Yves Laszlo

NOTES INFORMELLES

Yves Laszlo
École Poytechnique, CMLS, 91128 Palaiseau Cedex, France.
E-mail : `laszlo@math.polytechnique.fr`

NOTES INFORMELLES

Yves Laszlo

Avertissement

Ces notes ne sont qu'une présentation du début du papier de Hrushovski [**3**] étudié au groupe de travail « Géométrie du Frobenius et équations aux différences ». Elles sont à usage restreint, sans aucune originalité, sans doute encore pleines de coquilles, voire d'erreurs dues à l'ignorance de l'auteur et non à Hrushovski...

TABLE DES MATIÈRES

EXPOSÉ 1

INTRODUCTION

Le principal résultat du papier de Hrushovski est le résultat suivant.

Soit k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathbf{A}^n$ un fermé irréductible de dimension d, $\bar{\mathrm{X}}$ son adhérence dans $\mathbf{P}^n$. Pour toute puissance entière q de p, on note Γ_q le graphe du Frobenius $\Phi_q : \mathrm{X} \to \mathrm{X}(q)$ où $\mathrm{X}(q)$ est le tordu de Frobenius par le Frobenius $t \mapsto t^q$ de k. En termes d'équations, $\mathrm{X}(q)$ peut-être vu comme le fermé de $\mathbf{A}^n$ dont les équations sont déduites de celles de X par élévation à la puissance q de leurs coefficients. Le Frobenius Φ_q est alors la restriction du Frobenius de $\mathbf{A}^n$, défini par $x_i \mapsto x_i^q$ où x_i sont des coordonnées linéaires de $\mathbf{A}^n$.

Théorème 1.0.1. — *Pour tout n, δ, il existe une constante $\mathrm{C}(n, \delta)$ vérifiant la propriété suivante : si $\mathrm{S} \hookrightarrow \mathrm{X} \times \mathrm{X}(q)$ fermé irréductible d'adhérence $\bar{\mathrm{S}}$ dans $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$, est telle que une des projections sur $\mathrm{X}, \mathrm{X}(q)$ est dominante l'autre quasi-finie, alors si $q > c = \mathrm{C}(n, \deg(\bar{\mathrm{X}}) + \deg(\bar{\mathrm{S}}))$, on a*

$$\mathrm{card}(\mathrm{S} \cap \Gamma_q) = q^d + e$$

avec $|e| < cq^{d-1/2}$ si $q > c$.

Notons qu'en particulier, si $q >> 0$, l'intersection en question est finie, mais surtout, est non vide.

Le cas particulièrement intéressant est celui où toute la situation est déjà définie sur un corps fini $\mathbf{F}_q$. On a alors $\mathrm{X}(q^{\mathrm{N}}) = \mathrm{X}$ (simplement car les équations de X sont à coefficients dans $\mathbf{F}_q$), ce pour tout N. On peut alors alors appliquer l'énoncé précédent à X, S fixés définis sur $\mathbf{F}_q$ pour la puissance q^{N} de p avec N tendant vers l'infini, en prenant $k = \bar{\mathbf{F}}_q$. Le théorème affirme, sous les hypothèses de domination et de finitude des projections $\mathrm{S} \to \mathrm{X}$, que S coupe le graphe de Φ_q en un nombre contrôlé, et surtout non vide, de points dès que N est assez grand, ce sans hypothèse de singularité ni de propreté.

Appliqué à un graphe d'un endomorphisme dominant, et en fait même d'un morphisme **rationnel** dominant, de X irréductible sur $\mathbf{F}_p$, on déduit alors facilement ([**2**]) que l'ensemble des points périodiques de f est dense.

Appliqué à X l'espace de modules de fibrés semi-stables de rang r et de pente critique sur une courbe projective lisse C de genre > 1, on obtient que l'ensemble des représentations continues $\pi_1(\mathrm{C}) \to \mathbf{GL}_r(\bar{\mathbf{F}}_p)$ est dense dans X, ce qui était certes conjecturé, mais absolument pas connu en général. On peut même prouver le même résultat pour C une courbe sur un corps algébriquement clos de caractéristique > 0 quelconque en utilisant le résultat précédent et le théorème de spécialisation du groupe fondamental de Grothendieck.

Dans un autre genre, par spécialisation, on obtient dans *loc. cit.* que les points périodiques d'un endomorphisme d'une variété projective sur un corps algébriquement clos arbitraire sont denses dès lors qu'il est « de degré 1 » au sens qu'il existe L ample tel que $f^*\mathrm{L} \otimes \mathrm{L}^{-1}$ est ample retrouvant et développant largement des résultats connus sur la dynamique des applications rationnelles des projectifs complexes (dans ce cas, on connaît des résultats plus précis sur les propriétés pour la topologie euclidienne de l'ensemble des points fixes).

EXPOSÉ 2

2.1. Questions de points fixes

Soit σ un endomorphisme d'un anneau R. Cet endomorphisme agit sur Spec(R), et plus généralement sur les idéaux de R par image inverse.

Soit

$$i : \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathrm{R}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$$

l'inclusion de l'**ensemble** des points fixes, muni de la topologie induite par la topologie de Zariski de Spec(R), de sorte que i est continue. On notera $\mathrm{V}_{\sigma}(\mathrm{I}), \mathrm{D}_{\sigma}(r)$ les traces de $\mathrm{V}(\mathrm{I}), \mathrm{D}(r)$ sur $\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathrm{R})$.

On note encore $\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathrm{R})$ l'espace localement annelé

$$\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathrm{R}) \overset{abus}{=} (\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathrm{R}), i^{-1}\mathcal{O}).$$

Exemple 2.1.1. — *Définissons déjà l'anneau* $\mathrm{R}_{\sigma}[x_1, \cdots, x_n]$ *des σ-polynômes. En tant que* R-*algèbre, c'est l'algèbre de polynômes* $\mathrm{R}[x_{i,j}]_{1\le i\le n, j\ge 0}$. *On définit σ comme l'unique morphisme d'anneaux prolongeant σ sur* R *qui envoie $x_{i,j}$ sur $x_{i,j+1}$. Il a la propriété universelle qu'on pense. On notera $\mathbf{A}^n_{\mathrm{R},\sigma}$, voir $\mathbf{A}^n_{\sigma}$ l'espace affine aux différences* $\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathrm{R}_{\sigma}[x_1, \cdots, x_n])$.

On rencontrera en particulier deux sortes d'idéaux : les idéaux fixes, *ie* tels que $\sigma^{-1}(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$ (transformal ideal en anglais) et les idéaux globalement invariant par σ, *ie* tels que $\mathrm{I} \subset \sigma^{-1}(\mathrm{I})$, qu'on appellera σ-idéal, ou idéal aux différences. Géométriquement, un σ-idéal premier de R est une sous-variété intègre globalement invariante par l'endomorphisme de Spec(R) défini par σ, tandis qu'un point fixe est une sous-variété telle que σ induise par restriction un endomorphisme *dominant*.

Exemple 2.1.2. — *Attention, ce n'est pas parce que σ agit librement sur* Spec(R) *que* $\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathrm{R})$ *est non vide (penser à une translation générique sur une droite. Précisément, si* $\mathrm{R} = \mathbf{Q}[\mathrm{T}]$ *et* $\sigma(\mathrm{T}) = \mathrm{T}+1$, *on a* $\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathrm{R}) = \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathbf{Q}(\mathrm{T}))$, *ie l'espace topologique réduit au point générique de la droite $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}$ muni du faisceau* $\mathbf{Q}(\mathrm{T}) = \mathrm{Frac}(\mathbf{Q}[\mathrm{T}])$ *avec son action de σ. En particulier, le morphisme tautologique*

$$\mathrm{R} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathrm{R}), \mathcal{O})$$

n'est pas bijectif. Mais ce n'est pas parce que R *est non nul que* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ *est non vide. Par exemple, c'est le cas si* σ *est l'involution non triviale de* $\mathrm{R} = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$.

On va se restreindre à une classe d'anneaux où ce phénomène ne se produit pas.

2.2. Anneaux bien mélangés

Définition 2.2.1. — *Un idéal* I *de* R *est dit bien mélangé, si* $ab \in \mathrm{I}$ *entraîne* $ab^\sigma \in \mathrm{I}$*. On dit que* R *est bien mélangé si l'idéal nul est bien mélangé.*

Un anneau de caractéristique $p > 0$ muni du Frobenius est bien mélangé !

Exemple 2.2.2. — *N'importe quel idéal premier stable par* σ *est bien mélangé. En particulier, si* R *est intègre,* (R, σ) *est bien mélangé. En revanche,* $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ *muni de l'involution non triviale* σ *ne l'est pas :* $(0,1)(1,0) = (0,0)$ *mais* $(0,1)(1,0)^\sigma = (0,1)$*. On a ici* $\mathrm{R}_w = 0$ *et* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R}) = \varnothing$*.*

Bien entendu, si I est bien mélangé, σ laisse stable I et fait de R/I un anneau bien mélangé. L'intersection d'idéaux bien mélangés est bien mélangée. Comme R est un idéal bien mélangé, il existe un plus petit idéal 0_w bien mélangé et donc un plus grand quotient bien mélangé $\mathrm{R}_w = \mathrm{R}/0_w$ de R, qui a la propriété universelle qu'on pense.

L'immersion fermée $\mathrm{Spec}(\mathrm{R}_w) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ induit une application continue injective et fermée

$$i : \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R}_w) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R}).$$

Comme $\mathfrak{p}$ fixe par σ est bien mélangé, il contient 0_w de sorte que i est un homéomorphisme.

Remarque 2.2.3. — *A priori, si* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$*, on a deux corps résiduels possibles, comme point de* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ *ou* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R}_w)$*. Mais, comme c'est le corps résiduel de* $\mathfrak{p}$ *vu comme point de* $\mathrm{Spec}(\mathrm{R}_w)$ *et* $\mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ *respectivement (**??**), c'est le même ! On le note* $k(\mathfrak{p})$*. Comme d'habitude, on pense à une section globale* r *de* $\mathcal{O}$ *comme à une fonction régulière, sa « valeur »* $r(\mathfrak{p})$ *étant son image dans* $k(\mathfrak{p})$*. Si* r *provient de* R*, on a simplement* $r(\mathfrak{p}) = (r \bmod \mathfrak{p}) \in k(\mathfrak{p}) = \mathrm{R}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\mathrm{R}_\mathfrak{p}$.

Il ressort de ces préliminaires que, du point de vue topologique au moins, on peut se restreindre aux anneaux bien mélangés.

