Corps valués algébriquement clos avec un automorphisme

Martin Hils

August 28, 2005

Ces notes (informelles) reprennent les deux exposés que j'ai donnés dans le cadre du groupe de travail "Géométrie du Frobenius et équations aux différences" (d'après [Hr04]). C'est de section 7 de ce papier dont nous traitons.

Ça reste très proche de l'exposition dans [Hr04], mais parfois les résultats sont énoncés de manière moins générale (surtout là où je ne comprenais pas la preuve donnée). Pour une large partie, il s'agit plus ou moins d'une paraphrase de [Hr04], où on donne un peu plus de détails.

1 Rappels sur les corps valués et notations

Un *corps valué* (K, v) est un corps (commutatif) K avec une application $\mathrm{v} : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$, où Γ est un groupe abélien totalement ordonné et $\infty > \Gamma$, tel que pour tout $a, b \in K$ on ait

- $\mathrm{v}(ab) = \mathrm{v}(a) + \mathrm{v}(b)$, et $\mathrm{v}(a) = \infty$ ssi $a = 0$.
- $\mathrm{v}(a + b) \geq \min\{\mathrm{v}(a), \mathrm{v}(b)\}$.

On note $\mathcal{O}_\mathrm{v} := \mathcal{O}_K := \{a \in K \mid \mathrm{v}(a) \geq 0\}$, l'*anneau de valuation.* C'est un anneau local avec unique idéal maximal $\mathfrak{m}_\mathrm{v} := \mathfrak{m}_K := \{a \in K \mid \mathrm{v}(a) > 0\}$. On note $K_{\mathrm{res}} := \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ le *corps résiduel*, et pour pouvoir distinguer entre plusieurs corps, on notera $\Gamma_K := \mathrm{v}(K)$ le groupe des valeurs de (K, v).

Une référence générale pour la théorie des corps valués est le livre de Ribenboim [Ri64].

Fait 1.1. *Soit* $(K, \mathrm{v}) \subseteq (K^a, \mathrm{v}^a)$*, où* v^a *est une extension de* v *à la clôture algébrique* K^a *de* K*. Alors*

(1) $\Gamma_{K^a} = \mathrm{envdiv}(\Gamma_K)$*, l'*enveloppe divisible *de* Γ_K

(2) $(K^a)_{\mathrm{res}} = (K_{\mathrm{res}})^a$*.* □

Tout corps valué (K, v) est un *corps topologique*: un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les boules de la forme $B_\gamma(0) := \{a \in K \mid \mathrm{v}(a < \gamma\}$, où $\gamma \in \Gamma$. La *complétion* par rapport à cette topologie sera notée $\hat{K}$. Cette complétion peut être construite en tant que corps valué $(\hat{K}, \hat{\mathrm{v}})$ en utilisant l'ensemble des suites de Cauchy (si α est un ordinal, $(a_i)_i < \alpha$ est une suite de Cauchy de longueur α si pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe un $i(\gamma)$ t.q. $\mathrm{v}(a_i - a_j) \geq$

$\gamma \forall i, j \geq i(\gamma)$). Il y a deux cas : soit $\mathrm{v}(a_i) = \mathrm{v}(a_{i_0})$à partir d'un i_0, où l'on pose $\hat{\mathrm{v}}((a_i)_{i<\alpha}) := \mathrm{v}(a_{i_0})$, soit $\mathrm{v}(a_i)$ est une suite cofinale dans Γ. Dans ce dernier cas on aura $\hat{\mathrm{v}}((a_i)_{i<\alpha}) = \infty$.

Par manque de référence, le lemme suivant est donné avec preuve.

Lemme 1.2. *Soit* (K, v) *un corps valué avec* K *algébriquement clos. Alors* $\hat{K}$ *est algébriquement clos aussi.*

Preuve. Prenons $f(X) \in \mathcal{O}_{\hat{K}}[X]$ unitaire et considérons $a \in \hat{K}^a$ avec $f(a) = 0$. Pour tout choix $\tilde{\mathrm{v}}$ d'extension de $\hat{\mathrm{v}}$ à $\hat{K}^a$ on a $\tilde{\mathrm{v}}(a) \geq 0$, car a est entier au-dessus de $\mathcal{O}_K$.

Pour tout $\gamma \in \Gamma_{\geq 0}$ on choisit $f_\gamma \in \mathcal{O}_K[X]$, t.q. $f_\gamma \equiv f(X) \bmod \gamma$, avec zéros $b_{\gamma,1}, \ldots, b_{\gamma,n}$, où $n = \deg(f)$. On a $f_\gamma(a) = f(a) + (f_\gamma - f)(a)$, donc $\mathrm{v}(f_\gamma(a)) \geq \gamma$. Par ailleurs on a $f_\gamma(a) = \prod_{j=1}^n (a - b_{\gamma,j})$, d'où $\mathrm{v}(f_\gamma(a)) = \sum_{j=1}^n \mathrm{v}(a - b_{\gamma,j})$. On en déduit qu'il existe $j(\gamma)$ t.q. $\mathrm{v}(a - b_{\gamma,j(\gamma)}) \geq \gamma/n$, et alors $(b_{\gamma,j(\gamma)})_\gamma$ converge vers a (pour obtenir une suite de Cauchy il suffit de se restreindre à un sous-enemble bien-ordonné et cofinal dans Γ).

Donc, $\mathcal{O}_{\hat{K}}$ est intégralement clos dans $\hat{K}^a$, ce qui suffit pour $\hat{K} = \hat{K}^a$. □

Si (K, v) est *de rang 1*, c.à.d. si $(\Gamma_K, \leq)$ se plonge dans $(\mathbb{R}, \leq)$, alors $(\hat{K}, \hat{\mathrm{v}})$ est henselien (c'est le *Lemme de Hensel*). On rappelle :

Définition 1.3. Le corps valué (K, v) est *henselien* (ou : *satisfait à la propriété de Hensel*) si pour tout polynôme unitaire $f(X) \in \mathcal{O}_K[X]$ et toute décomposition $\overline{f} = p' \cdot q' \in K_{\mathrm{res}}[X]$ avec $(p', q') = 1$ il existe $p, q \in \mathcal{O}_K[X]$ t.q. $f = p \cdot q$ et $\overline{p} = p', \overline{q} = q'$.

Remarque 1.4. *Il y a une multitude de propriétés qui sont équivalentes à la propriété de Hensel, donnons une :* v *s'étend de manière unique à toute extension algébrique de* K.

En général, la complétion $\hat{K}$ est une extension transcendente de K. Cependant, on peut obtenir une extension henselienne "minimale" qui est séparable algébrique au-dessus de K. En effet :

Proposition 1.5 (Nagata). *Tout corps valué* (K, v) *admet une extension henselienne* (K^h, v^h) *t.q. pour tout plongement (valuatif) de* K *dans un corps valué henselien* L *il existe un unique plongement (valuatif) de* K^h *dans* L *(au-dessus de* K*). L'extension* K^h/K *est séparable algébrique et* immédiate, *c.à.d.* $\Gamma_{K^h} = \Gamma_K$ *et* $(K^h)_{\mathrm{res}} = K_{\mathrm{res}}$. *Comme elle satisfait à une propriété universelle, l'extension* K^h *est déterminée à (unique)* K*-isomorphisme près, et on l'appelle la* henselisée *de* (K, v).

Esquisse de la preuve. Voilà une construction de la henselisée :

Soit $Gal(K) := Gal(K^{sep}/K)$ le groupe de Galois absolu de K, et $\tilde{\mathrm{v}}$ une extension de v à K^{sep}. Considérons

$$D(\tilde{\mathrm{v}}) := \{\sigma \in Gal(K) \mid \tilde{\mathrm{v}} \circ \sigma = \tilde{\mathrm{v}}\},$$

le *groupe de décomposition de* $\tilde{\mathrm{v}}$.

On peut voir que $K^h := (K^{sep})^{D(\tilde{\mathrm{v}})}$ (avec $\tilde{\mathrm{v}} \restriction_{K^h}$) a la propriété universelle requise. □

Remarque 1.6. *(1) K^h/K et $\hat{K}/K$ sont des extensions immédiates.*

*(2) Pour tout corps valué il existe une extension $\overline{K}/K$ qui est maximale immédiate. Sous une certaine hypothèse (*hypothèse A *de Kaplansky), par exemple en caractérisique 0 ou lorsque K est algébriquement clos, cette extension maximale immédiate est unique.*

L'invariant suivant joue un rôle majeur dans la suite de [Hr04], particulièrement dans section 8.

Définition 1.7. Soit L/K une extension de corps valués. Alors le *rang valuatif* de L/K est donné par

$$rk_{\mathrm{val}}(L/K) := \mathrm{degtr}(L_{\mathrm{res}}/K_{\mathrm{res}}) + \dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_L \otimes \mathbb{Q}/\Gamma_K \otimes \mathbb{Q}).$$

Le rang valuatif est additif dans des tours d'extensions — conséquence du fait que les deux termes de la somme le sont — et il est égal à 0 pour des extensions algébriques. Quand on utilise Fait 1.1, le lemme suivant se montre tout seul.

Lemme 1.8. *Pour toute extension L/K de corps valués on a $rk_{\mathrm{val}}(L/K) \leq \mathrm{degtr}(L/K)$.* □

Dans la suite, quand nous regardons des extensions de corps valués, nous voudrons plutôt contrôler des nombres de nature "transcendante", d'où la terminologie suivante : L'extension L/K de corps valués est dite *totalement ramifié*, si $\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_L \otimes \mathbb{Q}/\Gamma_K \otimes \mathbb{Q}) = \mathrm{degtr}(L/K)$, et *totalement inerte*, si $\mathrm{degtr}(L_{\mathrm{res}}/K_{\mathrm{res}}) = \mathrm{degtr}(L/K)$.

Un autre rappel :

Définition 1.9. Soit (K, v) un corps valué, $\mathrm{v} : K^\times \twoheadrightarrow \Gamma$ la valuation correspondante, et $E \leq \Gamma$ un sousgroupe convexe. Alors $\mathrm{v}' : K^\times \twoheadrightarrow \Gamma/E$, obtenue par composition, fait de K un corps valué, et v' est appelée la *valuation grossière*. De même, on obtient — de manière canonique — une valuation $\overline{\mathrm{v}} : K' \mapsto E$ (la *valuation induite*), où K' est le corps résiduel de (K, v').

Notons que souvent dans des preuves on "casse" une valuation en valuation grossière et valuation induite pour procéder par induction.

Finalement, expliquons comment on peut traiter les corps valués en théorie des modèles. Il y a plusieurs choix de langage possibles. Nous optons pour le suivant. Soit $\mathcal{L}_{corps} := \{=, +, -, \times\}$ le langage de corps, et $|$ un nouveau symbôle (d'une relation binaire). Nous l'interprétons comme "diviser" et posons donc $a|b$ ssi $\mathrm{v}(a) \leq \mathrm{v}(b)$ pour $a, b \in K$. Enfin, le langage des corps valués est donné par $\mathcal{L}_{\mathrm{v}} := \mathcal{L}_{corps} \cup \{|\}$.

On remarque que l'on peut axiomatiser la classe des corps valués dans ce langage, ainsi que les corps valués d'une certaine forme (caractéristique donnée, caractéristique résiduelle donnée, henselien, algébriquement clos...).

La théorie des corps (non-trivialement) valués algébriquement clos est appelée $ACVF$ (*algebraically closed valued fields*). Le théorème suivant est (essentiellement) dû à Robinson ([Ro56]). Pour une discussion et des variantes nous référons à [HHM03a, Thm 2.1.1].

Théorème 1.10. *(1) $ACVF$ élimine les quanteurs dans le langage $\mathcal{L}_{\mathrm{v}}$.*

(2) Les complétions de $ACVF$ sont déterminées par les paires de la forme $(car(K), car(K_{\mathrm{res}}))$.

Par définition, élimination des quanteurs (e.q.) veut dire que toute $\mathcal{L}_{\mathrm{v}}$-formule est équivalente (modulo $ACVF$) à une formule sans quanteurs. La propriété suivante équivaut à e.q. :

Pour tout $L \models ACVF$ modèle "petit" (en cardinalité), toute sous-structure $K \subseteq L$, et tout plongement $\iota : K \hookrightarrow L^*$ dans un modèle très saturé de $ACVF$ il existe un plongement $\iota' : L \hookrightarrow L^*$ continuant ι.

