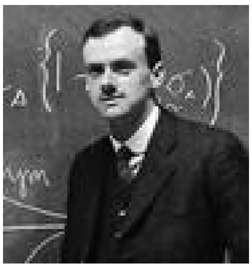
OSCILLATEURS HARMONIQUES ET REPRÉSENTATIONS DU GROUPE DE HEISENBERG

par

Yves Laszlo



Paul Dirac

The steady progress of physics requires for its theoretical formulation a mathematics which get continually more advanced. This is only natural and to be expected. What however was not expected by the scientific workers of the last century was the particular form that the line of advancement of mathematics would take, namely it was expected that mathematics would get more and more complicated, but would rest on a permanent basis of axioms and definitions, while actually the modern physical developments have required a mathematics that continually shifts its foundation and gets more abstract. Non-euclidean geometry and noncommutative algebra, which were at one time were considered to be purely fictions of the mind and pastimes of logical thinkers, have now been found to be very necessary for the description of general facts of the physical world. It seems likely that this process of increasing abstraction will continue in the future and the advance in physics is to be associated with continual modification and generalisation of the axioms at the base of mathematics rather than with a logical development of any one mathematical scheme on a fixed foundation (Paul Dirac).

Hermann Weyl

The universe is an enormous direct product of representations of symmetry groups. (attribué à Hermann Weyl).

Table des matières

1. Introduction

Le but de cette séance est de montrer les liens entre oscillateurs harmoniques et représentations du groupe de Heisenberg. On montre les difficultés mathématiques qui se posent dans la mesure où la représentation de Schrödinger fait apparaître des opérateurs non bornés, *ie* non définis. On explique pourquoi les points de vue de Heisenberg et de Schrödinger sont équivalents et enfin on introduit l'algèbre de Heisenberg de dimension infinie, algèbre des symétries d'une infinité d'oscillateurs et l'action correspondante de l'algèbre de Virasoro, fenêtre vers la théorie des cordes qui sera ébauchée au cours suivant. On voit apparaître un phénomène très courant en théorie des champs, l'apparition de grandeurs infinies dans les calculs, qui nécessite une « renormalisation ».

2. L'oscillateur harmonique à un degré de liberté

Physiquement, on a une masse m de quantité de mouvement p dans un potentiel quadratique $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ où x est la position. On a donc deux variables quantiques normalisées, l'impulsion p (quantifiant $\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}}$) et la position q (quantifiant $\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}$). L'énergie (l'hamiltonien) est (à un facteur $\frac{1}{2}$ près) égal à

$$\mathrm{H} = p^2 + q^2.$$

On choisit l'unité de longueur de sorte que de plus $\bar{h} = 1$ (rappelons que $\hbar$ est homogène à m^2kgs^{-3}). En mécanique quantique (cf. cours de tronc commun), p, q sont des observables, à savoir des opérateurs auto-adjoints agissant sur un espace de Hilbert (séparable) complexe $\mathcal{H}$.

David Hilbert

Les équations fondamentales sont

$$[p, q] = -i \text{ et } \dot{\pi} = -i[\mathrm{H}, \pi] \tag{2.a}$$

pour tout observable π et où H est donc l'observable

$$\mathrm{H} = p^2 + q^2 = p \circ p + q \circ q$$

(on note 1 l'identité).

Remarque 2.0.1. — *Par analogie au cas de la dimension finie, l'algèbre de Lie du groupe unitaire* $\mathbf{U}(\mathcal{H})$ *devrait être l'algèbre de Lie* $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ *des opérateurs anti-hermitiens de sorte qu'il n'y a pas lieu de s'étonner que le crochet* $[p, q] = -[ip, iq]$ *soit l'opérateur anti-hermitien* i *et non un opérateur hermitien.*

Sophus Lie

D'un point de vue formel, une récurrence sans mystère donne

$$p^n q - q p^n = -inp^{n-1}$$

pour tout $n \geq 0$ d'où en sommant après multiplication par $\frac{(ix)^n}{n!}, x \in \mathbf{R}$

$$\exp(ixp)q - q\exp(ixp) = x\exp(ixp)$$

à savoir

$$\exp(ixp)q\exp(-ixp) = q + x.$$

De même, on obtient

$$\exp(ixp)\exp(iyq)\exp(-ixp) = \exp(iy(q+x))$$

et donc

$$(\exp(ixp), \exp(iyq)) = \exp(ixy) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbf{R} \tag{2.b}$$

où $(g_1, g_2) = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ désigne le commutateur de deux éléments g_1, g_2 d'un groupe (ici $\mathbf{U}(\mathcal{H})$).

3. Rappels sur les groupe de Heisenberg

Rappelons que le groupe de Heisenberg H_n à n degrés de libertés peut-être vu comme le sous-groupe de $\mathbf{GL}_{2n+1}(\mathbf{R})$ des matrices $\exp(\mathrm{M}(x,y,z)) = \mathrm{Id} + \mathrm{M}(x,y,z)$ avec

$$\mathrm{M}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & {}^t x & {}^t y & 2z \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } x, y \in \mathbf{R}^n, z \in \mathbf{R}$$

avec

$$\exp(\mathrm{M}(x,y,z))\exp(\mathrm{M}(x',y',z')) = \exp(\mathrm{M}(x+x', y+y', z+z' + \frac{1}{2}\omega(x,y,x',y')))$$

où $\omega(x,y,x',y') = {}^t x y' - {}^t y x'$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_n$ de H_n est

$$\mathbf{R}^{2n+1} = \mathbf{R}.\mathrm{E} \oplus \mathbf{R}\mathrm{P}_i \oplus \mathbf{R}\mathrm{Q}_i$$

avec

$$\mathrm{P}_i = \mathrm{M}(e_i, 0, 0), \mathrm{Q}_i = \mathrm{M}(0, e_i, 0), \mathrm{E} = \mathrm{M}(0,0,1).$$

Le crochet de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_n$ de H_n est donc donné par

$$[\mathrm{M}(x,y,z)), \mathrm{M}(x',y',z')] = \mathrm{M}(0,0,\omega(x,y,x',y')),$$

ou encore est *déterminé* par les conditions E central et

$$[\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_j] = [\mathrm{Q}_i, \mathrm{Q}_j] = 0, [\mathrm{P}_i, \mathrm{Q}_j] = \delta_{i,j}\mathrm{E}. \tag{3.a}$$

Werner Heisenberg

Du point de vue groupe, H_n est engendré par les groupes à 1 paramètres

$$\exp(x\mathrm{P}_i), \exp(x\mathrm{Q}_i), \exp(x\mathrm{E})$$

soumis aux seules relations $\exp(x\mathrm{E})$ central et

$$(\exp(x\mathrm{P}_i), \exp(y\mathrm{P}_j)) = (\exp(x\mathrm{Q}_i), \exp(y\mathrm{Q}_j)) = \mathrm{Id}, (\exp(x\mathrm{P}_i), \exp(y\mathrm{Q}_j)) = \exp(\delta_{i,j}xy\mathrm{E}) \tag{3.b}$$

pour tout $x, y \in \mathbf{R}$. En effet, les relations de commutation (3.b) entraînent immédiatement la formule

$$\begin{aligned}\prod \exp(x\mathrm{P}_i) \prod \exp(y\mathrm{Q}_j). \exp(z\mathrm{E}) \prod \exp(x'\mathrm{P}_i) \prod \exp(y'\mathrm{Q}_j). \exp(z'\mathrm{E})\\ = \prod \exp((x+x')\mathrm{P}_i) \prod \exp((y+y')\mathrm{Q}_j) \exp((z+z'+\frac{1}{2}\omega(x,y,x',y')\mathrm{E})\end{aligned}$$

qui est la loi de groupe.

