{u_0(t)+\lambda\Lambda(t)}, \Lambda(t) > |u_0'(t) + \lambda\Lambda'(t)|^2 dt + \int_0^1 n(u_0(t) + \lambda\Lambda(t)) 2 < u_0'(t) + \lambda\Lambda'(t), \Lambda'(t) > dt$$

Or g admet un minimum en 0, donc

$$0= \int_0^1 (< \Lambda(t), f(t) > + < \Lambda'(t), h(t) >) dt$$

où

$$f(t) = |u_0'(t)|^2 grad(n)_{u_0(t)} \text{ et } h(t) = 2n(u_0(t))u_0'(t)$$

Supposons d'abord que u_0 est $\mathcal{C}^2$. Les fonctions g et h sont alors de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut intégrer par parties :

$$0 = \int_0^1 < \Lambda(t), g(t) + h'(t) > dt$$

Montrons le lemme :

Lemme 2. *Soit $l \in \mathcal{C}^0([0,1], R)$, telle que $\forall j \in \mathcal{C}^1([0,1], R)$ vérifiant $j(0) = j(1) = 0$, on ait $\int_0^1 (lj)(t)dt = 0$. Alors $l = 0$.*

Démonstration: Supposons $l \neq 0$, par exemple $\exists x_0 \in [0,1], l(x_0) > 0$. La fonction l est continue, donc $\exists \epsilon > 0, f > 0$ sur $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$. On peut choisir g telle que $g > 0$ sur $]x_0 - \frac{\epsilon}{2}, x_0 + \frac{\epsilon}{2}[$ et $g = 0$ sur $[0,1] -]x_0 - \frac{\epsilon}{2}, x_0 + \frac{\epsilon}{2}[$. On obtient alors $\int_0^1 fg > 0$, contradiction. □

On étend immédiatement le résultat de ce lemme à des fonctions vectorielles en dimension finie, et donc $g + h' = 0$, ce qui donne une équation différentielle pour u_0.

Montrons à présent que u_0 est de classe $\mathcal{C}^2$. Pour ce faire montrons le lemme

Lemme 3. *Soient a, b des fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telles que $\forall c \in \mathcal{C}^1([0,1])$ vérifiant $c(0) = c(1) = 0$, on ait $\int_0^1 ca = \int_0^1 c'b$. Alors b est de classe $\mathcal{C}^1$ et $b' = a$.*

Démonstration: Soit A une primitive de a. Alors

$$\int_0^1 c'(A - b) = 0$$

Soit $(x_0, x_1) \in [0,1]^2$ tel que $x_0 < x_1$. Soit $c_\epsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$c_\epsilon(0) = 0 \ , \ c_\epsilon'(x_0) = -\frac{1}{\epsilon} \ , \ c_\epsilon'(x_1) = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\forall t \in [0, x_0 - \epsilon] \bigcup [x_0 + \epsilon, x_1 - \epsilon] \bigcup [x_1 + \epsilon, 1], c_\epsilon'(t) = 0$$

et c_ϵ' affine sur $[x_0 - \epsilon, x_0], [x_0, x_0 + \epsilon], [x_1 - \epsilon, x_1]$ et $[x_1, x_1 + \epsilon]$. Alors

$$0 = \int_0^1 c_\epsilon'(A - b) \underset{\epsilon \to 0}{\to} (A - b)(x_1) - (A - b)(x_0)$$

Donc $b = A + constante$, et le lemme est montré. □

On étend immédiatement le résultat de ce lemme au cas vectoriel, et on en déduit que h est de classe $\mathcal{C}^1$. Mais :

$$u_0'(t) = \frac{1}{2} \frac{h(t)}{n(u_0(t))}$$

(n étant à valeurs dans $R^+ - \{0\}$). Donc u_0 est de classe $\mathcal{C}^2$.

Remarques : on peut interpréter physiquement n comme l'indice optique d'un milieu et F caractérise l'énergie associée au chemin de A à B. Si n est constant, on peut montrer que l'équation obtenue pour u_0 admet comme solution $u_0' = constante$, ce qui montre que le trajet optimum du point de vue énergétique pour la lumière de A à B est rectiligne.

Références

[Her99] **D. Hernandez**, *Corrections d'exercices posés à l'oral des concours*
Revue de Mathématiques Spéciales, RMS 1998-1999, vol. 9-10, pp 1269-1270, 1333-1334, 1349-1351