Voici un cas particulier de l'e.q. dans $ACVF$ (et une première étape de la preuve de l'élimination des quanteurs). Rappelons que le *type* d'un uple $\overline{a}$ sur un ensemble de paramètres B, noté $\mathrm{tp}(\overline{a}/B)$, est donné par l'ensemble de toutes les formules, à paramètres dans B, satisfaites par $\overline{a}$. Donc, si on élimine les quanteurs, les types sont déterminés par les formules sans quanteurs.

Fait 1.11. *Soit $K = K^a \subseteq L = L^a$ une extension de corps valués algébriquement clos, et $b, c \in L$. Alors sont équivalents :*

- $\mathrm{tp}(b/K) = \mathrm{tp}(c/K)$
- *Pour tout $\gamma \in \Gamma_K$ et pour tout $a \in K$ on a $\mathrm{v}(b-a) < \gamma \iff \mathrm{v}(c-a) < \gamma$, de même pour $>$ au lieu de $<$.*

NOTATION

Dans un groupe abélien ordonné on notera $a << b$ si $na < b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Généralités sur les corps σ-valués

On remarque d'abord qu'on n'abordera pas les corps *faiblement σ-valués.* Comme Hrushovski a confirmé, cette notion, introduite dans [Hr04], (qui correspond d'ailleurs au points σ-singuliers, en un certain sense) n'est pas utilisée pour obtenir le résultat principal du papier.

Définition 2.1. Soit $K, \mathrm{v})$ un corps valué et σ un endomorphisme (de corps) de K. On dit que (K, v, σ) est un *corps σ-valué* si $a \in \mathcal{O}_{\mathrm{v}} \iff \sigma(a) \in \mathcal{O}_{\mathrm{v}}$ pour tout $a \in K$.

Le corps σ-valué (K, v, σ) est appelé *m-croissant* ($m \in \mathbb{N}$) si pout tout $a \in \mathcal{O}_{\mathrm{v}}$ on a $\mathrm{v}(\sigma(a)) \geq m\mathrm{v}(a)$, et *$\omega$-croissant* s'il est m-croissant pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Exemples 2.2. (1) Soit (K, v) un corps valué de caractéristique $p > 0$, Φ_{p^n} le Frobenius (c.à.d. $\Phi_{p^n}(a) = a^{p^n}$). Alors $(K, \mathrm{v}, \Phi_{p^n})$ est un corps σ-valué qui est p^n-croissant.

(2) Soit $\{(K_{p,n}, \mathrm{v}, \Phi_{p^n})\}_{p \text{ premier }, n \in \mathbb{N}}$ une famille de corps σ-valué comme dans (1). Alors tout ultraproduit non-standard $(K^*, \mathrm{v}^*, \sigma^*)$ de cette famille est σ-valué et ω-croissant.

(3) Soit (F, σ) un corps de différence et $K := F(t)_\sigma$ (le corps des fractions de $F[t, t^\sigma, t^{\sigma^2} \ldots])$. Si on prend la valuation qui correspond à l'ordre lexicographique sur les monômes, où $0 < \mathrm{v}(t) << \mathrm{v}(t^\sigma) << \ldots$, on obtient un corps σ-valué ω-croissant avec groupe des valeurs $\Gamma_K = \mathbb{Z}[\sigma]$.

La preuve de la remarque suivante est facile, et nous l'omettons.

Remarque 2.3. *Soit* (K, v, σ) *un corps* σ*-valué. Alors*

(0) Pour toute extension v^a *de* v *à* K^a *il existe une extension* σ^a *de* σ *t.q.* $(K^a, \mathrm{v}^a, \sigma^a)$ *soit un corps* σ*-valué. Si* σ *est* m*-croissant,* σ^a *l'est aussi.*

(1) σ *induit des endomorphismes* σ_{res} *sur* K_{res} *ainsi que* σ_Γ *sur* Γ_K*. On pose* $\sigma_\Gamma(\mathrm{v}(a)) := \mathrm{v}(\sigma(a))$*.*

(2) Si σ *est 1-croissant, alors tout idéal de* $\mathcal{O}_\mathrm{v}$ *est bien-mélangé.* □

Pour un corps σ-valué (K, v, σ), l'endomorphisme σ se comporte bien par rapport à la henselisée (la complétion, respectivement). En effet :

Lemme 2.4. *Soit* (K, v, σ) *un corps* σ*-valué.*

(1) Il y a une unique structure de corps σ*-valué sur* (K^h, v^h) *étendant* (K, v, σ)*, notée* $(K^h, \mathrm{v}^h, \sigma^h)$*.*

(2) Supposons que $\sigma(\Gamma_K)$ *soit cofinal dans* Γ_K *(c'est équivalent à la continuité de* $\sigma : K \to K$*). C'est le cas par exemple si* σ *est 1-croissant. Alors il existe une (unique) structure de corps* σ*-valué sur* $(\hat{K}, \hat{\mathrm{v}})$*, notée* $(\hat{K}, \hat{\mathrm{v}}, \hat{\sigma})$*.*

En plus, σ *est* m*-croissant ssi* σ^h *est* m*-croissant, de même pour la complétion.*

Preuve. Soit $\iota^h : K \hookrightarrow K^h$ le plongement de K dans sa henselisée. Pour montrer (1), on applique la propriété universelle de (K^h, v^h) au plongement $\iota^h \circ \sigma : K \hookrightarrow K^h$ et on obtient l'endomorphisme (unique) $\sigma^h : K^h \to K^h$ cherché. (2) est clair. Finalement, être m-croissant ne dépend que de l'opération de σ_Γ. On peut donc conclure, car le groupe des valeurs ne grandit pas dans les deux cas. □

On rappelle que tout corps de différence (K, σ) admet une *clôture inversive* $(K^{inv}, \sigma^{inv}) \supseteq (K, \sigma)$, c.à.d. σ^{inv} est un automorphisme de K^{inv}, et on a $K^{inv} = K_{\sigma^{-1}}$ (voir [Co65]).

Nous allons définir maintenant l'analogue d'un anneau de valuation discrète (AVD) — plus exactement de son corps des fractions — dans le royaume de l'algèbre aux différences.

Définition 2.5. Un σ-*anneau de valuation discrète* (abrégé αVD) est un corps σ-valué (K, v, σ), valué non-trivialement, t.q. il existe un sous-corps $F \subseteq K$ stable par σ avec les propriétés suivantes :

- F est trivialement valué,
- K est finiment σ-engendré au-dessus de F, et $\sigma\mathrm{degtr}_F(K) = 1$ (pour la définition de σdegtr voir [La05]).

Pour un tel F on dira que L est un αVD *au-dessus de* F.

On observe que l'exemple (3) donné dans 2.2 est un αVD, et que la définition est faite pour captiver l'essentiel d'un "anneau de valuation discrète avec Frobenius non-standard".

On sait que les anneaux de valuation (discrète) jouent un rôle important en géométrie algébrique (via spécialisation). D'une certaine manière, les αVD, leurs analogues transformels, joue un rôle similaire dans notre contexte. Dans 5.12, on donnera un théorème de structure pour $\widehat{K^a}$, où (K, v, σ) est un αVD.

Lemme 2.6. *Soit* (K, v, σ) *un* αVD *au-dessus de* $F \subseteq K$*. Alors on a* $\mathrm{degtr}(K_{\mathrm{res}}/F) < \infty$.

Preuve. Soit $t \in K$ avec $\mathrm{v}(t) > 0$. On a donc $0 < \mathrm{v}(t) << \mathrm{v}(\sigma(t)) << \mathrm{v}(\sigma^2(t)) << \ldots$, car σ est ω-croissant. En particulier, t est σ-transcendant au-dessus de F.

Posons $K_0 := F(t)_\sigma$. On a $\mathrm{degtr}_{K_0}(K) < \infty$, car K est finiment σ-engendré au-dessus de K_0 et $\sigma\mathrm{degtr}_{K_0}(K) = 0$. Donc $\mathrm{degtr}_{(K_0)_{\mathrm{res}}}(K_{\mathrm{res}}) < \infty$, aussi. Comme par ailleurs $(K_0)_{\mathrm{res}} = F$ (c'est facile à voir), on conclut. □

3 Groupe des valeurs $\subseteq \mathbb{Q}[\sigma]$

On commence par deux lemmes (purement algébriques) sur $\mathbb{Z}[T]$ et $\mathbb{Q}[T]$.

Lemme 3.1. *Soit* $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \mathbb{Q}[T]$ *une suite de sous-groupes finiment engendrés (f.e.) satisfaisant aux conditions suivantes :*

(I) $TA_n \subseteq A_{n+1}$

(II) Il existe $N \in \mathbb{N}$ *t.q.* $[A_{n+1} : A_n] \leq N$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Alors $A := \cup_{n\geq 0} A_n$ *est un* $\mathbb{Z}[T]$*-module f.e.*

Preuve. La première condition montre que A est un $\mathbb{Z}[T]$-sousmodule de $\mathbb{Q}[T]$. Comme $\mathbb{Z}[T]$ est un anneau noetherien, il suffit de montrer que $\overline{A} := (A + \mathbb{Z}[T])/\mathbb{Z}[T]$ est f.e. en tant que $\mathbb{Z}[T]$-module (c'est un sous-module de $\mathbb{Q}[T]/\mathbb{Z}[T]$). Clairement, en posant $\overline{A}_n := (A_n + \mathbb{Z}[T])/\mathbb{Z}[T]$, on a $\overline{A} = \cup_{n\geq 0}\overline{A}_n$, et $[\overline{A}_{n+1} : \overline{A}_n] \leq N$ pour un N comme dans condition (II). Nous procédons par induction sur $N_0 := \limsup\{[\overline{A}_{n+1} : \overline{A}_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$:

Si $\overline{A} \neq (0)$, comme $\mathbb{Q}[T]/\mathbb{Z}[T]$ est torsion, il existe $0 \neq c \in \overline{A}$ et l premier t.q. $lc = 0$, disons $c \in \overline{A}_{n_0}$. Soit $\overline{A}[l]$ la l-torsion de $\overline{A}$.

(*) $\overline{A}[l] \cap \overline{A}_n \subsetneq \overline{A}[l] \cap \overline{A}_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$.

Pour montrer (*), on observe que si l'on avait $\overline{A}[l] \cap \overline{A}_n = \overline{A}[l] \cap \overline{A}_{n+1}$ pour un certain $n \geq n_0$, alors, utilisant (I), $1 \mapsto c$ induirait un plongement de $\mathbb{Z}/l[T]$ dans $\overline{A}_n$. C'est un plongement d'un groupe abélien non-f.e. dans un groupe abélien f.e., et on arrive à une contradiction.

Par (*), l'application "multiplication par l" $\lambda : \overline{A}_{n+1}/\overline{A}_n \twoheadrightarrow l\overline{A}_{n+1}/l\overline{A}_n$ n'est pas injective pour $n \geq n_0$, et par conséquent, nous pouvons appliquer l'hypothèse d'induction à la suite des lA_i. Donc $l\overline{A}$ est f.e. en tant que $\mathbb{Z}[T]$-module.

Comme $\overline{A}[l] \subseteq (\mathbb{Q}[T]/\mathbb{Z}[T])[l] \simeq \mathbb{Z}/l[T]$ (un $\mathbb{Z}[T]$-module f.e.), $\overline{A}[l]$ est f.e., aussi. Nous utilisons la suite exacte $0 \to \overline{A}[l] \to \overline{A} \to l\overline{A} \to 0$ pour terminer. □

Lemme 3.2. *Soit* $(0) \neq M \leq \mathbb{Q}[T]$ *un* $\mathbb{Z}[T]$*-module f.e., et soit* $\tilde{M}$ *l'union de tous les* $\mathbb{Z}[T]$*-modules* N *t.q.* $M \subseteq N \subseteq \mathbb{Q}[T]$ *et* N/M *soit fini. Alors,* $\tilde{M} \simeq \mathbb{Z}[T]$*. Plus précisément,* $\tilde{M}$ *est égal à l'unique* $\mathbb{Z}[T]$*-module* M' *t.q.* $M \subseteq M' \subseteq \mathbb{Q}[T]$*,* M'/M *est fini et* $M' \simeq \mathbb{Z}[T]$*. On appellera* $\tilde{M}$ *l'*enveloppe libre *de* M.