Proposition 2.2.4. — *Supposons* R *bien mélangé. Alors le morphisme canonique*

$$\mathrm{R} \to \bar{\mathrm{R}} := \mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R}), \mathcal{O})$$

est injectif. En particulier, si R *est non nul,* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ *est non vide.*

2.3. Clôture parfaite

La notion d'idéal réduit dans le cas usuel se traduit de la manière suivante :

Définition 2.3.1. — *Un idéal* I *de* R *est parfait si* $x.x^\sigma \in \mathrm{I}$ *entraîne* x et $x^\sigma \in \mathrm{I}$.

$\mathfrak{p}$ premier est dans $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ si et seulement si il est parfait.

L'intersection d'idéaux parfaits est parfaite. Comme R est parfait, pour toute partie E de R, il existe donc un plus petit idéal parfait, noté $\{\mathrm{E}\}$, qui contient E.

Si I est bien mélangé, on a simplement (exercice)

$$\{\mathrm{I}\} = \{r \in \mathrm{R} \text{ tels que } \exists \nu \in \mathbf{N}[\sigma], r^\nu \in \mathrm{I}.\}. \tag{3.a}$$

Dans le cas général, c'est un peu plus compliqué.

On peut, si on veut, décrire la clôture parfaite d'un idéal I de la manière suivante. Si P est une partie de R, on note [P] le plus petit σ-idéal contenant P : c'est l'idéal engendré par les $p^i, p \in \mathrm{P}$ et $i \in \mathbf{N}[\sigma]$. On pose alors $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}$ et

$$\mathrm{I}_{n+1} = \{r \in \mathrm{R} \text{ tels que } \exists \nu \in \mathbf{N}[\sigma], r^\nu \in [\mathrm{I}_n].\}.$$

Bien entendu $\mathrm{I}_n \subset \{\mathrm{I}\}$ pour tout n. Par définition, si $x\sigma(x) \in \mathrm{I}_n$, on a x et $\sigma(x)$ éléments de I_{n+1} de sorte qu'on obtient

$$\{\mathrm{I}\} = \cup \mathrm{I}_n.$$

Par ailleurs, si I est un idéal de R, on a $\mathrm{V}_\sigma(\mathrm{I}) = \mathrm{V}_\sigma(\{\mathrm{I}\})$, qu'on notera $\mathrm{V}\{\mathrm{I}\}$.

En effet, supposons I contenu dans $\mathfrak{p}$ fixé par σ. Comme $\mathfrak{p}$ est parfait, il contient $\{\mathrm{I}\}$, intersection des parfaits contenant I.

Ceci permet de prouver la proposition suivante :

Proposition 2.3.2. — *On a* $\mathrm{V}\{\mathrm{I}\} \subset \mathrm{V}\{\mathrm{J}\}$ *si et seulement si* $\{\mathrm{J}\} \subset \{\mathrm{I}\}$*.En particulier, si* R *est bien mélangé,* r *nulle sur* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ *si et seulement si* r *est* σ*-nilpotent.*

On en déduit le résultat suivant

Corollaire 2.3.3. — *L'espace topologique* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ *est quasi-compact.*

En résumé, la topologie de $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ peut-être définie à partir d'idéaux parfaits et la correspondance $\mathrm{I} \mapsto \mathrm{V}\{\mathrm{I}\}$ identifie les idéaux parfaits aux fermés de $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$. Si $(\mathrm{F}, \sigma_\mathrm{F})$ est un R, σ-module, on note simplement $\tilde{\mathrm{F}}$ le faisceau qu'on aurait dû noter $i^{-1}\tilde{\mathrm{F}}$, muni de son morphisme induit par σ_F, qui est compatible avec σ. Le foncteur $\mathrm{F} \mapsto \tilde{\mathrm{F}}$ est exact.

2.4. Les σchémas

Modèle local : $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ avec (R, σ) un anneau bien mélangé muni de σ induit $\sigma \in \mathrm{End}(\mathrm{X})$ (cf. 2.1). Comme σ est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent, on le verra aussi comme un morphisme (dit $\mathcal{F}$robenius) de faisceaux d'anneaux locaux $\sigma : \mathcal{O}_\mathrm{X} \to \mathcal{O}_\mathrm{X}$.

Le couple (X, σ) est le modèle local d'un σchéma.

Définition 2.4.1. — *Un* σchéma *est un couples* (X, σ) *où* X *est un espace localement annelé et* $\sigma \in \mathrm{End}(\mathcal{O}_\mathrm{X})$ *qui est localement isomorphe au modèle local. Un morphisme de* σchémas *est un morphisme d'espaces localement annelés compatible aux* $\mathcal{F}$*robenius.*

Exemple 2.4.2. — *Donnons quelques exemples.*

- *Si* X *est un schéma,* (X, Id) *est un* σchéma *: la catégorie des schémas est une sous-catégorie pleine de la catégorie des* σchémas.
- *Soit* X *de caractéristique* $p > 0$ *et* σ *une puissance du Frobenius (absolu). Alors* (X, σ) *est un* σchéma *bien mélangé.*

On définit les S-σchémas, les S-points pour S un σchéma comme on pense. Mais attention dire que $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ est un $\mathrm{Spec}^\sigma(k)$-σchéma (k corps différentiel) est **moins fort** que dire R est une k-algèbre différentielle (cf. 2.1.2). Une telle structure sur un σchéma X signifie simplement que tous les corps résiduels sont des k-algèbres et que les morphismes de spécialisation sont des des morphismes d'algèbres.

Définition 2.4.3. — *Soit* $\mathrm{D} = (\mathrm{D}, \sigma)$ *un anneau différentiel.*

- *Une* D*-algèbre aux différences est de type fini (ou de type* σ*-fini) si c'est un quotient équivariant d'une algèbre de polynômes* $\mathrm{D}_\sigma[x_1, \cdots, x_n]$.
- *Un* D-σchéma X *est un* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{D})$-$\sigma$chéma *localement de la forme* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ *avec* R *une* $\mathrm{D}-\sigma$*-algèbre, la projection* $\mathrm{X} \to \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{D})$ *étant induite par la structure de* D*-algèbre de* R.
- *Un* D-σchéma*est dit de type fini (ou de type fini* σ*-fini) s'il est réunion finie d'ouverts affines comme plus haut avec* R *de type fini sur* D.

Remarque 2.4.4. — *Soit* $\mathrm{R} \twoheadrightarrow \mathrm{R}_w$ *le quotient bien mélangé maximal et* $\mathrm{K} = (\mathrm{K}, \sigma)$ *un corps différentiel. Alors, un morphisme* m *de* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{K})$ *dans* $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R}_w)$ *est défini par l'image du point de* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{K})$*, autrement dit un point* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$*, ainsi que par un* σ*-morphisme local* $\mathrm{R}_{w,\mathfrak{p}} \to \mathrm{K}$*, autrement dit une inclusion* $k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \mathrm{K}$ *qui est* σ*-équivariante. Si* R, K *sont de plus des* k*-algèbres différentielles, et qu'on voit* X *comme un* k*-schéma, un* K*-point de* X *est un* k*-morphisme* σ*-équivariant* $k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \mathrm{K}$.

2.5. Questions de quasi-cohérence

On souhaite définir la notion de sous-σchéma fermé.

Définition 2.5.1. — *Un faisceau quasi-cohérent sur* X *est un couple* $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$ *où* $\mathcal{F}$ *est quasi-cohérent (sur l'espace annelé) et* $\sigma_{\mathcal{F}}$ *est compatible à* $\sigma_{\mathcal{O}}$*. Un sous-*σchéma *fermé de* X *est un sous-faisceau quasi-cohérent de* $(\mathcal{O}, \sigma)$.

Exemple 2.5.2. — *Si* R *un anneau différentiel et* I *un idéal (pas forcément invariant. Alors,* I_w*, le plus-petit idéal bien mélangé de* R *contenant* I *définit un sous-schéma fermé encore noté* $\mathrm{V}_\sigma(\mathrm{I})$*, dit sous-schéma d'équations* I *ou défini par* I*. Il est supporté par* $\mathrm{V}\{\mathrm{I}\}$.

Proposition 2.5.3. — *Soit* $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$ *un* $(\mathcal{O}, \sigma)$*-module sur* $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$*et soit* $r \in \mathrm{R}$*. Alors, la flèche* $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{F})[1/r] \to \mathrm{H}^0(\mathrm{D}_\sigma(r), \mathcal{F})$ *(*σ*-localisation) est bijective si et seulement si* $\mathcal{F}$ *est quasi-cohérent.*

Corollaire 2.5.4. — *La catégorie des quasi-cohérents est abélienne.*

2.6. σchémas affines

Définition 2.6.1. — *Un* σchéma *affine est un* σchéma *isomorphe au modèle local* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ *avec* R *bien mélangé.*

Si $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ avec R pas forcément mélangé, on récupère un morphisme d'anneaux

$$i^{-1} : \mathrm{R} = \mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}(\mathrm{R}), \mathcal{O}) \to \bar{\mathrm{R}} = \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{O})$$

compatibles aux $\mathcal{F}$robenius, injectif si R est bien mélangé (2.2.4). Il induit un morphisme

$$\iota : \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{O})) \to \mathrm{X}.$$

Le morphisme ι a une section canonique qui envoie $\mathfrak{p} \in \mathrm{X}$ sur

$$\mathfrak{p}' = \{f \in \bar{\mathrm{R}} \text{ tels que } f(\mathfrak{p}) = 0 \in k(\mathfrak{p})\},$$

le morphisme au niveau des localisés envoyant simplement $f \in \bar{\mathrm{R}}_{\mathfrak{p}'}$ sur $f_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \mathrm{R}_{\mathfrak{p}}$. En particulier, ι est toujours surjectif.

Théorème 2.6.2. — *Si* R *est bien mélangé, alors* ι *est un isomorphisme.*

Corollaire 2.6.3. — *Le foncteur « spectre » de la catégorie (opposée) des anneaux mélangés dans les* σchémas*affines a une section, qui en est un adjoint à gauche, à savoir*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{R}, \mathrm{H}^0(\mathrm{X})).$$

Par ailleurs, si $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ affine, alors $\bar{\mathrm{F}} = \mathrm{H}^0(\mathcal{F})$ est un $\bar{\mathrm{R}}$-module dont le faisceau associé $\tilde{\mathrm{F}}$ coïncide avec $\mathcal{F}$.

