t-ANALOGUES DES OPÉRATEURS D'ÉCRANTAGE ASSOCIÉS AUX q-CARACTÈRES

DAVID HERNANDEZ

Résumé. Nous proposons des opérateurs d'écrantage pour la théorie des q, t-caractères de Nakajima ([4], [5]), analogues aux opérateurs d'écrantage de Frenkel et Reshetikhin relatifs à leur théorie des q-caractères pour les représentations de dimension finie des algèbres affines quantifiées [2], avec en particulier les mêmes propriétés de symétrie. La théorie de Nakajima, établie dans le cas simplement laçé, utilise des anneaux non-commutatifs. Nous aurons ainsi à considérer des bimodules adaptés à ces structures, mais notre construction étant purement algébrique, elle est étendue au cas non-simplement laçé.

t-ANALOGS OF SCREENING OPERATORS RELATED TO q-CHARACTERS

ABSTRACT. Frenkel and Reshetikhin introduced screening operators related to q-characters of finite dimensional representations of quantum affine algebras [2]. We propose t-analogs of screening operators related to Nakajima's q, t-characters ([4], [5]) with the same properties of symmetry. Nakajima's approach is geometric and deals with the simply laced case. He used non-commutative rings, so we propose bimodules. But our construction is purely algebraic, and can be extended to the non-simply laced case.

For convenience of the reader we give an english translation of the introduction :

Introduction

Let $q \in \mathbb{C}^*$ such that q is not a root of unity.

In the case of semi-simple Lie algebras $\mathfrak{g}$, the structure of the Grothendieck ring $\text{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ of finite dimensional representations of the quantum algebra $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ is well understood, see [6]. It is analogous to the classic case $q = 1$. In particular we have ring isomorphisms :

$$\text{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})) \simeq \text{Rep}(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{Z}[\Lambda]^W \simeq \mathbb{Z}[T_1, ..., T_n]$$

deduced from the injective homomorphism of characters χ :

$$\chi(V) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \text{dim}(V_\lambda)\lambda$$

where V_λ are weight spaces of a representation V and Λ is the set of weight of V.

For the general case of Kac-Moody algebras the picture is less clear. In the affine case $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, Frenkel and Reshetikhin [2], motivated by the theory of deformed W-algebras, have recently introduced an injective ring homomorphism of q-characters :

$$\chi_q : \text{Rep}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \rightarrow \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{1 \leq i \leq n, a \in \mathbb{C}^*} = \mathcal{Y}$$

The construction of χ_q uses the universal R-matrix. The homomorphism χ_q allows to understand the ring $\text{Rep}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \simeq \mathbb{Z}[X_{i,a}]_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*}$. The classical limit $q \rightarrow 1$ of χ_q is the usual homomorphism of characters. In fact χ_q gives informations about the decomposition in Jordan subspaces for a class $(\phi_{i,m}^{\pm})_{m \in \mathbb{Z}, i \in I}$ of commutative elements of $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$:

$$\chi_q(V) = \sum_{\gamma} \text{dim}(V_{(\gamma)}) \prod_{i \in I} \prod_{r=1..k_{\gamma i}} Y_{i,a_{\gamma ir}} \prod_{s=1..l_{\gamma i}} Y_{i,b_{\gamma ir}}^{-1}$$

where $V_{(\gamma)}$ is the Jordan subspace of weight γ :

$$\sum_{m\geq 0}\gamma^{\pm}_{i,\pm m}u^{\pm m}=\gamma_i^{\pm}(u)=q_i^{k_{\gamma i}-l_{\gamma i}}\frac{Q_i(uq_i^{-1})R_i(uq_i)}{Q_i(uq_i)R_i(uq_i^{-1})}$$

where $a_{\gamma ir}$ are roots of the polynomial Q_i and $b_{\gamma ir}$ roots of the polynomial R_i. The homomorphism of q-characters has a symmetry property analogous to the classic action of the Weyl group $\mathrm{Im}(\chi)=\mathbb{Z}[\Lambda]^W$: Frenkel and Reshetikhin defined n screnning operators (with $A_{i,a}\in\mathcal{Y}$ monomials) :

$$S_i:\mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{a\in\mathbb{C}^*,i\in I}=\mathcal{Y}\rightarrow\bigoplus_{a\in\mathbb{C}^*}\mathcal{Y}.S_{i,a}/\sum_{a\in\mathbb{C}^*}\mathcal{Y}.(S_{i,aq_i^2}-A_{i,aq_i}.S_{i,a})$$

There is a leibnitz rule $(S_i(UV)=US_i(V)+VS_i(U))$, and $S_i(Y_a)=Y_a.S_a$. They conjectured :

$$\mathrm{Im}(\chi_q)=\bigcap_{i\in I}\mathrm{Ker}(S_i)$$

They proved it in the case sl_2 [2], and Frenkel, Mukhin proved it in the general case [3].

These operators give informations about the combinatorial structure of q-characters. For example :

$$\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))\simeq\mathrm{Im}(\chi_q)=\mathfrak{K}=\bigcap_{i\in I}(\mathbb{Z}[Y_{j,a}^{\pm}]_{j\neq i,a\in\mathbb{C}^*}\mathbb{Z}[Y_{i,b}+Y_{i,b}A_{i,bq_i}^{-1}]_{b\in\mathbb{C}^*})$$

In the ADE case Nakajima introduced t-analogs of q-characters with geometrical approach using quiver varieties [4], [5]. He defined maps $\chi_{q,t}$ et $\hat{\chi}_{q,t}$ from $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ to polynomial rings respectively $\mathcal{Y}_t=\mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm},t^{\pm}]_{i\in I,a\in\mathbb{C}^*}$ and $\hat{\mathcal{Y}}_t=\mathbb{Z}[V_{i,a},W_{i,a},t^{\pm}]_{i\in I,a\in\mathbb{C}^*}$. From representation theory point of view, it gives more informations about Jordan subspaces. He introduce a new non-commutative multiplication $*$ on $\hat{\mathcal{Y}}_t$.

In this paper we propose t-analogs of screening operators $\hat{S}_{i,t},S_{i,t}$ related to applications $\chi_{q,t}$ and $\hat{\chi}_{q,t}$.

This article is organized as follows. In section 2 we recall the fundamental symmetry property of Frenkel, Reshetikhin's screnning operators and some results on Nakajima's ring $\hat{\mathcal{Y}}_t$. In section 3 we define operators $\hat{S}_{t,i}^l$. We introduce a bimodule structure such that we have a Leibnitz rule. In section 4 we define t-analogs of screening operators $\hat{S}_{t,i}$. In the ADE case we give an interpretation related to Nakajima's multiplication $*$. These operators verify the expected symmetry property in theorem 2 :

$$\bigcap_{i\in I}\mathrm{Ker}(\hat{S}_i)=\hat{\mathfrak{K}}\supseteq\mathrm{Im}(\hat{\chi}_{q,t})$$

In section 5 we define operators $S_{i,t}$ related to the ring $\mathcal{Y}_t$. The diagram :

$$\begin{array}{ccccc} & \hat{\mathcal{Y}}_t & \xrightarrow{\hat{S}_{i,t}} & \hat{\mathcal{Y}}_{t,i} & \\ \hat{\Pi}_t\downarrow & & & \downarrow & \hat{\Pi}_{t,i} \\ & \mathcal{Y}_t & \xrightarrow{S_{t,i}} & \mathcal{Y}_{t,i} & \\ \Pi_t\downarrow & & & \downarrow & \Pi_{t,i} \\ & \mathcal{Y} & \xrightarrow{S} & \mathcal{Y}_i & \end{array}$$

is commutative. We have a symmetry property in theorem 3 :

$$\bigcap_{i\in I}\mathrm{Ker}(S_i)=\mathfrak{K}=\mathrm{Im}(\chi_{q,t})$$

where $\chi_{q,t}$ is $\tilde{\chi}_{q,t}$ in [4]. In section 6 we construct involutions analog to the Nakajima's one.

The construction use a bimodule structure on the free left module $\bigoplus_{a\in\mathbb{C}^*}\hat{\mathcal{Y}}_tS_{i,a}$, and the t-analog of $\sum_{a\in\mathbb{C}^*}\mathcal{Y}.(S_{i,aq_i^2}-A_{i,aq_i}.S_{i,a})$ is a subbimodule. The bimodule structure is given for any $m\in\hat{\mathcal{Y}}_t$ monomial by :

$$S_{i,a}m=t^{2u_{i,a}(m)}mS_{i,a}$$

1. Introduction

Dans ce qui suit $q \in \mathbb{C}^*$ est supposé ne pas être une racine de l'unitée.

Dans le cas d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$, la structure de l'anneau de Grothendieck $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ des représentations de dimensions finie de l'algèbre semi-simple quantifiée $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ est bien comprise, voir [6]. En fait on a pu montrer qu'elle est tout à fait analogue à celle du cas classique $q = 1$ déjà bien connu. On a en particulier des isomorphismes d'anneaux :

$$\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})) \simeq \mathrm{Rep}(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{Z}[\Lambda]^W \simeq \mathbb{Z}[T_1, ..., T_n]$$

construits à partir d'un morphisme de caractère χ tel que pour une représentation V de sous-espaces de poids V_λ :

$$\chi(V) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim(V_\lambda)\lambda$$

où Λ désigne l'ensemble des poids de V.

Par contre la quantification modifie la théorie des représentations lorsqu'on s'intéresse au cas général des algèbres de Kac-Moody. Dans le cas affine $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, Frenkel et Reshetikhin [2], motivés par la théorie des W-algèbres déformées, ont récemment introduit un morphisme d'anneau injectif, dit de q-caractères, à valeurs dans un anneau de polynômes de Laurent :

$$\chi_q : \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \to \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{1 \leq i \leq n, a \in \mathbb{C}^*} = \mathcal{Y}$$

La construction de χ_q repose sur l'existence d'une R-matrice universelle. L'application χ_q permet de comprendre l'anneau $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \simeq \mathbb{Z}[X_{i,a}]_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*}$ et lorsqu'on regarde la limite classique $q = 1$ on retrouve l'application de caractères usuelle. En fait cette application prend en compte la décomposition en sous-espaces de Jordan pour une certaine famille commutante $(\phi_{i,m}^{\pm})_{m \in \mathbb{Z}, i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$:

$$\chi_q(V) = \sum_{\gamma} \dim(V_{(\gamma)}) \prod_{i \in I} \prod_{r = 1..k_{\gamma i}} Y_{i, a_{\gamma i r}} \prod_{s = 1..l_{\gamma i}} Y_{i, b_{\gamma i r}}^{-1}$$

où $V_{(\gamma)}$ désigne le sous-espace de Jordan de V de poids :

$$\sum_{m \geq 0} \gamma_{i, \pm m}^{\pm} u^{\pm m} = \gamma_i^{\pm}(u) = q_i^{k_{\gamma i} - l_{\gamma i}} \frac{Q_i(uq_i^{-1}) R_i(uq_i)}{Q_i(uq_i) R_i(uq_i^{-1})}$$

avec $a_{\gamma i r}$ les racines du polynôme Q_i et $b_{\gamma i r}$ les racines du polynôme R_i.

Le morphisme de q-caractère vérifie une propriété de symétrie analogue au cas classique de l'action du groupe de Weyl qui veut $\mathrm{Im}(\chi) = \mathbb{Z}[\Lambda]^W$. En effet Frenkel et Reshetikhin ont défini n opérateurs dits d'écrantage (avec $A_{i,a} \in \mathcal{Y}$ monômes) :

$$S_i : \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{a \in \mathbb{C}^*, i \in I} = \mathcal{Y} \to \bigoplus_{a \in \mathbb{C}^*} \mathcal{Y}.S_{i,a} / \sum_{a \in \mathbb{C}^*} \mathcal{Y}.(S_{i,aq_i^2} - A_{i,aq_i}.S_{i,a})$$

qui sont des dérivations ($S_i(UV) = US_i(V) + VS_i(U)$), vérifiant $S_i(Y_a) = Y_a.S_a$, et ont conjecturé :

$$\mathrm{Im}(\chi_q) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Ker}(S_i)$$

Ils l'ont montré dans le cas sl_2 [2] puis Frenkel et Mukhin ont obtenu le résultat dans le cas général [3].

Ces opérateurs permettent de comprendre la structure combinatoire des q-caractères. Par exemple :

$$\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \simeq \mathrm{Im}(\chi_q) = \mathfrak{K} = \bigcap_{i \in I} (\mathbb{Z}[Y_{j,a}^{\pm}]_{j \neq i, a \in \mathbb{C}^*} \mathbb{Z}[Y_{i,b} + Y_{i,b} A_{i,bq_i}^{-1}]_{b \in \mathbb{C}^*})$$

Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de type ADE, Nakajima a raffiné la théorie en introduisant un t-analogue des q-caractères grâce à un point de vue géométrique lié aux variétés de Carquois [4], [5]. Il considère des applications $\chi_{q,t}$ et $\hat{\chi}_{q,t}$ de $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ vers les anneaux de polynômes respectivement $\mathcal{Y}_t = \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm}, t^{\pm}]_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*}$ et $\hat{\mathcal{Y}}_t = \mathbb{Z}[V_{i,a}, W_{i,a}, t^{\pm}]_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*}$. D'un point de vue des représentations, elles permettent de mieux comprendre la structure de chaque sous-espace de Jordan. Au passage il introduit une nouvelle multiplication $*$ sur $\hat{\mathcal{Y}}_t$ qui n'est pas commutative.