Preuve. On réduit d'abord au cas $\mathbb{Z}[T] \subseteq M$ (exercice). Puis, chassant les dénominateurs dans un ensemble de générateurs de M, on trouve $m \in \mathbb{N}$ t.q. $\mathbb{Z}[T] \subseteq M \subseteq \mathbb{Z}[1/m, T]$. Cette situation est isomorphe (par multiplication avec m) à $m\mathbb{Z}[T] \subseteq J\mathbb{Z}[T] \subseteq \mathbb{Z}[T]$, pour un certain idéal J de l'anneau $\mathbb{Z}[T]$. Il suffit de montrer :

(*) Soit $J = (a_1, \ldots, a_n) \subseteq \mathbb{Z}[T]$ un idéal, et $c := ppcm(a_1, \ldots, a_n)$. Alors (c) est l'unique idéal principal $J' \supseteq J$ t.q. J'/J est fini.

On écrit $a_i = b_i c$, et on considère l'application $\mathbb{Z}[T]/(b_1, \ldots, b_n) \twoheadrightarrow (c)/J$, $\overline{1} \mapsto \overline{c}$. Pour la finitude de $(c)/J$ il suffit donc que $\mathbb{Z}[T]/(b_1, \ldots, b_n)$ est fini. Mais ce dernier est un anneau artinien (et donc fini), car $(b_1, \ldots, b_n)$ n'est contenu dans aucun idéal premier de $\mathbb{Z}[T]$ de hauteur 1 (par factorialité de $\mathbb{Z}[T]$, un tel idéal premier serait engendré par un élément premier de $\mathbb{Z}[T]$, et les b_i n'ont pas de diviseur commun non-trivial).

Enfin, (c) est le seul tel idéal, car pour tout autre idéal principal (c') contenant J on a $(c) \subseteq (c')$, et si $(c) \subsetneq (c')$, alors $(c')/(c)$ est infini. Ce dernier fait se montre en réduisant au cas $(c') = (1) = \mathbb{Z}[T]$. □

Quand nous écrivons $\mathbb{Z}[\sigma]$ (ou $\mathbb{Q}[\sigma]$), nous pensons à l'anneau ordonné des polynômes en σ, où $1 << \sigma << \sigma^2 << \ldots$. Parfois, il est plus commode de travailler avec σ dans l'exposant, et nous préférons de penser à $\mathbb{Z}[\sigma] = \mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}v^\sigma \oplus \mathbb{Z}v^{\sigma^2} \oplus \ldots$.

Lemme 3.3. *Soit (L, v, σ) un αVD. Alors, on a :*

(1) $\Gamma_{L^a} \simeq \mathbb{Q}[\sigma]$ comme $\mathbb{Z}[\sigma]$-module ordonné.

(2) Γ_L se plonge (comme $\mathbb{Z}[\sigma]$-module ordonné) dans $\mathbb{Z}[\sigma]$.

(3) Soit $(K, \sigma) \subseteq (L^a, \sigma)$ un sous-corps de différence non-trivialement valué. Alors Γ_K est cofinal dans Γ_{L^a}, et Γ_{L^a}/Γ_K est un $\mathbb{Q}[\sigma]$-module principal de torsion.

Preuve. On choisit $F \subseteq L$ t.q. L soit un αVD au-dessus de F. Nous avons déjà vu au cours de la preuve du Lemme 2.6 que tout élément $t \in L$ avec $\mathrm{v}(t) > 0$ est σ-transcendant au-dessus de F, et que $\mathrm{degtr}_{L_0}(L^a) < \infty$, où $L_0 := F(t)_\sigma \subseteq L$. En particulier, $\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{L^a}/\Gamma_{L_0^a}) < \infty$.

Comme $\Gamma_{L_0} \simeq \mathbb{Z}[\sigma]$, on a $\Gamma_{L_0^a} \simeq \mathbb{Q}[\sigma]$ par 1.1. Donc, Γ_{L^a} est un $\mathbb{Q}[\sigma]$-module f.e. sans torsion (L^a est ω-croissant !) de rang 1, et donc isomorphe à $\mathbb{Q}[\sigma]$ par le théorème de structure. Cela montre (1). Notons que (3) est une conséquence facile de (1).

Clairement, (2) suit du Lemme 3.2, une fois que l'on sait que Γ_L est un $\mathbb{Z}[\sigma]$-module de type fini. Choisissons un corps L_0' t.q. $L_0 \subseteq L_0' \subseteq L$, L_0' est f.e. au-dessus de L_0 en tant que corps, L est contenu dans la clôture algébrique de L_0' et t.q. L est σ-engendré par L_0. Pour $n \geq 0$, soit L_n' le composite des corps $\{\sigma^k(L_0')\}_{k \leq n}$. Après un changement de base, le degré est borné par le degré du départ, d'où $[L_{n+1}' : L_n'] \leq [L_1' : L_0'] \leq \infty$.

Comme pour toute extension K'/K de corps valués on a $e(K'/K) := (\Gamma_{K'} : \Gamma_K) \leq [K' : K]$, la suite des $\Gamma_{L_n'}$ — considérée dans $\Gamma_{L^a} \simeq \mathbb{Q}[\sigma]$ — satisfait aux hypothèses de 3.1, ce qui montre que $\Gamma_L = \cup \Gamma_{L_n'}$ est un $\mathbb{Z}[\sigma]$-module de type fini. □

Exemple 3.4. Γ_L n'est pas toujours libre. En effet, pour $L := F(t^\sigma, t^2)_\sigma \subseteq F(t)_\sigma$, on a $\Gamma_L \simeq 2\mathbb{Z} \oplus \sigma\mathbb{Z}[\sigma] \subseteq \mathbb{Z}[\sigma]$, et donc $\Gamma_L/\sigma\Gamma_L$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Le résultat suivant ne sera pas utilisé plus tard (et nous énonçons une version plus faible que [Hr04, 7.10]):

Remarque 3.5. *Soit L un αVD au-dessus de F, $car(L) = 0$. Alors il existe un corps de différence $L \subseteq \tilde{L} \subseteq L^a$ t.q. $\Gamma_{\tilde{L}}$ est égal à la clôture libre de Γ_L dans $\Gamma_{L^a} \simeq \mathbb{Q}[\sigma]$.*

Esquisse de la preuve. On considère d'abord la henselisée (L^h, σ^h) (le groupe des valeurs ne change pas), puis on relève, de manière purement résiduelle, la clôture algébrique de L_{res}, en un corps L_r, c.à.d. $L^h \subseteq L_r$ t.q. $\Gamma_{L_r} = \Gamma_L$ et $(L_r)_{\mathrm{res}} = L^a_{\mathrm{res}}$. C'est possible car L^h est henselien.

Soit $\tilde{\sigma}$ une extension de σ^h à L^a. Alors, le corps L_r est nécessairement $\tilde{\sigma}$-invariant (c'est facile, et laissé en exercice).

Considérons $\tilde{\Gamma_L} \subseteq \Gamma_{L^a}$, la clôture libre de $\Gamma_L = \Gamma_{L_r}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ choisi de telle manière que $n\tilde{\Gamma_L} \subseteq \Gamma_L$. On pose $H := \mathrm{v}^{-1}(n\tilde{\Gamma_L}) \subseteq L_r^\times$, pour $\mathrm{v} : L_r^\times \twoheadrightarrow \Gamma_L$. Par construction, $\sigma(H) \subseteq H$. Or,

$$\ker(H \twoheadrightarrow n\tilde{\Gamma_L}/n\Gamma_L) = \{\alpha \in L_r^\times \mid \mathrm{v}(\alpha) \in n\Gamma_L\} = (L_r^\times)^n,$$

où la dernière égalité est une conséquence du fait que $(L_r)_{\mathrm{res}}$ est alg. clos, L_r est henselien et $car(L) = 0$. Donc $H/(L_r^\times)^n \simeq n\tilde{\Gamma_L}/n\Gamma_L \simeq \tilde{\Gamma_L}/\Gamma_L$, et on déduit que $(H : (L_r^\times)^n) =: e < \infty$.

Par la théorie des extensions de Kummer, $\tilde{L} := L[\sqrt[n]{H}]$ est une extension qui marche, car $[\tilde{L} : L] \leq e = (\tilde{\Gamma_L} : \Gamma_L) \leq (\Gamma_{\tilde{L}} : \Gamma_L) \leq [\tilde{L} : L]$. □

Notation.
- Soit $(D, \leq)$ un ensemble totalement ordonné et $X \subseteq D$. On note $\mathcal{H}_D(X) := \{d \in D \mid \exists x \in X : x \geq d\}$, l'*enveloppe de X dans $(D, <)$*. Si D est clair par le contexte, on écrit simplement $\mathcal{H}(X)$.
- Soit $K = K^a \subseteq L$ des corps valués, et $c \in L$. On pose

$$T(c/K) := \{\mathrm{v}(c - b) \mid b \in K\} \subseteq \Gamma_{K(c)} \text{ et}$$

$$E(c/K) := \mathrm{stab}_{\Gamma_K}(T(c/K)) := \{\gamma \in \Gamma_K \mid \gamma + T(c/K) = T(c/K)\}.$$

Lemme 3.6. *Soit $T = \mathcal{H}(T) \subsetneq \mathbb{Q}[\sigma]$, et soit $m \in \mathbb{N}$ minimal t.q. il existe $\gamma \in T$ avec $T \subseteq \mathcal{H}(E_m + \gamma)$, où $E_m :=:= \mathbb{Q}v \oplus \mathbb{Q}v^\sigma \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}v^{\sigma^{m-1}}$. Alors, pour $T_1 := (\sigma(T))$, on a $\mathrm{stab}(T_1) \in \{E_m, E_{m+1}\}$, et $m+1$ est minimal dans $\mathbb{N}$ t.q. $T_1 \subseteq \mathcal{H}(E_{m+1} + t_1)$ pour un $t_1 \in T_1$.*

Preuve. Notons que les E_i sont les seuls sous-groupes convexes propres de $\mathbb{Q}[\sigma]$, et que le stabilisateur d'un ensemble $X = \mathcal{H}(X)$ est un sous-groupe convexe.

Si $\gamma \in T$ t.q. $T \subseteq \mathcal{H}(E_m + \gamma)$, on a évidemment $T_1 \subseteq \mathcal{H}(E_{m+1} + \sigma(\gamma))$, et alors $E_{m+2} \subsetneq \mathrm{stab}(T_1)$. Donc, il suffit de montrer que E_m stabilise T_1.

Pour cela, on peut certainement supposer que $\gamma = 0$, et que $m \geq 1$ (pour $m = 0$ il n'y a rien à faire). Soit $t \in T$ et $e \in E_m$. Comme $T \nsubseteq \mathcal{H}(E_{m-1} + t)$, il existe $t' \in T$ et $l \in \mathbb{N}$ t.q. $t' - t > e/l$. D'où $\sigma(t' - t) > l(t' - t) > e$, et donc $e + \sigma(t) \leq \sigma(t')$. Cela montre que $E_m + \sigma(T) \subseteq \mathcal{H}(\sigma(T)) = T_1$, et donc $E_m \subseteq \mathrm{stab}(T_1)$.

La deuxième partie du lemme est facile. □

4 Presqu'orthogonalité dans $ACVF$

Un exemple facile / une analogie

Travaillons dans la catégorie des groupes abéliens. À un groupe abélien A on peut associer son enveloppe divisible $\mathrm{envdiv}(A)$. C'est un groupe abélien divisible et donc isomorphe à une somme directe $\mathbb{Q}^{a_\infty} \oplus (\oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{a_p})$, où $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ est le groupe de p-Prüfer (p premier).

Soit D un groupe abélien divisible, et soient $D \hookrightarrow A_i = \langle Da_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ des plongements de D dans des groupes A_i engendrés par l'image de D et un seul élément a_i. On peut se demander sous quelles conditions les groupes A_i ont un unique amalgame au-dessus de D. Bien sûr, on peut toujours les placer *librement* au-dessus de D et former l'amalgame libre (le "pushout") $A_1 \oplus_D \ldots \oplus_D A_n$. Donc la question se reformule ainsi :

Sous quelles conditions le seul amalgame des A_i au-dessus de D est-il égal à l'amalgame libre ?