Remarque 2.6.4. — *En particulier, un sous-*σchéma *fermé* Z *d'un affine* X *défini par un* σ*-idéal quasi-cohérent* $\mathcal{I}$ *de* $\mathcal{O}$ *est défini par le* σ*-idéal*

$$\bar{\mathrm{I}} = \mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R}), \mathcal{I}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{O}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Z}, \mathcal{O})$$

de $\bar{\mathrm{R}}$*, et même de* R *si on veut (prendre* $\mathrm{I} = \bar{\mathrm{I}} \cap \mathrm{R}$*). En effet, notons d'abord que les faisceaux associés à* $\bar{\mathrm{I}}$ *vu comme* R *ou* $\bar{\mathrm{R}}$*-modules coïncident. Mais le conoyau* $\bar{\mathrm{I}}/\mathrm{I}$ *est un* R*-sous-module de* $\bar{\mathrm{R}}/\mathrm{R}$*. Comme* $\widetilde{\bar{\mathrm{R}}/\mathrm{R}}$ *est nul, il en est de même de* $\widetilde{\bar{\mathrm{I}}/\mathrm{I}}$ *de sorte que* $\tilde{\mathrm{I}} = \tilde{\bar{\mathrm{I}}}$*.*

Mais attention, le foncteur section globale n'est pas pour autant une équivalence de catégorie et n'est pas exacte en général comme on va le voir bientôt.

EXPOSÉ 3

3.1. Produit

La catégorie des σchémas a des produits, autrement dit étant donnés deux S-σchémas

$$\mathrm{X}, \mathrm{Y} \to \mathrm{S},$$

il existe un diagramme cartésien de σchémas

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Y} \arrow[r] & \mathrm{S} \end{tikzcd} .$$

Le foncteur produit est de nature locale ce qui permet de se ramener au cas où $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{S}$ sont affines, σ-spectres d'anneaux $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ respectivement. Un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Y} \arrow[r] & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

de σchémas induit alors un diagramme commutatif équivariant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^0(\mathrm{Z}, \mathcal{O}) & \bar{\mathrm{A}} \arrow[l] \\ \bar{\mathrm{B}} \arrow[u] & \bar{\mathrm{C}} \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

et donc induit un morphisme équivariant

$$\bar{\mathrm{A}} \otimes_{\bar{\mathrm{C}}} \bar{\mathrm{B}} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Z}, \mathcal{O})$$

qui passe au quotient

$$(\bar{\mathrm{A}} \otimes_{\bar{\mathrm{C}}} \bar{\mathrm{B}})_w \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Z}, \mathcal{O})$$

car $\mathrm{H}^0(\mathrm{Z}, \mathcal{O})$ est bien mélangé. Inversement, un tel morphisme définit bien un diagramme comme plus haut () et les deux constructions sont inverses l'une de l'autre. Autrement dit, on a

$$\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} = \mathrm{Spec}^{\sigma}(\bar{\mathrm{A}} \otimes_{\bar{\mathrm{C}}} \bar{\mathrm{B}}).$$

On définit alors les fibres σchématiques comme on pense.

3.2. Questions de finitude

(Re)définissons déjà l'anneau $R_\sigma[x_1, \cdots, x_n]$ des σ-polynômes. En tant que R-algèbre, c'est l'algèbre de polynômes $R[x_{i,j}]_{1\leq i\leq n, j\geq 0}$. On définit σ comme l'unique morphisme d'anneaux prolongeant σ sur R qui envoie $x_{i,j}$ sur $x_{i,j+1}$. Il a la propriété universelle qu'on pense. D'où la notion de R-algèbre (on devrait dire (R, σ)-algèbre) de type σ-fini. Ces algèbres ont une propriété de Noetherianité topologique remarquable.

Définition 3.2.1. — *On dit que* (R, σ) *est de Ritt si toute suite croissante d'idéaux parfaits est stationnaire, autrement dit si* $\mathrm{Spec}^\sigma(R)$ *est (topologiquement) noethérien.*

On s'intéressera avant tout aux σchémas de type σ-fini sur un anneau de Ritt D (σ est implicite) :

Définition 3.2.2. — *Un* D-σchéma X*est de type fini s'il est union finie d'ouverts affines* $\mathrm{Spec}^\sigma(R)$ *avec* R *de type σ-fini sur* D, *la projection* $X \to \mathrm{Spec}^\sigma(D)$ *étant induite par la structure de* D-*algèbre de* R.

L'avantage est que les espaces topologiques sous-jacents sont noethériens (3.2.3).

Théorème 3.2.3. — *Tout anneau différentiel de type σ-fini sur un anneau de Ritt est de Ritt.*

Preuve : [**1**], corollary page 93.■

Attention, même $\mathbf{Q}_\sigma[x]$ n'est pas σ-noethérien. Par exemple, la suite des $[x\sigma(x), \cdots, x\sigma^n(x)], n \geq 1$ est strictement croissante (exercice).

Corollaire 3.2.4. — *Tout ouvert d'un* K-σchéma X *de type fini est de type fini.*

Preuve : On peut supposer $X = \mathrm{Spec}^\sigma(R)$ avec R de type σ-fini sur K. Le complémentaire de notre ouvert U s'écrit alors $V f_1, \cdots, f_n$ car R est de Ritt. On en déduit que U est isomorphe à $\mathrm{Spec}^\sigma(R[X_1, \cdots, X_n]_\sigma/[f_1X_1-1, \cdots, f_nX_n])$ qui est bien de type σ-fini. ■

3.3. Le cas des anneaux de Ritt bien mélangés

Commençons par un lemme général.

Lemme 3.3.1. — *Soit* I *parfait. Alors,* $V\{I\}$ *irréductible si et seulement si* $I \in \mathrm{Spec}^\sigma(R)$.

Un espace topologique noethérien ayant un nombre fini de composantes irréductibles, on en tire alors

Corollaire 3.3.2. — *Supposons* R, σ *bien mélangé et de Ritt. On a une décomposition irredondante unique* $V\{I\} = V\{\mathfrak{p}_1\} \cup \cdots V\{\mathfrak{p}_n\}$ *avec* $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}^\sigma(R)$, *autrement dit* $I = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \mathfrak{p}_n$ *si* I *parfait.*

3.4. Équations aux différences et sous-σchémas fermés de $\mathbf{A}^n_\sigma$

Soit k un corps algébriquement clos. Se donner un fermé (réduit) X de $\mathbf{A}^n_k$ c'est se donner le fermé de Zariski $\mathrm{X}(k)$ de $\mathbf{A}^n_k(k) = k^n$ (théorème des zéros). L'énoncé analogue pour les σchémas est faux. Par exemple, si $\mathbf{C}$ est muni de l'identité, le schéma aux différences d'équation $x^\sigma - x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $(\mathbf{C}, \mathrm{Id})$ mais en a dans $\mathbf{C}(\mathrm{T}), \mathrm{T} \mapsto \mathrm{T}+1$. Mais il existe une généralisation de cette notion, celle de **corps générique**.

Définition 3.4.1. — *Un corps différentiel* $\mathrm{K} = (\mathrm{K}, \sigma)$ *est dit générique si si tout système fini d'équations et d'inéquations aux différences qui a une solution dans une extension de* K *a une solution dans* K.

Bien entendu, un corps générique est algébriquement clos et inversif (σ est bijectif). On verra plus bas (3.6) un théorème type Steinitz pour les corps différentiels : tout corps différentiel a un plongement équivariant dans un corps générique.

Le lemme suivant est clair, mais utile.

Lemme 3.4.2. — *Soit* Z *un* K-σchéma *de type fini. Alors, si* K *est générique,* Z(K) *est dense dans* Z.

En particulier, dans ce cas, $z \in \mathrm{Z}$ est fermé si et seulement si $z \in \mathrm{Z}(\mathrm{K})$. En particulier, les applications qui d'une part associent à un idéal parfait de $\mathrm{K}[\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n]_\sigma$ le fermé (pour la σ-topologie de Zariski) des zéros de I dans K^n et qui à un fermé F associe l'idéal des polynômes nuls sur F sont inverses l'une de l'autre.

3.5. σ-enveloppe

On veut faire la chose suivante. Partons de Y un k-schéma affine de type fini usuel d'équation $\mathrm{P}_i(x)$ dans $\mathbf{A}^n_k$ avec k-un corps différentiel. Si K/k est une extension générique, $\mathrm{Y}(\mathrm{K}) \subset \mathrm{K}^n$ détermine $\mathrm{Y}_{\mathrm{réd}}$. Considérons alors le k-σchéma $[\sigma]_k\mathrm{Y}$ d'équations $\mathrm{P}_i(x)$ (défini par le plus grand idéal bien mélangé contenant les P_i) dans $\mathbf{A}^n_\sigma$. D'après ce qui précède, sa clôture parfaite est déterminée par $[\sigma]_k\mathrm{Y}(\mathrm{K})$ dans K^n, qui n'est autre que $\mathrm{Y}(\mathrm{K})$ vu dans K^n. Si les K-points de Y vu comme schéma et ceux de $[\sigma]_k\mathrm{Y}$ vu comme σchéma sont les mêmes, on a en revanche beaucoup plus de sous-σchéma de $[\sigma]_k\mathrm{Y}$ que de schémas de Y : c'est l'intérêt de cette construction qu'on va globaliser et généraliser.

En général, soit (D, σ) un anneau (bien mélangé) et Y un D-schéma (ordinaire), qu'on voit comme un D-σchéma avec $\sigma = \mathrm{Id}_\mathrm{Y}$.

Proposition 3.5.1. — *Le foncteur*

$$\begin{cases} \sigma\text{chémas}_{\mathrm{D}} & \to & \text{ensembles} \\ \mathrm{X} & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \end{cases}$$

est représentable (homomorphisme d'espaces localement annelés). On note $[\sigma]_{\mathrm{D}}\mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$ *le morphisme universel (la σ-enveloppe) de* Y.

3.6. Corps génériques

Expliquons comment reconnaître un corps générique, ce qui permettra d'en construire.

Lemme 3.6.1. — (K,σ) *est générique si et seulement les 3 propriétés suivantes sont vérifiées :*

i) σ *est un automorphisme ;*

ii) K *est algébriquement clos ;*

iii) soient U,V *des* K*-variétés, avec* U,V *intègres et des immersions fermées*

$$\mathrm{W} \subsetneq \mathrm{V} \subset \mathrm{U} \times \mathrm{U}_\sigma$$

avec les projections $\mathrm{U}\times\mathrm{U}_\sigma$ *sur* $\mathrm{U},\mathrm{U}_\sigma$ *dominants, alors, il existe* $a \in \mathrm{U}(\mathrm{K})$ *tel que* $(a,\sigma(a)) \in \mathrm{V}(\mathrm{K}) - \mathrm{W}(\mathrm{K})$.