Nous proposons dans cet article des t-analogues des opérateurs d'écrantage, adaptés aux applications $\chi_{q,t}$ et $\hat{\chi}_{q,t}$.

Dans la deuxième partie, on rappelle la propriété fondamentale de symétrie des opérateurs d'écrantage de Frenkel et Reshetikhin (Théorème 1) ainsi que quelques résultats élémentaires sur l'anneau $\hat{\mathcal{Y}}_t$ de Nakajima. On définit dans la troisième partie les opérateurs $\hat{S}^l_{t,i}$ qui peuvent être interprétés comme des dérivations pour la multiplication usuelle et une certaine structure de bimodule. Dans la quatrième partie on définit les t-analogues des opérateurs d'écrantage $\hat{S}_{t,i}$ qui dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de type ADE peuvent être interprétés comme des dérivations en utilisant la loi $*$ de Nakajima. Ces opérateurs vérifient la propriété attendue dans le théorème 2 :

$$\bigcap_{i\in I}\mathrm{Ker}(\hat{S}_i) = \hat{\mathfrak{K}} \supseteq \mathrm{Im}(\hat{\chi}_{q,t})$$

On définit dans la cinquième partie des opérateurs $S_{i,t}$ pour l'anneau $\mathcal{Y}_t$ rendant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & \hat{\mathcal{Y}}_t & \xrightarrow{\hat{S}_{i,t}} & \hat{\mathcal{Y}}_{t,i} & \\ \hat{\Pi}_t & \downarrow & & \downarrow & \hat{\Pi}_{t,i} \\ & \mathcal{Y}_t & \xrightarrow{S_{t,i}} & \mathcal{Y}_{t,i} & \\ \Pi_t & \downarrow & & \downarrow & \Pi_{t,i} \\ & \mathcal{Y} & \xrightarrow{S} & \mathcal{Y}_1 & \end{array}$$

avec une propriété de symétrie dans le théorème 3 :

$$\bigcap_{i\in I}\mathrm{Ker}(S_i) = \mathfrak{K} = \mathrm{Im}(\chi_{q,t})$$

où $\chi_{q,t}$ est égal au $\tilde{\chi}_{q,t}$ de [4]. Dans la sixième partie on donne la construction d'involutions analogues à celle de Nakajima.

Notons que la construction repose sur l'existence d'une structure de bimodule sur le module libre à gauche $\bigoplus_{a\in\mathbb{C}^*}\hat{\mathcal{Y}}_t S_{i,a}$ telle que le t-analogue de $\sum_{a\in\mathbb{C}^*}\mathcal{Y}.(S_{i,aq_i^2} - A_{i,aq_i}.S_{i,a})$ soit un sous-bimodule. Cette structure est caractérisée par les relations suivantes, où $m \in \hat{\mathcal{Y}}_t$ est un monôme :

$$S_{i,a}m = t^{2u_{i,a}(m)}mS_{i,a}$$

2. Rappels

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. On note n le rang de $\mathfrak{g}$, $(C_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ sa matrice de Cartan et $I = \{1,...,n\}$. On note $q_i = q^{r_i}$ comme dans [2].

2.1. Opérateurs d'écrantage [2], [3].

On considère l'anneau :

$$\mathcal{Y} = \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$$

les $\mathcal{Y}$-modules libres ($i \in I$) :

$$\mathcal{Y}_i^l = \bigoplus_{a\in\mathbb{C}^*}\mathcal{Y}.S_{i,a}$$

et les $\mathcal{Y}$-modules $\mathcal{Y}_i$ définis respectivement comme $\mathcal{Y}$-module quotient de $\mathcal{Y}_i^l$:

$$\mathcal{Y}_i = \bigoplus_{a\in\mathbb{C}^*}\mathcal{Y}.S_{i,a}/\sum_{a\in\mathbb{C}^*}\mathcal{Y}.(S_{i,aq_i^2} - A_{i,aq_i}.S_{i,a})$$

par le sous-module $F_i = \sum_{a\in\mathbb{C}^*} \mathcal{Y}.(S_{i,aq_i^2} - A_{i,aq_i}.S_{i,a})$, avec :

$$A_{i,a} = Y_{i,aq_i^{-1}} Y_{i,aq_i} \prod_{j/C_{j,i}=-1} Y_{j,a}^{-1} \prod_{j/C_{j,i}=-2} Y_{j,aq}^{-1} Y_{j,aq^{-1}}^{-1} \prod_{j/C_{j,i}=-3} Y_{j,aq^2}^{-1} Y_{j,a}^{-1} Y_{j,aq^{-2}}^{-1}$$

On a alors les opérateurs d'écrantage :

$$S_i : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}_i$$

qui sont des dérivations pour le produit de $\mathcal{Y}$:

$$S_i(U.V) = U.S_i(V) + V.S_i(U)$$

et qui vérifient pour $a \in \mathbb{C}^*$:

$$S_i(Y_{j,a}^{\pm}) = \pm\delta_{i,j} Y_{i,a}^{\pm} S_{i,a}$$

On peut définir de manière analogue $S_i^l : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}_i^l$.

Théorème 1. *Le noyau de S_i est le sous-anneau de $\mathcal{Y}$:*

$$Ker(S_i) = \mathfrak{K}_i = \mathbb{Z}[Y_{j,a}^{\pm}]_{j\neq i, a\in\mathbb{C}^*} \mathbb{Z}[Y_{i,b}(1 + A_{i,bq_i}^{-1})]_{b\in\mathbb{C}^*}$$

2.2. **L'anneau $\hat{\mathcal{Y}}_t$** [5]**.** On considère à présent l'anneau :

$$\hat{\mathcal{Y}}_t = \mathbb{Z}[t, t^{-1}, V_{i,a}, W_{i,a}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*}$$

C'est un $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-module libre de base l'ensemble des $\prod_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} V_{i,a}^{v_{i,a}(m)} W_{i,a}^{w_{i,a}(m)}$ qu'on appelera monômes.

On définit un morphisme d'anneaux :

$$\tilde{\Pi}_t : \hat{\mathcal{Y}}_t \to \mathcal{Y}$$

$$m = \prod_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} V_{i,a}^{v_{i,a}(m)} W_{i,a}^{w_{i,a}(m)} \mapsto \prod_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{u_{i,a}(m)} \text{ et } t \mapsto 1$$

avec pour un tel monôme m :

$$u_{i,a}(m) = w_{i,a}(m) - v_{i,aq_i^{-1}}(m) - v_{i,aq_i}(m)$$

$$+ \sum_{j/C_{i,j}=-1} v_{j,a}(m) + \sum_{j/C_{i,j}=-2} (v_{j,aq}(m) + v_{j,aq^{-1}}(m)) + \sum_{j/C_{i,j}=-3} (v_{j,aq^2}(m) + v_{j,a}(m) + v_{j,aq^{-2}}(m))$$

Remarquer que l'application $\tilde{\Pi}_t$ est l'unique morphisme d'anneaux tel que :

$$\tilde{\Pi}_t(W_{i,a}) = Y_{i,a} \ , \ \tilde{\Pi}_t(V_{i,a}) = A_{i,a}^{-1} \ , \ \tilde{\Pi}_t(t) = 1$$

On peut définir pour un monôme $m = \prod_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{u_{i,a}(m)} \in \mathcal{Y}$ les $u_{i,a}(m)$ de manière évidente, et alors ces quantités sont conservées par $\tilde{\Pi}_t$.

Pour $m \in \hat{\mathcal{Y}}$ monôme i-dominant, c'est à dire vérifiant $\forall a \in \mathbb{C}^*, u_{i,a}(m) \geq 0$, on pose :

$$E_i(m) = m \prod_{a\in\mathbb{C}^*} \sum_{r_a=0..u_{i,a}(m)} t^{r_a(u_{i,a}(m)-r_a)} \begin{bmatrix} u_{i,a}(m) \\ r_a \end{bmatrix}_t V_{i,aq_i}^{r_a}$$

et on note $\hat{\mathfrak{K}}_{t,i}$ le sous $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-module de $\hat{\mathcal{Y}}_t$ engendré par ces $E_i(m)$. On pose alors :

$$\hat{\mathfrak{K}}_t = \bigcap_{i\in I} \hat{\mathfrak{K}}_{t,i}$$

On note $\hat{A}$ l'ensemble des monômes de $\hat{\mathcal{Y}}_t$, $\hat{B}_i \subset \hat{A}$ l'ensemble des monômes i-dominants de $\hat{\mathcal{Y}}_t$.

Lemme 1. *Pour chaque $i \in I$, on a une décomposition en somme directe de $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-modules :*

$$\hat{\mathcal{Y}}_t = \hat{\mathfrak{K}}_{t,i} \oplus \bigoplus_{m\in\hat{A}-\hat{B}_i} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]m = (\bigoplus_{m\in\hat{B}_i} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]E_i(m)) \oplus (\bigoplus_{m\in\hat{A}-\hat{B}_i} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]m)$$

Démonstration:

Notons d'abord que pour $m \in \hat{B}_i$, on peut écrire $E_i(m) = m + f(m)$ avec

$$f(m) = m((\prod_{a \in \mathbb{C}^*} \sum_{r_a = 0..u_{i,a}} t^{r_a(u_{i,a}-r_a)} \begin{bmatrix} u_{i,a} \\ r_a \end{bmatrix}_t V_{i,aq_i}^{r_a}) - 1)$$

qui ne fait intervenir que des monômes de i-poids $wt_i(m') = \sum_{a \in \mathbb{C}^*} u_{i,a}(m')$ strictement inférieur à celui de m.

Considérons une combinaison linéaire qui s'annule :

$$\sum_{m \in \hat{B}_i} \lambda_m(t) E_i(m) + \sum_{m \in \hat{A} - \hat{B}_i} \mu_m(t) m = 0$$

avec les $\lambda_m(t), \mu_m(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Si on suppose qu'un des $\lambda(t) \neq 0$, soit $m_1 \in \hat{B}_i$ un monôme dominant de i-poids maximal parmi ceux qui vérifient $\lambda_m(t) \neq 0$. Alors le monôme m_1 ne peut apparaître que dans $E_i(m_1)$ puisque si il apparaissait dans $E_i(m_2)$, le i-poids de m_2 serait strictement plus grand que le sien. Donc $\lambda_{m_1}(t) = 0$, contradiction. Donc tous les $\lambda_m(t)$ sont nuls, et alors $\sum_{m \in \hat{A} - \hat{B}_i} \mu_m(t) m = 0$ implique la nullité des $\mu_m(t)$.

Il nous reste à montrer que tout $m \in \hat{A}$ est dans $F = (\bigoplus_{m \in \hat{B}_i} \mathbb{Z}[t, t^{-1}] E_i(m)) \oplus (\bigoplus_{m \in \hat{A} - \hat{B}_i} \mathbb{Z}[t, t^{-1}] m)$. C'est clair si $m \in \hat{A} - \hat{B}_i$. Dans le cas $m \in \hat{B}_i$, montrons le par récurrence sur le i-poids de m. Si m est de i-poids 0, tous les $u_{i,a}(m)$ sont nuls et $m = E_i(m)$. Dans le cas général, on a :

$$E_i(m) = m + f(m) = m + \sum_{m' \in \hat{A}} \lambda_{m'}(t) m'$$

avec $\lambda_{m'}(t)$ qui peut être non nul seulement si le i-poids de m' est strictement inférieur à celui de m. Alors :

$$m = E_i(m) - \sum_{m' \in \hat{A} - \hat{B}_i} \lambda_{m'}(t) m' - \sum_{m' \in \hat{B}_i} \lambda_{m'}(t) m'$$

avec $E_i(m) \in F$, $\sum_{m' \in \hat{A} - \hat{B}_i} \lambda_{m'}(t) m' \in F$ et par hypothèse de récurrence $\sum_{m' \in \hat{B}_i} \lambda_{m'}(t) m' \in F$. □

3. Les opérateurs $\hat{S_{t,i}}^l$

3.1. **Définition.** On considère les $\hat{\mathcal{Y}}_t$-modules libres suivants ($i \in I$) :

$$\hat{\mathcal{Y}}_{t,i}^l = \bigoplus_{a \in \mathbb{C}^*} \hat{\mathcal{Y}}_t . S_{i,a}$$

On a alors une application naturelle :

$$\tilde{\Pi}_{t,i}^l : \hat{\mathcal{Y}}_{t,i}^l \to \mathcal{Y}_i^l$$

déduite de $\tilde{\Pi}_t$:

$$\tilde{\Pi}_{t,i}(\sum_{a \in \mathbb{C}^*} \lambda_a . S_{i,a}) = \sum_{a \in \mathbb{C}^*} \tilde{\Pi}_t(\lambda_a) . S_{i,a}$$