Posons $E_i := \mathrm{ord}(a_i \mod D)$ (ça ne dépend pas du choix de a_i t.q. $A_i = \langle Da_i \rangle$). Comme D est injectif, $A_i \simeq D \oplus \langle a_i' \rangle$ avec $\mathrm{ord}(a_i') = E_i$. Si nous convenons que $(\infty, n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(\infty, \infty) \neq 1$, la réponse à la question se formule ainsi : C'est le cas si et seulement si les E_i sont premiers entre eux. Si on ne peut que placer les a_i d'une manière unique au-dessus de D, on dit que $a_1, \ldots, a_n$ sont *presqu'orthogonaux au-dessus de D*. Pour $n = 2$, on le note $a_1 \perp_D^a a_2$ ("a" comme *almost*).

Ce qui nous intéresse aussi (pour l'analogie en vue), c'est que pour obtenir ce résultat on peut ou bien le montrer d'un coup ou bien procéder par induction. Dans ce dernier cas, si $(E_i, E_1) = 1$ pour tout i, on continue à travailler au-dessus de $D_1 := \mathrm{envdiv}(A_1)$, en considérant $A_i' := \langle D_1 a_i \rangle$ pour $i = 2, \ldots, n$. Comme $E_i' = E_i$ dans ce cas, on peut appliquer l'hypothèse d'induction.

On aimerait faire la même chose dans $ACVF$. Les groupes abéliens correspondent aux corps valués, et les groupes abéliens divisibles aux corps valués algébriquement clos. Plus tard, on va définir un analogue de l'invariant E. La question du départ que nous nous posons est la suivante :

Q Soient K, K_1, K_2 des modèles de $ACVF$, c.à.d. des corps (non-trivialement) valués algébriquement clos, $K \subseteq K_1, K_2$ avec $\mathrm{degtr}_K(K_i) = 1$ pour $i = 1, 2$. Sous quelles hypothèses existe-t-il un unique amalgame de K_1 et K_2 en tant que corps valué ?

Observons tout de suite que (par exemple par Théorème 1.10), des amalgames existent toujours, et c'est donc la question de l'unicité qui se pose.

Tout d'abord, nous introduisons quelques notions de [HHM03a].

Définition 4.1. Soit $K \models ACVF$.

- Soient $\gamma \in \Gamma_K$ et $a \in K$. Une *boule généralisée définissable sur K* est un ensemble (définissable) de la forme $B_{>\gamma}(a)$, $B_{\geq\gamma}(a)$, $\{a\}$ ou elle est égale au corps entier.
- Une *boule (généralisée) ∞-définissable sur K* est de la forme $B := \cap_{i<\alpha} B_i$, où $(B_i)_{i<\alpha}$ est une suite décroissante de boules généralisées définissables sur K (notons que deux boules généralisées K-déf. sont disjointes ou une contient l'autre).
- Soit $K \subseteq L$, B une boule (∞-)définissable sur K et $c \in B(L)$. L'élément c est dit *générique dans B au-dessus de K* si pour toute boule généralisée B' définissable sur K t.q. $c \in B'$ on a $B' \supseteq B$.

La partie (3) du lemme suivant nous fournit une extension privilégiée qui correspondra à l'amalgame libre de groupes abéliens.

Lemme 4.2. *Soit K un modèle de $ACVF$, $K \subseteq L$, B une boule généralisée (∞-)définissable sur K et soient $c, c' \in L$.*

(1) L'élément c est générique (au-dessus de K) dans une unique boule généralisée (∞-)définissable sur K.

(2) Si c, c' sont génériques dans B au-dessus de K, alors $\mathrm{tp}(c/K) = \mathrm{tp}(c'/K)$.

(3) Soit c générique dans B au-dessus de K, et $K \subseteq K' \models ACVF$. Alors, on peut placer c au-dessus de K' t.q. c est générique dans B au-dessus de K' (cela veut dire : on trouve $c' \in L' \supseteq K'$, t.q. c' est générique dans B au-dessus de K' et $\mathrm{tp}(c'/K) = \mathrm{tp}(c/K)$).

Preuve. Pour (1), il suffit de définir une boule $B(c)$ comme intersection de toutes les boules (généralisées) K-définissables qui contiennent c. (2) est un corollaire de l'élimination des quanteurs dans $ACVF$ (ou plutôt de 1.11).

Quant à (3), par compacité, il suffit de montrer que si une boule (gén. et déf.) B s'écrit comme réunion finie de boules B_j, $j \leq n$, alors $B = B_j$ pour un j. Or, les boules généralisées sont des cosets de sous-groupes du groupe additif du corps, et que si un des sous-groupes en question est proprement contenu dans un autre, le premier est d'indice infini dans le dernier. Il suffit d'appliquer le lemme de von Neumann pour conclure que $B = B_j$ pour un j. $\square$

Définition 4.3. Soit $K \models ACVF$, $K \subseteq K' \subseteq K^*$ et $c \in K^*$. Si c est générique au-dessus de K' dans une boule généralisée définissable sur K, on dit que *c est génériquement indépendant de K' au-dessus de K*, noté $c \downarrow^g_K K'$.

Dans cette terminologie, Lemme 4.2(3) dit que l'on peut toujours placer c au-dessus de K' d'une manière génériquement indépendante.

Proposition 4.4. *Soient $K = K^a \subseteq L = L^a$ des corps valués,* $\mathrm{degtr}(L/K) = 1$ *et $c \in L \setminus L$. Sont équivalents :*

(1) L/K est immédiate.

(2) $K(c)/K$ est immédiate.

(3) $T(c/K)$ n'a pas d'élément maximal.

Preuve. Compte tenu de 1.1, (1)$\Leftrightarrow$(2) est "immédiat".

Montrons que (1) implique (3). Soit donc L/K immédiate. On raisonne par l'absurde. Il existe alors $c \in L$ t.q. $\mathrm{v}(c-b)$ est maximal dans $T(c/K)$. Comme $\Gamma_L = \Gamma_K$, on a $\mathrm{v}(c-b) = \mathrm{v}(d)$ pour un $d \in K$. Alors $\frac{c-b}{d} \in \mathcal{O}_L$, et $\mathrm{v}(\frac{c-b}{d} - d') \leq 0$ pour tout $d' \in K$. Donc $\mathrm{res}(\frac{c-b}{d}) \notin K_{\mathrm{res}}$. Alors L/K n'est pas immédiate, une contradiciton.

Pour montrer (3)$\Rightarrow$(2), supposons d'abord que $\Gamma_{K(c)} \supsetneq \Gamma_K$, par exemple $\mathrm{v}(f(c)) \notin \Gamma_K$ pour un polynôme $f \in K[X]$. On peut prendre f linéaire, car $K = K^a$. Donc $\mathrm{v}(c-b) \notin \Gamma_K$ pour un $b \in K$. Maintenant, si on avait $\mathrm{v}(c-b) < \mathrm{v}(c-b')$ pour un $b' \in K$, on aurait $\mathrm{v}(c-b) = \mathrm{v}(b-b') \in \Gamma_K$, une contradiction. Donc $\mathrm{v}(c-b)$ est maximal dans ce cas. Puis, supposons que $\Gamma_{K(c)} = \Gamma_K$, mais $\mathrm{res}(f(c)) \notin K_{\mathrm{res}}$ pour un polynôme $f \in K[X]$. On peut choisir $f(c) \in \mathcal{O}_L$ et f linéaire, donc $f(c) = ac - b$. Or, si $\mathrm{res}(ac-b) \notin K_{\mathrm{res}}$, on a $\mathrm{v}(ac-b') \leq 0$ pour tout $b' \in K$, et $\mathrm{v}(c - \frac{b}{a})$ est maximal dans $T(c/K)$. $\square$

Lemme 4.5. *(1) Si $T(c/K)$ n'a pas d'élément maximal, alors $T(c/K) \subseteq \Gamma_K$ et $T(c/K) = \mathcal{H}_{\Gamma_K}(T(c/K))$.*

(2) $E(c/K)$ est toujours un sous-groupe convexe de Γ_K.

Preuve. Pour (1), notons que $K(c)/K$ est immédiate dans ce cas, et donc $\Gamma_{K(c)} = \Gamma_K$. En particulier, $T(c/K) \subseteq \Gamma_K$.

Pour tout $u \in K$ avec $\mathrm{v}(u) = 0$ et tout $b \in K$ on trouve $b' \in K$ t.q. $\mathrm{v}(uc - b') > \mathrm{v}(c - b)$. On choisit d'abord $b'' \in K$ avec $\mathrm{v}(c - b'') > \mathrm{v}(c - b)$, puis on prend $b' := u^{-1}b''$.

Maintenant, soit $\gamma < \mathrm{v}(c - b)$ pour un $b \in K$. Comme $\Gamma_{K(c)} = \Gamma_K$, on a $\mathrm{v}(\frac{c-b}{d}) = \gamma$ pour un $d \in \mathfrak{m}_K$. Nous cherchons $\tilde{b} \in K$ t.q. $\mathrm{v}(c - \tilde{b}) = \gamma$. C'est équivalent à $\mathrm{v}(c - b - d(c - \tilde{b})) > \mathrm{v}(c - b)$. Comme $d \in \mathfrak{m}_K$, on peut écrire $(c - b) - d(c - \tilde{b}) = uc - b'$, pour $u \in K$ avec $\mathrm{v}(u) = 0$ et $b' := b - d\tilde{b}$. Nous avons vu qu'on peut trouver un tel b', et donc un tel $\tilde{b}$ aussi.

(2) est une conséquence de (1). D'abord, si $T(c/K)$ a un élément maximal, $E = (0)$ (c'est bien convexe). Sinon, $T(c/K) = \mathcal{H}(T(c/K))$. Comme le stabilisateur d'un ensemble "clos à gauche" est un sous-groupe convexe, on a terminé. □

Lemme 4.6. *Soit L/K comme dans 4.4, et $c, d \in L \setminus K$. Alors, $E(c/K) = E(d/K)$.*

Preuve. Par Proposition 4.4, si $T(c/K)$ a un élément maximal, $T(d/K)$ en a un aussi, et donc $E(c/K) = (0) = E(d/K)$ dans ce cas.

Si $T(c/K)$ n'a pas d'élément maximal, L/K est immédiate. On peut supposer que $E(c/K) \subseteq E(d/K)$, car l'ensemble des sous-groupes convexes est totalement ordonné.

Cas 1 : $E(d/K) = \Gamma_K$. Pour tout $e \in L \setminus K$ on a $E(e/K) = \Gamma_K$ ssi il existe $\iota : K(e) \hookrightarrow_K \hat{K}$. Donc on peut plonger $K(d)$ dans $\hat{K}$, un corps algébriquement clos par Lemme 1.2. Alors on peut plonger $L = K(d)^a$ dans $\hat{K}$ aussi (en particulier $K(c)$ se plonge dedans !), d'où $E(c/K) = \Gamma_K$.

Cas 2 : $E(c/K) \subseteq E(d/K) \subsetneq \Gamma_K$. On considère la valuation grossière $\mathrm{v}' : L^\times \twoheadrightarrow \Gamma_K/E(d/K) =: \Gamma'$. Comme $\Gamma_L = \Gamma_K$, a fortiori $\Gamma'_L = \Gamma'_K$. Supposons que $E(c/K) \subsetneq E(d/K)$. On va montrer que $T'(c/K)$ a un élément maximal dans ce cas, et donc pour les corps résiduels correspondants à v' on a $L' \supsetneq K'$ par Proposition 4.4.

Soit $\gamma \in E(d/K) \setminus E(c/K)$, $\gamma > 0$, et soit $\alpha \in T(c/K)$ t.q. $\gamma + \alpha \notin T(c/K)$. C'est facile à voir que $\alpha' := \alpha \mod E(d/K) = (\gamma + \alpha) \mod E(d/K)$ est l'élément maximal de $T'(c/K)$ dans Γ'. Notons que par 4.4, $T'(d/K)$ a un élément maximal aussi. Quitte à appliquer une transformation affine, on peut supposer que ces éléments maximaux sont donnés par $\mathrm{v}'(c) = 0$ et $\mathrm{v}'(d) = 0$. Posons $c' := \mathrm{res}'(c), d' := \mathrm{res}'(d)$. Soit $\mathrm{v}'' : L' \to E(d/K)$ la valuation induite. Pour $T''(c'/K') := \{\mathrm{v}''(c' - b') \mid b' \in K'\}$ on a $T(c/K) = \mathcal{H}_{\Gamma_K}(T''(c'/K'))$, d'où $E''(c'/K') = E(c/K)$. De même, $E''(d'/K') = E(d/K)$. Comme $E(d/K) = \Gamma''$, on termine par le premier cas. □

La proposition suivante est une conséquence immédiate de [HHM03b, Thm 6.11]. Nous sommes convenus dans ce groupe de travail que nous voulons rester indépendants des papiers [HHM03a, HHM03b]. Dans la suite, nous appelons donc *version forte* des résultats qui en dépendent (et les autres n'en dépendent pas). Il est très probable qu'on peut toujours éliminer l'utilisation de ces deux papiers et montrer directement les versions fortes qui suivront.