Ceci permet de construire des corps génériques. En effet, il suffit de prouver (procédure standard) qu'étant donné de tels $\mathrm{W},\mathrm{U},\mathrm{V}$ sur un corps différentiel, on peut construire un surcorps différentiel avec un point... Plonger dans un corps algébriquement clos, et inversif est bien connu (voir [**1**])). On peut donc supposer σ isomorphisme de k algébriquement clos Ensuite, le point générique de V définit un point (a,b) de $\mathrm{U}\times\mathrm{U}_\sigma$ à valeurs dans $k(\mathrm{V})$. Par construction, l'isomorphisme semi linéaire de U_σ sur U envoie b sur a et induit un isomorphisme σ-linéaire $k(a) \xrightarrow{\sim} k(b)$ que l'on prolonge facilement à $\overline{k(a,b)}$. Un passage à la limite standard permet de construire K.

3.7. Points de l'enveloppe

Soit K un corps de différence générique et V une variété (pour Hrushovski, ça a l'air d'être géométriquement intègre). Le morphisme $[\sigma]_{\mathrm{K}}\mathrm{V} \to \mathrm{V}$ induit une bijection continue au niveau des K-points. Ce sont aussi les points fermés :

Lemme 3.7.1. — *Les points fermés de* $[\sigma]_{\mathrm{K}}\mathrm{V}$ *sont les points rationnels, et donc s'identifient à* $\mathrm{V}(\mathrm{K})$. *Ils sont denses pour la σ-topologie.*

Notons que ceci prouve comme dans le cas usuel que x est fermé si et seulement si son corps résiduel est K. Ce qu'on voulait. La continuité est claire. Ca n'a pas l'air du tout bicontinu !

Les considérations précédentes donnent un sens à la phrase « Z fermé de $[\sigma]_{\mathrm{K}}\mathrm{V}$ est Zariski dense dans V » (même si K non générique, quitte à prendre une extension générique). Par exemple, dans

$\mathbf{A}^1_\sigma$ de coordonnées $x_i = \sigma^i(x_0)$, le fermé d'équation $x_1x_0 + 1$ est certainement non trivial (l'origine n'est pas dedans) mais est Zariski dense.

3.8. Le cas de l'espace affine sur un corps

Dans le cas de l'espace affine sur un corps, on a « mieux ».

Proposition 3.8.1. — *Soit k un corps différentiel et $\mathbf{A}^n_\sigma = \mathrm{Spec}^\sigma(k\{x_1, \cdots, x_n\})$. Alors, on a un isomorphisme $k\{x_1, \cdots, x_n\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathbf{A}^n_\sigma, \mathcal{O})$.*

Pour autant, H^0 n'est pas exact sur les $\mathcal{F}$aisceaux sur l'espace affine généralisé. Considérons la suite exacte

$$\mathbf{Q}\{x_0\}^{\mathbf{N}} \oplus \mathbf{Q}\{x_0\} \xrightarrow{(x_i + x_{i+1}, x_0^2 - 1)} \mathbf{Q}\{x_0\} \to \mathbf{Q}[x_0]/(x_0^2 - 1) \to 0,$$

autrement dit c'est une présentation de $\mathbf{Q}[x_0]/(x_0^2 - 1)$ muni de l'involution non triviale σ. En passant au faisceau associé sur $\mathbf{A}^1_\sigma$, on récolte

$$\mathcal{O}^{\mathbf{N}} \oplus \mathcal{O} \xrightarrow{(x_i + x_{i+1}, x_0^2 - 1)} \mathcal{O} \to 0,$$

car $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathbf{Q}[x_0]/(x_0^2 - 1)) = \mathrm{Spec}^\sigma(\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}) = \varnothing$, et au niveau des sections globales on a

$$\mathbf{Q}\{x_0\}^{\mathbf{N}} \oplus \mathbf{Q}\{x_0\} \xrightarrow{(x_i + x_{i+1}, x_0^2 - 1)} \mathbf{Q}\{x_0\} \to 0$$

qui donc n'est pas exacte.

3.9. Dimension

Soit k un corps différentiel. Si K est une σ extension de K, le degré de transcendance différentiel de K, noté $\sigma\mathrm{degtr}_k(\mathrm{K})$, est la borne supérieure des $n \geq 0$ tels qu'on ait un plongement équivariant

$$k[x_1, \cdots, x_n]_\sigma \hookrightarrow \mathrm{K}.$$

Définition 3.9.1. — *Soit* X *un* $\mathrm{Spec}^\sigma(k)$-σchéma,R *une k-algèbre aux différences.*
- *La σ-dimension de* X *est* $\dim_\sigma(\mathrm{X}) = \sup_{x \in \mathrm{X}} \sigma\mathrm{degtr}_k(k(x))$.
- *La dimension réduite de* X *est* $\mathrm{dimred}(\mathrm{X}) = \sup_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{degtr}_k(k(x))$.
- *La dimension totale de* R *est* $\mathrm{dimtot}(\mathrm{R}) = \sup_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{R}) \\ \sigma(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}}} \mathrm{degtr}_k(k(\mathfrak{p}))$.

Bien entendu, si $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$, on a

$$\dim_\sigma(\mathrm{X}) = \sup_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{R}) \\ \sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}}} \sigma\mathrm{degtr}_k(k(\mathfrak{p})), \ \mathrm{dimred}(\mathrm{X}) = \sup_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{R}) \\ \sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}}} \mathrm{degtr}_k(k(\mathfrak{p}))$$

et

$$\mathrm{dimtot}(\mathrm{R}) = \sup_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{R}) \\ \mathfrak{p} \subset \sigma^{-1}(\mathfrak{p})}} \mathrm{degtr}_k(k(\mathfrak{p}))$$

de sorte qu'on a

$$\dim_\sigma(\mathrm{X}) \leq \mathrm{dimred}(\mathrm{X}) \leq \mathrm{dimtot}(\mathrm{R}).$$

Il n'est pas clair a priori qu'il existe une bonne notion de dimension totale d'un σchéma, mais c'est bien le cas (communication privée de Hrushovski).

Lemme 3.9.2. — *Soit* R *une k-algèbre. Alors, on a*

$$\mathrm{dimtot}(\mathrm{R}) = \sup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})} \mathrm{dimtot}(\mathrm{R}_\mathfrak{p}).$$

Preuve : on a bien entendu l'inégalité

$$\mathrm{dimtot}(\mathrm{R}) \geq \sup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})} \mathrm{dimtot}(\mathrm{R}_\mathfrak{p}).$$

Inversement, soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ tel que $\sigma(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$. La clôture parfaite $\bar{\mathfrak{p}} = \cup_{m>0}\sigma^{-m}(\mathfrak{p})$ contient $\mathfrak{p}$ de sorte que $\mathfrak{p}$ est un σ-idéal de $\mathrm{Spec}(\mathrm{R}_{\bar{\mathfrak{p}}})$. D'où l'inégalité en sens inverse.■

On pose alors la définition

Définition 3.9.3. — *La dimension totale d'un k-σ*chéma X *est définie par*

$$\mathrm{dimtot}(\mathrm{X}) = \sup_{x\in \mathrm{X}} \mathrm{dimtot}(\mathcal{O}_x).$$

Proposition 3.9.4. — *Si* $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ *avec* R *une k-algèbre (bien mélangée), on a* $\mathrm{dimtot}(\mathrm{X}) = \mathrm{dimtot}(\mathrm{R})$. *On a en général* $\mathrm{dimtot}(\mathrm{X}) = \sup_{\mathrm{U}} \mathrm{dimtot}\, \mathrm{H}^0(\mathrm{U}, \mathcal{O})$.

Preuve : c'est le lemme 3.9.2 pour le premier point et 2.6.2 pour le second.■

Bien entendu, on pourrait définir les dimensions totale, réduite et σ-dimension d'une k-algèbre différentielle arbitraire, mais ce sont les mêmes que celles de son plus grand quotient bien mélangé. On se restreindra à celles-ci.

De façon assez surprenante, on a le résultat suivant :

Proposition 3.9.5. — *Soit* R *une k-algèbre de type σ-fini aux différences bien mélangée. Alors, on a*

$$\mathrm{dimtot}(\mathrm{R}) = \sup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(\mathrm{R})} \mathrm{degtr}_k(k(\mathfrak{p})).$$

Remarque 3.9.6. — *La preuve donne en fait que, sous les conditions de la proposition, la dimension totale est aussi la dimension maximale d'une sous-k-algèbre de polynômes de* R.

La σ-dimension se caractérise de manière analogue.

Proposition 3.9.7. — *Soit* R *une k-algèbre bien mélangée de type σ-fini. Alors,* $\dim_\sigma(\mathrm{R})$ *est la borne supérieure (en fait le max) des n tel qu'on ait un plongement équivariant* $k[\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n]_\sigma \hookrightarrow \mathrm{R}$.

Le cas de la σ-dimension nulle est crucial. Ceci impose presque que l'algèbre est de type fini.

Théorème 3.9.8. — *Soit* X *un* k-σchéma *de type σ-fini. Alors,les trois conditions sont équivalentes*

- $\mathrm{dimtot}(\mathrm{X}) < \infty$ *;*
- $\mathrm{dimred}(\mathrm{X}) < \infty$ *;*
- $\dim_\sigma(\mathrm{X}) = 0$.

Remarque 3.9.9. — *L'exemple suivant décevra le lecteur par trop optimiste. Soit* R *l'anneau intègre* $k[\mathrm{T}][\mathrm{T}^{1/2^n}, n > 0]$ *et* σ *l'endomorphisme de* R *caractérisé par* $\sigma(\mathrm{T}^{1/2^n}) = \mathrm{T}^{1/2^{n+1}}, n \geq 0$. *Alors,* R *est de type σ-fini(sigma-engendré par* T*), bien mélangé -il est intègre- et* $\dim_\sigma \mathrm{R} = 0$ *(en effet, toute sous-algèbre de type fini est contenue dans une algèbre* $k[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{1/2^n}]$ *pour n assez grand, qui est de dimension* 1 *donc la dimension totale est* 1*). Mais* R *n'est pas de type fini, comme k-algèbre.*

3.10. Inégalités

Commençons par une remarque.

Lemme 3.10.1. — *Soit* R *une k-algèbre (bien mélangée) de type σ-fini et* $\mathrm{V}\{\mathfrak{p}_i\}$ *les composantes de* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$. *Alors,* $\mathrm{dimtot}(\mathrm{R}) = \sup_i \mathrm{dimtot}(\mathrm{R}/\mathfrak{p}_i)$.

