École Polytechnique 2009-2010

Théorie de Galois

Corrigé de la Feuille d'exercices 4

Exercice 1.

(i) On a $[K:\mathbf{Q}] = [K:\mathbf{Q}[\sqrt{2}]][\mathbf{Q}[\sqrt{2}]:\mathbf{Q}]$ donc $[K:\mathbf{Q}] \in \{1,2,4\}$. Or $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ donc $[K:\mathbf{Q}] \neq 1$. D'après la structure des extensions quadratiques étudiée précédemment, $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}[\sqrt{2}]$. Donc $[K:\mathbf{Q}[\sqrt{2}]] \neq 1$ et $[K:\mathbf{Q}] = 4$.

(ii) x est primitif si et seulement si $x-a$ est primitif. Donc on peut supposer $a=0$. Si deux des entiers b,c,d sont nuls, on a $[\mathbf{Q}[x]:\mathbf{Q}] = 2$ donc $\mathbf{Q}[x] \neq K$. Etudions la réciproque. On a $x^2 \in (2b^2+3c^2+6d^2)+2(bc\sqrt{6}+bd2\sqrt{3}+cd3\sqrt{2})$. Donc $bc\sqrt{6}+bd2\sqrt{3}+cd3\sqrt{2} \in \mathbf{Q}[x]$. La famille $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\}$ est une base de K sur $\mathbf{Q}$. Si $[\mathbf{Q}[x]:\mathbf{Q}] = 2$, on a $bc\sqrt{6}+bd2\sqrt{3}+cd3\sqrt{2} = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbf{Q}\setminus\{0\}$ (car au moins un produit bc, bd, cd est non nul). On obtient aisément une contradiction en identifiant les coefficients sur la base.

(iii) On connait les 5 sous-corps $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbf{Q}[\sqrt{3}]$, $\mathbf{Q}[\sqrt{6}]$, K qui sont tous différents. Supposons qu'on a un autre sous-corps K'. Alors $[K':K] = 2$. Ainsi pour $x \in K' \setminus \mathbf{Q}$, d'après (ii) x est la forme $a+b\sqrt{c}$ avec $c \in \{2,3,6\}$ et $a,b \in \mathbf{Q}$. Donc K' contient un des sous-corps $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbf{Q}[\sqrt{3}]$, $\mathbf{Q}[\sqrt{6}]$. En regardant le degré, on voit que c'est l'un des ces sous-corps.

Exercice 2.

(i) On a $[K:\mathbf{Q}] = [K:\mathbf{Q}[x]][\mathbf{Q}[x]:\mathbf{Q}]$. Clairement $[\mathbf{Q}[x]:\mathbf{Q}] = 3$ et comme $j \notin \mathbf{Q}[x] \subset \mathbf{R}$, on a $[K:\mathbf{Q}[x]] = 2$. Les sous-corps $\mathbf{Q}[x]$, $\mathbf{Q}[j]$, $\mathbf{Q}[jx]$, $\mathbf{Q}[j^2x]$ sont distincts stricts de degrés respectifs 3, 2, 3, 3.

(ii) Un élément de $\phi \in G$ est uniquement déterminé par $\phi(x) \in \{x, jx, j^2x\}$ et $\phi(j) \in \{j, j^2\}$. Il y a donc au plus $2.3 = 6$ possibilités.

(iii) Pour $L = \mathbf{Q}(j)$, comme le polynôme minimal X^2+X+1 a deux racines j et $j^2 = \overline{j}$ dans K, $Aut_L(K)$ a deux éléments, l'identité la conjugaison. Pour $L = \mathbf{Q}(x)$, comme le polynôme minimal (voir PC3) X^3-2 a trois racines x, jx, j^2x dans K, $Aut_L(K)$ a trois éléments, l'identité et les morphisme ϕ_1, ϕ_2 déterminés par $\phi_1(x) = jx$ et $\phi_2(x) = j^2x$.

Comme $\mathbf{Q} \subset L$, on clairement $\mathrm{Aut}_L(K) \subset G$.

(iv) D'après la question précédente, G contient un sous-groupe d'ordre 2 et un sous-groupe d'ordre 3. D'après le théorème de Lagrange, 6 divise $|G|$. D'après (ii), G est d'ordre 6.

Comme $X^3-2 \in \mathbf{Q}[X]$, on a $\sigma(R) \subset R$. Comme σ est injectif, on a $\sigma(R) = R$. Ainsi l'application $\Psi : \sigma \mapsto \sigma_{|R}$ est un morphisme de groupe. Or $R = \{x, jx, j^2x\}$ génère K comme $\mathbf{Q}$-algèbre, donc Ψ est injective. Comme les deux ensembles ont le même cardinal, on obtient un isomorphisme de groupes.

La suite sera étudiée dans une autre PC.

Exercice 3.

(i) Clair d'après l'exercice (i) de la PC3.

(ii) Soit $\sigma(x+y) \in conj_k(x+y)$ avec $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(\overline{k})$. Alors $\sigma(x+y) = \sigma(x)+\sigma(y)$, et $\sigma(x)$, $\sigma(y)$ sont des conjugués respectivement de x et de y.

Pour le contre-exemple, on peut par exemple considérer $x = j = -y$ sur $k = \mathbf{Q}$.

(iii) Par exemple dans l'exercice 2 avec $k = \mathbf{Q}$ et x.

(iv) D'après ce qui précède, les deux dernières conditions sont équivalentes. Clairement, $x \in k$ implique ces conditions. Maintenant supposons que le seul conjugué de x est x. Comme k est parfait, le polynôme minimal de x est séparable dans une clôture algébrique Ω de k. Or toutes ses racines dans Ω sont égales à x. Donc il est de degré 1, et $x \in k$.