4. Oscillateur harmonique et représentations de $\mathfrak{h}_1, \mathrm{H}_1$

La formule (3.a) montre, au moins formellement que se donner p, q satisfaisant (2.a) n'est rien d'autre que de se donner une représentation

$$\delta : \mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{u}(\mathcal{H})$$

grâce à la règle

$$\delta(\mathrm{P}_1) = ip, \delta(\mathrm{Q}_1) = iq, \delta(\mathrm{E}) = i. \tag{4.a}$$

Une manière équivalente est de définir δ par l'*opérateur d'annihilation*

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$$

et l'*opérateur de création* (son adjoint)

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)$$

en respectant la relation

$$[a, a^*] = 1.$$

De même,se donner p, q satisfaisant (3.b), c'est formellement se donner [1]

$$\rho : \mathrm{H}_1 \to \mathbf{U}(\mathcal{H})$$

intégrant δ, c'est-à-dire faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h}_n \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exp_{\mathrm{H}_1}"'] & \mathfrak{u}(\mathcal{H}) \arrow[d, "\exp_{\mathbf{U}(\mathcal{H})}"] \\ \mathrm{H}_1 \arrow[r, "\rho"] & \mathbf{U}(\mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

ou, plus concrètement, tel que

$$\rho(\exp(x\mathrm{P}_1)) = \exp(ixp), \rho(\exp(y\mathrm{Q}_1)) = \exp(iyq), \rho(\exp(z\mathrm{E})) = \exp(iz). \tag{4.b}$$

5. Représentations de Schrödinger, de Fock

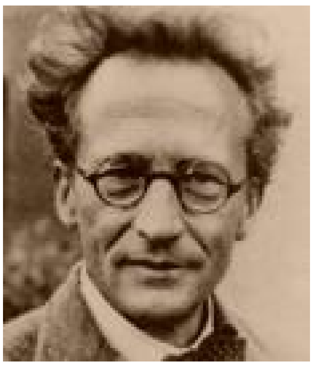
On pose

$$\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \text{ avec } (f, g) = \int_{\mathbf{R}} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t \text{ et } p = -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, q = t$$

et on tombe sur la représentation δ_{S} de $\mathfrak{h}_1$ dite de Schrödinger.

Dans cette représentation, il y a (à une phase près) un unique état de plus basse énergie(ce qui est conforme à l'expérience), associé à la valeur propre 1, : il s'agit de la gaussienne

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2})$$



Erwin Schrödinger

1. Évidemment, on ne regarde que les représentations continues, ce qui par locale compacité de H_n signifie simplement que pour tout $v \in \mathcal{H}$, l'application $g \mapsto \rho(g).v$ de H_n dans $\mathcal{H}$ est continue.

C'est l'unique (à une phase près) *vecteur de vide* unitaire, à savoir annulé par l'opérateur d'annihilation $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$.
Mais on peut aussi considérer $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions holomorphes entières (c'est-à-dire définies et développables en séries entières sur tout le plan complexe de variable $z = x + iy, x, y \in \mathbf{R}$), muni du produit hermitien

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{C}} \overline{f(z)} g(z) \frac{1}{\pi} \exp(-|z|^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(exercice : vérifier que *l'espace de Fock* $\mathcal{F}$ est bien un Hilbert). On pose alors

$$a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$$

dont l'adjoint a^* est l'opérateur z de multiplication par z définissant une représentation δ_{F} dite de Fock d'après le paragraphe précédent.

Vladimir Fock

Dans cette représentation, « le vecteur de vide » $|0\rangle = 1/\sqrt{\pi}$ est l'unique (à une phase près) état de plus basse énergie $\mathrm{H} = 1 + 2a^*a$.
Ces deux représentations semblent très différentes. Il n'en est rien, et, comme on le verra plus bas (), ce n'est pas un hasard. Pour l'instant, contentons-nous de l'énoncé suivant.

Exercice 5.0.2. — *Montrer que* $a : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ *défini par*

$$a(f)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{C}} f(z) \exp(-\frac{t^2}{2} + t\bar{z} - \frac{\bar{z}^2}{2}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

est une isométrie $\mathfrak{h}_1$*-équivariante d'inverse*

$$a^{-1}(\phi)(z) = \int_{\mathbf{R}} \phi(t) \exp(-\frac{t^2}{2} + tz\sqrt{2} - \frac{z^2}{2}) \mathrm{d}t.$$

Mais comme dit un auteur célèbre, « on ne nous dit pas tout ».

Un auteur célèbre

6. « On ne nous dit pas tout » : domaine de définition de p, q

Regardons par exemple la représentation de Schrödinger. L'opérateur p n'est hélas pas défini partout : il vaut mieux définir les dérivées de fonctions qui ont tendance à être dérivables ! Introduisons l'espace de Sobolev

$$\mathrm{H}^1 = \{f \in \mathrm{L}^2 \text{ tels que } f' \in \mathrm{L}^2\}$$

où f' est par exemple la dérivée au sens des distributions.
Une autre manière de voir est d'utiliser la transformée de Fourier $\hat{f}$ de sorte que

$$\mathrm{H}^1 = \{f \in \mathrm{L}^2 \text{ tels que } x\hat{f} \in \mathrm{L}^2\}.$$

On vérifie que H^1 est dense dans $\mathcal{H}$ et que le graphe $\{(f, f', f \in \mathrm{H}^1\}$ de p est un fermé du Hilbert $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Un tel opérateur (défini sur un espace dense à graphe fermé) est dit opérateur fermé. Notons (exercice) que p n'est pas continu, *ie* non borné sur la boule unité : on parle d'opérateur non borné. Il est facile de montrer que p n'a pas de prolongement fermé sur un espace plus gros. On est donc sorti du cadre des opérateurs au sens usuel du terme.

Joseph Fourier

Serguei Sobolev

La question qui se pose alors est la suivante : peut-on trouver une représentation

$$\mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{u}(\mathcal{H})$$

à valeurs dans les *endomorphismes bornés auto-adjoints*. La réponse est négative !

Lemme 6.0.3. — *Il n'existe pas de* $\mathbf{C}$*-algèbre normée* A *contenant deux éléments* a, b *tels que* $[a, b] = -i$.