Définition 1. *On note $\hat{S}_{t,i}^l$ l'application $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-linéaire $\hat{S}_{t,i}^l : \hat{\mathcal{Y}}_t \to \hat{\mathcal{Y}}_{t,i}^l$ qui prend sur un monôme $m \in \hat{A}$ la valeur :*

$$\hat{S}_{t,i}^l(m) = m(\sum_{a \in \mathbb{C}^* / u_{i,a}(m) \geq 0} (1 + ... + t^{2(u_{i,a}(m)-1)}) S_{i,a} - \sum_{a \in \mathbb{C}^* / u_{i,a}(m) < 0} (t^{-2} + ... + t^{2u_{i,a}(m)}) S_{i,a})$$

Lemme 2. *Le diagramme (1) suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{Y}}_t & \stackrel{\hat{S}^l_{t,i}}{\longrightarrow} & \hat{\mathcal{Y}}^l_{t,i} \\ \tilde{\Pi}_t \downarrow & & \downarrow \quad \tilde{\Pi}^l_{t,i} \\ \mathcal{Y} & \stackrel{S^l_i}{\longrightarrow} & \mathcal{Y}^l_{1,i} \end{array}$$

Démonstration:

Toutes les applications sont $\mathbb{Z}$-linéaires, il suffit donc de regarder un monôme $m \in \hat{A}$ et $\lambda(t) \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$:

$$\begin{aligned} & (\tilde{\Pi}^l_{t,i} \circ \hat{S}^l_{t,i})(\lambda(t)m) \\ = \ & \lambda(1)\tilde{\Pi}^l_{t,i}(m(\sum_{a\in\mathbb{C}^* /u_{i,a}\geq 0}(1+...+t^{2(u_{i,a}-1)})S_{i,a} - \sum_{a\in\mathbb{C}^* /u_{i,a}<0}(t^{-2}+...+t^{2u_{i,a}})S_{i,a}) \\ = \ & \lambda(1)\tilde{\Pi}_t(m)(\sum_{a\in\mathbb{C}^*} u_{i,a}S_{i,a}) \\ = \ & S^l_i(\lambda(1)\tilde{\Pi}_t(m)) \\ = \ & S^l_i(\tilde{\Pi}_t(\lambda(t)m)) \end{aligned}$$

□

3.2. Interprétation de $\hat{S}^l_{t,i}$ en terme de dérivation.

3.2.1. *Des lois de bimodule sur $\hat{\mathcal{Y}}^l_{t,i}$.*

Lemme 3. *Il existe sur $\hat{\mathcal{Y}}^l_{t,i}$ une unique structure de bimodule pour la multiplication usuelle de $\hat{\mathcal{Y}}_t$ telle que la structure à gauche soit la structure naturelle, que pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ et tout monôme $m \in \hat{A}$:*

$$S_{i,a}.m = t^{2u_{i,a}(m)}m.S_{i,a} \ , \ S_{i,a}.t = t.S_{i,a}$$

Démonstration:

L'unicité est claire, car la compatibilité entre les structures à gauche et à droite impose, pour $\lambda_a \in \hat{\mathcal{Y}}_t$, $\mu_m \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$:

$$(\sum_{a\in\mathbb{C}^*}\lambda_a.S_{i,a}).\sum_m \mu_m m = \sum_{a\in\mathbb{C}^*}\lambda_a.(S_{i,a}.\sum_m \mu_m m) = \sum_{a\in\mathbb{C}^*}\lambda_a.\sum_m \mu_m t^{2u_{i,a}(m)}m.S_{i,a}$$

Pour montrer que la structure $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-linéaire de module à droite est bien définie, il suffit de vérifier que pour deux monômes $m_1, m_2 \in \hat{A}$ on a $S_{i,a}.(m_1.m_2) = (S_{i,a}.m_1).m_2$. Ceci découle du fait que $u_{i,a}(m_1.m_2) = u_{i,a}(m_1) + u_{i,a}(m_2)$. La compatibilité entre les deux structures de modules est alors immédiate. □

On peut généraliser ce qui précède au cas d'une multiplication tordue sur $\hat{\mathcal{Y}}_t$. Pour tout bicaractère $d : \hat{A} \times \hat{A} \to \mathbb{Z}$, c'est-à-dire vérifiant :

$$d(m_1.m_2, m_3) = d(m_1,m_3) + d(m_2,m_3) \ , \ d(m_1, m_2.m_3) = d(m_1,m_2) + d(m_1,m_3)$$

on a une loi de composition interne $*_d$ associative et $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-linéaire sur $\hat{\mathcal{Y}}_t$ en posant :

$$m_1 *_d m_2 = t^{2d(m_1,m_2)}m_1.m_2$$

Remarquons que pour obtenir une loi associative, il suffit de demander que d vérifie sur des monômes m_1, m_2, m_3, la propriété de cocycle :

$$-d(m_2,m_3) + d(m_1m_2,m_3) - d(m_1,m_2m_3) + d(m_1,m_2) = 0$$

ce qui est le cas pour les bicaractères.

On peut munir naturellement $\hat{\mathcal{Y}}^l_{t,i}$ d'une structure de $\hat{\mathcal{Y}}_t$-module à gauche pour la multiplication $*_d$ en posant pour $U \in \hat{\mathcal{Y}}_t$:

$$U *_d (\sum_{a\in\mathbb{C}^*}\lambda_a.S_a) = \sum_{a\in\mathbb{C}^*}(U *_d \lambda_a).S_{i,a}$$

et de manière complètement analogue au cas $d=0$ on fait de $\hat{\mathcal{Y}}^l_{t,i}$ un bimodule en posant :

$$S_{i,a} *_d m = t^{2u_{i,a}(m)} m *_d S_{i,a} \ , \ S_{i,a} *_d t = t *_d S_{i,a}$$

3.2.2. $\hat{S}^l_{t,i}$ *comme dérivation pour* $*_d$.

Proposition 1. *Pour d bicaratère, l'application* $\hat{S}^l_{t,i}$ *est une dérivation par rapport à la multiplication* $*_d$ *:*

$$\forall U, V \in \hat{\mathcal{Y}}_t, \hat{S}^l_t(U *_d V) = U *_d \hat{S}^l_t(V) + \hat{S}^l_t(U) *_d V$$

Démonstration:

Pour vérifier la propriété de dérivation, et il suffit de montrer que pour deux monômes $m, m' \in \hat{A}$ on a $\hat{S}^l_{t,i}(m *_d m') = \hat{S}^l_{t,i}(m) *_d m' + m *_d \hat{S}^l_{t,i}(m')$. Calculons en effet :

$$\begin{aligned}
& \hat{S}^l_{t,i}(m) * m' + m * \hat{S}^l_{t,i}(m') \\
= \ & m *_d m' \\
& \Big(\sum_{a\in\mathbb{C}^* / u_{i,a}\geq 0} (1 + ... + t^{2(u_{i,a}-1)}) t^{2u_{i,a'}} S_{i,a} - \sum_{a\in\mathbb{C}^* / u_{i,a}<0} (t^{-2} + ... + t^{2u_{i,a}}) t^{2u_{i,a'}} S_{i,a} \\
& + \sum_{b\in\mathbb{C}^* / u'_{i,b}\geq 0} (1 + ... + t^{2(u'_{i,b}-1)}) S_{i,b} - \sum_{b\in\mathbb{C}^* / u'_{i,b}<0} (t^{-2} + ... + t^{2u'_{i,b}}) S_{i,b} \Big) \\
= \ & m *_d m' \Big(\sum_{a\in\mathbb{C}^* / u_{i,a}+u'_{i,a}\geq 0} (1 + ... + t^{2(u_{i,a}+u'_{i,a}-1)}) S_{i,a} \\
& - \sum_{a\in\mathbb{C}^* / u_{i,a}+u'_{i,a}<0} (t^{-2} + ... + t^{2(u_{i,a}+u'_{i,a})}) S_{i,a} \Big) \\
= \ & \hat{S}^l_{t,i}(m *_d m')
\end{aligned}$$

□

On a ainsi une caractérisation de $\hat{S}^l_{t,i}$ comme l'unique dérivation pour la loi usuelle, $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-linéaire, prenant les valeurs sur les générateurs :

$$\hat{S}^l_{t,i}(V_{i,a}) = -t^{-2} V_{i,a}(S_{i,aq_i^{-1}} + S_{i,aq_i}) \text{ et } \hat{S}^l_{t,i}(W_{j,a}) = \delta_{i,j} W_{i,a}.S_{i,a}$$

$$\hat{S}^l_{t,i}(V_{j,a}) = \delta_{C_{i,j},-1} V_{j,a} S_{i,a} + \delta_{C_{i,j},-2} V_{j,a}(S_{i,aq} + S_{i,aq^{-1}}) + \delta_{C_{i,j},-3} V_{j,a}(S_{i,aq^{-2}} + S_{i,a} + S_{i,aq^2})$$

pour $j \neq i$.

4. Les t-opérateurs d'écrantage $\hat{S}_{t,i}$

4.1. Définition de $\hat{S}_{t,i}$.

Définition 2. *On considère le* $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$*-sous module de* $\hat{\mathcal{Y}}^l_{t,i}$ *:*

$$\hat{F}_{t,i} = \sum_{a\in\mathbb{C}^*, m\in\hat{A}} \mathbb{Z}[t,t^{-1}] m (V_{i,aq_i} t^{2u_{i,aq_i^2}(m)} S_{i,aq_i^2} - t^2 S_{i,a})$$

Le module quotient obtenu est noté :

$$\hat{\mathcal{Y}}_{t,i} = \hat{\mathcal{Y}}^l_{t,i} / \hat{F}_{t,i}$$

L'application obtenue à partir de $\hat{S}^l_{t,i}$ *par composition avec la projection* $\hat{p}_{t,i}$ *de* $\hat{\mathcal{Y}}^l_{t,i}$ *sur* $\hat{\mathcal{Y}}_{t,i}$ *est notée* $\hat{S}_{t,i}$.

Nous allons montrer, en particulier dans le théorème 2, que ces opérateurs peuvent être considérés comme des t-analogues des opérateurs d'écrantage.

Lemme 4. *L'application* $\tilde{\Pi}^l_{t,i}$ *donne naturellement une application* $\tilde{\Pi}_{t,i}$ *rendant le diagramme (2) suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\hat{\mathcal{Y}}^l_{t,i} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{Y}}_{1,i,t} \\
\tilde{\Pi}^l_{t,i} \downarrow & & \downarrow \quad \tilde{\Pi}_{t,i} \\
\mathcal{Y}^l_i & \longrightarrow & \mathcal{Y}_i
\end{array}$$

Démonstration:

Il suffit de vérifier que l'application $\mathbb{Z}$-linéaire $\tilde{\Pi}^l_{t,i}$ passe au quotient. Pour

$$x = \sum_{a\in\mathbb{C}^*, m\in\hat{A}} \lambda_{m,a} m(V_{i,aq_i} t^{2u_{i,aq_i^2}(m)} S_{i,aq_i^2} - t^2 S_{i,a}) \in \hat{F}_{t,i}$$

on a :

$$\tilde{\Pi}_{t,i}(x) = \sum_{a\in\mathbb{C}^*} \lambda_{m,a}(1)\Pi_t(m)(A^{-1}_{i,aq_i}.S_{i,aq_i^2} - S_{i,a}) \in F_i$$

□

Proposition 2. *On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{Y}}_t & \xrightarrow{\hat{S}_{t,i}} & \hat{\mathcal{Y}}_{t,i} \\ \tilde{\Pi}_t \downarrow & & \downarrow \quad \tilde{\Pi}_{t,i} \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{S_i} & \mathcal{Y}_i \end{array}$$

Démonstration:

La commutativité du diagramme provient de la commutativité des diagrammes (1) et (2). □

Soit $(\hat{\mathcal{Y}}_t)_i = \mathbb{Z}[V_{i,a}, W_{i,a}]_{a\in\mathbb{C}^*} \subset \hat{\mathcal{Y}}_t$. On définit alors $\pi_i : \hat{\mathcal{Y}} \to (\hat{\mathcal{Y}}_t)_i$ comme l'unique morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-linéaire tel que :

$$\pi_i(W_{i,a}) = W_{i,a}\ ,\ \pi_i(V_{i,a}) = V_{i,a}$$

$$\pi_i(W_{j,a}) = 1 \text{ si } j \neq i$$

$$\pi_i(V_{j,a}) = 1 \text{ si } C_{i,j} = 0$$

$$\pi_i(V_{j,a}) = W_{i,a} \text{ si } C_{i,j} = -1$$

$$\pi_i(V_{j,a}) = W_{i,aq}W_{i,aq^{-1}} \text{ si } C_{i,j} = -2$$

$$\pi_i(V_{j,a}) = W_{i,aq^2}W_{i,a}W_{i,aq^{-2}} \text{ si } C_{i,j} = -3$$

Pour un monôme $m \in \hat{A}$, on a alors $u_{i,a}(m) = u_{i,a}(\pi_i(m))$ pour $a \in \mathbb{C}^*$.