Soit W localement fermé dans X un σchémade type fini sur k, corps différentiel. On note $\bar{\mathrm{W}}$ son adhérence. On peut, si on veut, supposer que les idéaux de définition sont parfaits. Comme X est noethérien (topologiquement), il en est de même de W de sorte que W est ouvert dans son adhérence $\bar{\mathrm{W}}$ qui est de type fini sur k comme X. On note Z le fermé complémentaire $\bar{\mathrm{W}} - \mathrm{W}$. Notons qu'aucun point générique w_i de $\bar{\mathrm{W}}$ n'est dans Z. En effet, comme W est dense dans $\bar{\mathrm{W}}$, il rencontre l'ouvert non vide $\mathrm{U}_i = \bar{\mathrm{W}} - \cup_{i \neq j} \bar{w}_j$. Comme $w_i \in \mathrm{U}$ et que W est ouvert, $w_i \in \mathrm{W}$ et donc $w_i \notin \mathrm{Z}$. On a bien entendu par définition

$$\dim_\sigma(\mathrm{Z}) \leq \dim_\sigma(\bar{\mathrm{W}}) = \dim_\sigma(\mathrm{W}) = \sup_i \sigma\mathrm{degtr}_k\, k(w_i). \tag{10.a}$$

On ne peut espérer une inégalité stricte $\dim_\sigma(\mathrm{Z}) < \dim_\sigma(\mathrm{W})$ (penser au cas où W est une variété usuelle de dimension > 0).

En revanche, dans le cas des variétés usuelles, on a $\dim(\mathrm{Z}) < \dim(\mathrm{W})$. On a un résultat analogue en général, où bien entendu la dimension est remplacée par la dimension totale. Comme toutes ces questions sont locales, on se place dans la situation suivante : $\bar{\mathrm{W}} = \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})$ avec R bien mélangé de type σ-fini, **le fermé** Z **est défini par un idéal parfait** I **de** R et $\mathrm{W} = \mathrm{U} - \mathrm{Z}$ est dense dans $\bar{\mathrm{W}}$, autrement dit les points génériques w_i de $\bar{\mathrm{W}}$ ne sont pas dans Z, ce pour tout i.

Proposition 3.10.2. — *Si la dimension totale de* R *est finie, on a* $\mathrm{dimtot}(\mathrm{R}/\mathrm{I}) < \mathrm{dimtot}(\mathrm{R})$.

3.11. Dimensions relatives

Commençons par un lemme.

Lemme 3.11.1. — *Soit* R *une k-algèbre bien mélangée sur un corps différentiel* K *une extension de k. Alors,* $\dim_\sigma(\mathrm{R} \otimes_k \mathrm{K}) \leq \dim_\sigma(\mathrm{R})$ *et* $\mathrm{dimtot}(\mathrm{R} \otimes_k \mathrm{K}) \leq \mathrm{dimtot}(\mathrm{R})$.

On peut alors poser la définition suivante :

Définition 3.11.2. — *La dimension relative totale* $\mathrm{dimtot}(f)$ *(respectivement la σ-dimension relative* $\dim_\sigma(f)$*) d'un morphisme de* σchémas $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *est*

$$\mathrm{dimtot}(f) = \sup_y \mathrm{dimtot}(\mathrm{X}_y) \ \textit{resp.}\ \dim_\sigma(f) = \sup_y \dim_\sigma(\mathrm{X}_y)$$

où le sup *est pris sur l'« ensemble » des points y* : $\mathrm{Spec}^\sigma(k) \to \mathrm{Y}$ *ou des points de* Y *comme on veut.*

Remarque 3.11.3. — *L'inégalité peut être stricte. Par exemple, prenons*

$$k = \mathbf{Q}, \mathrm{K} = (\mathbf{Q}[i], \text{conjugaison}) \mathrm{R} = (\mathbf{Q}[i], \mathrm{Id}).$$

Alors, $\mathrm{R} \otimes_k \mathrm{K} = \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$ *muni de l'involution non triviale, qui est sans point fixe sur le spectre : le produit est vide de σ-dimension $-\infty$. En revanche, si d'aventure* $\mathrm{R} \otimes_k \mathrm{K}$ *est de plus bien mélangé, il est facile de voir qu'on a égalité dans le lemme précédent.*

EXPOSÉ 4

4.1. σ-degré des sous-variétés : le système-projectif

Soit V un k-schéma de type fini et X un sous-σchéma fermé de $[\sigma]_k\mathrm{V}$. Les morphismes σ^n-linéaires

$$\sigma^n : [\sigma]_k\mathrm{V} \to \sigma_k[\mathrm{V}]$$

définissent un morphisme σ^n-linéaire $\mathrm{X} \to [\sigma]_k\mathrm{V} \to \mathrm{V}$ et donc un k-morphisme $\pi_n : \mathrm{X} \to \mathrm{V}^{\sigma^n}$. On en déduit un morphisme

$$\pi_n : \mathrm{X} \to \mathrm{V} \times \cdots \times \mathrm{V}^{\sigma^n} := \mathrm{V}[n].$$

On définit alors l'image schématique de π_n comme le sous-schéma fermé

$$\mathrm{X}[n] \hookrightarrow \mathrm{V}[n]$$

défini par $\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{\mathrm{V}[n]} \to \pi_{n*}\mathcal{O}_{\mathrm{X}})$. Les projections $\mathrm{V}[n{+}1] \to \mathrm{V}[n]$ induisent un morphisme d'espaces localement annelés $\mathrm{V}[n{+}1] \to \mathrm{V}[n]$. Localement, V est défini dans un espace affine $\mathbf{A}$ de coordonnée $x_0 = (x_{0,1}, \cdots, x_{0,\mathrm{N}})$ par un idéal J de $k[x_0]$. On sait alors (2.6.4) que X est défini par un σ-idéal I de $k[x_0]_\sigma$ contenant J. On vérifie que $\mathrm{X}[n]$ est défini par l'idéal $\mathrm{I} \cap k[x_0, \cdots, x_n]$ de $k[x_0, \cdots, x_n]$: c'est bien un sous-schéma fermé de $\mathrm{V}[n]$. Autrement dit, on a un système projectif

$$(\mathrm{X}[n] \hookrightarrow \mathrm{V} \times \cdots \times \mathrm{V}^{\sigma^n})$$

d'immersions fermées de variétés algébriques.

Définition 4.1.1. — *On dit que* X *est faiblement dense dans* V *si* $\mathrm{X}[0] = \mathrm{V}$.

Mais attention, on peut-être fermé mais faiblement dense (prendre par exemple X d'équation $x_1 = \sigma(x_0)$ dans $\mathbf{A}^1_\sigma = [\sigma]_k\mathbf{A}^1 = \mathrm{Spec}^\sigma(k[x_0]_\sigma)$).

4.2. σ-degré des sous-variétés : le cas algébriquement intègre

Supposons donc X algébriquement intègre, autrement dit $\mathcal{O}_x$ intègre pour tout $x \in \mathrm{X}$ et X irréductible (topologiquement). Une autre manière de dire est : $\mathcal{O}_\mathrm{X}$ faisceau d'anneaux intègres. En particulier, les $\mathrm{X}[n]$ sont des variétés intègres, et, par construction, les flèches $\mathrm{X}[n+1] \to \mathrm{X}[n]$

et $X \to X[n]$ sont schématiquement dominantes pour tout n (*ie* l'image inverse des fonctions est injective). En particulier les diverses images sont denses. Si η_n est le point générique de $X[n]$, on a donc des inclusions $k(\eta_n) \hookrightarrow k(\eta_{n+1})$. Soit K la réunion croissante de $k(\eta_i)$. Par construction, les projections c_n de η_n par

$$X[n](K) \to V[n](K) \to V^{\sigma^n}(K)$$

vérifient

$$\eta_n = (c_0, \cdots, c_n) \in X[n](K) \hookrightarrow V[n](K).$$

Localement, l'idéal $I_{X[n]} = I \cap k[x_0, \cdots, x_n]$ dans $\mathbf{A}^{n+1}$ est

$$\{P \in k[x_0, \cdots, x_n] \text{ tels que } P(c_0, \cdots, c_n) = 0\}.$$

Si donc $P \in k[x_l, \cdots, x_{l+n}]$ annule $(c_l, \cdots, c_{l+n})$, c'est donc qu'il est dans $I_{X[n+l]}$, et donc dans I. Comme I est un σ-idéal, $P^\sigma \in I$ et donc $P^\sigma(c_{l+1}, \cdots, c_{l+n+1})$ est nul. Ainsi, on a

$$\overline{(c_{l+1}, \cdots, c_{l+n+1})_\sigma} \subset \overline{(c_l, \cdots, c_{l+n})}$$

(adhérences dans $\mathbf{A}^{n+1}$) et donc

$$\text{(2.a)} \qquad \operatorname{degtr}_k k(c_{l+1}, \cdots, c_{l+n+1}) \leq \operatorname{degtr}_k(c_l, \cdots, c_{l+n})$$

pour tout $l \geq 0$.

Proposition 4.2.1. — *Supposons* X *algébriquement intègre. Alors, il existe des entiers a, d tels que, si n est assez grand, on a*

$$\dim X[n] = an + d.$$

Preuve : d'après 2.a, pour tout n, il existe L tel que $\operatorname{degtr}_k k(c_l, \cdots, c_{l+n})$ soit constant de valeur $e(n)$ pour $l \geq L$. A priori, il n'est pas clair qu'on puisse choisir L indépendamment de n.

Observons d'abord déjà que $e(n)$ est croissante. En effet, si $l >> 0$, on a

$$e(n) = \operatorname{degtr}_k k(c_{l+1}, \cdots, c_{l+1+n}) \geq \operatorname{degtr}_k k(c_l, \cdots, c_{l+n+1}) = e(n+1).$$

Observons ensuite que $e(n)$ est concave, autrement dit

$$\epsilon(n) = e(n+1) - e(n)$$

décroissante.

Pour le voir, définissions récursivement une suite λ de la manière suivante. On pose $\lambda(-1) = 0$. On prend alors $\lambda(n+1)$ le plus petit $L \geq \lambda(n)$ tel que $\operatorname{degtr}_k k(c_l, \cdots, c_{l+n+1})$ soit constant pour $l \geq L$.