Preuve : Une récurrence immédiate donne pour tout $n \in \mathbf{N}$ la relation

$$a^n b - b a^n = -ina^{n-1}. \tag{6.a}$$

Prenons la norme. Tenant compte de la sous-multiplicativité de la norme, on a

$$n||a^{n-1}|| \leq 2||a||||b||||a^{n-1}||.$$

Comme a, b sont nécessairement non nuls, on déduit l'existence de $n > 0$ tel que $a^{n-1} = 0$. Mais la relation (6.a) entraînerait par récurrence descendante la nullité de a, une contradiction avec $[a, b] = -i \neq 0$. □

La considération d'opérateurs non bornés, *ie* non définis partout et/ou non continus est donc nécessaire. On peut alors se demander, dans la mesure où p, q ne sont pas définis partout, ce que signifie $[p, q]$, au cas où q ne serait pas partout défini sur l'image de p...

7. ≪ On ne nous dit pas tout ≫ : définition de $\exp(ixp), \exp(ixq)$

Usuellement, l'exponentielle d'un endomorphisme continu u est défini par la

$$\exp(ixu) = \sum_{n \geq 0} \frac{(ixu)^n}{n!}.$$

Mais dans l'exemple de Schrödinger, u n'est pas défini... On va plutôt partir de l'équation différentielle et caractériser l'exponentielle $\exp(ixu)$ comme étant l'unique solution de

$$f'(x) = iuf(x), f(0) = \mathrm{Id}$$

où $f(x)$ est à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathcal{H})$.

Exemple 7.0.4. — *Regardons les opérateurs* $p = -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, q = t$ *de Schrödinger. Pour calculer* $\exp(ixp)(f_0), f_0 \in \mathrm{L}^2$*, on doit résoudre*

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}, f(0,t) = f_0$$

autrement dit

$$\exp(ixp)(f_0(t)) = f_0(t + x)$$

qui est un élément bien défini de $\mathbf{U}(\mathcal{H})$ *au contraire de p lui-même ! De même, pour calculer* $\exp(ixq)(f_0), f_0 \in \mathrm{L}^2$*, on doit résoudre*

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = itf(x,t), f(0,t) = f_0$$

autrement dit

$$\exp(ixq)(f_0) = \exp(ixt)f_0$$

et là encore est un élément bien défini de $\exp(iq) \in \mathbf{U}(\mathcal{H})$ *au contraire de* q. *Un calcul direct donne*

$$(\exp(ixp), \exp(iyq)) = \exp(ixy)$$

de sorte qu'on a bien défini une représentation unitaire

$$\rho_{\mathrm{S}} : \mathrm{H}_1 \to \mathbf{U}(\mathcal{H})$$

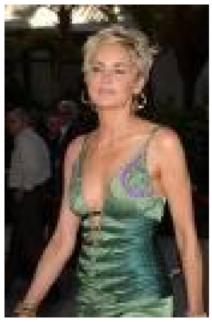
grâce à (3.b).

Exercice 7.0.5. — *Montrer que la représentation de Fock s'intègre en une représentation unitaire* $\mathrm{H}_1 \to \mathbf{U}(\mathcal{F})$ *qu'on explicitera.*

L'exemple précédent suggère que le passage à l'exponentielle améliore la situation. Cette constatation n'a absolument rien d'exceptionnel.

8. Le théorème de Stone

Marshall Stone



Un lien de famille ?

Commençons par un « rappel ». Soit u un opérateur défini sur un sous-espace dense $\mathrm{dom}(u)$ de $\mathcal{H}$. Pour tout $x \in \mathrm{dom}(u)$, posons $\phi_y(x) = \langle u(x), y\rangle$: on définit ainsi une forme linéaire, en général pas continue, sur $\mathrm{dom}(u)$. Posons alors

$$\mathrm{dom}(u^*) = \{y \in \mathcal{H} \text{ tels que } \phi_y \text{ continue sur } \mathrm{dom}(u)\}.$$

Si $y \in \mathrm{dom}(u^*)$, la forme ϕ_y se prolonge par continuité en une unique forme continue définie sur $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{dom}(u)}$. D'après le théorème de Riesz, elle s'écrit de façon unique $\phi_y(x) = \langle x, u^*(y)\rangle$ définissant sans ambiguïté une application linéaire

$$u^* : \begin{cases} \mathrm{dom}(u^*) & \to & \mathcal{H} \\ y & \mapsto & u^*(y) \end{cases}$$

On a donc la formule

$$\text{pour tout } x \in \mathrm{dom}(u), y \in \mathrm{dom}(u^*),\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle.$$

On dit que u est *symétrique* si on a

$$\text{pour tout } x, y \in \operatorname{dom}(u) \ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle,$$

ce qui entraîne évidemment $\operatorname{dom}(u) \subset \operatorname{dom}(u^*)$. On dit que u est *autoadjoint* s'il est symétrique et si $\operatorname{dom}(u) = \operatorname{dom}(u^*)$.

Exercice 8.0.6. — *Montrer que le graphe de u^* est*

$$\{(x, y) \in \mathcal{H}^2 \text{ tels que } \text{ pour tout } z \in \operatorname{dom}(u) \ \langle y, z\rangle = \langle x, u(z)\rangle\}.$$

En déduire que le graphe de u^* ainsi que de tout opérateur auto-adjoint est fermé.

On a alors le théorème, en un sens assez étonnant, suivant.

***Théorème 8.0.7* (Stone)**. — *Soit $u(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{U}(\mathcal{H})$ un groupe à un paramètre continu*[2]*. Alors, il existe u_0' auto-adjoint défini sur un sous-espace dense*[3]W *de $\mathcal{H}$ tel que $u_{|\mathrm{W}}$ soit l'unique solution sur* W *de*

$$(*) \qquad f'(x) = iu_0' f(x), f(0) = \mathrm{Id}.$$

Inversement, si u est autoadjoint, il existe une unique groupe à un paramètre continu $\mathbf{R} \to \mathbf{U}(\mathcal{H})$ noté $x \mapsto \exp(ixu)$ unique solution sur $\operatorname{dom}(u)$ de (*).

Preuve : C'est la réciproque qui nous intéresse. Expliquons heuristiquement pourquoi l'exponentielle améliore la situation. Imaginons, comme dans le cas de la dimension finie, que $\mathcal{H}$ admette une base hilbertienne $e_n, n \geq 0$ de vecteurs propres pour u (c'est le cas pour p, q par exemple, mais c'est faux en général). On note λ_i les valeurs propres correspondantes. Si $x = \sum x_n e_n$ avec $\sum |x_n|^2 < \infty$, $u(x)$ n'est défini que si $\sum |\lambda_n x_n|^2 < \infty$. Mais, comme u autoadjoint, λ_n est réel. Formellement, $\exp(ixu)$ est diagonalisé sur les e_n de valeur propre $\exp(i\lambda_n)$, nombre complexe de module 1. Du coup, si on a $\sum |x_n|^2 < \infty$ alors

$$\sum |\exp(ix\lambda_n)x_n|^2 = \sum |x_n|^2 < \infty$$

ce qui montre que $\exp(iu)$ est bien défini et continu sur tout $\mathcal{H}$ (et solution de l'équation différentielle sur le domaine de u). La preuve dans le cas général est tout à fait abordable et jolie, mais est un peu longue : on renvoie en appendice (19) pour plus de détails. □

Exercice 8.0.8. — *Soit* $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2([0, 1], \mathbf{C})$ *et u l'opérateur non borné défini par*

$$\operatorname{dom}(u) = \{f \in \mathrm{H} \textit{ continue } | f' \in \mathrm{H}\} \textit{ et } u(f) = if'.$$

3. Au sens où pour tout $v \in \mathcal{H}$, l'application $t \mapsto u(t).v$ est continue.
3. En fait, on montre que $\operatorname{dom}(u)$ est l'ensemble des $v \in \mathcal{H}$ tels que $t \mapsto u(t)v$ est dérivable.