Proposition 3. *Le noyau de l'application $\hat{S}_{t,i}$ contient $\hat{\mathfrak{K}}_{t,i}$.*

Démonstration:

Soit $m \in \hat{A}$ un monôme i-dominant. Dans $S^l_{t,i}(E_i(m))$, on peut factoriser tous les termes par m, et notons $\frac{\hat{S}^l_{t,i}(E_i(m))}{m} \in \hat{\mathcal{Y}}^l_{t,i}$ la quantité obtenue. Elle ne dépend que des $u_{i,a}(m)$ ($a \in \mathbb{C}^*$), et donc :

$$\frac{\hat{S}^l_{t,i}(E_i(m))}{m} = \frac{\hat{S}^l_{t,i}(E_i(\pi_i(m)))}{\pi_i(m)}$$

Remarquons de plus que les $u_{i,a}$ étant conservés, on a :

$$\hat{S}^l_{t,i}(E_i(m)) \in \hat{F}_{t,i} \Leftrightarrow \hat{S}^l_{t,i}(E_i(\pi_i(m))) \in \hat{F}_{t,i}$$

En conséquence il nous suffit de montrer $\hat{S}_{t,i}(E_i(m)) = 0$ pour $m \in \hat{B}_i \cap (\hat{\mathcal{Y}}_t)_i$. Mais alors tout se passe comme si on travaillait avec $\mathfrak{g} = \mathcal{U}_{q_i}(sl_2)$. On est ainsi ramené au cas ADE qui sera établie plus bas, indépendamment de ce qui précè, dans proposition 5. □

4.2. **Interprétation de $\hat{S}_{t,i}$ comme dérivation dans le cas ADE.** Dans cette sous-partie on se restreint au cas où $\mathfrak{g}$ est de type ADE. On a alors tous les $q_i = q$ et la matrice de Cartan est symétrique.

4.2.1. *Rappels [5] et compléments sur la loi $*$ de Nakajima.* On pose pour deux monômes $m_1, m_2 \in \hat{A}$:

$$\begin{aligned} d_N(m_1,m_2) &= \sum_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} (v_{i,aq}(m_1)u_{i,a}(m_2) + w_{i,aq}(m_1)v_{i,a}(m_2)) \\ &= \sum_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} (u_{i,a}(m_1)v_{i,aq^{-1}}(m_2) + v_{i,a}(m_1)w_{i,aq^{-1}}(m_2)) \end{aligned}$$

Ce bicaractère, introduit par Nakajima dans [4] et [5], permet comme précédemment de définir une nouvelle multiplication sur $\hat{\mathcal{Y}}_t$ en posant pour m_1, m_2 deux monômes :

$$m_1 *_{d_N} m_2 = t^{2d_N(m_1,m_2)} m_1.m_2$$

avec . la multiplication usuelle. On notera dans la suite simplement d et $*$. Cette nouvelle multiplication $*$ n'est pas commutative.

Notons que $\hat{\mathfrak{K}}$ est une partie de $\hat{\mathcal{Y}}_t$ stable pour la multiplication $*$ ([5]).

Lemme 5. *Soit $m \in \hat{A}$ un monôme, $i \in I$ et $a \in \mathbb{C}^*$. On a alors :*

$$V_{i,aq} * m = t^{2(u_{i,a}(m) - u_{i,aq^2}(m))} m * V_{i,aq} = t^{2u_{i,a}(m)} V_{i,aq}.m$$

C'est une conséquence immédiate de

$$d(V_{i,aq}, m) = u_{i,a}(m) \text{ et } d(m, V_{i,aq}) = u_{i,aq^2}(m)$$

Lemme 6. *Soit $(m_1, ..., m_p)$ des monômes tels qu'il existe un $a \in \mathbb{C}^*$ vérifiant pour tout r, $u_{i,a}(m_r) = 1$ et $u_{i,b}(m_r) = 0$ pour $b \neq a$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que :*

$$(m_1 * (1 + V_{i,aq})) * (m_2 * (1 + V_{i,aq})) * ... * (m_p * (1 + V_{i,aq})) = t^\alpha m_1 ... m_p \sum_{r=0..p} t^{r(p-r)} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}_t V_{i,aq}^r$$

Démonstration:

On procède par récurrence sur p en s'appuyant sur le lemme 5. Pour $p = 1$, on a $m_1 * V_{i,aq} = m_1 V_{i,aq}$ et on a le résultat avec $\alpha = 1$. Ensuite dans le cas général :

$$\begin{aligned} &(m_1 * (1 + V_{i,aq})) * (m_2 * (1 + V_{i,aq})) * ... * (m_{p+1} * (1 + V_{i,aq})) \\ &= t^\alpha (m_1 + m_1 V_{i,aq}) * (m_2 ... m_{p+1} \sum_{r=0..p} t^{r(p-r)} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}_t V_{i,aq}^r) \\ &= t^{\alpha + 2d(m_1, m_2 ... m_{p+1})} m_1 m_2 ... m_{p+1} \sum_{r=0..p} t^{r(p-r)} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}_t V_{i,aq}^r \\ &+ t^{\alpha + 2d(m_1, m_2 ... m_{p+1})} m_1 m_2 ... m_{p+1} \sum_{r=0..p} t^{r(p-r)} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}_t t^{2p-2r} V_{i,aq}^{r+1} \\ &= t^{\alpha + 2d(m_1, m_2 ... m_{p+1})} m_1 m_2 ... m_{p+1} \sum_{r=0..p+1} (t^{r(p-r)} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}_t + t^{(r-1)(p-r+1)} \begin{bmatrix} p \\ r-1 \end{bmatrix}_t t^{2p-2r+2}) V_{i,aq}^r \end{aligned}$$

Et on conclut en remarquant :

$$t^{r(p-r)} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}_t + t^{(r-1)(p-r+1)} \begin{bmatrix} p \\ r-1 \end{bmatrix}_t t^{2p-2r+2} = t^{r(p+1-r)} \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix}_t$$

□

On a en particulier le résultat :

Lemme 7. *Soit m un monôme tel qu'il existe un $a \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $u_{i,a}(m) = 1$ et $u_{i,b}(m) = 0$ pour $b \neq a$. Alors pour $l \geq 0$:*

$$[m(1 + V_{i,aq})]^{*l} = m^l \sum_{r=0..l} t^{r(l-r)} \begin{bmatrix} l \\ r \end{bmatrix}_t V_{aq}^r$$

On peut exprimer les $E_i(m)$ en utilisant la loi $*$:

Proposition 4. *On fixe un $i \in I$. Soit $m \in \hat{B}_i$ un monôme i-dominant. Pour $a \in \mathbb{C}^*$, on considère la suite $(Z_{i,a}) = (Z_{i,a,l})_{1\leq l\leq z_{i,a}}$ formée de*

$$z_{i,a} = w_{i,a} + \sum_{j/C_{j,i}=-1} v_{j,a} = u_{i,a} + v_{i,aq} + v_{i,aq^{-1}}$$

termes où $W_{i,a}$ apparaît $w_{i,a}$ fois et pour j tel que $C_{j,i} = -1$, $V_{j,a}$ apparaît $v_{j,a}$ fois :

$$\{W_{i,a}, ..., W_{i,a}, V_{j_1,a}, ..., V_{j_1,a}, V_{j_2,a}, ..., V_{j_m,a}\} = \{Z_{i,a,1}, ..., Z_{i,a,z_{i,a}}\}$$

Alors il existe un unique $\beta \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$t^\beta E_i(m) = (\prod^{*}_{j\neq i, a\in\mathbb{C}^*} W_{j,a}) * (\prod^{\overset{\rightarrow}{*}}_{j/C_{j,i}=0, a\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}}), r\in\mathbb{Z}} V_{j,aq^{2r}}) * (\prod^{*}_{a\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}})} \prod^{\overset{\rightarrow}{*}}_{r\in\mathbb{Z}} m_{i,a,r})$$

avec :

$$\begin{aligned} m_{i,a,r} &= (Z_{i,a,1} * (1+V_{i,aq})) * ... * (Z_{i,a,u_{i,a}} * (1+V_{i,aq})) \\ &\quad *(Z_{i,a,u_{i,a}+1} * V_{i,aq} * Z_{i,aq^2,u_{i,aq^2}+v_{i,aq^3}+1}) * ... * (Z_{i,a,u_{i,a}+v_{i,aq}} * V_{i,aq} * Z_{i,aq^2,u_{i,aq^2}+v_{i,aq^3}+v_{i,aq}}) \end{aligned}$$

Démonstration:

On commence par expliciter $E_i(m)$:

$$E_i(m) = m \prod_{a\in\mathbb{C}^*} (\sum_{r_a=0..u_{i,a}(m)} t^{r_a(u_{i,a}(m)-r_a)} \begin{bmatrix} u_{i,a}(m) \\ r_a \end{bmatrix}_t V_{i,aq}^{r_a})$$

Si on ne tient pas compte des t, l'expression annoncée est correcte puisqu'on a le bon nombre $v_{i,aq}$ de $V_{i,aq}$ et tous les $Z_{i,a,l}$ pour $l = 1...u_{i,a} + v_{i,aq} + v_{i,aq^{-1}}$. Le seul problème est l'inhomogênéïté de $E_i(m)$ du fait des puissances de $V_{i,aq}$.

Les seuls facteurs de m qui contribuent aux $u_{i,b}(m)$ sont les $W_{i,a}, V_{i,a}$ et les $V_{j,a}$ avec $C_{j,i} = -1$. Mais ce sont exactement les facteurs qui posent problème avec $V_{i,aq}$ d'après le lemme 5. On en déduit une première expression :

$$t^\alpha E_i(m) = (\prod^{*}_{j\neq i, a\in\mathbb{C}^*} W_{j,a}) * (\prod^{\overset{\rightarrow}{*}}_{j/C_{j,i}=0, a\in(\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}}), r\in\mathbb{Z}} V_{j,aq^{2r}}) * (m' \sum_{r_a=0..u_{i,a}(m)} t^{r_a(u_{i,a}(m)-r_a)} \begin{bmatrix} u_{i,a}(m) \\ r_a \end{bmatrix}_t V_{i,aq}^{r_a})$$

avec

$$\begin{aligned} m' &= (\prod_{a\in\mathbb{C}^*} W_{i,a}^{w_{i,a}} V_{i,a}^{v_{i,a}})(\prod_{a\in\mathbb{C}^*, j/C_{i,j}=-1} V_{j,a}^{v_{j,a}}) \\ &= \prod_{a\in\mathbb{C}^*} (\prod_{l=1..u_{i,a}} Z_{i,a,l})(\prod_{r=1...v_{i,aq}} Z_{i,a,u_{i,a}+r} V_{i,aq} Z_{i,aq^2,u_{i,aq^2}+v_{i,aq^3}+r}) \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$E_i(m') = m' \sum_{r_a=0..u_{i,a}(m)} t^{r_a(u_{i,a}(m)-r_a)} \begin{bmatrix} u_{i,a}(m) \\ r_a \end{bmatrix}_t V_{i,aq}^{r_a} = t^{-\gamma}(\prod^{*}_{a\in\mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}}} \prod^{\overset{\rightarrow}{*}}_{r\in\mathbb{Z}} m_{i,a,r})$$

Or d'après le lemme 6, le facteur $Z_{i,a,1}...Z_{i,a,u_{i,a}(m)} \sum_{r_a=0..u_{i,a}(m)} t^{r_a(u_{i,a}(m)-r_a)} \begin{bmatrix} u_{i,a}(m) \\ r_a \end{bmatrix}_t V_{i,aq}^{r_a}$ est égal à une puissance de t près à $(Z_{i,a,1} * (1 + V_{i,aq})) * ... * (Z_{i,a,u_{i,a}} * (1 + V_{i,aq}))$. Il ne reste plus qu'à vérifier que les facteurs restant $\prod_{a\in\mathbb{C}^*} (\prod_{r=1...v_{i,aq}} Z_{i,a,u_{i,a}+r} V_{i,aq} Z_{i,aq^2,u_{i,aq^2}+v_{i,aq^3}+r})$ ne posent pas de problème vis à vis de l'inhomogênéïté en puissances de $V_{i,aq}$, mais c'est le cas car pour tout $r \in \mathbb{Z}$:

$$u_{i,aq^{2r}}(Z_{i,a,u_{i,a}+l} * V_{i,aq} * Z_{i,aq^2,u_{i,aq^2}+v_{i,aq^3}+l}) = 0$$

□

4.2.2. *Une structure de bimodule sur $\hat{\mathcal{Y}}_{t,i}$ pour la loi $*$.*

Lemme 8. *Le sous $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ module $\hat{F}_{t,i}$ de $\hat{\mathcal{Y}}^l_{t,i}$ est en fait un sous-module à gauche pour la loi $*$:*

$$\hat{F}_{t,i}=\sum_{a\in\mathbb{C}^*}\hat{\mathcal{Y}}_t*(V_{i,aq}.S_{i,aq^2}-t^2S_{i,a})$$

et même un sous-bimodule $\hat{\mathcal{Y}}_t*\hat{F}_{t,i}=\hat{F}_{t,i}*\hat{\mathcal{Y}}=\hat{F}_{t,i}$.

Démonstration:

La première propriété découle directement du lemme 5 qui donne pour $m\in\hat{A}$:

$$m*(V_{i,aq}.S_{i,aq^2}-t^2S_{i,a})=t^{2u_{i,aq_i^2}(m)}mV_{i,aq_i}S_{i,aq_i^2}-t^2mS_{i,a}$$

Pour la propriété de sous-bimodule, soit $m\in\hat{A}$ un monôme. En utilisant le lemme 5, on a pour $\lambda_a\in\hat{\mathcal{Y}}_t$:

$$\begin{aligned}\lambda_a*(V_{i,aq}.S_{i,aq^2}-t^2S_{i,a})*m&=\lambda_a*(t^{2u_{i,aq^2}(m)}V_{i,aq}*m.S_{i,aq^2}-t^{2+2u_{i,a}(m)}m.S_{i,a})\\&=t^{2u_{i,a}(m)}\lambda_a*m*(V_{i,aq}.S_{i,aq^2}-t^2S_{i,a})\in\hat{F}_{t,i}\end{aligned}$$

□

On peut ainsi munir naturellement $\hat{\mathcal{Y}}_{t,i}$ d'une structure de bimodule.