Proposition 4.7. *Soit $K \subseteq K'$ des corps valués algébriquement clos, et $K \subsetneq K_1 = K(c_1)^a$. On suppose que $K(c_1) \perp^a_K K'$. Alors $K_1 \perp^a K'_K$.* □

Lemme 4.8. *Soit $K = K^a \subsetneq K_1, K_2$ des corps valués, avec $K_i = K(c_i)^a$, t.q. $E(c_1/K) \neq E(c_2/K)$. Alors :*

*(1) $K(c_1) \perp^a_K K_2$ (*version faible*).*

*(1') $K_1 \perp^a_K K_2$ (*version forte*).*

(2) On suppose qu'on a K-plongé les K_i dans un corps valué L. Alors, K_1/K est totalement ramifiée / totalement inerte / immédiate ssi $(K_1K_2)^a/K_2$ l'est.

(3) Soit K_1/K immédiate. Alors $T(c_1/K_2) = \mathcal{H}_{\Gamma_{K_2}}(T(c_1/K))$.

(4) Si $\Gamma_{K_2} = \Gamma_K$, alors $E(c_1/K_2) = E(c_1/K)$.

Preuve. Nous montrons d'abord :

(*) Pour tous les K-plongmements de K_1 et K_2 dans un corps L on a $c_1 \mathop{\smile\!\!\!\!|}^g_K K_2$.

Soit $a_1 \in K_1 \setminus K$ et $a_2 \in K_2 \setminus K$ arbitraires. Par 4.6, $E(a_1/K) \neq E(a_2/K)$, donc $T(a_1/K) \neq T(a_2/K)$, aussi. On peut supposer qu'il existe $b \in K$ t.q. $\mathrm{v}(a_2 - b) > T(a_1/K)$ (en particulier $\mathrm{v}(a_2 - b) > \mathrm{v}(a_1 - b)$). Alors, $\mathrm{v}(a_2 - b) > \mathrm{v}(a_1 - a_2) = \mathrm{v}(a_1 - b)$. Donc pour toute boule généralisée K_2-définissable B_2 contenant a_1 il existe B K-définissable t.q. $a \in B \subseteq B_2$ (d'ailleurs, la même chose est vraie pour K_1 et a_2). D'où $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!|}^g_K K_2$. Pour $a_1 := c_1$, on a (*).

(1) est une conséquence de (*) — par exemple en utilisant Lemme 4.2(2), et la version forte (1') s'obtient juste en appliquant Proposition 4.7 à (1).

Les parties (2)–(4) sont laissées au lecteur — il suffit de regarder la preuve de (*). □

En fait, vu la preuve que nous venons de donner, on a également :

Remarque 4.9. *Soit $K \subseteq K_1, K_2$ comme dans Lemme 4.8, avec exactement une des deux extensions K_i/K immédiate. Alors les résultats de 4.8 sont valables. Cela couvre le cas où $E(c_1/K) = E(c_2/K) = (0)$, avec K_i/K immédiate pour exactement un $i \in \{1, 2\}$.* □

Proposition 4.10. *Soient $K = K^a \subsetneq K_i$ des corps valués, t.q. $K_i = K(c_i)^a$. Posons $E_i := E(c_i/K)$. Supposons que $E_i \neq E_j$ pour $i \neq j$. Alors :*

*(I) Les corps valués $K(a_1), \ldots, K(a_n)$ sont presqu'orthogonaux au-dessus de K (*version faible*). En particulier, si $K_1, \ldots, K_n$ sont K-plongés dans un corps valué L, les images des a_i sont algébriquement indépendantes.*

*(I') $K_1, \ldots, K_n$ sont presqu'orthogonaux au-dessus de K (*version forte*).*

Preuve. On procède par induction sur n, en utilisant Lemme 4.8. OPS que $E_1 \neq (0)$ (comme tous les E_i sont différents, il en existe un qui est différent de (0)). Donc K_1/K est immédiate. Pour montrer (I), on travaille au-dessus de K_1. Par 4.8, on sait que $K(c_i) \perp^a_K K_1$ pour $i = 2, \ldots, n$, et donc $K_1(c_i)$ est uniquement déterminé (ne dépend pas du choix de plongements dans un corps valué qui contient K_1 et $K(c_i)$). Clairment, c_1 et c_i sont algébriquement indépendants au-dessus de K ($i \geq 2$).

Pour $i \geq 2$, on a $E(c_i/K_1) = E_i$ (car K_1/K est immédiat), et par l'hypothèse d'induction on peut traiter $K_1(c_2), \ldots, K_1(c_n)$ au-dessus de K_1.

Pour la version forte, on fait la même preuve, il suffit de remplacer $K(c_i)$ par K_i et (1) par (1'). □

Remarque. *Si la caractéristique résiduelle est 0, nous pouvons contourner l'utilisation de [HHM03b] et montrer la version forte (I') à la main. Cela est vrai pour tous les résultats dans la suite aussi.*

Proposition 4.11. *Soient $K = K^a \subseteq K_1, K_2 \subseteq \hat{K}$ des corps valués, avec K_i algébriquement clos. Sont équivalents :*

(1) $K_1 \perp^a_K K_2$.

(2) K_1 et K_2 sont linéairement disjoints au-dessus de K.

Preuve. Les deux notions (lin. disjoint et $\perp$) étant "finitaire", on peut supposer que $\mathrm{degtr}(K_1/K) < \infty$. Puis, par transitivité des deux notions, nous pouvons même supposer que $\mathrm{degtr}(K_1/K) = 1$.

(1) implique (2) trivialement, et nous montrons donc (1) en supposant (2). Prenons $a_1 \in K_1 \setminus K$, générique (au-dessus de K) dans $B = \cap B_i$, une boule généralisée K-définissable. Notons que toute boule $\hat{K}$-définissable (et différente d'un singleton) est K-définissable aussi. Il suffit d'approximer le centre c de la boule par un élément $c' \in K$ t.q. $\mathrm{v}(c - c')$ est plus grand que le diamètre de la boule. A fortiori, toute boule K_2-définissable (et différente d'un singleton) est K-définissable. Or, par (2), $a_1 \notin K_2$, et donc $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^g_K K_2$ nécessairement. Cela montre $K(a_1) \perp^a_K K_2$.

Nous pourrions terminer la preuve en citant 4.7, mais on peut donner un argument direct dans notre situation. En fait, une fois que $K(a_1)$ est plongé dans un corps valué algébriquement clos quelconque, il n'y a plus de choix pour continuer le plongement à $K_1 = K(a_1)^a$, l'image de tout élément est déterminée par la donnée de son polynôme minimal $p(x)$ et d'une boule K-définissable dans laquelle c'est l'unique racine de p (car $K(a_1)^a \subseteq \hat{K}$).

Autrement dit : $K(a_1)^a \subseteq \mathrm{dcl}(K(a_1))$, où $\mathrm{dcl}(\cdot)$ est la *clôture définissable* dans le sense de la théorie des modèles (et $\perp^a$ passe à la clôture définissable). □

Le corollaire suivant est uniquement donné en *version forte* (et il dépend donc de Proposition 4.7).

Corollaire 4.12. *Soient $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_n = L$ des corps valués algébriquement clos. On suppose :*

(i) K_{i+1}/K_i est totalement ramifié, ou totalement inerte, ou $K_{i+1} \subseteq \hat{K}_i$,

(ii) $\overline{K}/K$ est une extension immédiate t.q. $T(c/K)$ est borné pour tout $c \in \overline{K} \setminus K$.

Alors, $\overline{K} \perp^a_K \hat{L}$.

Preuve. On montre d'abord le cas particulier où $n = 1$ et $\operatorname{degtr}(K_1/K) = 1$, avec $K_1 = K(c_1)^a$. Utilisant (ii), on peut raisonner comme dans la preuve de 4.8[(1)] pour montrer que $c_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^g_K \overline{K}$ nécessairment, et donc $K(c_1) \perp^a_K \overline{K}$. Par 4.7, il en résulte que $K_1 \perp^a_K \overline{K}$.

On procède par induction sur n, et on réduit au cas particulier $\operatorname{degtr}(K_1/K) = 1$. Pour cela, il suffit de montrer que $K_2, \ldots, K_n$ et $\overline{K}_1 := \overline{K}K_1$ satisfont aux hypothèses du corollaire. Clairement, c'est le cas pour (i). Quant à (ii), il suffit d'utiliser les parties (2) et (3) du Lemme 4.8 pour déduire que $\overline{K}_1/K_1$ est immédiat avec $T(\overline{c}/K_1)$ borné pour tout $\overline{c} \in \overline{K} \setminus K$, et donc (via Lemme 4.6) pour tout $\overline{c} \in \overline{K}_1 \setminus K_1$ aussi. □

5 Structure des αVD

Dans cette section, on va donner un théorème de structure pour les corps σ-valués de la forme $\widehat{K^a}/F$, où K est un αVD au-dessus de F (dans le cas où $F^{inv} \subseteq F^a$).

Proposition 5.1. *Soit* $K = K^a$ *un corps* σ*-valué,* $\Gamma_K = \mathbb{Q}[\sigma]$*. On suppose que* $T(c/\sigma(K))$ *a un élément maximal pour tout* $c \in K \setminus \sigma(K)$*. Soit* L/K *une extension immédiate de corps* σ*-valués t.q.* $\sigma\operatorname{degtr}(L/K) = 0$*. Alors* $\hat{L} = \hat{K}$*.*

Preuve. Soit $a \in L \setminus K$. On pose $a_0 := a$, $a_i := \sigma^i(a)$ et $T_i := T(a_i/K)$. Par 4.4, nous savons que $T_i = \mathcal{H}T_i$ et que T_i n'a pas d'élément maximal. Montrons d'abord que $T_1 = \mathcal{H}(\sigma(T_0))$. On observe que $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^g_{\sigma(K)} K$ par Remarque 4.9, en utilisant l'hypothèse que $T(c/\sigma(K)$ un un élément maximal pour tout $c \in K \setminus \sigma(K)$ et le fait que $\sigma(L)/\sigma(K)$ est immédiate. Or, $T(a_1/K) = \mathcal{H}_{\Gamma_K}(T(a_1/\sigma(K))$ en est une conséquence, ce qui veut précisément dire que $T_1 = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}[\sigma]}(\sigma(T_0))$. Par le même argument, on a $T_{i+1} = \mathcal{H}(T_i)$ pout tout i.

Si $T_0 = \Gamma_K$, on a terminé, car alors $a \in \hat{K}$. On peut donc supposer que $T_0 \subseteq \mathbb{Q}[\sigma]$ est borné, et alors $T_0 \subseteq \mathcal{H}(E_m + \gamma)$ pour un $\gamma \in T_0$ et $E_m := \mathbb{Q}v \oplus \mathbb{Q}v^\sigma \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}v^{\sigma^{m-1}}$. On suppose que m_0 soit minimal t.q. il existe $\gamma_0 \in T_0$ avec $T_0 \subseteq \mathcal{H}(E_{m_0} + \gamma_0)$. On applique inductivement 3.6 pour obtenir $E(a_{i+1}/K) = \operatorname{stab}(T_{i+1}) \in \{E_{m+i}, E_{m+i+1}\}$. Alors, Proposition 4.10(I) nous dit que une infinité des a_i est algébriquement indépendante au-dessus de K, ce qui contredit $\sigma\operatorname{degtr}(L/K) = 0$. □

Exemples 5.2.

(1) Soit $K := F(t)^a_\sigma$, avec $F(t)_\sigma$ comme dans 2.2(3). On a donc $\Gamma_K = \mathbb{Q}[\sigma]$. On suppose que $F^{inv} \subseteq F^a$, et on pose $K_e := \sigma^e(K) = F(t^{\sigma^e})^a_\sigma$. Alors, pour tout $c \in K \setminus K_e$, l'ensemble $T(c/K_e)$ a un élément maximal, car K/K_e est totalement ramifiée. La même chose est vraie pour $c \in \hat{K} \setminus \widehat{K_e}$ (il suffit d'approximer suffisamment bien pour réduire au cas précédent.