Montrer que u est symétrique mais pas autoadjoint. En revanche, montrer que l'opérateur non borné défini par

$$\mathrm{dom}(v) = \{f \in \mathrm{H} \textit{ continue } | f' \in \mathrm{H},\ f(0) = f(1)\} \textit{ et } v(f) = if'$$

est autoadjoint.

9. Irréductibilité de la représentation de Schrödinger

On sait (lemme de Schur) qu'une représentation (continue) de dimension finie d'un groupe compact $\mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$ est irréductible si et seulement si les seuls endomorphismes de V commutant à l'action de G sont les homotéthies. Ce résultat est encore vrai pour les représentations unitaires à valeurs dans les Hilbert (une représentation sera dite irréductible si elle n'a pas de sous-espace fermé stable non trivial), pour autant qu'on se restreigne aux endomorphismes continus commutant à l'action du groupe.

Proposition 9.0.9. — *La représentation de Schrödinger est irréductible.*

Preuve : Soit donc α un endomorphisme de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ commutant à $\exp(ixp), \exp(ixq)$. En dérivant (soigneusement), on se ramène à prouver que si α commute avec q (sur son domaine de définition) et $\exp(ixp)$, alors α est scalaire. La formule $\alpha(q^n f) = q^n\alpha(f), n \geq 0$ appliquée à $f = \exp(-t^2)$ prouve que pour tout polynôme

$$\alpha(\mathrm{P}(t)\exp(-t^2)) = \mathrm{P}(t)\alpha(\exp(-t^2)).$$

Posons $\phi(t) = \exp(t^2)\alpha(\exp(-t^2))$ qui est bien défini presque partout et soit $f \in \mathcal{H}$. Comme les fonctions $\mathrm{P}(t)\exp(-t^2)$ sont denses dans L^2 (voir cours de tronc commun de mathématiques ou de physique), il existe une suite f_n de telles fonctions convergeant vers f dans L^2. On a donc, par continuité de α,

$$\alpha(f) = \lim f_n\phi,$$

la limite étant à comprendre dans L^2.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que f_n converge simplement presque partout vers f et $f_n\phi$ vers $\alpha(f)$. En regardant ces sous suites, on déduit qu'on a $\alpha(f) = f\phi$ presque partout. Donc, la multiplication par ϕ respecte L^2 et est continue, ce qui entraîne que $\phi \in \mathrm{L}^\infty$ et plus précisément que $||\phi||_\infty \leq |||\alpha||$ car si

$$|\phi| \geq ||\alpha|| + \epsilon$$

sur un ensemble de mesure positive E, on aurait

$$||\alpha(1_{\mathrm{E}})||^2 = \int_{\mathrm{E}} |\phi|^2 \mathrm{d}t \geq (||\alpha|| + \epsilon)^2 ||1_{\mathrm{E}}||^2$$

ce qui est absurde car $||1_{\mathrm{E}}|| > 0$ par hypothèse.

En utilisant que α commute avec $\exp(ixp)$, on obtient

$$(\phi(t+x)-\phi(t))f(t)=0$$

pour tout $f \in \mathrm{L}^2$ et $x \in \mathbf{R}$ de sorte que $\phi(t+x)=\phi(t)$ p.p. et donc ϕ constante, ce qu'on voulait. □

10. Unicité de la description quantique : le théorème de Stone-von Neumann

La question qui se pose est de savoir si l'axiomatique de Heisenberg caractérise la description de l'oscillateur harmonique, autrement, la description de Schrödinger est-il unique à un changement de base unitaire près.

La réponse est négative (cf. section suivante) si on se contente des relations (3.a), c'est-à-dire qu'on regarde les représentations de $\mathfrak{h}_1$, et positive si on pose convenablement le problème, à savoir si on regarde les relations (3.b), c'est-à-dire qu'on regarde les représentations unitaires de H_1.

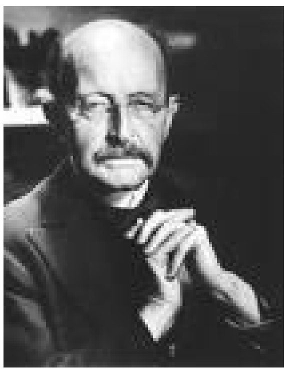
Commençons par quelques remarques formelles.

D'abord, si ρ est une représentation unitaire irréductible de H_1, le centre commute à l'action de H_1, et donc agit par homotéthie grâce au lemme de Schur. Autrement dit, il existe un caractère unitaire $\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{U}_1$ tel que $\rho(\exp(x\mathrm{E})) = \chi(x)$ où $\mathbf{U}_1$ est le cercle unité dans $\mathbf{C}$ (en tant que groupe multiplicatif). Or, c'est un exercice de taupe que de vérifier qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\chi(x) = \chi_\lambda(x) = \exp(i\lambda x)$. On dit que λ est le *niveau* de la représentation. Physiquement, changer $\lambda \neq 0$, c'est simblement changer la constante de Planck ou si on veut les unités.

La représentation de Schrödinger est de niveau 1. En général, on peut la modifier pour obtenir une représentation ρ_λ de niveau λ par les formules

$$\rho_\lambda(\exp(ix\mathrm{P}))(f(t)) = \exp(i\lambda xt)f(t), \rho_\lambda(\exp(ix\mathrm{Q}))(f(t)) = f(t+x).$$

La preuve de 9.0.9 s'adapte immédiatement pour montrer l'irréductibilité de ρ_λ pour λ non nul.



Max Planck

Bien entendu, lorsqu'on a n degré de libertés, on définit l'espace de Schrödinger par $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n, \mathrm{d}t)$ et la représentation ρ_λ est définie « coordonnée par coordonnée » par

$$\rho_\lambda(\exp(ix\mathrm{P}_i))(f(\underline{t})) = \exp(i\lambda x t_i) f(\underline{t}), \rho_\lambda(\exp(ix\mathrm{Q}_i))(f(\underline{t})) = f(\underline{t} + xe_i)$$

où e_k est la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
La description de Fock est analogue : on regarde l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$ muni de la mesure $\prod_{k=1}^n \frac{1}{\pi}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}y_k$ et on pose $a_k = \lambda\frac{\partial}{\partial z_k}$ de sorte que $a_k^* f(z) = z_k f(z)$.
Le cas $\lambda = 0$ est le cas de la mécanique classique qui correspond à une représentation de $\mathbf{R}^{2n}$ vu comme le quotient de H_n par son centre qui est de dimension 1 et pas très intéressante de ce point de vue.