4.2.3. *$\hat{S}_{t,i}$ est une dérivation.* Le résultat suivant, qui justifie entre autre les constructions précédentes, permet en particulier d'obtenir la proposition 3 :

Proposition 5. *L'application $\hat{S}_{t,i}$ est une dérivation pour le produit $*$ et son noyau contient $\hat{\mathfrak{K}}_{t,i}$.*

Démonstration:

La propriété de dérivation est conservée : en effet pour $U,V\in\hat{\mathcal{Y}}_t$ on a :

$$\hat{S}_{t,i}(U*V)=\hat{p}_{t,i}(U*\hat{S}^l_{t,i}(V))+\hat{p}_{t,i}(\hat{S}_{t,i}(U)*V)=U*\hat{p}_{t,i}(\hat{S}^l_{t,i}(V))+\hat{p}_{t,i}(\hat{S}_{t,i}(U))*V=U*\hat{S}_{t,i}(V)+\hat{S}_{t,i}(U)*V$$

Pour montrer que $\hat{\mathfrak{K}}_{t,i}\subset\mathrm{Ker}(\hat{S}_{t,i})$, considérons un monôme dominant m, et décomposons en utilisant la proposition 4 sous la forme d'un produit pour $*$. En utilisant la propriété de dérivation de $\hat{S}_{t,i}$, il nous suffit d'obtenir que chacun des termes est annulé. Or pour $a\in\mathbb{C}^*$:

$$\hat{S}_{t,i}(Z_{i,a,k}*(1+V_{i,aq}))=Z_{i,a,k}.S_{i,a}-t^{-2}Z_{i,a,k}*V_{i,aq}.S_{i,aq^2}=Z_{i,a,k}*(S_{i,a}-t^{-2}V_{i,aq}S_{i,aq^2})=0$$

$$\hat{S}^l_{t,i}(Z_{i,a,k}*V_{aq}*Z_{i,aq^2,k'})=0$$

car pour tout $b\in\mathbb{C}^*$, $u_{i,b}(Z_{i,a,k}*V_{aq}*Z_{i,aq^2,k'})=0$ □

4.3. **Interprétation de $\hat{S}_{t,i}$ dans le cas général.** Dans le cas général, on ne dispose pas de bicaratère vérifiant les deux relations fondamentales du cas ADE pour tout $i\in I$

$$d(V_{i,aq_i},m)=u_{i,a}(m)\text{ et }d(m,V_{i,aq_i})=u_{i,aq_i^2}(m)$$

Par exemple, pour $\mathfrak{g}$ de type B_2, on a $C=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&2\end{pmatrix}$ (la matrice de Cartan dans [2] est la transposée de celle de [1]), $q_1=q^2$, $q_2=q$ et :

$$0=u_{1,aq^{-2}}(V_{2,a})\neq u_{2,aq}(V_{1,a})=1$$

On ne peut pas traiter tous les opérateurs simultanément, mais on peut cependant les interpréter individuellement en posant pour chaque $i\in I$:

$$\begin{aligned}d_i(m_1,m_2)&=\sum_{a\in\mathbb{C}^*}(v_{i,aq_i}(m_1)u_{i,a}(m_2)+w_{i,aq_i}(m_1)v_{i,a}(m_2))+\sum_{a\in\mathbb{C}^*}(u_{i,aq_i}-w_{i,aq_i}+v_{i,a}+v_{i,aq_i^2})(m_1)v_{i,a}(m_2)\\&=\sum_{a\in\mathbb{C}^*}(u_{i,aq_i}(m_1)v_{i,a}(m_2)+v_{i,aq_i}(m_1)w_{i,a}(m_2))+\sum_{a\in\mathbb{C}^*}v_{i,aq_i}(m_1)(u_{i,a}-w_{i,a}+v_{i,aq_i^{-1}}+v_{i,aq_i})(m_2)\end{aligned}$$

Il découle alors de la définition :

Lemme 9. *Pour tout $m \in \hat{A}$:*

$$d_i(V_{i,aq_i}, m) = u_{i,a}(m) \text{ et } d_i(m, V_{i,aq_i}) = u_{i,aq_i^2}(m)$$

On note $*_i$ la loi sur $\hat{\mathcal{Y}}_t$ associée au bicaratère d_i. On montre alors de la même manière que dans le cas ADE :

Proposition 6. *Le sous $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ module $\hat{F}_{t,i}$ de $\hat{\mathcal{Y}}_{t,i}^l$ est en fait un sous-module à gauche pour la loi $*_i$:*

$$\hat{F}_{t,i} = \sum_{a\in\mathbb{C}^*} \hat{\mathcal{Y}}_t *_i (V_{i,aq}.S_{i,aq^2} - t^2 S_{i,a})$$

et même un sous-bimodule $\hat{\mathcal{Y}}_t *_i \hat{F}_{t,i} = \hat{F}_{t,i} *_i \hat{\mathcal{Y}} = \hat{F}_{t,i}$.

L'application $\hat{S}_{t,i}$ est une dérivation pour le produit $*_i$.

4.4. **Démonstration du théorème 2.** On retourne au cas général pour $\mathfrak{g}$ simple quelconque.

Théorème 2. *On a $\hat{\mathfrak{K}}_{t,i} = Ker(\hat{S}_{t,i})$.*

Démonstration:

La première inclusion $\hat{\mathfrak{K}}_{t,i} \subset \mathrm{Ker}(\hat{S}_{t,i})$ est déjà connue dans la proposition 3.

Supposons par l'absurde qu'on n'ait pas égalité. Alors on considère un $x \in \mathrm{Ker}(\hat{S}_{t,i}) - \hat{\mathfrak{K}}_{t,i}$ qu'on décompose en utilisant le lemme 1 sur $\hat{\mathcal{Y}}_t = \hat{\mathfrak{K}}_{t,i} \oplus \bigoplus_{m\in\hat{A}-\hat{B}_i} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]m$ sous la forme $x = v + u$ avec $u \neq 0$. On note l'écriture de u :

$$u = \sum_{m\in M} \lambda_m m$$

avec $M \subset \hat{A} - \hat{B}_i$, $\lambda_m \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ et $\lambda_m \neq 0$ pour $m \in M$. Alors $x, v \in \mathrm{Ker}(\hat{S}_{t,i})$, donc u est un élément non nul de $\bigoplus_{m\in\hat{A}-\hat{B}_i} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]m \cap \mathrm{Ker}(\hat{S}_{t,i})$. Pour $m \in \hat{A} - \hat{B}_i$, notons N_m le nombre de classe $R \in \mathbb{C}^*/q^{2\mathbb{Z}}$ tel qu'il existe $a \in R$ vérifiant $u_{i,a}(m) < 0$. Tous les monômes m de $\hat{A} - \hat{B}_i$ vérifient $N_m \geq 1$. Soit $m_0 \in M$ avec N_{m_0} minimal parmi les N_m pour $m \in M$. Soit alors $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $u_{i,a}(m_0) < 0$ et pour $r < 0$, $u_{i,aq^{2r}}(m_0) \geq 0$. Lorsqu'on calcule

$$\hat{S}_{t,i}(u) = 0 = \sum_{m\in M} \lambda_m m(\sum_{b\in\mathbb{C}^*/u_{i,b}(m)\geq 0} (1+t^2+...+t^{2(u_{i,b}(m)-1)})S_{i,b} - \sum_{b\in\mathbb{C}^*/u_{i,b}(m)<0} (t^{-2}+...+t^{2u_{i,b}(m)})S_{i,b})$$

on voit appaître le terme $-\lambda_{m_0} m_0 (t^{-2} + ... + t^{2u_{i,a}(m)}) S_{i,a}$. Ce terme doit être annulé par projection sur $\hat{\mathcal{Y}}_{t,i}$. Les termes qui vont l'annuler peuvent provenir soit d'un $S_{i,aq_i^{2r}}$ avec $r < 0$, soit d'un $S_{i,aq_i^{2r}}$ avec $r > 0$. Dans le premier cas on a un monôme $m_1 \in M$ tel que $m_1 V_{i,aq_i^{-1}} V_{i,aq_i^{-3}} ... V_{i,aq_i^{2r+1}} = m_0$, dans le deuxième on a un momôme $m_1 = m_0 V_{i,aq_i} ... V_{i,aq_i^{2r-1}} \in M$. On peut ainsi définir une suite de monômes m_p tant que $u_{i,a}(m_p) < 0$. Les termes de la suite sont distincts deux à deux, car à chaque opération soit on ajoute des $V_{i,aq_i^{2r+1}}$ avec $r \geq 0$, soit on enlève des $V_{i,aq_i^{2r+1}}$ avec $r < 0$. Notons aussi qu'à chaque opération on ne diminue pas les $u_{i,aq_i^{2r}}$ avec $r < 0$, et on n'augmente pas N. Comme M est fini, la suite se termine sur un $m_P \in M$ qui vérifie $u_{i,aq_i^{2r}}(m_P) \geq 0$ pour $r \leq 0$, et $N_{m_P} = N_{m_0}$. En notant $m^0 = m_0$ et $m^1 = m_P$, ce nouveau procédé donne une suite m^j telle que $\min\{r/u_{i,aq^{2r}} < 0\}$ est strictement croissante. Par finitude de M, la suite se termine sur un $m^{P'} \in M$ tel que $u_{i,aq^{2r}} \geq 0$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$ et les autres classes de $\mathbb{C}^*/q_i^{2\mathbb{Z}}$ n'ont pas été modifiées. Donc $N_{m_{P'}} < N_{m_0}$, contradiction. □

5. Opérateurs d'écrantage pour l'anneau $\mathcal{Y}_t$

5.1. **Rappels et compléments.**

5.1.1. *L'anneau $\mathcal{Y}_t$.* En suivant Nakajima [4], [5] on considère l'anneau "intermédiaire" entre $\hat{\mathcal{Y}}_t$ et $\mathcal{Y}$:

$$\mathcal{Y}_t = \mathbb{Z}[t, t^{-1}, Y_{i,a}, Y_{i,a}^{-1}]_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*}$$

On a un morphisme d'anneaux canonique :

$$\Pi_t : \mathcal{Y}_t \to \mathcal{Y}$$

$$Y_{i,a}^{\pm} \mapsto Y_{i,a}^{\pm} \text{ et } t \mapsto 1$$

Pour passer de $\hat{\mathcal{Y}}_t$ à $\mathcal{Y}$, on peut considérer pour tout bicaractère d l'application $\hat{\Pi}_d : \hat{\mathcal{Y}}_t \to \mathcal{Y}_t$ qui est $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-linéaire, et qui vérifie :

$$m = \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*} V_{i,a}^{v_{i,a}(m)} W_{i,a}^{w_{i,a}(m)} \mapsto t^{-d(m,m)} \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{u_{i,a}(m)} \text{ et } t \mapsto 1$$

On a toujours $\tilde{\Pi}_t = \Pi_t \circ \hat{\Pi}_d$.

Dans le cas du bicaractère trivial $d = 0$, on note $\hat{\Pi}_0 = \hat{\Pi}_t$ et c'est alors un morphisme d'anneaux. Dans le cas ADE, on peut prendre d_N et on retrouve l'application $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_{d_N}$ de [5].

Lemme 10. *Un produit $p = \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*} A_{i,a}^{v_{i,a}} \in \mathcal{Y}$ avec les $v_{i,a} \in \mathbb{Z}$ est égal à 1 si et seulement si tous les $v_{i,a}$ sont nuls.*

En conséquence on définit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble A des monômes de $\mathcal{Y}$ en posant :

$$m \leq m' \Leftrightarrow m'/m \text{ est un monôme en } A_{i,a}^{-1}$$

Démonstration:

Supposons par l'absurde qu'un tel produit p peut être égal à 1 avec des $v_{i,a} \neq 0$. Considérons alors un a tel qu'il existe un $i \in I$ avec $v_{i,a} \neq 0$ mais pour $m \in \mathbb{Z}$ strictement positif, pour $j \in I$, $v_{j,aq^m} = 0$. Parmi ces i, on en choisit un tel que la longueur de la racine associée soit maximale. Dans p, le facteur $Y_{i,aq_i}^{-v_{i,a}}$ doit se simplifier avec un autre facteur. Cependant par définition de a il ne peut pas venir de $A_{i,aq_i^2}^{v_{i,aq_i^2}}$. Il reste donc les possibilités suivantes :

il provient d'un $A_{j,aq_i}^{v_{j,aq_i}}$ avec $C_{i,j} = -1$, $j \neq i$. Alors $v_{j,aq_i} \neq 0$, contradiction.

il provient d'un $A_{j,aq_iq^{-1}}^{v_{j,aq_iq^{-1}}}$ avec $C_{i,j} = -2$, $j \neq i$, ce qui impose $v_{j,aq_iq^{-1}} \neq 0$. Comme $C_{i,j} = -2$, les racines associées à i et j ne sont pas de même longueur, et donc en utilisant l'hypothèse sur i, on a $r_i > r_j \geq 1$. Alors $q_iq^{-1} = q$ ou q^2, donc $v_{j,aq} \neq 0$ ou $v_{j,aq^2} \neq 0$, ce qui n'est pas possible d'après le choix de i.

il provient d'un $A_{j,aq_iq^{-2}}^{v_{j,aq_iq^{-2}}}$ avec $C_{i,j} = -3$, $j \neq i$, ce qui impose $v_{j,aq_iq^{-2}} \neq 0$. On est dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de type G_2. Les racines associées à i et j ne sont pas de même longueur, et $r_i/r_j = 3$ ou $\frac{1}{3}$. Si $r_i = 3$, on a $v_{j,aq} \neq 0$ ce qui est contraire au choix de i. Si $r_i = 1$, on a $v_{j,aq^{-1}} \neq 0$ et $v_{j,aq^m} = 0$ pour $m \geq 0$. Mais alors on ne peut pas annuler $Y_{j,aq^{-1}q_j}^{v_{j,aq^{-1}}} = Y_{j,aq^2}^{v_{j,aq^{-1}}}$.