(2) Voilà une instance de 5.1. Considérons $\hat{K}$, où K est comme l'exemple précédent. Soit $b := \sum_{n \geq 0} t^{\sigma^n} \in \hat{K}$. C'est une solution de $\sigma(x) - x = t$, et le corps $L := K(b)^a_\sigma$ est une extension immédiate de K t.q. $\sigma\operatorname{degtr}(L/K) = 0$.

(3) On reste dans le même cadre. Considérons l'équation aux différences $\sigma(y) - y = t^{-1}$. Elle n'a pas de solution dans $\hat{K}$. L'élément $c := t^{-1/\sigma} + t^{-1/\sigma^2} + \ldots$ en

est une solution, mais $K(c)_\sigma/K$ est totalement ramifiée — on a $\frac{1}{\sigma} >> \frac{1}{\sigma^2} >> \ldots$, et donc $-\frac{1}{\sigma} << -\frac{1}{\sigma^2} << \ldots$, d'où $\mathrm{v}(c) = -\frac{1}{\sigma} \notin \mathbb{Q}[\sigma]$.

Si on remplace K par $K^{inv} = (F(t)_\sigma^{inv})^a$ (avec $\Gamma_{K^{inv}} = (\Gamma_K)^{inv} = \mathbb{Q}[\sigma, \sigma^{-1}]$), alors $K^{inv}(c)_\sigma/K^{inv}$ devient une extension immédiate, mais on ne trouve toujours pas de solution dans la complétion de K^{inv}. Cela montre que $\mathbb{Q}[\sigma]$ ne peut pas être remplacé par $\mathbb{Q}[\sigma, \sigma^{-1}]$ dans Proposition 5.1.

Corps transformellement henselien

On rappelle que pour tout polynôme $F(X_0, \ldots, X_n) \in K[\overline{X}]$ il existe $F_\nu = \partial_\nu F$ (pour des multi-indices ν) t.q. pour tout $\overline{a} \in K^{n+1}$ on ait :

$$F(\overline{a} + \overline{X}) = \sum_\nu F_\nu(\overline{a})\overline{X}^\nu \text{ (développement de Taylor) .}$$

Si K est un corps valué et $F \in \mathcal{O}_K[\overline{X}]$, alors c'est facile à voir que $F_\nu \in \mathcal{O}_K[\overline{X}]$ aussi, et cela même en caractéristique positive.

Maintenant, si (K, σ) est un corps de différence, et $f(x) \in K[X]_\sigma$, on prend le polynôme ordinaire $F[\overline{X}] \in K[\overline{X}]$ t.q. $f(X) = F(X, X^\sigma, \ldots, X^{\sigma^n})$, et on pose $f_\nu(X) := F_\nu(X, X^\sigma, \ldots, X^{\sigma^n})$, en particulier $f_1(X) = (\frac{\partial}{\partial X_0}F)(X, \ldots, X^{\sigma^n})$.

Définition 5.3. Soit (K, v, σ) un corps σ-valué. On dit qu'il est *transformellement henselien*, s'il est d'égale caractéristique, ω-croissant, et s'il satisfait à la *propriété de Hensel transformelle* (abrégée (ΠH)) :

(ΠH) Soit $f \in \mathcal{O}_K[X]_\sigma$. Supposons qu'il existe $a \in \mathcal{O}_K$ t.q. pour $v := \mathrm{v}(f(a)), v' := \mathrm{v}(f_1(a))$ on ait $v > 2v'$. Alors il existe $b \in K$, t.q. $f(b) = 0$ et $\mathrm{v}(a - b) \geq v - v'$.

Si $car(K) = p > 0$, on demande en plus que K soit parfait et que (ΠH) soit satisfaite par $\sigma \circ \Phi_p^z$ pour tout $z \in \mathbb{Z}$.

Exemples 5.4. (1) Soit $(K, \mathrm{v}, \Phi_{p^n})$ comme dans 2.2[(1)]. Alors K satisfait à la propriété (ΠH). Pour voir cela, considèrons $f(X) \in K[X]_\sigma$, et $F(X_0, \ldots, X_m) \in K[\overline{X}]$ t.q. $f(X) = F(X, X^\sigma, \ldots, X^{\sigma^m})$. On évalue et on obtient $F(X, X^{p^n}, \ldots, X^{p^{mn}}) = h(X)$ pour un certain $h(X) \in K[X]$. Utilisant que $(X^{p^N})' \equiv 0$ pour $N \geq 1$, on voit aisément que $(\frac{\partial}{\partial X_0}F)(X, \ldots, X^{p^{mn}}) = h'(X)$. Donc, si pour $f(x) \in \mathcal{O}_K[X]_\sigma$ il existe $a \in \mathcal{O}_K$ t.q. $\mathrm{v}(f(a)) > 2\mathrm{v}(f_1(a))$, ça veut dire que $\mathrm{v}(h(a)) > 2v(h'(a))$. Comme K est algébriquement clos, (K, v) est henselien, et il existe une solution de h proche de a, par la propriété de Hensel usuelle.

(2) Tout ultraproduit non-principal $(K^*, \mathrm{v}^*, \sigma^*) = \prod_{i\in I}(K_i, \mathrm{v}_i, \sigma_i)/\mathcal{U}$ de corps σ-valués comme dans (1) est transformellement henselien. D'abord, la propriété (ΠH) se dit au premier ordre et passe donc aux ultraproduits. On a déjâ vu (2.2(2)) que K^* est forcément ω-croissant. Si $car(K^*) = p > 0$, il est évidemment parfait (cela se dit), et pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\sigma_i = \Phi_{p^{n_i}}$, pour presque tout i on a $n \leq n_i$. Donc, (ΠH) est valable pour $\sigma^* \circ \Phi_{p^z}$ pour tout $z \in \mathbb{Z}$.

Lemme 5.5 (Lemme de Hensel transformel). *Soit K un corps σ-valué complet et (algébriquement) henselien, t.q. $\Gamma_K \subseteq \mathbb{Q}[\sigma]$ (en particulier, K est ω-croissant). Alors, K satisfait $\overline{a}$ la propriété (ΠH). Si en plus K est algébriquement clos, alors K est transformellement henselien.*

Preuve. L'idée de la preuve est comme suit : appliquer le lemme de Hensel usuel pour trouver des meilleures approximations (en oubliant les σ-termes), puis conclure, en utilisant l'hypothèse que K soit complet.

On va améliorer v en $v_1 \geq \sigma(v - v') \geq \frac{\sigma(v)}{2}$, et donc par induction en $v_n \geq \frac{\sigma^n(v)}{2^n}$, une suite cofinale dans Γ_K.

Plus tard, on va montrer :

(*) Il existe $a_1 \in \mathcal{O}_K$ t.q. $\mathrm{v}(a - a_1) \geq v - v'$ et $v_1 := \mathrm{v}(f(a_1)) \geq \sigma(v - v')$.

Pour un a_1 comme dans (*) on a $\mathrm{v}(f_1(a) - f_1(a_1)) \geq v - v' > v'$, car $a \equiv a_1 \mod v - v'$. Donc, $\mathrm{v}(f_1(a_1)) = v'$. En plus, inductivement on aura $\mathrm{v}(a_n - a_{n-1}) \geq \frac{\sigma^n(v)}{2^n} - v'$, c.à.d. la suite des a_n est convergente. Il suffit donc de trouver a_1, car $b := \lim_n a_n \in \hat{K} = K$ est la solution cherchée.

Pour trouver a_1 avec (*), on se sert de la *méthode d'approximation de Newton.* On écrit $a_1 = a + re$, où $e := \frac{f(a)}{f_1(a)}$, et $r \in \mathcal{O}_K$ est à déterminer. Par Taylor,

$$f(a_1) = \underbrace{f(a+re) = f(a) + \sum_{i=1}^{m} f_i(a)(re)^i}_{=\tilde{f}(r)} + \underbrace{\sum_{\nu \geq \sigma} f_\nu(a)(re)^\nu}_{\mathrm{v}(\ldots) \geq \mathrm{v}(\sigma(e)) = \sigma(v-v')} \quad ,$$

où $\tilde{f}(r)$ est un polynôme en r. Par un calcul facile on voit que $g(X) := \frac{\tilde{f}(X)}{f(a)} = 1 + X + X^2\tilde{g}(X)$ pour un $\tilde{g}(X) \in \mathfrak{m}_K[X]$. Comme (K, v) est henselien, il existe donc $\alpha \in K$ t.q. $g(\alpha) = 0$ et $\mathrm{v}(\alpha - 1) > 0$. Finalement, $r := \alpha$ marche. □

Soient $(K, \sigma) \subseteq (L, \sigma)$ des corps de différence. On va noter $\mathrm{cltransf}_L(K) := \{a \in L \,|\, \sigma\mathrm{degtr}(a/K) = 0\}$, la *clôture transformelle* de K dans L. C'est un sous-corps de différence de L qui est évidemment relativement algébriquement clos dans L. La preuve du fait suivant est laissée au lecteur.

Fait 5.6. *(1) Si $L = L^{inv}$, alors $\mathrm{cltransf}_L(K) = \mathrm{cltransf}_L(K)^{inv}$.*

(2) Si $K^{inv} \subseteq K^a$ et $\sigma\mathrm{degtr}(L/K) = 0$, alors $L^{inv} \subseteq L^a$, aussi. □

Convention / Notation 5.7. À partir de maintenant, tous les corps σ-valués seront ω-croissants et d'égale caractéristique.

Comme façon de parler, nous disons que K est un corps σ-valué au-dessus de F, si $F \subseteq K$ est un sous-corps de différence trivialement valué. Dans ce cas, on notera $F' := \mathrm{cltransf}_K(F)$ et $F'^r := \mathrm{cltransf}_{K_{\mathrm{res}}}(F)$ (ne pas confondre avec F'_{res}).

Lemme 5.8. *Soit K σ-valué au-dessus de F. Alors, F' est trivialement valué, c.à.d. $\mathrm{res} \restriction_{F'} : F' \hookrightarrow K_{\mathrm{res}}$ est un plongement.*

Preuve. Comme dans la preuve de 2.6 on voit que si $t \in K$ avec $\mathrm{v}(t) > 0$, alors t est σ-indépendant au-dessus de F, et donc $t \notin F'$. □

Proposition 5.9. *Soit K un corps transformellement henselien, K au-dessus de F t.q. $F^{inv} \subseteq F^a$. Alors $\mathrm{res} \restriction_{F'} : F' \to F'^r$ est un isomorphisme.*

En particulier, si $\sigma\mathrm{degtr}(K_{\mathrm{res}}/F) = 0$ (et donc $K_{\mathrm{res}} = F'^r$), on peut relever le corps résiduel.

D'abord, il nous faut un autre lemme :

Lemme 5.10. *Soit K transformellement henselien, K au-dessus de F, et soit $\overline{a} \in K_{\mathrm{res}}$ t.q. pour un $f(X) \in F[X]_\sigma$ on ait $f(\overline{a}) = 0 \neq f_1(\overline{a})$. Alors, il existe $b \in K$ t.q. $f(b) = 0$ et $\mathrm{res} : F(b)_\sigma \simeq F(\overline{a})_\sigma$.*

Preuve du lemme. Le lemme de Hensel transformel nous fournit un élément $b \in K$ avec $f(b) = 0$ et $\mathrm{res}(b) = \overline{a}$. Comme $F(b)_\sigma \subseteq F'$, l'application res est injective sur $F(b)_\sigma$ (par 5.8). La surjectivité est claire. $\square$

Preuve de Proposition 5.9. (1) $(F')^{inv} \subseteq (F')^a$ (par Fait 5.6(2))

(2) F' est relativement algébriquement clos dans K (et en particulier parfait).

(3) On peut supposer que $F = F'$ (par (1)).

On raisonne par l'absurde. Supposons donc que $F \subsetneq F'^r$ (via l'application res, on identifie F à un sous-corps de K_{res}).

1^{er} *cas : car*$(K) = 0$. Choisir $0 \neq f(X) \in F[X]_\sigma$ de $(\mathrm{ord}(f), \deg_X(f))$ minimal dans l'ordre lexicographique t.q. il existe $\overline{a} \in F'r \setminus F$ qui est solution de f. On rappelle que l'ordre d'un σ-polynôme f (non-constant) est défini comme le plus grand entier m t.q. X^{σ^m} figure dans f.