***Théorème 10.0.10* (von Neumann, 1931).** — *Pour tout $\lambda \neq 0$, la représentation de Schrödinger*

$$\rho_\lambda : \mathrm{H}_n \to \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n, \mathrm{d}t)$$

est, à isomorphisme unitaire près, l'unique représentation unitaire irréductible de niveau λ.

John von Neumann

Il n'est pas question de donner la preuve (cf. [**9**], ou, plus lisible, [**2**]) ici -même si ce serait au niveau du cours-.

11. Lien entre représentation du groupe et de l'algèbre de Heisenberg

Bien que H_n soit simplement connexe, on peut se demander si le calcul formel aboutissant à (3.b) est justifié, ce qui entraînerait le théorème de Stone-von Neumann au niveau des algèbres de Lie. **Il n'en est rien.** En effet, on peut même trouver des opérateurs auto-adjoints u, v (non bornés) d'un Hilbert qui commutent sur un espace stable dense D tels que $\exp(ixu)$ et $\exp(iyq)$ ne commutent pas (cf. [**7**, VIII.5.Ex 1]). Mais on a un résultat positif lorsque que l'hamiltonien est raisonnable (cf. [**5**] et ses références).

***Théorème 11.0.11* (Nelson, 1959).** — *Supposons que p, q sont auto-adjoints, laissent stable un sous-espace dense $\mathrm{D} \subset \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$ et vérifient (2.a) sur D. Supposons que l'adhérence du graphe de $\mathrm{H} = p^2 + q^2$ sur D soit le graphe d'un opérateur autoadjoint (condition de Nelson). Alors, les relations (2.a) sont vérifiées.*

12. La représentation métaplectique

D'un point de vue sans coordonnée, on a considéré $\mathrm{V} = \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n$ muni de sa forme symplectique (*ie* alternée non dégénérée) standard (unique à changement de base près). Le groupe de Heisenberg est alors $\mathrm{H}_\omega = \mathbf{R} \oplus \mathrm{V}$ muni de la loi

$$(t, e).(t', e) = (t + t' + \frac{1}{2}\omega(e, e'), e + e') \text{ avec } e, e' \in \mathrm{V}$$

tandis que son algèbre de Lie $\mathfrak{h}_\omega = \mathbf{R} \oplus \mathrm{V}$ muni du crochet

$$[(t, e), (t', e)] = (\omega(e, e'), 0) \tag{12.a}$$

de sorte que $\mathrm{E} = (1, 0)$ est une base du centre de $\mathfrak{h}_n$. L'espace $\mathbf{R}^n$ est simplement un lagrangien L de ω (sous-espace totalement isotrope maximal) et la représentation de Schrödinger $\rho : \mathrm{H}_\omega \to \mathbf{U}(\mathcal{H})$ sur $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathrm{L}, \mathbf{C})$ est l'unique représentation unitaire de niveau 1. Soit alors $g \in \mathbf{Sp}(\mathrm{V})$, le groupe symplectique de ω. Comme g préserve la forme ω, l'application $(t, e) \to (t, g(e))$ est un isomorphisme de G préservant le centre de H_ω. On déduit une nouvelle représentation de niveau 1

$$\rho_g : \mathrm{H}_\omega \to \mathbf{U}(\mathcal{H})$$

défini par

$$\rho_g(t, e) = \rho(t, g(e)).$$

Par construction, ρ_g est irréductible de niveau 1. Le théorème de Stone-von Neumann assure qu'il existe un endomorphisme unitaire μ_g bien défini à une phase près (lemme de Schur) identifiant ρ et ρ_g, *ie* tel que

$$\mu_g(\rho(h).v) = \rho_g(h)\mu_g(v) \text{ avec } h \in \mathrm{H}_\omega, v \in \mathcal{H}. \tag{12.b}$$

Comme $\mu_{g_1} \circ \mu_{g_2}$ et $\mu_{g_1 g_2}$ sont solutions de (12.b), ils coïncident à une phase près d'après le lemme de Schur, donc coïncident dans $\mathbf{U}(\mathcal{H})/\mathbf{U}_1$. On a donc un morphisme de groupes

$$\mu : \mathbf{Sp}(\mathrm{V}) \to \mathbf{U}(\mathcal{H})/\mathbf{U}_1,$$

ce qu'on appelle une représentation *projective* du groupe symplectique. Lorsqu'on a une telle représentation $\mathrm{G} \to \mathbf{U}(\mathcal{H})/\mathbf{U}_1$, on construit formellement un autre groupe de Lie

$$\tilde{\mathrm{G}} = \{(g, u) \in \mathrm{G} \times \mathbf{U}(\mathcal{H}) \text{ tels que } \rho(g) = u \mod \mathbf{U}_1\}.$$

Il est muni d'un morphisme surjectif sur G (la première projection) dont le noyau s'identifie à $\mathbf{U}_1$ et est central par construction. On dira que $\tilde{\mathrm{G}}$ est une extension centrale de G par $\mathbf{U}_1$. La représentation ρ induit trivialement une représentation unitaire

$$\tilde{\rho} : \tilde{\mathrm{G}} \to \mathbf{U}(\mathcal{H}).$$

Dans le cas précédent, $\widetilde{\mathbf{Sp}(\mathrm{V})}$ s'appelle le groupe métaplectique et la représentation correspondante la représentation métaplectique. On peut prouver que $\widetilde{\mathbf{Sp}(\mathrm{V})}$ **n'est pas un groupe linéaire.** Cette construction pour un espace vectoriel réel est due au physicien Shale ([**8**]) et a ensuite été considérablement développée par Weil (cf. [**10**]) qui a notamment découvert des liens avec... la théorie des nombres. En fait, il existe un sous-groupe $\mathbf{Sp}_2(\mathrm{V})$ de $\widetilde{\mathbf{Sp}(\mathrm{V})}$ extension centrale de $\mathbf{Sp}(\mathrm{V})$ par ± 1 qui donc par restriction joue le même rôle que le groupe métaplectique (*loc. cit.* page 197, ou, plus lisible, [**4**]).

André Weil

13. L'oscillateur harmonique à une infinité de degrés de liberté et sa représentation de Fock

L'algèbre de Heisenberg opère par restriction de la représentation de Fock sur l'espace des polynômes $\mathbf{C}[z_1, \cdots, z_n]$ grâce aux opérateurs de création a_k^* de multiplication par z_k et d'annihilation a_k de dérivation par rapport à z_k. Le polynôme constant 1 est le vecteur de vide normalisé $|0\rangle$, autrement dit est tué par tous les opérateurs d'annihilation.
Considérons V_∞ l'espace vectoriel des polynômes en z, z^{-1} sans terme constant. On pose

$$\omega(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \mathrm{res}(\mathrm{Q}\ d\mathrm{P}) = \mathrm{res}(\mathrm{Q}(z)\mathrm{P}'(z)\mathrm{d}z)$$

où $\mathrm{res}(\mathrm{P}(z)\mathrm{d}z)$ est le résidu en zéro, à savoir le coefficient du terme en $z^{-1}\mathrm{d}z$ de P. Comme $\mathrm{res}(\mathrm{dP}) = 0$, on a

$$\mathrm{res}(\mathrm{QdP} + \mathrm{PdQ}) = 0$$

de sorte que ω est alternée. La formule

$$\mathrm{res}((\sum a_k z^k) z^{-1-n} \mathrm{d}z) = a_n$$

prouve que ω est non dégénérée.