Pour $l \geq \lambda(n+1)$, on a

$$\epsilon(n) = \operatorname{degtr}_{k(c_{l+1}, \cdots, c_{l+1+n})}[c_{l+n+2}] \geq \operatorname{degtr}_{k(c_l, \cdots, c_{l+1+n})}[c_{l+n+2}] = \operatorname{degtr}_k(c_l, \cdots, c_{l+2+n}) - e(n+1).$$

Avec $l = \lambda(n+2)$, on obtient

$$\epsilon(n) \geq \epsilon(n+1).$$

Si de plus $\lambda(n+2) > \lambda(n+1)$, on peut prendre $l = \lambda(n+2) - 1$ et on a pour cet l l'inégalité stricte

$$\mathrm{degtr}_k(c_l, \cdots, c_{l+2+n}) > e(n+1)$$

et donc $\epsilon(n) > \epsilon(n+1)$.

Comme $\epsilon(n) \geq 0$, il existe a, b, n_0 tel que $\epsilon(n) = a$ pour $n \geq n_0$ et donc

$$e(n) = an + b \text{ pour tout } n > n_0.$$

Le nombre d'entiers n tels que $\lambda(n+1) > \lambda(n)$ est par ailleurs majoré par n_0. Soit donc $\lambda = \lambda(n_0)$ disons. On a alors

$$e(n) = \mathrm{degtr}_k\, k(c_l, \cdots, c_{l+n}) \text{ pour tout } l > \lambda.$$

Soit $\mathrm{L} > \lambda$ fixé. En écrivant

$$k(c_0, \cdots, c_n) = k(c_0, \cdots, c_{\mathrm{L}-1})(c_{\mathrm{L}}, \cdots, c_{\mathrm{L}+n-\mathrm{L}})$$

on déduit l'existence d'un entier d tel que

$$\dim \mathrm{X}[n] = \mathrm{degtr}_k\, k(c_0, \cdots, c_n) = an + d \text{ pour tout } n \geq \mathrm{L}.$$

■

Reste à identifier a. Voici comment procède Hrushovski.

Proposition 4.2.2. — *Avec les notations de 4.2.1, on a* $\mathrm{dimtot}(\mathrm{X}) = a$.

Preuve : La question est locale de sorte qu'on a les données suivantes :

-R est intègre (comme $\bar{\mathrm{R}}$), bien mélangé, de type σ-fini sur k ;

-B est une sous-ensemble fini de R qui l'engendre comme σ-algèbre (prendre des coordonnées linéaires sur $\mathbf{A}$ un espace affine dans lequel se plonge V) ;

-$\mathrm{R}[n, \mathrm{B}]$ est l'algèbre des fonctions de $\mathrm{X}[n]$, engendrée (comme k-algèbre) par $\mathrm{B} \cup \cdots \cup \sigma^n(\mathrm{B})$. On pose alors $a(n, \mathrm{R}, \mathrm{B}) = \dim \mathrm{X}(n) = \dim \mathrm{R}[n, \mathrm{B}] = \mathrm{degtr}_k \mathrm{Frac}(\mathrm{R}[n, \mathrm{B}])$.

On sait (4.2.1) que la limite

$$a(\mathrm{R}, \mathrm{B}) := \lim_{n \to \infty} \frac{a(n, \mathrm{R}, \mathrm{B})}{n}$$

existe.

Vérifions que $a(\mathrm{R}, \mathrm{B})$ ne dépend que de R et pas de B. En effet, si $(\mathrm{B}, \mathrm{R}) \subset (\mathrm{B}', \mathrm{R}')$ de façon équivariante, on a $\mathrm{R}[n, \mathrm{B}] \subset \mathrm{R}[n, \mathrm{B}']$ et donc $a(\mathrm{R}, \mathrm{B}) \leq a(\mathrm{R}', \mathrm{B}')$. Inversement, si on a $\mathrm{B} \subset \mathrm{B}' \subset \mathrm{R}$, il existe m tel que $\mathrm{B}' \subset \mathrm{R}[m, \mathrm{B}]$ et donc $\mathrm{R}[n, \mathrm{B}'] \subset \mathrm{R}[n+m, \mathrm{B}]$. En passant à la limite, on a $a(\mathrm{R}, \mathrm{B}') \leq a(\mathrm{R}, \mathrm{B})$ et donc

$$a(\mathrm{R}, \mathrm{B}) = a(\mathrm{R})$$

ne dépend que de R.

D'après 3.9.7, il existe un plongement équivariant

$$\mathrm{D} := k[x_1, \cdots, x_a]_\sigma \hookrightarrow \mathrm{R}$$

avec $a = \mathrm{dimtot}(\mathrm{X}) = \mathrm{dimtot}(\mathrm{R})$ tel que tout élément de R est σ-algébrique sur D. Soit K le corps des fractions de D : c'est un corps diiférentiel.

On a $a(\mathrm{D}) \leq a(\mathrm{R})$ d'après ce qui précède.

Soit $\mathrm{B}_0 \subset \mathrm{R}$ fini σ-engendrant R comme D-algèbre. Pour tout $b \in \mathrm{B}_0$, choisissons un polynôme P_b non nul de $\mathrm{D}[\mathrm{T}]_\sigma$ annulant b. Si $n(b)$ est le plus grand entier n tel que T_n intervient dans P_b, on a $\sigma^i(b)$ algébrique sur $\mathrm{K}(b, \cdots, \sigma^{n(b)-1}(b))$ pour tout i.

Soit $\mathrm{B}' \subset \mathrm{D}$ l'ensemble fini des coefficients de P_b. Quitte à élargir B', on peut supposer que B' engendre D comme k-algèbre différentielle. Posons

$$\mathrm{B}_1 = \{\sigma^i(b), i < n(b), b \in \mathrm{B}_0\}.$$

Par construction, on a

$$\sigma(\mathrm{B}_1) \text{ algébrique sur } \mathrm{K}(\mathrm{B}_1).$$

Posons alors

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}'.$$

Par construction, B engendre R comme k-algèbre différentielle.

On a alors

$$\mathrm{R}[n, \mathrm{B}] = k[\mathrm{B} \cup \cdots \cup \sigma^n(\mathrm{B})] \subset \mathrm{D}[n, \mathrm{B}'][\mathrm{B}_1 \cup \cdots \cup \sigma^n(\mathrm{B})] = \mathrm{D}_n.$$

Mais, comme $\sigma(\mathrm{B}_1)$ algébrique sur $\mathrm{K}(\mathrm{B}_1)$, le corps des fractions de D_n est algébrique sur celui de $\mathrm{D}[n, \mathrm{B}'][\mathrm{B}_1]$, qui est de degré de transcendance inférieur ou égal $a(n, \mathrm{D}, \mathrm{B}') + \mathrm{card}(\mathrm{B}_1)$. En regardant pour n grand, on obtient

$$a(\mathrm{R}) \leq a(\mathrm{D}).$$

Mais $a(\mathrm{D}) = a$ (prendre pour B le système $\mathrm{T}_1, \cdots, \mathrm{T}_a$).■

4.3. σ-degré des sous-variétés : le cas de dimension totale finie, non nécessairement algébriquement intègre

EXPOSÉ 5

5.1. Composantes en dimension totale finie

Version uniforme de $\mathrm{I_K} = \ker(\mathrm{K}[\mathrm{X}] \to \mathrm{K}[a]$ de type fini).

Lemme 5.1.1. — *Soit Δ une algèbre intègre de corps des fractions* K *et $a = (a_1, \cdots, a_n)$ des générateurs d'une Δ-algèbre de type fini* R. *Alors, il existe*

- *Δ_0 de type fini sur $\mathbb{Z} \subset \Delta$*
- *$e \in \Delta_0 - 0$*
- *f fini contenu dans $\Delta_0[\mathrm{X}]$ $\quad \mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n)$*

tel que si

$$\Delta_0[e^{-1}] \subset \Delta' \subset \mathrm{K} = \mathrm{Frac}(\Delta)$$

alors le noyau du composé $\Delta'[\mathrm{X}] \to \mathrm{K}[\mathrm{X}] \overset{\mathrm{X} \mapsto a}{\to} \mathrm{R_K} = \mathrm{R} \otimes_\Delta \mathrm{K}$ soit engendré par f.

Essentiellement, chasser les dénominateurs et prendre l'algèbre engendrée par les coefficients de générateurs de $\mathrm{I_K}$.

Corollaire 5.1.2. — *Soit $\Delta \hookrightarrow \mathrm{L}$ une algèbre intègre dans* L *un corps*

$$a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathrm{L}^n$$

Alors, il existe

- *Δ_0 de type fini sur $\mathbb{Z} \subset \Delta$*
- *$e \in \Delta_0 - 0$*
- *f fini contenu dans $\Delta_0[\underline{\mathrm{X}}]$ $\quad \underline{\mathrm{X}} = (\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n)$*

tel que si

$$\Delta_0[e^{-1}] \subset \Delta' \subset \mathrm{K} = \mathrm{Frac}(\Delta)$$

alors

$$0 \to (f)\Delta'[\underline{\mathrm{X}}] \to \Delta'[\underline{\mathrm{X}}] \to \Delta'[a] \to 0$$

exact.

(Simplement car dans ce cas l'image de $\Delta'[\mathrm{X}]$ dans $\mathrm{R_K} = \mathrm{K}[a] \subset \mathrm{L}$ est $\Delta'[a]$).

Corollaire 5.1.3. — *Soit* R *une algèbre de type finie sur un* Δ *intègre. Alors, il existe* $a \neq 0$ *dans* Δ *tel que* $\mathrm{R}[a^{-1}]$ *soit de présentation finie sur* $\Delta[a^{-1}]$, *ce « uniformément ».*

Démonstration On prend e, Δ_0 comme dans 5.1.1. Comme f fini est nul dans $\mathrm{R_K}$, il existe $\epsilon \neq 0$ dans Δ tel que $\epsilon f = (0)$ dans R. Quitte à changer e en $e\epsilon$, on peut supposer f nul dans R. La flèche $\Delta'[\mathrm{X}] \to \mathrm{R_K}$ se factorise à travers $\mathrm{R}_{\Delta'}$ et son noyau est alors engendré par f.■

Théorème 5.1.4. — *Soit* D/k *une* σ*-extension finie avec* k*-corps et* D *domaine. Alors il existe* $d \in \mathrm{D} - 0$ *tel que* $\mathrm{D}[d^{-1}]_\sigma$ *de* σ *présentation finie sur* k.

Démonstration . Soit L la σ-enveloppe (ou clôture inversive) de Frac (D) (D intègre). Comme σ injective, σ agit sur Frac (D) et est un automorphisme de L.