Pour que $\leq$ soit bien une relation d'ordre, la propriété la moins évidente est l'antisymétrie qui est assurée par ce qui précède. $\square$

5.1.2. *Quelques notations.* On note A l'ensemble des monômes de $\mathcal{Y}$, $B_i \subset A$ l'ensemble des monômes i-dominants de $\mathcal{Y}$. Pour $\prod_{a \in \mathbb{C}^*, j} Y_{j,a}^{u_{j,a}} = m \in B_i$, on pose :

$$E_{0,i}(m) = m \prod_{a \in \mathbb{C}^*} \sum_{r_a = 0..u_{i,a}} t^{r_a(u_{i,a} - r_a)} \begin{bmatrix} u_{i,a} \\ r_a \end{bmatrix}_t A_{i,aq_i}^{-r_a}$$

Remarquer que si de plus $m \in B_i \cap \hat{\Pi}_t(\hat{B}_i) = B_i'$, on a, en posant $m = \hat{\Pi}_t(m')$, l'égalité $E_{0,i}(m) = \hat{\Pi}_t(E_i(m'))$.

On note $\mathfrak{K}_i$ le $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-module engendré par les $E_{0,i}(m)$ avec $m \in B_i$. On a $\hat{\Pi}_t(\hat{\mathfrak{K}}_i) \subset \mathfrak{K}_i$ mais on n'a pas égalité dans le cas général.

Pour $i \in I$, on obtient de la même manière que dans le lemme 1 une décomposition en somme directe de $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-modules :

Lemme 11.

$$\mathcal{Y}_t = \mathfrak{K}_{t,i} \oplus \bigoplus_{m \in A - B_i} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]m = (\bigoplus_{m \in B_i} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]E_{i,0}(m)) \oplus (\bigoplus_{m \in A - B_i} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]m)$$

Lemme 12. *On a l'égalité :*

$$\hat{\Pi}_t(\hat{\mathfrak{K}}_t) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{K}_{t,i}$$

et on notera $\mathfrak{K}_t$ cette sous-partie de $\mathcal{Y}_t$.

Démonstration:

On sait déjà :

$$\hat{\Pi}_t(\hat{\mathfrak{K}}_t) = \hat{\Pi}_t(\bigcap_{i \in I} \hat{\mathfrak{K}}_i) \subset \bigcap_{i \in I} \hat{\Pi}_t(\hat{\mathfrak{K}}_i) \subset \bigcap_{i \in I} \mathfrak{K}_i$$

Considérons à présent $x \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{K}_i$. Soit $m \in A$ un monôme maximal parmi ceux qui interviennent dans x pour la relation d'ordre $\leq$ du lemme 10. Pour chaque $i \in I$, m provient d'un certain $E_{0,i}(m')$ avec m' i-dominant, ce qui impose $m \leq m'$. On a donc $m = m'$ et m est i-dominant pour tout $i \in I$. Il est donc de la forme :

$$m = \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{u_{i,a}(m)} = \hat{\Pi}_t(\prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*} W_{i,a}^{u_{i,a}(m)}) \in \hat{\Pi}_t(\hat{\mathcal{Y}}_t)$$

car les $u_{i,a}(m) \geq 0$. Si on suppose $m \neq 1$ (soit $x \notin \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$) et on considère $i_0 \in I$ tel que $wt_{i_0}(m) \neq 0$, on a dans l'écriture de x dans $\mathfrak{K}_{i_0}$ le monôme m qui ne peut provenir que de

$$E_{0,i_0}(m) = \hat{\Pi}_t(E_{i_0}(\prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*} W_{i,a}^{u_{i,a}(m)})) \in \hat{\Pi}_t(\hat{\mathfrak{K}}_t)$$

On peut alors enlever de x le terme $E_{0,i_0}(m)$ avec son coefficient de $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$, et on se ramène à un élément de $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{K}_{t,i}$ faisant intervenir strictement moins de monôme, ce qui permet de conclure par récurrence. □

Pour définir les $E'_{0,i}(m)$ analogues des $E_{0,i}(m)$ relatifs à $\hat{\Pi}$, on considère pour $i \in I$ en suivant [4] :

$$\phi_i : \mathfrak{K}_{t,i} \to \mathcal{Y}_t$$

définie comme l'application $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-linéaire telle que pour $m \in B_i$:

$$E_{0,i}(m) = \sum \lambda_M(t) M \mapsto \sum \lambda_M(t) t^{-\alpha(m,M)} M$$

avec pour $M = m \prod_{a \in \mathbb{C}^*} A_{i,a}^{-r_a}$ ($r_a \geq 0$) qui intervient effectivement dans $E_{0,i}(m)$:

$$\alpha(m,M) = \sum_{a \in \mathbb{C}^*} r_a(u_{i,aq_i^{-1}}(m) + u_{i,aq_i}(m) - r_a - r_{aq_i^{-2}})$$

On pose alors pour $m \in B_i$:

$$E'_{0,i}(m) = \phi_i(E_{0,i}(m))$$

Cette définition est motivée par le lemme :

Lemme 13. *Soit, dans le cas ADE, $m \in B'_i$. On a, si $m = \hat{\Pi}_t(m')$, l'égalité :*

$$E'_{0,i}(m) = t^{-d(m',m')} \hat{\Pi}(E_i(m'))$$

Démonstration:

Il suffit de calculer en notant $E_i(m') = \sum \lambda_M(t)M$ avec $M = m' \prod_{a\in\mathbb{C}^*} V_{i,a}^{r_{a,M}}$:

$$\hat{\Pi}(E_i(m')) = \hat{\Pi}(\sum \lambda_M(t)M) = \sum \lambda_M(t)t^{-d(M,M)}m \prod_{a\in\mathbb{C}^*} A_{i,a}^{-r_{a,M}}$$

puis :

$$d(M,M) = d(m',m') + \sum_{a\in\mathbb{C}^*} r_{a,M}(d(V_{i,a},m') + d(m',V_{i,a}) + d(V_{i,a},M/m'))$$

$$= d(m',m') + \sum_{a\in\mathbb{C}^*} r_{a,M}(u_{i,aq_i^{-1}}(m') + u_{i,aq_i}(m') - r_{a,M} - r_{aq_i^{-2},M}) = d(m',m') + \alpha(m,\hat{\Pi}_t(M))$$

ce qui donne

$$\hat{\Pi}(E_i(m')) = t^{-d(m',m')}\phi_i(\hat{\Pi}_t(E_i(m'))) = t^{-d(m',m')}\phi_i(E_{0,i}(m))$$

□

On note alors $\mathfrak{K}'_i$ le $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-module engendré par les $E_{0,i}(m)'$ avec $m \in B_i$.

Pour $i \in I$, on obtient de la même manière que dans le lemme 1 une décomposition en somme directe de $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-modules :

$$\mathcal{Y}_t = \mathfrak{K}'_{t,i} \oplus \bigoplus_{m\in A-B_i} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]m = (\bigoplus_{m\in B_i} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]E'_{i,0}(m)) \oplus (\bigoplus_{m\in A-B_i} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]m)$$

Dans le cas ADE, on a $\hat{\Pi}(\hat{\mathfrak{K}}_i) \subset \mathfrak{K}'_i$ mais on n'a pas égalité dans le cas général. On a cependant l'égalité suivante comme dans le lemme 12 :

$$\hat{\Pi}(\hat{\mathfrak{K}}_t) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{K}'_{t,i}$$

et on notera $\mathfrak{K}'_t$ cette sous-partie de $\mathcal{Y}_t$.

5.2. Les opérateurs $S^l_{t,i}$.

5.2.1. *Définition.* On considère les $\mathcal{Y}_t$-modules libres :

$$\mathcal{Y}^l_{t,i} = \bigoplus_{a\in\mathbb{C}^*} \mathcal{Y}_t.S_{i,a}$$

On déduit respectivement de $\hat{\Pi}_t$, $\hat{\Pi}$ (dans le cas ADE), Π_t des applications $\hat{\Pi}^l_{t,i}$, $\hat{\Pi}^l_i$, $\Pi^l_{t,i}$.

On note $S^l_{t,i}$ l'application $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-linéaire $S^l_{t,i} : \mathcal{Y}_t \to \mathcal{Y}^l_{t,i}$ qui prend sur un monôme $m \in \mathcal{Y}_t$ la valeur :

$$S^l_{t,i}(m) = m(\sum_{a\in\mathbb{C}^*/u_{i,a}(m)\geq 0} (1 + ... + t^{2(u_{i,a}(m)-1)})S_{i,a} - \sum_{a\in\mathbb{C}^*/u_{i,a}(m)<0} (t^{-2} + ... + t^{2u_{i,a}(m)})S_{i,a})$$

On voit immédiatement :

$$S^l_{t,i}(Y_{j,a}) = \delta_{j,i}Y_{i,a}S_{i,a} \text{ et } S^l_{t,i}(Y_{j,a}^{-1}) = -\delta_{j,i}t^{-2}Y_{i,a}^{-1}S_{i,a}$$

Lemme 14. *Le diagramme (1) suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{Y}}_t & \xrightarrow{\hat{S}^l_{t,i}} & \hat{\mathcal{Y}}^l_{t,i} \\ \hat{\Pi}_t \downarrow & & \downarrow \hat{\Pi}^l_{t,i} \\ \mathcal{Y}_t & \xrightarrow{S^l_{t,i}} & \mathcal{Y}^l_{t,i} \\ \Pi_t \downarrow & & \downarrow \Pi^l_{t,i} \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{S^l_i} & \mathcal{Y}^l_{1,i} \end{array}$$

Dans le cas ADE, le diagramme (1)' obtenu en utilisant respectivement $\hat{\Pi}, \hat{\Pi}^l_i$ à la place de $\hat{\Pi}_t, \hat{\Pi}^l_{t,i}$ est commutatif également.

Démonstration:

Toutes les applications sont $\mathbb{Z}$-linéaires, il suffit donc de regarder un monôme $m \in \hat{\mathcal{Y}}_t$ et $\lambda \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$:

$$\begin{aligned}
& (\hat{\Pi}^l_{t,i} \circ \hat{S}^l_{t,i})(\lambda m) \\
= \ & \lambda \hat{\Pi}^l_{t,i}(m(\sum_{a\in\mathbb{C}^* / u_{i,a}\geq 0} (1 + ... + t^{2(u_{i,a}-1)})S_{i,a} - \sum_{a\in\mathbb{C}^* / u_{i,a}<0} (t^{-2} + ... + t^{2u_{i,a}})S_{i,a}) \\
= \ & \lambda \hat{\Pi}_t(m)(\sum_{a\in\mathbb{C}^* / u_{i,a}\geq 0} (1 + ... + t^{2(u_{i,a}-1)})S_{i,a} - \sum_{a\in\mathbb{C}^* / u_{i,a}<0} (t^{-2} + ... + t^{2u_{i,a}})S_{i,a}) \\
= \ & \lambda \prod_{a\in\mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{u_{i,a}}(\sum_{a\in\mathbb{C}^* / u_{i,a}\geq 0} (1 + ... + t^{2(u_{i,a}-1)})S_{i,a} - \sum_{a\in\mathbb{C}^* / u_{i,a}<0} (t^{-2} + ... + t^{2u_{i,a}})S_{i,a}) \\
= \ & S^l_{t,i}(\lambda \prod_{a\in\mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{u_{i,a}}) \\
= \ & S^l_{t,i}(\hat{\Pi}_t(\lambda m))
\end{aligned}$$

puis un monôme $m \in \mathcal{Y}_t$ et $\lambda(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$:

$$\begin{aligned}
& (\Pi^l_{t,i} \circ S^l_{t,i})(\lambda(t) m) \\
= \ & \lambda(1) \Pi^l_{t,i}(m(\sum_{a\in\mathbb{C}^* / u_{i,a}\geq 0} (1 + ... + t^{2(u_{i,a}-1)})S_{i,a} - \sum_{a\in\mathbb{C}^* / u_{i,a}<0} (t^{-2} + ... + t^{2u_{i,a}})S_{i,a}) \\
= \ & \lambda(1) m(\sum_{a\in\mathbb{C}^*} u_{i,a} S_{i,a}) \\
= \ & S^l_i(\lambda(1) m) \\
= \ & S^l_i(\hat{\Pi}_t(\lambda(t) m))
\end{aligned}$$

Le diagramme (1)' se traite de manière analogue. □

5.2.2. *Interprétation des S^l_i en terme de dérivation.*

Lemme 15. *Il existe sur $\mathcal{Y}^l_{t,i}$ une unique structure de bimodule pour la multiplication usuelle . de $\mathcal{Y}_t$ telle la structure à gauche soit la structure ci-dessus, et que pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ et tout monôme $\prod_{a\in\mathbb{C}^*, j\in I} Y_{j,a}^{u_{j,a}} = m \in \mathcal{Y}_t$:*

$$S_{i,a}.m = t^{2u_{i,a}(m)} m.S_{i,a} \ , \ S_{i,a}.t = t.S_{i,a}$$

La démonstration est complètement analogue au cas $\hat{\mathcal{Y}}^l_{t,i}$.