Si $f \in F[X^\sigma]_\sigma$, il y a deux cas. Soit on a $\sigma(\overline{a}) \in F$, c.à.d. $\overline{a} \in F'^{inv}$. Mais alors $\overline{a} \in F^a$ par (1), et donc $\mathrm{ord}(f) = 0$, en contradiction avec $f \in F[X^\sigma]_\sigma$. Sinon, $\sigma(\overline{a}) \notin F$. Or, considérons le polynôme $g \in F[X]_\sigma$, t.q. $g(X^\sigma) = f(X)$. Alors $g(\sigma(\overline{a})) = 0$, $\mathrm{ord}(g) < \mathrm{ord}(f)$ ce qui contredit la minimalité de f.

Donc, $f \notin F[X^\sigma]_\sigma$, et alors $f_1 \not\equiv 0$ (on est en caractéristique 0). Comme $\deg_X(f_1) < \deg_X(f)$, par minimalité de f on a $f_1(\overline{a}) \neq 0$. C'est la situation du Lemme 5.10, et on voit que $\overline{a} \in F'$. Contradiction.

$2^{i\grave{e}me}$ *cas : car*$(K) = p > 0$. Soit $\tau \in \{\sigma \circ \Phi_p^{-n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Cette fois, on minimise $(\mathrm{ord}(f), \deg_X(f))$ dans $<_{lex}$ pour des $0 \neq f \in F[X]_\tau$ (sur tous les choix de τ à la fois) t.q. il existe $\overline{a} \in F'^r \setminus F$ avec $f(\overline{a}) = 0$. Comme avant (par définition, K a la proriété (ΠH) pour tous ces τ), on voit que $f \notin F[X^\tau]_\tau$, et que $(\mathrm{ord}(f_1), \deg_X(f_1)) < (\mathrm{ord}(f), \deg_X(f_1))$. Comme avant, si $f_1 \not\equiv 0$, on a terminé. Or, en caractéristique positive, a priori $f_1 \equiv 0$ est possible.

Si $f_1 \equiv 0$, on peut écrire $f(X) = \sum_{i=0}^k X^{ip} G_i(X^\tau, \ldots, X^{\tau^m})$. Donc il existe un polynôme G t.q. $f(X) = G(X^p, X^\tau, \ldots, X^{\tau^m})$. Posons $\tau' := \tau \circ \Phi_p^{-1}$. Donc, $G(X^p, X^\tau, \ldots, X^{\tau^m}) = G(X^p, X^{p\tau'}, \ldots, X^{p^m \tau'^m}) = H(X, X^{\tau'}, \ldots, X^{\tau'^m})^p$ pour un H avec $\mathrm{ord}(H) = \mathrm{ord}(f)$ et $\deg_X(H) = \frac{1}{p}\deg_X(f)$ (utiliser que le corps F est parfait !). Contradiction. $\square$

L'exemple suivant illustre la nécessité de la condition $F^{inv} =\subseteq F^a$ dans Proposition 5.9.

Exemple 5.11. Soit $F := \mathbb{Q}(b)_\sigma^a$ trivialement valué (avec b σ-transcendant), et soit $K_0 := F(t)_\sigma(c)^a$, où t est σ-transcendant au-dessus de F et c algébriquement transcendant sur $F(t)_\sigma$, t.q. $\sigma(c) = b + t$. On met la valuation usuelle sur $F(t)_\sigma$, çà.d. celle de 2.2(3). On observe que $K_0 \subseteq (F(t)_\sigma^a)^{inv}$, et donc en particulier $K := \hat{K}_0$ est déterminé en corps σ-valué par la complétion de $F(t)_\sigma^a$. Par le lemme de Hensel transformel, K est transformellement henselien.

On raisonne dans $(F(t)_\sigma^a)^{inv}$: comme $c = \sigma^{-1}(b) + \sigma^{-1}(t)$ et $\sigma^{-1}(t) > 0$, on a $\mathrm{res}(\sigma^{-1}(b)) \in K_{\mathrm{res}} = (K_0)_{\mathrm{res}}$. On a $F'^r = K_{\mathrm{res}}$, pour contredire 5.9, il suffit donc de montrer que $\sigma^{-1}(b) \notin K$. Sinon, on aurait $\sigma^{-1}(b), \sigma^{-1}(t)$ ∈K, et — pour des approximations $b', t' \in K_0$ de $\sigma^{-1}(b), \sigma^{-1}(t)$ — on aurait que $\mathrm{degtr}(b', t'/F(t)_\sigma) = 2$ (regarder au groupe des valeurs et au corps résiduel et utiliser 1.8). Or, $\mathrm{degtr}(K_0/F(t)_\sigma) = 1$, une contradiction.

Voilà le cadre qui nous intéresse dans la suite :

Contexte standard : L est un corps σ-valué au-dessus de F, où $F^{inv} \subseteq F^a$, t.q. $L = \widehat{L_0^a}$ pour un $F \subseteq L_0 \subseteq L$ avec $\sigma\mathrm{degtr}(L_0/F) = 1$ et $\Gamma_{L_0} \subseteq \mathbb{Q}[\sigma] \simeq \Gamma_L$.

Donc, si L_0 est un αVD au-dessus de F (avec $F^{inv} \subseteq F^a$), alors L/F est dans le contexte standard.

Proposition 5.12 (Thm de structure dans le contexte standard). *Soit L/F dans le contexte standard. Alors $L \simeq \widehat{L_{\mathrm{res}}(t)_\sigma^a}$ pour un t avec $\mathrm{v}(t) = 1 \in \mathbb{Q}[\sigma]$.*

Preuve. Soit $F \subseteq L_0 \subseteq L$ comme dans la définition du contexte standard, c.à.d. $L = \widehat{L_0^a}$ et $\sigma\mathrm{degtr}(L_0/F) = 1$.

(1) Comme $L_{\mathrm{res}} = (L_0^a)_{\mathrm{res}}$, on a $\sigma\mathrm{degtr}(L_{\mathrm{res}}/F) = 0$, d'où $(L_{\mathrm{res}})^{inv} = L_{\mathrm{res}}$ (car $F^{inv} \subseteq F^a$).

(2) On peut supposer qu'il existe $t \in L_0$ t.q. $\mathrm{v}(t) = 1 \in \mathbb{Q}[\sigma]$.

(3) L est transformellement henselien (lemme de Hensel transformel), et on peut donc relever L_{res} en F' par Proposition 5.9, c.à.d. $\mathrm{res}\restriction_{F'} \colon F' \simeq L_{\mathrm{res}}$ est un isomorphisme.

(4) Si on pose $K := F'(t)_\sigma^a \subseteq L$, alors $\hat{K} = L$. C'est une conséquence de Proposition 5.1. Il suffit de l'appliquer à K et $(L_0K)^a/K$ (notons que $\sigma\mathrm{degtr}(L_0/K) = 0$) pour conclure que $\hat{K} = \widehat{(L_0K)^a} = L$. □

Proposition 5.13. *Soit L/F dans le contexte standard, et $F \subseteq K = \widehat{K^a} \subseteq L$ un sous-corps σ-valué t.q.*

$$rk_{\mathrm{val}}(L/K) = e = e_{\mathrm{res}} + e_{\mathrm{ram}} = \mathrm{degtr}(L_{\mathrm{res}}/K_{\mathrm{res}}) + \dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_L/\Gamma_K) < \infty.$$

Alors il existe $e_1, e_2 \geq 0$, $e_{\mathrm{ram}} = e_1 + e_2$ et des corps de différence algébriquement clos $K \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq L$ t.q.

(I) K_1/K est totalement inerte avec $\mathrm{degtr}(K_1/K) = \mathrm{degtr}((K_1)_{\mathrm{res}}/K_{\mathrm{res}}) = e_{\mathrm{res}}$,

(II) K_2/K_1 est totalement ramifiée avec $\mathrm{degtr}(K_2/K_1) = \dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{K_2}/\Gamma_{K_1}) = e_1$,

(III) $\widehat{K_2} = L^{\sigma^{e_2}}$ (comme sous-corps de L).

Avant de prouver cette proposition, on en tire quelques conséquences.

Corollaire 5.14. *Soit L/F dans le contexte standard, et $F \subseteq K \subseteq K', L \subseteq L^*$ des corps σ-valués avec L^* ω-croissant. Supposons que $rk_{\mathrm{val}}(L/K) < \infty$, et que $K' = \mathrm{cltransf}_{K'}(K)$ (par exemple $\mathrm{degtr}(K'/K) < \infty$). Alors, on a $rk_{\mathrm{val}}(L/K') := rk_{\mathrm{val}}(LK'/K') \leq rk_{\mathrm{val}}(L/K)$.*

Preuve. Par 5.13, on peut écrire $K \subseteq \widehat{K^a} \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \widehat{K_2} = L^{\sigma^{e_2}} \subseteq L^{\sigma^{e_2}}(t)^a_\sigma \subseteq L$, c.à.d. $K = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_6 = L$, où M_{i+1}/M_i est soit totalement inerte, soit totalement ramifiée, soit $M_{i+1} \subseteq \widehat{M_i}$. Comme le rang valuatif est additif dans des tours d'extensions, on a $rk_{\mathrm{val}}(L/K) = \sum_{i=0}^{5} rk_{\mathrm{val}}(M_{i+1}/M_i)$ et $rk_{\mathrm{val}}(L/K') = \sum_{i=0}^{5} rk_{\mathrm{val}}(M'_{i+1}/M'_i)$, où $M'_i := M_iK'$. Il suffit donc de montrer que $rk_{\mathrm{val}}(M_{i+1}/M_i) \leq rk_{\mathrm{val}}(M'_{i+1}/M'_i)$ pour tout i. En plus, on peut supposer que $\mathrm{degtr}(K'/K) < \infty$.

Cas 1 : M_{i+1}/M_i totalement ramifiée ou totalement inerte. Ce cas suit de

$$rk_{\mathrm{val}}(M'_{i+1}/M'_i) \leq \mathrm{degtr}(M'_{i+1}/M'_i) \leq \mathrm{degtr}(M_{i+1}/M_i) = rk_{\mathrm{val}}(M_{i+1}/M_i).$$

Cas 2 : $M_{i+1} \subseteq \widehat{M_i}$. Dans ce cas, on a $M'_{i+1} \subseteq \widehat{M_i}K'$, ce dernier étant contenu dans $\widehat{M_iK'} = \widehat{M'_i}$, car $\Gamma_{M_i} \subseteq \Gamma_{M'_i}$ est cofinal (c'est une conséquence de $\mathrm{degtr}(K'/K) < \infty$). Donc, $rk_{\mathrm{val}}(M'_{i+1}/M'_i) = 0$ dans ce cas. □

Remarque 5.15. *Soit L_0/F un corps σ-valué au-dessus de F t.q. $F^{inv} \subseteq F^a$, $\sigma\mathrm{degtr}(L_0/F) = 1$ et $\Gamma_{L_0} \subseteq \mathbb{Q}[\sigma]$ (par exemple un αVD L_0/F). Alors, pour $F \subseteq K \subseteq K', L_0 \subseteq L^*$, on a le résultat du Corollaire 5.14 pour L_0 à la place de L.*

Preuve. Il suffit de noter que $L := \widehat{L_0^a}$ est dans le contexte standard, et on est donc ramené à 5.14 □

Remarque 5.16. *Le Corollaire 5.14 ne dépend pas des papiers [HHM03a] et [HHM03b] (nous allons le voir).* □

L'exemple suivant montre que 5.14 peut être faux sans l'hypothèse $\Gamma_L \subseteq \mathbb{Q}[\sigma]$. Plus exactement, l'exemple viole Remarque 5.15. On l'esquisse seulement, car il faut manipuler un peu les suites pseudo-convergentes.

Exemple 5.17. Soit $F = F^{inv} = F^a$ un corps de différence trivialement valué. On considére $K := F(t^{\sigma^z} \,|\, z \in \mathbb{Z})^a = (F(t)^a_\sigma)^{inv} \subseteq F((\mathbb{Q}[\sigma, \sigma^{-1}])) \subseteq F((\mathbb{Q}(\sigma))) =: L^*$, le corps des séries de formelles à valeurs dans le groupe additif du corps ordonné $\mathbb{Q}(\sigma)$.