. On peut en fait prendre n'importe (L, σ) prolongeant (D, σ) tel que $\sigma \in$ Aut (L)

. Soit $a = (a_1, \cdots, a_n)$ σ-engendrent D sur k et posons

$$\boxed{\Delta = k[\sigma^i(a), i < 0] \subset \mathrm{L}}$$

-L'idée est je crois d'écrire

$$k[a] = \bigcup k[a^{\sigma^i}, i \leq n]$$

et

$$k[a^{\sigma^i}]_{i \leq n+1} = k[a^{\sigma^i}]_{i \leq n}[a^{\sigma^{n+1}}]$$

plutôt que d'adjoindre $a^{\sigma^{n+1}}$ qui varie avec n, on regarde

$$\sigma^{-n-1} k[a^{\sigma^i}]_{0 \leq i \leq n+1} = \sigma^{-n-1} k[a^{\sigma^i}, \leq i < 0][a] \subset \Delta[a].^{(1)}$$

donc, en regardant une présentation finie d'un localisé comme plus haut, il ne se passera rien si $n >> 0$.

-Mettons en forme. Il existe donc (5.1.5) $\Delta_0 \subset \Delta$ de type fini sur $\mathbb{Z}$, $e \in \Delta_0 - 0$, $f \subset \Delta_0[\mathrm{X}]$ fini tel que si

$$(*) \qquad \Delta_0[e^{-1}] \subset \Delta' \subset \text{ Frac } (\Delta)$$

alors

$$\Delta'[a] = \Delta'[\mathrm{X}]/(f)\Delta'[\mathrm{X}].$$

(1) Il y a une petite imprécision dans Hrushovski, qui fait comme si $\sigma^{-n-1}k[a^{\sigma^i}]_{i \leq n+1} = k[\sigma^i(a),]_{i=-n-1,\cdots,0}$, égalité qui en général n'est pas vraie si k n'est pas inversif.

Il existe $\ell > 0$ tel que

$$\boxed{e \in \Delta_0 \subset k[\sigma^{-1}(a), \cdots, \sigma^{-\ell}(a)]}$$

En général, on a $\sigma^i(e) \in \mathrm{D}$ si $i \geq \ell$ (mais $\sigma^{\ell-1}(e) \in \mathrm{D}[\sigma^{-1}(e)]$ n'a aucune raison d'appartenir àD. Posons alors

$$\boxed{\mathrm{R}_{-n} = \sigma^{-n-\ell}(k[a, \cdots, \sigma^{n+\ell-1}(a), \sigma^{\ell}(e^{-1}), \cdots, \sigma^{n+\ell}(e^{-1})])}$$

ou encore $\mathrm{R}_{-n} = \sigma^{-n-\ell}(k)[\sigma^{-n-\ell}(a), \cdots, \sigma^{-1}(a), \sigma^{-n}(e^{-1}), \cdots, e^{-1}]$.

$\Delta' = \mathrm{R}_{-n}$ vérifie $(*)$ donc

$$\boxed{\mathrm{R}_{-n}[a] = \mathrm{R}_{-n}[\mathrm{X}]/f\mathrm{R}_{-n}[\mathrm{X}]}$$

$$\sigma(e) \in k[a, \sigma^{-1}(a), \cdots, \sigma^{-\ell+1}(a)] \subset \mathrm{R}_0[a]$$

Choisissons $h \in \mathrm{R}_0[\mathrm{T}]$ tel que $\boxed{h(a) = \sigma(e)}$

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{R}_{-n-1}) &= \sigma^{-n-\ell}(k[a, \cdots, \sigma^{n+\ell}(a), \sigma^{\ell}(e^{-1}), \cdots, \sigma^{n+\ell+1}(e^{-1})]) \\
&= k\left[a, a^{\sigma-1}, \cdots, a^{\sigma-\ell-n}, \sigma(e^{-1}), e^{-1}, \cdots, \sigma^{-n}(e^{-1})\right] \\
&= \mathrm{R}_{-n}[a, \sigma(e^{-1})] \\
&= \mathrm{R}_{-n}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]/(g)
\end{aligned}$$

avec $g = (f, \mathrm{Y}h(\mathrm{X}) - 1)$.

Donc si

$$\mathrm{R}_n = \sigma^{\ell+n}(\mathrm{R}_{-n}) = k[a, \cdots, \sigma^{\ell+n-1}(a), \sigma^{\ell}(e^{-1}), \cdots, \sigma^{\ell+n}(e^{-1})]$$

On a

$$\boxed{\mathrm{R}_{n+1} = \mathrm{R}_n[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]/(\sigma^{\ell+n}(g))}$$

Posons

$$\boxed{d = \sigma^{\ell}(e) \in \mathrm{D} - 0}.$$

On a $\mathrm{D}[d^{-1}]_\sigma = \cup \mathrm{R}_n$. Définissons alors le (k, σ)-morphisme (surjectif)

$$\varphi : \begin{cases} k[u, v]_\sigma & \twoheadrightarrow \mathrm{D}[d^{-1}]_\sigma \\ u & \mapsto a \\ v & \mapsto d^{-1} \end{cases}$$

et étudions son noyau. Soit donc $\mathrm{P}(u, v) \in \ker \varphi$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
k[u, \cdots, u^{\sigma^{\ell+n}}, v, \cdots, v^{\sigma^{n+1}}] \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, "\kappa"] & \mathrm{R}_{n+1} \\
\mathrm{R}_n[u^{\sigma^{\ell+n}}, v^{\sigma^{n+1}}] \arrow[ur, "\varpi"] &
\end{tikzcd}$$

et $\mathrm{P} \in k[u, \cdots, u^{\sigma^{\ell+n}}, v, \cdots, v^{\sigma^{n+1}}]$ pour n assez grand. Comme $\varphi(\mathrm{P})$ est nul, $\kappa(\mathrm{P})$ est dans le noyau $\sigma^{\ell+n+1}(g)$ de ϖ. Donc, modulo le σ-idéal engendré par g, les coefficients dans R_n de $\kappa(\phi)$ sont dans le noyau de

$$k[u, \cdots, u^{\sigma^{\ell+n-1}}, v, \cdots, v^{\sigma^n}] \twoheadrightarrow \mathrm{R}_n.$$

Par induction, modulo le σ-idéal engendré par g, φ est dans l'idéal engendré par $k[u, \cdots, u^{\sigma^\ell}, v] \to \mathrm{R}_0$ qui est de type fini.■

Corollaire 5.1.5. — *Soit* R *de type σ-fini sur sur k un corps ou $\mathbb{Z}$ et $\mathrm{P} \in$ Spec$^\sigma$R. Alors, $\exists a \notin \mathrm{P}$ tel que $\mathrm{P}[a^{-1}]_\sigma$ soit de σ-type fini.]*

(Considérer R/P qui est un domaine de type σ-fini et donc de présentation finie après localisation).

Théorème 5.1.6. — *Soit σ un endomorphisme de k avec k corps* inversif *ou $\mathbb{Z}$. Soit* R *de type σ-fini sur k, bien mélangé et algébriquement réduit. Alors, si Spec$^\sigma$(R) irréductible (ou encore $\mathrm{P} = \sqrt[\sigma]{0}$ est l'unique premier minimal de Spec$^\sigma$(R)), alors*

- *$\exists n$ tel que $\mathrm{D} = \sigma^n(\mathrm{R})$ domaine ;*
- *$\exists a \notin \mathrm{P}$ tel que $\bar{\mathrm{R}} = \mathrm{R}[a^{-1}]_\sigma$ de présentation finie sur k.*

Preuve : On peut supposer P de type σ-fini (5.1.5). Comme R est bien mélangé, on en déduit alors

$$\sqrt[\sigma]{0} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma^{-n}(0)$$

de sorte qu'il existe n tel que $\mathrm{P} = \sigma^{-m}(0)$ si $m \geq n$ assurant

$$\mathrm{D} = \mathrm{R}/\sigma^{-n}(0) \stackrel{\sigma^n}{=} \sigma^n(\mathrm{R})$$

domaine, d'où le premier point.

Passons au second.

On peut alors supposer (5.1.4) que D est de présentation σ-finie sur $\sigma^m(k) = k$.

L'extension $\mathrm{R}/\mathrm{D} = \sigma^n(\mathrm{R})$ est visiblement σ-radicielle ; étant de type σ-fini, elle est *algébriquement* de type fini. On peut trouver (5.1.3) a non nul dans D tel que $\mathrm{R}[a^{-1}]_\sigma/\mathrm{D}[a^{-1}]_\sigma$ algébriquement de présentation finie et donc de présentation σ-finie (qui peut le plus peut le moins...). D'après ce qui précède, $\mathrm{R}[a^{-1}]_\sigma$ de présentation σ-fini sur k.■

Théorème 5.1.7. — *Soit* R *bien mélangé, de type σ-fini sur k* inversif *(cette hypothèse sur (k, σ) n'est pas dans le papier). On suppose que pour tout quotient bien mélangé $\bar{\mathrm{R}}$ de* R, *il existe m tel que si $\mathfrak{P}$ idéal premier aux différences minimal de $\bar{\mathrm{R}}$, alors le degré transformel de $\bar{\mathrm{R}}/(\mathfrak{P})$ est $\leq m$. Alors tout élément de $\mathrm{WM}_{rad}(\mathrm{R})$ est de type fini.*

Remarque 5.1.8. — *On choisit des génarateurs a_i de* R*, autrement dit une surjection*$\mathrm{R} \twoheadleftarrow k[a_1, \cdots, a_n]_\sigma$ *induisant* $Spec^\sigma(\bar{\mathrm{R}}) \hookrightarrow Spec^\sigma(\mathrm{R}) \hookrightarrow \mathbb{A}^n_\sigma = [\sigma]_k\mathbb{A}^n$ *donnant un sens à l'énoncé.*

On note pour $\mathrm{X} \subset \mathrm{R}$ $\langle \mathrm{X} \rangle = \langle \mathrm{X} \rangle_\mathrm{R}$ le plus petit idéal réduit bien mélangé contenant X :ceci donne une notion de Finitude.

Preuve :

On fait une preuve par l'absurde

1 - L'ensemble des idéaux de $\mathrm{WM}_{\mathrm{rad}}(\mathrm{R})$ qui ne sont pas de type Fini est inductif. Comme il est non vide par hypothèse, on choisissons I maximal non Finiment engendré.

2 - Observation utile. Si $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ est dans $\mathrm{WM}_{\mathrm{rad}}(\mathrm{R})$ et est de type Fini, I/J reste maximal de type non Fini dans $\mathrm{W}_{\mathrm{rad}}(\mathrm{R/J})$. On peut remplacer (R, I) par $(\mathrm{R/J}, \mathrm{I/J})$.

3 - I est algébriquement premier.