Ceci permet de considérer comme plus haut (cf. (12.a)) l'algèbre de Heisenberg

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\infty = \mathbf{R}.\mathrm{E} \oplus \mathrm{V}_\infty$$

avec E central et

$$[e, e'] = \omega(e, e')\mathrm{E} \text{ avec } e, e' \in \mathrm{V}_\infty.$$

On a donc

$$[z^n, z^m] = n\mathrm{res}(z^{n+m-1}\mathrm{d}z) = n\delta_{n,m}\mathrm{E}$$

qui est bien une algèbre de Lie.
De même que dans le cas $\mathrm{V} = \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n$, l'algèbre $\mathfrak{h}_n$ opérait sur les fonctions holomorphes à n variables, c'est à dire sur L, on va construire une représentation (de Fock)

$$\delta : \mathfrak{h}_\infty \to \mathrm{End}(\mathcal{F}_\infty)$$

sur les polynômes sur ≪ la moitié ≫ de V_∞. Posons donc

$$\mathcal{F}_\infty = \mathbf{C}[z_1, \cdots, z_n, \cdots],$$

l'algèbre de polynômes à une infinité de variables $z_n, i > 0$. On a

$$\mathcal{F}_\infty = \mathbf{C}[z_1, \cdots, z_n, \cdots] \xrightarrow{\sim} \mathrm{SymL}+$$

où L^+ est le lagrangien

$$\mathrm{L}_+ = \langle z^n, n > 0\rangle$$

de $\mathfrak{h}_\infty$, ce qui est la version algébrique de $\mathcal{F} = \{\text{fonctions entières sur L}\}$ dans le cas de la dimension finie (les polynômes sont denses dans $\mathcal{F}$ pour la norme L^2).
En s'inspirant de la dimension finie, on pose

$$\delta(z^n) = \frac{\partial}{\partial z_n}, \delta(z^{-n}) = nz_n, n > 0, \delta(\mathrm{E}) = 1.$$

Ces formules définissent un morphisme d'algèbre de Lie

$$\delta_\infty : \mathfrak{h}_\infty \to \mathrm{End}(\mathcal{F}_\infty),$$

la représentation de Fock de $\mathfrak{h}_\infty$. Notons que le polynôme constant $|0\rangle = 1 \in \mathcal{F}_\infty$ est un vecteur de vide, c'est-à-dire est tué par tous les opérateurs d'hannihilation $\delta(z^n), n > 0$. La représentation est de niveau 1, à savoir $\delta(\mathrm{E}) = \mathrm{Id}$.

Remarque 13.0.12. — *Le lecteur esthète décrira cette action indépendamment des coordonnées.*

Cette situation algébrique [4] est en tout point analogue à ce qui précède.

4. Si on veut vraiment une situation d'action sur un Hilbert, il faut un peu compléter. C'est technique et n'apporte pas grand-chose pour comprendre. Le lecteur intéressé pourra aller consulter le très beau livre [**6**].

Proposition 13.0.13. — *La représentation de Fock de $\mathfrak{h}_\infty$ est irréductible, engendrée par le vecteur de vide $|0\rangle$ comme $\mathfrak{h}_\infty$-module. Le lemme de Schur est valable dans cette situation. De plus (forme faible de Stone-von Neumann), toute représentation irréductible de $\mathfrak{h}_\infty$ engendrée par un vecteur de vide (annulé par les $z^k, k>0$) et de niveau* 1 *est isomorphe à la représentation de Fock.*

Preuve : Soit $\mathrm{P} = \mathrm{P}[z_1, \cdots, z_n] \in \mathcal{F}_\infty$ non nul contenu dans un espace stable S. Par applications successives de $\delta(z^n)$, on peut supposer que P n'a pas de terme faisant apparaître z_n. Par récurrence sur n, on peut supposer que P est une constante non nulle. Mais alors par application successive de $\delta(z^{-k}, k>0)$, on obtient que tous les monômes sont dans S et donc $\mathrm{S} = \mathcal{F}_\infty$.
Le même argument prouve que $|0\rangle$ engendre.
Comme

$$\cap_{k>0} \ker(\delta(z^k)) = \mathbf{C}|0\rangle,$$

un morphisme f de $\mathcal{F}_\infty$ commutant à δ préserve $\mathbf{C}|0\rangle$: soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $f(|0\rangle) = \lambda|0\rangle$. Alors, $\mathrm{Ker}(f-\lambda)$ est stable par $\mathfrak{h}_\infty$ et non nul, c'est donc $\mathcal{F}_\infty$, ce qu'on voulait.
Si maintenant $\mathcal{F}'$ est irréductible engendrée par $|0'>$, on définit

$$f(\mathrm{P}(z_1, \cdots, z_n)) = f(\mathrm{P}(\delta(z^{-1}), \cdots, \delta(z^{-n}))|0\rangle)) = \mathrm{P}(\delta'(z^{-1}), \cdots, \delta'(z^{-n})|0'> .$$

On vérifie que f commute à l'action de $\mathfrak{h}_\infty$. Comme f est non nulle, son noyau est, qui est invariant par $\mathfrak{h}_\infty$, est nul (irréductibilité de $\mathcal{F}$). De même, son image est $\mathcal{F}'$ par irréductibilité. $\square$

14. Action de $\mathbf{C}^*$

Si on change z en $\lambda^{-1}z, \lambda \in \mathbf{C}^*$, le coefficient de $z^{-1}\mathrm{d}z$ reste inchangé et donc le résidu de $\mathrm{P}(z)\mathrm{d}z$ l'est aussi. On déduit que l'action induite sur $\mathrm{V}_\infty = \mathbf{C}[z^{\pm 1}]$ préserve ω et donc induit une transformation symplectique de V_∞.
On déduit comme dans la section précédente une action de $\mathbf{C}^*$ sur $\mathfrak{h}_\infty$ et donc pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ une nouvelle représentation définie par

$$\delta_\lambda(\mathrm{P}(z)).v = \delta(\mathrm{P}(\lambda^{-1}z)).v, \mathrm{P}(z) \in \mathbf{C}[z^\pm], v \in \mathcal{F}.$$

Comme $\mathbf{C}[z]$ est préservé, $|0\rangle$ est encore un vecteur de vide pour δ_λ et la représentation est encore de niveau 1. Grâce à (13.0.13), on déduit comme plus haut l'existence d'un automorphisme

$$\mu_\lambda : \mathcal{F} \to \mathcal{F},$$

a priori seulement bien défini à un scalaire près, identifiant δ_λ et δ, c'est-à-dire vérifiant

$$\mu_\lambda(\mathrm{P}(z)v) = \mathrm{P}(\lambda^{-1}z)\mu_\lambda(v), \ \mathrm{P}(z) \in \mathbf{C}[z^\pm], v \in \mathcal{F}. \tag{14.a}$$