Prenons $c := 1 + \sum_{i \geq 1} \prod_{j=1}^{i} t^{\sigma^{-j}} \in F((\mathbb{Q}[\sigma, \sigma^{-1}]))$. C'est une pseudo-limite de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour $c_n := 1 + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} t^{\sigma^{-j}}$. On a $\sigma(c) = 1 + tc$. Montrons :

(1) La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est pseudo-convergente et de type transcendant au-dessus de $F(t^{\sigma^z} \,|\, z \in \mathbb{Z})$. (Si elle était de type algébrique, il existerait $m \in \mathbb{N}$ et $f(X) \in F(t^{\sigma^{-m}}, \ldots, f^{\sigma^m})[X]$ t.q. $\mathrm{v}(f(c_n))$ soit ultimement croissant. Par la théorie de Kaplansky [Ka42], si $\deg(f)$ est minimal avec ça, on aurait une solution a pour f dans $F(t^{\sigma^{-m}}, \ldots, f^{\sigma^m})^a$, t.q. $c_n \Rightarrow a$. Or, $\mathrm{v}(a - c_m) = \mathrm{v}(c - c_m) = \mathrm{v}(c_{m+1} - c_m) = \sum_{j=1}^{m+1} \sigma^{-j}$ est $\mathbb{Q}$-indépendant du groupe des valeurs de $F(t^{\sigma^{-m}}, \ldots, f^{\sigma^m})$, en contradiction avec $a \in F(t^{\sigma^{-m}}, \ldots, f^{\sigma^m})^a$.)

(2) Le corps $L := K(c)^a_\sigma = K(c)^a$ est une extension immédiate de K (par (1) et [Ka42]).

(3) Prenons $c' := c + t^{\frac{1}{\sigma - 1}} \in L^*$. Alors, on a également $c_n \Rightarrow c'$, et $\sigma(c') = 1 + tc'$. Donc, pour $K' := K(c')^a_\sigma = K(c')^a$ on a $\mathrm{degtr}(K'/K) = 1$ et K'/K immédiate (car $L \simeq_K K'$).

(4) On a $rk_{\text{val}}(L/K) = 0$, mais $rk_{\text{val}}(LK'/K') = 1$, car $\mathrm{v}(c - c') = \mathrm{v}(t^{\frac{1}{\sigma-1}}) = \frac{1}{\sigma-1} \notin \Gamma_{K'} = \mathbb{Q}[\sigma, \sigma^{-1}]$.

Le prochain corollarie est énoncé en version forte uniquement.

Corollaire 5.18. *Soit L/F dans le contexte standard, $F \subseteq K = \widehat{K^a} \subseteq L$ t.q. $rk_{\text{val}}(L/K) < \infty$. Soit $\overline{K} \supseteq K$ l'extension maximale immédiate de K (voir 1.6(2)). Alors $\overline{K} \perp^a_K L$.*

Preuve. Comme dans la preuve du Corollaire 5.14 on décompose L/K en des étapes M_{i+1}/M_i qui sont totalement inerte, totalement ramifiée ou telle que $M_{i+1} \subseteq \widehat{M_i}$. Comme K est complet, $\overline{K}/K$ est une extension immédiate avec $T(c/K)$ borné pour tout $c \in \overline{K} \setminus K$. On peut donc appliquer 4.12. □

D'ailleurs, le corps $\overline{K}$ dans 5.18 porte une structure de corps σ-valué (exercice).

Il ne nous reste qu'à montrer Proposition 5.13. On a besoin d'un lemme :

Lemme 5.19. *Soit L/F dans le contexte standard, avec $F \simeq L_{\text{res}}$. Soit $F \subseteq K = K^a \subseteq L$ un corps de différence intermédiaire. Alors il existe un corps de différence $K' = K'^a$, $K \subseteq K'$ t.q. K'/K est totalement ramifiée, et si $\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_L/\Gamma_{K'}) = e < \infty$, alors $\sigma^e(L) = \widehat{K'}$.*

Preuve. On choisit un sous-corps de différence $K' \subseteq L$ contenant K, t.q. l'extension K'/K est totalement ramifiée et K' est maximal avec ça (un tel K' existe, et on a $K' = K'^a$). On prétend que K' marche.

Par 5.12, on a $L \simeq \widehat{F(t)^a_\sigma}$, où $F \simeq L_{\text{res}}$. On rappelle que les sous-groupes convexes de Γ_L sont donnés par $E_n := \mathbb{Q}v \oplus \ldots \mathbb{Q}v^{\sigma^{n-1}} \subseteq \mathbb{Q}[\sigma] = \Gamma_L$.

Soit $e : \dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_L/\Gamma_{K'}) < \infty$. Alors, on a $\Gamma_{K'} \cap E_e = (0)$ (facile) et $\Gamma_{K'} \cap E_{e+1} \neq (0)$ (utiliser qu'un espace vectoriel est modulaire). Donc, $\Gamma_L \simeq \Gamma_{K'} \oplus E_e$ comme groupes ordonnés. On choisit $s \in K'$, $0 < \mathrm{v}(s) \in E_{e+1}$.

On va considérer la série de valuations grossières $\mathrm{VAL}_N : L^\times \twoheadrightarrow \Gamma_L/E_N$ (ces valuations n'ont rien à voir avec σ). On pose $L_0 := F(t)^a_\sigma$. Évidemment, RES_N induit un isomorphisme entre $F(t, \ldots, t^{\sigma^{N-1}})^a$ et $\mathrm{RES}_N(L_0)$. Or, L est égal à la complétion de L_0 par rapport à VAL_N, car les topololgies sont les mêmes (c'est un phénomène général que la topologie par rapport à une valuation grossière non-triviale est égale à celle par rapport à la valuation du départ). Donc, $\mathrm{RES}_N : F(t, \ldots, t^{\sigma^{N-1}})^a \to \mathrm{RES}_N(L)$ est un isomorphisme.

Posons $t_n := \sigma^n(t)$, $s_n := \sigma^n(s)$ ainsi que $\overline{t}_n := \mathrm{RES}_N(t_n)$ et $\overline{s}_n := \mathrm{RES}_N(s_n)$. Il suffit de montrer

(*) $t_e \in \widehat{K'}$,

car alors on a $L^{\sigma^e} = \widehat{F(t_e)^a_\sigma} \subseteq \widehat{K'}$, avec $\widehat{K'}/\widehat{F(t_e)^a_\sigma}$ immédiate (puisque $\Gamma_{K'} \supseteq \Gamma_{F(t_e)^a_\sigma}$ et ces deux groupes ont la même codimension e dans Γ_L). Or, pour tout $c \in L \setminus \sigma^e(L)$, $\sigma^e(L)(c)/\sigma^e(L)$ est totalement ramifiée (voir Exemple 5.2(1)).

Puisque $\widehat{K'}$ est complet et la suite des E_N est cofinale dans $\mathbb{Q}[\sigma]$, on réduit (*) à

(**) $\overline{t}_e \in \mathrm{RES}_N(K')$ pour tout $N \geq e + 1$.

Soit donc $N \geq e+1$, en particulier $\mathrm{v}(s), \ldots, \mathrm{v}(s_{N-e-1}) \in E_N$. Comme $\mathrm{degtr}(\mathrm{RES}_N(L)/F) = N$, on a forcément

(I) $\overline{t}_0, \ldots, \overline{t}_e, \overline{s}_0, \ldots, \overline{s}_{N-e-1}$ sont algébriquement dépendants au-dessus de F.

Continuons :

(II) $\overline{s}_0, \ldots, \overline{s}_{N-e-1}$ sont algébriquement indépendants au-dessus de F (car leurs images par rapport à la valuation induite sont $\mathbb{Q}$-indépendantes).

(III) Soit $m \leq e$ maximal t.q. $\overline{t}_m, \ldots, \overline{t}_e, \overline{s}_0, \ldots, \overline{s}_{N-e-1}$ soient algébriquement dépendants $/F$ (témoigné par $f \in F[X_m, \ldots, X_e, Y_0, \ldots, Y_{N-e-1}]$ que l'on suppose de degré minimal en X_m).

(IV) On relève (et évalue partiellement) f en $\tilde{f}(X_m, \ldots, X_e, s_0, \ldots, s_{N-e-1}) \in \mathcal{O}_L[X_m, \ldots, X_e]$, et on le voit comme $\tilde{f}(X_m) \in \mathcal{O}_L[X_m]_\sigma$ (via $\sigma(X_i) := X_{i+1}$).

Il suffit de montrer

(***) $m = e$.

Cas 1 : car$(L) = 0$. Par maximalité de m on a $\tilde{f}_1(X_m) \neq 0$, et donc — utilisant la minimalité de $\deg_{X_m}(f)$ — $\mathrm{v}(\tilde{f}_1(t_m)) \in E_N$. Comme par ailleurs $\mathrm{v}(\tilde{f}(t_m)) > E_N$, on peut appliquer le lemme de Hensel transformel pour trouver $b_N \in L$ avec $\mathrm{v}(b_N - t_m) > E_N$ et $\tilde{f}(b_N, \ldots, \sigma^{e-m}(b_N), s_0, \ldots, s_{N-e-1}) = 0$. On pose $L' := K'(b_N)_\sigma$, et alors $\mathrm{degtr}(L'/K') \leq e-m$, car $\sigma^{e-m}(b_N) \in \mathrm{acl}(K'(b_N, \ldots, \sigma^{e-m-1}(b_N))$ via $\tilde{f}$. De l'autre côté, $\mathrm{v}(b_N - t_m) > E_N$ entraîne que $\mathrm{v}(\sigma^i(b_N)) = \mathrm{v}(t_{m+i})$ pour $i = 0, \ldots, e-m$. Ce sont des éléments $\mathbb{Q}$-indépendants au-dessus de $\Gamma_{K'}$, c.à.d. $\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{L'}/\Gamma_{K'}) \geq e-m$. Donc, L'/K' est totalement ramifiée avec $\mathrm{degtr}(L'/K') = e-m$. Par maximalité de K', on a $L' = K'$ et donc $e = m$.

Cas 2 : car$(L) = p > 0$. On procède comme avant, en maximisant m et puis en minimisant $\deg_{X_m}(f)$. La seule différence c'est que nous regardons tous les $\tau = \sigma \circ \Phi_p^{-l}$ à la fois, exactement comme dans la preuve de 5.10. Supposons donc qu'on ait trouvé $\tilde{f}(X_m) \in \mathcal{O}_L[X_m]_\tau$, minimal dans le sens qu'on vient de présenter. Il suffit de montrer que $\tilde{f}_1 \not\equiv 0$. Sinon, on pourrait écrire

$$f(X_m) = \sum_{i=0}^{k} X_m^{ip} G_i(X_m^\tau, \ldots, X_m^{\tau^{e-m}}) = G(X_m^p, X_m^\tau, \ldots, X_m^{\tau^{e-m}}),$$

et pour $\tau' := \tau \circ \Phi_p^{-1}$, ce dernier serait égal à $G(X_m^p, X_m^{p\tau'}, \ldots, X_m^{p^{e-m}\tau'^{e-m}}) = H^p$ pour un H de degré en X_m plus petit que f, une contradiction. □

Preuve de Proposition 5.13. Par le lemme de Hensel transformel, K est transformellement henselien. On peut donc supposer que $F = K_{\mathrm{res}}$, et de la même manière on va considérer L_{res} comme sous-corps de L. D'abord, on pose $K_1 := (KL_{\mathrm{res}})^a$. C'est une extension totalement inerte de K.

On est dans la situation du Lemme 5.19 (pour $F \subseteq K_1 \subseteq L$). Nous posons $K_2 := K'$, où K' est un corps fourni par 5.19, et la preuve est terminée. □

References

[Co65] Richard M. Cohn, *Difference Algebra*, Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydney 1965.

[Hr04] E. Hrushovski, *The Elementary Theory of the Frobenius Automorphisms*, Preprint 2004.

[HHM03a] D. Haskell; E. Hrushovski; D. Macpherson, *Definable Sets in Algebraically Closed Valued Fields. Part I: Elimination of Imaginaries*, Preprint 2003.

[HHM03b] D. Haskell; E. Hrushovski; D. Macpherson, *Definable Sets in Algebraically Closed Valued Fields. Part II: Stable Domination and Independence*, Preprint 2003.

[Ka42] I. Kaplansky, *Maximal Fields with Valuations I*, Duke Math. J. **9** (1942), 303–321.

[La05] Y. Laszlo, *Notes informelles de l'exposé mardi 12 avril.*

[Ri64] P. Ribenboim, *Théorie des Valuations*, Les presses de l'université de Montréal, Montréal 1964.

[Ro56] A. Robinson, *Complete Theories*, North-Holland, Amsterdam 1956.