Notons qu'on a alors pour tout $a \in \mathbb{C}^*$:

$$S_{i,a}.Y_{i,a} = t^2 Y_{i,a}.S_{i,a} \ , \ S_{i,a}.Y_{i,a}^{-1} = t^{-2} Y_{i,a}^{-1}.S_{i,a}$$

Proposition 7. *L'application $S^l_{t,i}$ a une propriété de dérivation :*

$$\forall U, V \in \hat{\mathcal{Y}}_t, \hat{S}^l_{t,i}(U.V) = U.\hat{S}^l_{t,i}(V) + \hat{S}^l_{t,i}(U).V$$

C'est de plus l'unique dérivation $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-linéaire telle que $S^l_{t,i}(Y_a) = Y_a.S_a$.

La démonstration est complètement analogue au cas $\hat{S}^l_{t,i}$.

5.3. t-analogues des opérateurs d'écrantage pour $\mathcal{Y}_t$.

5.3.1. *Définition des opérateurs $S_{t,i}$.* On considère le sous $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-module $\hat{\Pi}^l_{t,i}(\hat{F}_{t,i})$ de $\mathcal{Y}^l_{t,i}$.

Lemme 16. *Les éléments de $\hat{\Pi}^l_{t,i}(\hat{F}_{t,i})$ sont les éléments de $\mathcal{Y}^l_{t,i}$ de la forme :*

$$\sum_{a\in\mathbb{C}^*, m\in\hat{\Pi}_t(\hat{A})} \lambda_{m,a} m(A^{-1}_{i,aq_i} t^{2u_{i,aq_i^2}(m)} S_{i,aq_i^2} - t^2 S_{i,a})$$

avec les $\lambda_{m,a} \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ presque tous nuls.

Démonstration:

Le résultat découle du fait que $\hat{\Pi}_t$ est un morphisme d'anneaux qui conserve les quantités $u_{i,a}$. □

Soit à présent :

$$F_{t,i} = \sum_{a\in\mathbb{C}^*, m\in A} \mathbb{Z}[t,t^{-1}].m(A_{i,aq_i}^{-1} t^{2u_{i,aq_i^2}(m)} S_{i,aq_i^2} - t^2 S_{i,a})$$

C'est un sous $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-module de $\mathcal{Y}_{t,i}^l$ qui contient $\hat{\Pi}_{t,i}^l(\hat{F}_{t,i})$.

Notons que les éléments de $F_{t,i}$ sont les éléments de $\mathcal{Y}_{t,i}^l$ de la forme :

$$\sum_{a\in\mathbb{C}^*} (A_{i,aq_i}^{-1} S_{i,aq_i^2}.U_a - t^2 U_a.S_{i,a})$$

avec les $U_a \in \mathcal{Y}_t$.

Définition 3. *On appelle $\mathcal{Y}_{t,i}$ le $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-module quotient de $\mathcal{Y}_{t,i}^l$ par $F_{t,i}$, et $S_{t,i}$ l'application obtenue à partir de $S_{t,i}^l$ par projection sur $\mathcal{Y}_{t,i}$.*

Notons que $F_{t,i}$ n'est pas un $\mathcal{Y}_t$-sous module de $\mathcal{Y}_{t,i}^l$, mais c'est une partie de $\mathcal{Y}_{t,i}^l$ stable par multiplication par des éléments de $\mathbb{Z}[Y_{j,a}^{\pm}]_{j\neq i}$. En particulier on peut définir une multiplication à gauche sur $\mathcal{Y}_{t,i}$ par les élements de $\mathbb{Z}[Y_{j,a}^{\pm}]_{j\neq i}$, qui commute avec la projection p_i de $\mathcal{Y}_{t,i}^l$ sur $\mathcal{Y}_{t,i}$.

Lemme 17. *Les applications $\Pi_{t,i}^l, \hat{\Pi}_{t,i}^l$ donnent naturellement des applications $\Pi_{t,i}, \hat{\Pi}_{t,i}$ rendant le diagramme (2) suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} & \hat{\mathcal{Y}}_{t,i}^l & \longrightarrow & \hat{\mathcal{Y}}_{1,i,t} & \\ \hat{\Pi}_{t,i}^l \downarrow & & & \downarrow & \hat{\Pi}_{t,i} \\ & \mathcal{Y}_{t,i}^l & \longrightarrow & \mathcal{Y}_{t,i} & \\ \Pi_{t,i}^l \downarrow & & & \downarrow & \Pi_{t,i} \\ & \mathcal{Y}_i^l & \longrightarrow & \mathcal{Y}_i & \end{array}$$

Démonstration:

Il suffit de vérifier que les applications $\mathbb{Z}$-linéaires $\Pi_{t,i}^l, \hat{\Pi}_{t,i}^l$ passent aux quotient. Or $\hat{\Pi}_{t,i}^l(\hat{F}_{t,i}) \subset F_{t,i}$, donc $\hat{\Pi}_{t,i}$ est bien définie. Puis pour $x \in F_{t,i}$, on a avec les notations déjà utilisées :

$$\Pi_{t,i}(x) = \sum_{a\in\mathbb{C}^*} U_a(1)(A_{i,aq_i}^{-1}.S_{i,aq_i^2} - S_{i,a}) \in F_i$$

□

Proposition 8. *On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} & \hat{\mathcal{Y}}_t & \xrightarrow{\hat{S}_{t,i}} & \hat{\mathcal{Y}}_{t,i} & \\ \hat{\Pi}_t \downarrow & & & \downarrow & \hat{\Pi}_{t,i} \\ & \mathcal{Y}_t & \xrightarrow{S_{t,i}} & \mathcal{Y}_{t,i} & \\ \Pi_t \downarrow & & & \downarrow & \Pi_{t,i} \\ & \mathcal{Y} & \xrightarrow{S_i} & \mathcal{Y}_i & \end{array}$$

et on a :

$$\mathfrak{K}_{t,i} \subset Ker(S_{t,i})$$

Démonstration:

La commutativité du diagramme provient de la commutativité des diagrammes (1) et (2).

Puis $\hat{\Pi}_{t,i} \circ \hat{S}_{t,i} = S_{t,i} \circ \hat{\Pi}_t$ et $\hat{\mathfrak{K}}_{t,i} \subset \mathrm{Ker}(\hat{S}_{t,i})$ implique $\hat{\Pi}_t(\hat{\mathfrak{K}}_{t,i}) \subset \mathrm{Ker}(S_{t,i})$.

Soit alors $m \in B_i$ qu'on décompose $m = m_i \prod_{j \neq i} m_j$ avec les $m_j \in \mathbb{Z}[Y_{j,a}^{\pm}]_{a \in \mathbb{C}^*}$. Alors :

$$E_{0,i}(m) = E_{0,i}(m_i) \prod_{j \neq i} m_j$$

et comme pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, $u_{i,a}(\prod_{j \neq i} m_j) = 0$, on a :

$$S_{t,i}^l(E_{0,i}(m)) = (\prod_{j \neq i} m_j) S_{t,i}^l(E_{0,i}(m_i))$$

Alors pour la multiplication à gauche sur $\mathcal{Y}_{t,i}$ par des éléments de $\mathbb{Z}[Y_{j,a}^{\pm}]_{j \neq i}$, on a :

$$S_{t,i}(E_{0,i}(m)) = (\prod_{j \neq i} m_j) S_{t,i}(E_{0,i}(m_i))$$

Mais alors comme m est i-dominant, on a :

$$m_i = \prod_{a \in \mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{u_{i,a}} = \hat{\Pi}_t(\prod_{a \in \mathbb{C}^*} W_{i,a}^{u_{i,a}})$$

avec les $u_{i,a} = u_{i,a}(m_i) \geq 0$. En conséquence :

$$E_{0,i}(m_i) = \hat{\Pi}_t(E_i(\prod_{a \in \mathbb{C}^*} W_{i,a}^{u_{i,a}})) \in \hat{\Pi}_t(\hat{\mathfrak{K}}_{t,i}) \subset \mathrm{Ker}(S_{t,i})$$

□

5.3.2. *Remarques sur les opérateurs $S'_{t,i}$.* On peut faire une contruction analogue relative à $\mathfrak{K}'$ en considérant les :

$$F'_{t,i} = \sum_{a \in \mathbb{C}^*, m \in A} \mathbb{Z}[t, t^{-1}].m(A_{i,aq_i}^{-1} t^{u_{i,aq_i^2}(m) - u_{i,a}(m)} S_{i,aq_i^2} - tS_{i,a})$$

puis $\mathcal{Y}'_{t,i} = \mathcal{Y}^l_{t,i}/F'_{t,i}$, et $S'_{t,i}$ la composée de $S^l_{t,i}$ avec la projection de $\mathcal{Y}^l_{t,i}$ sur $\mathcal{Y}'_{t,i}$.

Dans le cas ADE, on a $\hat{\Pi}^l_{t,i}(\hat{F}_{t,i}) \subset F'_{t,i}$, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{\mathcal{Y}}_t & \xrightarrow{\hat{S}_{t,i}} & \hat{\mathcal{Y}}_{t,i} & & \\
\hat{\Pi} \downarrow & & \downarrow & \hat{\Pi}_i \\
\mathcal{Y}_t & \xrightarrow{S'_{t,i}} & \mathcal{Y}'_{t,i} & & \\
\Pi_t \downarrow & & \downarrow & \Pi'_{t,i} \\
\mathcal{Y} & \xrightarrow{S_i} & \mathcal{Y}_i & &
\end{array}$$

et on a :

$$\mathfrak{K}'_{t,i} \subset \mathrm{Ker}(S'_{t,i})$$

5.4. **Noyau des t-opérateurs d'écrantage $S_{t,i}$.**

Théorème 3. *On a $\mathfrak{K}_{t,i} = Ker(S_{t,i})$.*

On pourrait montrer ce résultat de la même manière que $\hat{\mathfrak{K}}_{t,i} = \mathrm{Ker}(\hat{S}_{t,i})$ en utilisant la décomposition de $\mathcal{Y}_t$ du lemme 1. Cette méthode permet aussi retrouver le résultat du théorème 1 en utilisant la décomposition de $\mathcal{Y}$:

$$\mathcal{Y} = \mathfrak{K}_i \oplus \bigoplus_{m \in A - B_i} \mathbb{Z}m$$

On propose ici une alternative qui déduit le résultat du théorème 3 de celui du théorème 1. Elle nécessite quelques lemmes préliminaires.

Noter que tout ce qui suit peut être appliqué de manière analogue à $S'_{t,i}$ dans le cas ADE, ce qui donne $\mathfrak{K}'_{t,i} = \mathrm{Ker}(S'_{t,i})$.

5.4.1. *Lemmes préliminaires.*

Lemme 18. *Tout $u \in \mathcal{Y}_t$ s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$u = \sum_{m \in D} (t-1)^{p(m)} t^{-q(m)} (\alpha_0(m) + \alpha_1(m)(t-1) + \alpha_2(m)(t-1)^2 + ...)m$$

avec $D \subset A$, les $p(m), q(m), \alpha_0(m), \alpha_1(m), ... \in \mathbb{N}$ et $\alpha_0(m) \neq 0$.