Comme μ_λ doit envoyer $|0\rangle$ sur un de ses multiples, on peut normaliser μ_λ en lui imposant

$$\mu_\lambda(|0\rangle) = |0\rangle.$$

Dans ces conditions, on a donc une représentation $\mathbf{C}^* \to \mathbf{GL}(\mathcal{F})$ définie par $\lambda \to \mu_\lambda$. La formule (14.a) et le fait que $|0\rangle$ engendre $\mathcal{F}$ comme $\mathfrak{h}_\infty$ module prouve que pour tout v, on peut écrire $\mu_\lambda(v)$ comme un polynôme en les z_i à coefficients dans $\mathbf{C}[\lambda]$. Comme μ_λ est polynomial en λ, on a au niveau des algèbres de Lie une flèche

$$\mathbf{C} \to \mathrm{End}(\mathcal{F})$$

définie par l'image L_0 de 1 obtenue en écrivant $\lambda = 1 + \epsilon$ et en regardant à l'ordre 1 en ϵ. Écrivons donc

$$\mu_{1+\epsilon} = 1 + \epsilon \mathrm{L}_0 + \mathrm{O}(\epsilon)$$

et remplaçons dans (14.a). On trouve alors

$$(1 + \epsilon \mathrm{L}_0)(\mathrm{P}(z).v) = (\mathrm{P}(z) - \epsilon z \frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}).(1 + \epsilon \mathrm{L}_0)(v) + \mathrm{O}(\epsilon)$$

et donc

$$\mathrm{L}_0(\mathrm{P}(z).v) = \mathrm{P}(z).\mathrm{L}_0(v) - z\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}.v.$$

Ainsi, L_0 vérifie

(14.b) $$[\mathrm{L}_0, \delta(\mathrm{P})] = \delta(-z\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}),\ \mathrm{P}(z) \in \mathbf{C}[z^\pm].$$

15. Action par transformation holomorphe

On a utilisé dans la section précédente le fait que la transformation $z \mapsto \lambda z$ préservait $\mathbf{C}[z]$ et le résidu pour définir une action de $\mathbf{C}^*$ puis L_0.

Généralement, on a envie de faire la même chose en utilisant une transformation $z \mapsto h(z)$ inversible préservant l'origine. L'idéal serait qu'elle soit polynomiale. Hélas, le théorème de d'Alembert interdit cette possibilité dès que h est de degré > 1 (exercice : pourquoi ?). L'idée est d'autoriser h à être holomorphe et de développer h en série entière. Mais du coup, il faut un peut agrandir $\mathfrak{h}_\infty$ pour autoriser des séries de Laurent car $\mathrm{P}(h(z))$ ne sera plus un polynôme en z^{-1}, z mais une série. On définit simplement

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathbf{C}.\mathrm{E} \oplus \mathbf{C}((z))$$

où $\mathbf{C}((z)) = \mathbf{C}[[z]][z^{-1}]$ est l'anneau (en fait le corps) des séries de Laurent formelles. Si $h(z) = \lambda z + \mathrm{O}(z^2)$, on a

$$z^{-n} = \lambda^{-n} z^{-n}(1 + z\mathrm{O}(z))^{-n} = \lambda^{-n} z^{-n}(1 - nz\mathrm{O}(z) + ...) \in \mathbf{C}((z))$$

de sorte que

$$\mathrm{P}(z) \in \mathbf{C}((z)) \Rightarrow \mathrm{P}(h(z)) \in \mathbf{C}((z)).$$

Le résidu est toujours défini sur $\mathbf{C}((z))\mathrm{d}z$ ce qui permet de définir le crochet de Lie par E central et

$$[\mathrm{P},\mathrm{Q}] = \mathrm{res}(\mathrm{Q}\mathrm{d}\mathrm{P})\mathrm{E}.$$

Comme pour tout $v \in \mathcal{F}_\infty = \mathbf{C}[z_1, \cdots, z_n, \cdots]$, on a $z^n.v = \frac{\partial}{\partial z_n} v = 0$ pour $n >> 0$, l'algèbre de Lie $\hat{\mathfrak{h}}$ agit encore sur $\mathcal{F}_\infty$ puisque seuls un nombre fini de termes de la série

$$\mathrm{P}(z) = \sum_{n>-\mathrm{N}} a_n z^n$$

contribuent donc au calcul de $\mathrm{P}(z).v$. Bien entendu, comme $\mathfrak{h}_\infty \subset \hat{\mathfrak{h}}$, les analogues des énoncés (13.0.13) sont encore vrais pour $\hat{\mathfrak{h}}$.

Pour qu'une transformation holomorphe

$$z \mapsto h(z), h(0) = 0$$

agisse sur $\hat{\mathfrak{h}}$ par reparamétrisation

$$\mathrm{P}(z) \mapsto \mathrm{P}(h(z)).$$

encore faut-t-il vérifier qu'on a invariance du résidu afin qu'elle soit symplectique.

Lemme 15.0.14. — *Soit* $h(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n, a_1 \neq 0$ *une série entière. Pour tout* $\mathrm{P} \in \mathbf{C}((z))$, *on a*

$$(*) \qquad \mathrm{res}(\mathrm{P}(h(z))\mathrm{d}h(z)) = \mathrm{res}(\mathrm{P}(z)\mathrm{d}z).$$

Preuve : Si $\mathrm{P} \in \mathbf{C}[[z]]$, les deux membres de (*) sont nuls. Par linéarité, il suffit de le vérifier pour $\mathrm{P} = z^m, m < 0$. Si $m < -1$, on a

$$h(z)^m h'(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{m+1}\mathrm{d}h(z)^{m+1}$$

de résidu nul de sorte que les deux membres de (*) sont nuls. Si $m = -1$, on a

$$h(z)^m h'(z)\mathrm{d}z = \frac{\lambda + \mathrm{O}(z)}{\lambda z + \mathrm{O}(z^2)} = \frac{1 + \mathrm{O}(z)}{z + \mathrm{O}(z^2)} = \frac{1}{z} + \mathrm{O}(1)$$

de sorte que les deux membres ont résidu 1. □

Soit Γ l'ensemble des séries entières de la forme

$$h(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n, a_1 \neq 0,$$

supposes convergentes [5] pour simplifier, pensées comme des applications holomorphes définies au voisinage de zéro et $\mathbf{C}$ préservant l'origine. Le théorème d'inversion locale assure l'existence pour tout h dans Γ d'une série convergente

$$h^{-1}(z) \in \Gamma$$

5. c'est-à-dire de rayon de convergence non nul.

tel que

$$h(h^{-1}(z)) = h^{-1}(h(z)) = z$$

au voisinage de l'origine, et donc avec l'égalité correspondante des séries.
L'action de Γ sur $\mathbf{C}((z))$

$$\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(h^{-1}(z))$$

s'étend en une action sur $\hat{h}$ grâce au lemme précédent. On a donc un groupe Γ qui agit sur $\hat{h}$. Comme dans le cas $\lambda \in \mathbf{C}^*$ de la section précédente, on peut « tordre » l'action de $\hat{\mathfrak{h}}$ grâce à $\mathfrak{h} \in \Gamma$ et ainsi définir comme plus haut

$$\delta_h : \hat{\mathfrak{h}} \to \mathrm{End}(\mathcal{F}_\infty)$$

par la règle (6)

$$\delta_h(\mathrm{P}(z)).v = \delta(\mathrm{P}(h^{-1}(z))).v, \mathrm{P}(z) \in \mathbf{C}((z)), v \in \mathcal{F}_\infty.$$