Notons que $\mathrm{I} \neq \mathrm{R}$ car $\mathrm{R} = \langle 1 \rangle$ est de type Fini.

Soient $a, b \in \mathrm{R}$ tels que $ab \in \mathrm{I}$ et $a, b \notin \mathrm{I}$. Posons

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{Ann}\ (a \bmod \mathrm{I}) \text{ et } \mathrm{I}_2 = \mathrm{Ann}\ (\mathrm{I}_1 \bmod \mathrm{I}).$$

On a $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2 \in \mathrm{WM}_{\mathrm{rad}}(\mathrm{R})$. Comme $b \in \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}$ et I maximal, I_1 de type Fini. De même, comme $a \in \mathrm{I}_2 - \mathrm{I}$ on a I_2 de type Fini. Soient $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2$ parties finies de R telles que

$$\mathrm{I}_1 = \langle \mathrm{X}_1 \rangle \quad \mathrm{I}_2 = \langle \mathrm{X}_2 \rangle$$

$$\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2 \subset \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2 \subset \mathrm{I} \text{ donc } \langle \mathrm{X}_1\mathrm{X}_2 \rangle \subset \mathrm{I}$$

Inversement, comme $\langle \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \rangle$ radical bien mélangé, il est l'intersection des idéaux aux différences $\mathfrak{p}$ (ie tels que $\sigma(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$) contenant $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ (lemme 2.10 du papier), donc contenant X_1 ou X_2. Si $\mathrm{X}_1 \subset \mathfrak{p}$ par exemple, i.e. $\mathrm{I}_1 \subset \mathfrak{p}$, on a $\mathrm{I}^2 \subset \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2 \subset \mathfrak{p}$ et ainsi $\mathrm{I} \subset \mathfrak{p}$ puis finalement $\mathrm{I} = \langle \mathrm{X}_1\mathrm{X}_2 \rangle$, une contradiction.

Donc (2.3 du papier, facile)

$$\boxed{\mathrm{P} = \sqrt[\sigma]{\mathrm{I}} \in \mathrm{Spec}^\sigma(\mathrm{R})} = \{x / \exists n x^{\sigma^n} \in \mathrm{I}\}.$$

4 - Pour le théorème 5.1.6 appliqué à R/I, il existe $d \in \mathrm{R} - \mathrm{P}$ et $\mathrm{X}_0 \subset \mathrm{I}$ tel que

$$\mathrm{IR}[d^{-1}]_\sigma = \langle \mathrm{X}_0 \rangle_{\mathrm{R}[d^{-1}]_\sigma}$$

i.e.

$$\forall i \in \mathrm{I} \quad \exists n \in \mathbb{N}[\sigma] \text{tel que } d^n i \in \langle \mathrm{X}_0 \rangle \tag{1.a}$$

Comme $d \notin \mathrm{P}$, on a certainement $d \notin \mathrm{I}$. Par maximalité de I, il existe X'_1 fini tel que $\langle \mathrm{I}, d\rangle = \langle \mathrm{X'}_1\rangle$. Mais $\langle \mathrm{I}, d\rangle$ est la réunion filtrante des $\langle \mathrm{J}, d\rangle$ avec J fini contenu dans I (simplement car cette réunion est dans $\mathrm{WM}_{\mathrm{rad}}(\mathrm{R})$ et contient I et d). Il existe donc $\mathrm{X}_1 \subset \mathrm{I}$ fini tel que

$$\langle \mathrm{I}, d\rangle = \langle \mathrm{X}_1, d\rangle \text{ et bien entendu } \quad \langle \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_0\rangle \subset \mathrm{I}$$

On remplace R par $\mathrm{R}/_{\langle \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_0\rangle}$ grâce à l'observation utile.

On a alors (1.a)

$$(*) \qquad \forall i \in \mathrm{I} \quad \exists n \in \mathbf{N}[\sigma] \quad d^n i = 0 \text{ ou encore } d \in \sqrt[\sigma]{\mathrm{Ann}(i)}$$

et donc, puisque $\sqrt[\sigma]{\mathrm{Ann}(i)} \in \mathrm{WM}_{\mathrm{rad}}(\mathrm{R})$, on a

$$< d > \subset \sqrt[\sigma]{\mathrm{Ann}(i)}.$$

$$(**) \qquad \langle \mathrm{I}, d\rangle = \langle d\rangle$$

Donc, pour tout i dans I, on a

$$i \in \langle \mathrm{I}, d\rangle = \langle d\rangle \subset \mathrm{Ann}^\sigma(i)$$

Comme R bien mélangé et réduit

$$\forall i \in \mathrm{I} \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \sigma^n(i) = 0$$

Ainsi $\mathrm{P} = \sqrt[\sigma]{\mathrm{I}}$ est localement σ-nilpotent. Bornons l'ordre de nilpotence.

Soit $\mathrm{Q} = \{\mathfrak{p}$ premier minimal de R tel que $\sigma(\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}\}$. On a (2.10 du papier encore)

$$0 = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Q}} \mathfrak{p}.$$

Rappel (cor. 4.24 du papier) : Si $\tilde{\mathrm{R}}$ est une k-algèbre intègre aux différences σ-engendrée sur k par $r_1, \cdots, r_n$, alors $\mathrm{R}/\sigma^{-m}(0) = \sigma^m(\mathrm{R})$ est un domaine pour $m \geq \mathrm{degtrans}(\tilde{\mathrm{R}})$.

Appliqué à $\tilde{\mathrm{R}} = (\mathrm{R}/\mathfrak{p}, \sigma)$, l'hypothèse assure que $\sigma^m(\mathrm{R}/\mathfrak{p})$ est un domaine pour m ne dépendant que de R autrement dit $\sigma^{\mathrm{N}}(x) \in \mathfrak{p}$ si et seulement si $\sigma^m(x) \in \mathfrak{p}$. Comme P est localement nilpotent, on déduit que $\sigma^m(\mathrm{P}) \subset \mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Q}$ et donc

$$\sigma^m(\mathrm{P}) = 0 \textit{ ie } \mathrm{P} \subset \sigma^{-m}(0).$$

Mais $\mathrm{P} = \sqrt[\sigma]{\mathrm{I}} \supseteq \sqrt[\sigma]{0} \supseteq \sigma^{-m}(0)$ et donc

$$\mathrm{P} = \sqrt[\sigma]{0} = \sigma^{-m}(0).$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{D} = \sigma^m(\mathrm{R}) = \mathrm{R}/\sigma^{-m}(0) \text{ domaine .}}$$

Remarque 5.1.9. — *Le point ici est que σ^m est une section de $\mathrm{R} \to \mathrm{R}/\mathrm{P} = \mathrm{D}$ et fait de* R *une* D-*algèbre : c'est pourquoi on a besoin de borner l'ordre de nilpotence de σ.*

Mais R est de type σ-fini sur $k = \sigma^m(k)$ donc est de type fini sur $\mathrm{D} = \sigma^m(\mathrm{R})$. Comme il est σ-radiciel, R est algébriquement de type fini sur D. Grâce au lemme 5.1.1 appliqué à une surjection $\mathrm{D}[\mathrm{X}] \to \mathrm{R}/\mathrm{I}$, il existe $\mathrm{I}_1 \subset \mathrm{I}$ Finiment engendré et $\delta \in \mathrm{D} - 0$ tels que

$$\mathrm{I}[\delta^{-1}] = \mathrm{I}_1[\delta^{-1}]$$

et $\mathrm{I}_1 \in \mathrm{W}_{\mathrm{rad}}(\mathrm{R})$ (quitte à changer I_1 en $\langle \mathrm{I}_1 \rangle$). Donc,

$$\forall i \exists n \in \mathbf{N} \text{ tel que } \delta^n i \in \mathrm{I}_1 \text{ donc } (\delta i)^n \in \mathrm{I}_1 = \sqrt{\mathrm{I}_1}$$

donc

$$\boxed{\forall i \quad \delta i \in \mathrm{I}_1}$$

Remplaçant $\mathrm{R} \to \mathrm{R}/\mathrm{I}_1$

$$\forall i \quad \delta i = 0 \quad i.e. \delta \in \mathrm{Ann}(i)$$

En particulier, $\delta \notin \mathrm{I}$ car sinon $\delta^2 = 0$ dans D intègre et donc $\delta = 0$. Ainsi, on a

$$\mathrm{I} \subsetneq \langle \mathrm{I}, \delta \rangle,$$

et, par maximalité de I, il existe $\mathrm{X}_3 \subset \mathrm{I}$ fini tel que

$$\langle \mathrm{I}, \delta \rangle = \langle \tilde{\mathrm{X}}_3, \delta \rangle.$$

Remplaçant R par $\mathrm{R}/\langle \mathrm{X}_3 \rangle$, on obtient

$$\mathrm{I} \subset \langle \delta \rangle \subset \langle \mathrm{Ann}(i) \rangle = \mathrm{Ann}(i)$$

donc $i^2 = 0$ puis $i = 0$ puisque I est réduit, une contradiction.□

Par récurrence noethérienne, on déduit

Corollaire 5.1.10. — *Soit* R *est de dimension totale finie sur k inversif. Alors tout idéal bien mélangé algébriquement réduit est intersection* finie *d'idéaux premiers aux différences.*

Preuve : En effet, soit $\mathrm{I} \in \mathrm{W}_{\mathrm{rad}}(\mathrm{R})$ maximal qui ne soit pas intersection finie d'idéaux premiers (noethérianité de $\mathrm{W}_{\mathrm{rad}}(\mathrm{R})$ d'après le théorème 5.1.7). Alors I est strict et non premier. Soient $a, b \in \mathrm{R}$ tels que $ab \in \mathrm{I}$ et $a, b \notin \mathrm{I}$. Posons $\mathrm{I}_1 = \mathrm{Ann}(a \bmod \mathrm{I})$ et $\mathrm{I}_2 = \mathrm{Ann}(\mathrm{I}_1 \bmod \mathrm{I})$. Comme plus haut, I_1 et I_2 contiennent strictement I, et sont radicaux bien mélangés. Par maximalité de I, ils sont intersection finie d'idéaux premiers aux différences. On a $\mathrm{I} \subset \mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2 := \mathrm{J}$. Montrons la réciproque. On a $\mathrm{J}^2 \subset \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2 \subset \mathrm{I}$. Mais comme I est radical, $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Richard M. Cohn. *Difference algebra*. Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1965.

[2] N. Fakhruddin. Resolutions of unbounded complexes. *Preprint math.AG*, 0212208, 2002.

[3] E. Hrushovski. The elementary theory of frobenius automorphisms. *preprint*, April 2004.