Démonstration:

On décompose u sur la somme directe $\mathcal{Y}_t = \sum_{m \in A} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]m$, et il suffit donc de considérer un polynôme de Laurent $P \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ non nul et de montrer qu'il s'écrit de manière unique :

$$P = \frac{(t-1)^{p(m)}}{t^{q(m)}} (\alpha_0(m) + \alpha_1(m)(t-1) + \alpha_2(m)(t-1)^2 + ...)$$

Si $P \in \mathbb{Z}[t]$, c'est le cas car on a une base graduée $((t-1)^p)_p$ de $\mathbb{Z}[t]$. Dans le cas général, P s'écrit de manière unique $P = t^{-q(m)} Q$ avec $Q \in \mathbb{Z}[t]$ et $q(m) \in \mathbb{N}$. □

Corollaire 1. *Le noyau de Π_t est $Ker(\Pi_t) = (t-1)\mathcal{Y}_t$.*

Démonstration:

L'inclusion $(t-1)\mathcal{Y}_t \subset \mathrm{Ker}(\Pi_t)$ est claire, puis si $u \in \mathrm{Ker}(\Pi_t)$, en utilisant la décomposition du lemme 18, on voit que :

$$\sum_{m \in D, p(m)=0} \alpha_0(m)m = 0$$

or comme les $\alpha_0(m)$ sont non nuls, pour $m \in D$ on a $p(m) > 0$. □

Lemme 19. *Si $\alpha \in \mathcal{Y}_{t,i}^l$ vérifie $(t-1)\alpha \in F_{t,i}$ alors $\alpha \in F_{t,i}$.*

Démonstration:

Pour un tel $\alpha \in \mathcal{Y}_{t,i}^l$, on peut écrire :

$$(t-1)\alpha = \sum_{a \in \mathbb{C}^*, m \in A} \lambda_{m,a} m (A_{i,aq_i}^{-1} t^{2u_{i,aq_i^2}(m)} S_{i,aq_i^2} - t^2 S_{i,a})$$

avec les $\lambda_{m,a} \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ presque tous nuls. Mais si on évalue cette expression à $t = 1$, on trouve dans $\mathcal{Y}_{1,i}^l$:

$$0 = \sum_{a \in \mathbb{C}^*, m \in A} \lambda_m(1) m (A_{i,aq_i}^{-1} S_{i,aq_i^2} - S_{i,a}) = \sum_{a \in \mathbb{C}^*} U_a(1)(A_{i,aq_i}^{-1} S_{i,aq_i^2} - S_{i,a})$$

avec :

$$U_a = \sum_{m \in A} \lambda_{m,a} m$$

Supposons alors par l'absurde qu'il existe un a tel que $U_a(1) \neq 0$. On considère alors la plus grande puissance de q tel que $U_{aq^m}(1) \neq 0$ (qui existe car les U_b sont presque tous nuls). Alors $A_{i,aq^{m+1}}^{-1} U_{aq^m}(1)$ est le coefficient de S_{i,aq_i^2}, donc $A_{i,aq^{m+1}}^{-1} U_{aq^m}(1) = 0$, contradiction. On peut donc écrire tous les U_a sous la forme $U_a = (t-1)U'_a$ avec les $U'_a = \sum_{m \in A} \lambda'_{m,a} m \in \mathcal{Y}_t$, et $(t-1)\alpha = (t-1)\beta$ avec :

$$\beta = \sum_{a \in \mathbb{C}^*, m \in A} \lambda_{m,a} m (t^{2u_{i,aq_i^2}(m)} A_{i,aq_i}^{-1} . S_{i,aq_i^2} - t^2 S_{i,a}) \in F_{t,i}$$

Mais comme $\mathcal{Y}_{t,1}^l$ est un $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-module libre, on a $\alpha = \beta$. □

5.4.2. *Démonstration du théorème 3. Démonstration:*

La première inclusion $\mathfrak{K}_{t,i} \subset \mathrm{Ker}(S_{t,i})$ est déjà connue.

Considérons $u \in \mathrm{Ker}(S_{t,i})$. Alors $0 = \Pi_{t,i}(S_{t,i}(u)) = S_i(\Pi_t(u))$ et donc d'après le théorème 1, $\Pi_t(u) \in \mathbb{Z}[Y_{j,b}^{\pm}]_{j\neq i, b\in\mathbb{C}^*}\mathbb{Z}[Y_{i,a}(1+A_{i,aq_i}^{-1})]_{a\in\mathbb{C}^*}$, soit :

$$\Pi_t(u) = \sum_m \lambda_m \prod_{a\in\mathbb{C}^*}(Y_{i,a}(1+A_{i,aq_i}^{-1}))^{p_a(m)}$$

avec $\lambda_m \in \mathbb{Z}[Y_{j,b}^{\pm}]_{j\neq i,b\in\mathbb{C}^*}$ et les $p_a(m) \geq 0$. Pour chaque m, on pose :

$$v_m = \prod_{a\in\mathbb{C}^*}(W_{i,a}(1+V_{i,aq_i}^{-1}))^{*p_a(m)} = E_i(\prod_{a\in\mathbb{C}^*} W_{i,a}^{p_a(m)}) \in \hat{\mathfrak{K}}_{t,i}$$

En considérant alors :

$$v = \sum_m \lambda_m \hat{\Pi}_t(v_m)$$

on a $v \in \mathfrak{K}_{t,i}$ et $\Pi_t(v) = \Pi_t(u)$, donc $v - u \in \mathrm{Ker}(\Pi_t) = (t-1)\mathcal{Y}_t$ d'après le corollaire 1. En conséquence :

$$u = v + (t-1)u_1$$

avec $u_1 \in \mathcal{Y}_t$. Mais alors $(t-1)u_1 \in \mathrm{Ker}(S_{t,i})$, soit $(t-1)S_{t,i}^l(u_1) \in F_{t,i}$. Alors d'après le lemme 19, $S_{t,i}^l(u_1) \in F_{t,i}$, soit $u_1 \in \mathrm{Ker}(S_{t,i})$. On peut recommencer avec u_1, et on obtient par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $w_p \in \mathfrak{K}_{t,i}$ et $u_p \in \mathrm{Ker}(S_{t,i})$ tels que :

$$u = w_p + (t-1)^p z_p$$

Décomposons $u = b + c$ sur la somme directe du lemme 11 :

$$\mathcal{Y}_t = \mathfrak{K}_{t,i} \oplus \bigoplus_{m\in\hat{A}-\hat{B}_i} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]m$$

et supposons par l'absurde que $c \neq 0$. Pour p, prenons $p_0 = p(m_0) + 1$ avec $p(m_0)$ le plus grand $p(m)$ qui apparait dans la décomposition de c du lemme 18. On obtient une écriture $u = w + (t-1)^{p_0}v$. Décomposons $v = b' + c'$ sur la somme directe du lemme 1. Alors :

$$u = b + c = w + (t-1)^{p_0}b' + (t-1)^{p_0}c'$$

et $b = w + (t-1)^{p_0}b'$ et $c = (t-1)^{p_0}c'$. Donc les $p(m)$ qui apparaissent dans la décomposition de c du lemme 18 sont tous strictement plus grands que p_0, contradiction. On a donc $\mathfrak{K}_{t,i} = \mathrm{Ker}(S_{t,i})$. □

6. Compléments relatifs aux involutions

On rappelle les involutions définies par Nakajima : sur $\mathcal{Y}_t$ on pose $\overline{t} = t^{-1}, \overline{Y_{i,a}^{\pm}} = Y_{i,a}^{\pm}$, et sur $\hat{\mathcal{Y}}_t$ pour d un bicaratère, on pose :

$$\overline{t} = t^{-1}\ ,\ \overline{m} = t^{2d(m,m)}m$$

En particulier dans le cas ADE on a l'involution obtenue avec d_N. Elle est alors anti multiplicative relativement à $*$ et commute avec $\hat{\Pi}$.

On étend ces involutions à $\mathcal{Y}_{t,i}^l$ (respectivement à $\hat{\mathcal{Y}}_{t,i}^l$) en posant $\overline{S_{i,a}} = t^{-2}S_{i,a}$, soit :

$$\overline{\sum_{a\in\mathbb{C}^*} U_a S_{i,a}} = \sum_{a\in\mathbb{C}^*} t^{-2}S_{i,a}\overline{U_a}$$

pour des U_a dans $\mathcal{Y}_t$ (respectivement $\hat{\mathcal{Y}}_t$).

Lemme 20. *On a pour $x \in \hat{\mathcal{Y}}_t, y \in \mathcal{Y}_t$:*

$$\overline{S_{t,i}^l(x)} = S_{t,i}^l(\overline{x})\ ,\ \overline{\hat{S}_{t,i}^l(y)} = \hat{S}_{t,i}^l(\overline{y})$$

De plus $\hat{F}_{t,i}, F'_{t,i}$ sont stables par les involutions correpondantes.

Démonstration:

Les deux résultats s'obtiennent de manière analogue, en considérant par exemple un monôme $a \in \mathcal{Y}_t$:

$$\begin{aligned}
&\overline{S^l_{t,i}(\lambda(t)m)} \\
= \ & \lambda(t^{-1})\Big(\sum_{a\in\mathbb{C}^* \, u_{i,a}(m)\geq 0}(1+t^{-2}+...+t^{-2(u_{i,a}(m)-1)})t^{-2}S_{i,a}m \\
& + \sum_{a\in\mathbb{C}^* \, u_{i,a}(m)<0}(t^2+...+t^{-2u_{i,a}(m)})t^{-2}S_{i,a}m\Big) \\
= \ & \lambda(t^{-1})m\Big(\sum_{a\in\mathbb{C}^* \, u_{i,a}(m)\geq 0}(t^{2(u_{i,a}(m)-1)}+...+t^2+1)S_{i,a}+\sum_{a\in\mathbb{C}^* \, u_{i,a}(m)<0}(t^{2u_{i,a}(m)}+...+t^{-2})S_{i,a}\Big) \\
= \ & \lambda(t^{-1})S^l_{t,i}(m)=S^l_{t,i}(\overline{\lambda(t)m})
\end{aligned}$$

Considérons ensuite, par exemple dans le cas ADE :

$$\begin{aligned}
&\overline{\lambda(t)m(V_{i,aq_i}t^{2u_{i,aq_i^2}(m)}S_{i,aq_i^2}-t^2S_{i,a})} \\
= \ & \lambda(t^{-1})t^{-2}(t^{-2u_{i,aq_i^2}(m)}S_{i,aq_i^2}t^{2d(m,m)-2+2u_{i,a}(m)+2u_{i,aq_i^2}(m)}mV_{i,aq_i}-t^{-2}S_{i,a}t^{2d(m,m)}m) \\
= \ & \lambda(t^{-1})t^{-2+2d(m,m)}m(V_{i,aq_i}t^{-2}S_{i,aq_i^2}t^{-2+2u_{i,a}(m)+2u_{i,aq_i^2}(m)}-t^{-2+2u_{i,a}(m)}S_{i,a}) \\
= \ & \lambda(t^{-1})t^{-6+2d(m,m)+2u_{i,a}(m)}m(V_{i,aq_i}S_{i,aq_i^2}t^{2u_{i,aq_i^2}(m)}-t^2S_{i,a})\in\hat{F}_{t,i}
\end{aligned}$$

et dans le cas général :

$$\begin{aligned}
&\overline{\lambda(t)m(A^{-1}_{i,aq_i}t^{u_{i,aq_i^2}(m)-u_{i,a}(m)}S_{i,aq_i^2}-tS_{i,a})} \\
= \ & \lambda(t^{-1})t^{-2}(t^{u_{i,a}(m)-u_{i,aq_i^2}(m)}S_{i,aq_i^2}mA^{-1}_{i,aq_i}-t^{-1}S_{i,a}m) \\
= \ & \lambda(t^{-1})t^{-2}m(A^{-1}_{i,aq_i}t^{-2+u_{i,aq_i^2}(m)+u_{i,a}(m)}S_{i,aq_i^2}-t^{-1+2u_{i,a}(m)}S_{i,a}) \\
= \ & \lambda(t^{-1})t^{-4+2u_{i,a}(m)}m(A^{-1}_{i,aq_i}t^{u_{i,aq_i^2}(m)-u_{i,a}(m)}S_{i,aq_i^2}-tS_{i,a})\in F'_{t,i}
\end{aligned}$$

□

On peut ainsi définir des involutions sur $\hat{\mathcal{Y}}_{t,i}, \mathcal{Y}'_{t,i}$ qui commutent respectivement avec les opérateurs d'écrantage associés.

Remerciements : Je remercie M. Rosso pour nos discussions et ses précieux conseils, et H. Nakajima pour ses indications sur les q,t-caractères.

Références

[1] **N. Bourbaki**, *Groupes et algèbres de Lie*
Chapitres IV-VI, Hermann (1968)

[2] **E. Frenkel et N. Reshetikhin**, *The q-Characters of Representations of Quantum Affine Algebras and Deformations of W-Algebras*
http ://www.arxiv.org/abs/math/9810055
Recent Developments in Quantum Affine Algebras and related topics, Cont. Math., vol 248, pp 163-205 (1999)

[3] **E. Frenkel et E. Mukhin**, *Combinatorics of q-Characters of Finite-Dimensional Representations of Quantum Affine Algebras*
http ://www.arxiv.org/abs/math/9911112
Comm. in Math. Phy., vol 216, no. 1, pp 23-57 (2001)

[4] **H. Nakajima**, *t-Analogue of the q-Characters of Finite Dimensional Representations of Quantum Affine Algebras*
http ://www.arxiv.org/abs/math/0009231
"Physics and Combinatorics", Proc. Nagoya 2000 International Workshop, World Scientific, pp 181-212 (2001)

[5] **H. Nakajima**, *Quiver Varieties and t-Analogs of q-Characters of Quantum Affine Algebras*
http ://www.arxiv.org/abs/math/0105173

[6] **M. Rosso**, *Représentations des groupes quantiques*
Séminaire Bourbaki exp. no. 744, Astérisque 201-203, 443-83, SMF (1992)

David Hernandez: École Normale Supérieure - DMA, 45, Rue d'Ulm F-75230 PARIS, Cedex 05 FRANCE

E-mail address: David.Hernandez@ens.fr, URL: http://www.dma.ens.fr/~dhernand