Comme l'action de Γ préserve par construction $\mathbf{C}[[z]]$, le vecteur de vide $|0\rangle$ est encore annulé par $\delta_h(z\mathbf{C}[[z]])$. Comme plus haut, (13.0.13) permet de définir $\mu_h : \mathcal{F}_\infty \to \mathcal{F}_\infty$ normalisé par $\mu_h(|0\rangle) = |0\rangle$ identifiant δ_h et δ, c'est-à-dire vérifiant

(15.a) $$\mu_h(\mathrm{P}(z)v) = \mathrm{P}(h^{-1}z)\mu_h(v),\ \mathrm{P}(z) \in \mathbf{C}[z^\pm], v \in \mathcal{F}_\infty.$$

On a donc obtenu une représentation

$$\mu : \begin{cases} \Gamma & \to & \mathbf{GL}(\mathcal{F}_\infty) \\ h & \mapsto & \mu_h \end{cases}$$

On peut montrer que, dans un sens convenable, l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}^+$ de Γ s'identifie à l'algèbre des champs de vecteurs holomorphes à coefficients polynomiaux de base $\mathrm{d}_n = -z^{n+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}, n \geq 0$ avec comme crochet celui des champs des vecteurs, à savoir

$$[\mathrm{d}_n, \mathrm{d}_m]_0 = (n-m)\mathrm{d}_{n+m}$$

de sorte qu'on doit avoir un morphisme d'algèbre de Lie

$$\mathrm{d}\mu : \mathfrak{L}^+ \to \mathrm{End}(\mathcal{F}_\infty).$$

Pour éviter trop d'abstraction inutile, voyons comment faire apparaître les endomorphismes

$$\mathrm{L}_n, n \geq 0$$

images de d_n par $\mathrm{d}\mu$. On regarde pour $n \geq 0$ l'élément

$$h_\epsilon^{-1}(z) = z - \epsilon z^{n+1}$$

6. On est contraint de prendre l'inverse de h pour avoir une action à gauche.

(si $n=0$ on suppose $\epsilon \neq 1$, ce qui n'aura pas d'influence car on va développer formellement en ϵ, c'est-à-dire si on veut à ϵ petit). En regardant à l'ordre 1 la relation (15.a) après avoir écrit

$$\mu_{h_\epsilon} = 1 + \epsilon \mathrm{L}_n,$$

on trouve exactement comme plus haut la relation

$$\mathrm{L}_n(\mathrm{P}(z).v) = \mathrm{P}(z).\mathrm{L}_0(v) - z^{n+1}\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}.v$$

c'est-à-dire

$$[\delta(z^m), \mathrm{L}_n] = m\delta(z^{n+m}),\ m \in \mathbf{Z}. \tag{15.b}$$

Remarque 15.0.15. — *La formule (15.b) caractérise* L_n *puisqu'elle traduit la relation d'entrelacement (15.a).*

Comme μ est un morphisme de groupes, $\mathrm{d}\mu$ doit être un morphisme d'algèbre de Lie, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$[\mathrm{L}_n, \mathrm{L}_m] = (n-m)\mathrm{L}_{n+m} \text{ pour tout } n, m \geq 0 \tag{15.c}$$

16. La formule de Sugawara

Il est clair que la formule (15.b) permet de calculer $\mathrm{L}_n, n \geq 0$ de proche en proche en partant de $\mathrm{L}_n(|0\rangle) = |0\rangle)$. Il se trouve qu'il existe une formule remarquable permettant de les calculer. Commençons par introduire *l'ordre normal* sur les

$$a_n \overset{déf}{=} \delta(z^n),\ n \in \mathbf{Z}^* \text{ et } a_0 = 0$$

(dans ce qui suit, on aurait pu supposer a_0 égal à n'importe quel homotéthie) de sorte qu'on a

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m,-n}$$

puisque δ est de niveau 1.
Avec ces notations, (15.b) devient

$$[a_m, \mathrm{L}_n] = ma_{n+m}. \tag{16.a}$$

On pose

$$: a_i a_j := \begin{cases} a_i \circ a_j & \text{si } i \leq j \\ a_j \circ a_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

On utilisera sans plus de précaution la formule triviale

$$[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$$

valable pour 3 endomorphisme a, b, c d'un espace vectoriel quelconque.

***Proposition 16.0.16* (Sugawara).** — *Pour tout $v \in \mathcal{F}_\infty$, l'ensemble des $j \in \mathbf{Z}$ tels que*

$$: a_{-j}a_{j+n} : (v) \neq 0$$

est fini et on a $\mathrm{L}_n = \frac{1}{2}\sum_j : a_{-j}a_{j+n} :$.

Preuve : D'après la remarque15.0.15, il suffit de vérifier que $\frac{1}{2} : a_{-j}a_{j+n} :$ satisfait les relations (15.b). Prouver la proposition par un calcul brutal n'est pas difficile, mais on peut aller très vite en utilisant une idée chère aux physiciens. Considérons l'expression formelle

$$\Lambda_n = \frac{1}{2}\sum_j a_{-j}a_{j+n},$$

qui elle a un nombre infini de termes non nuls lorsqu'on cherche à l'évaluer sur un élément de $\mathcal{F}_\infty$. La remarque est que la différence

$$: a_i a_j : - a_i a_j$$

est soit nul soit égal à $[a_i, a_j]$ et donc **est toujours central**. Ainsi, on a formellement

$$\mathrm{L}_n = \Lambda_n + \mathrm{NId}$$

où N est une constante... infinie, ou plutôt une somme infinie

$$\mathrm{N} = \sum_{\mathrm{I}} c_i$$

de constantes c_i. Évidemment, ceci ne veut rien dire, sauf si on calcule un crochet $[a, \mathrm{L}_n]$ puisqu'alors on a

$$[a, \sum_{\mathrm{I}} c_i \mathrm{Id}] = \sum_{\mathrm{I}} c_i [a, \mathrm{Id}] = \sum_{\mathrm{I}} 0 = 0$$

de sorte qu'on a

$$[a, \mathrm{L}_n] = \frac{1}{2}\sum_j [a, a_{-j}a_{j+n}] \ll = \gg [a, \Lambda_n]$$

Et ce raisonnement est en fait... parfaitement correct même si expliqué de façon un peu provocatrice. On a donc

$$\begin{aligned}
[a_k, \mathrm{L}_n] &= \frac{1}{2}\sum_j [a_k, a_{-j}a_{j+n}] \\
&= \frac{1}{2}\sum_j [a_k, a_{-j}]a_{j+n} + \frac{1}{2}\sum_j a_{-j}[a_k, a_{j+n}] \\
&= \frac{1}{2}k a_{k+n} + \frac{1}{2}k a_{k+n} \\
&= k a_{k+n}
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait. $\square$

Comme on voit, la preuve n'est pas difficile. C'est trouver la formule qui était aussi difficile qu'inattendu. Outre la possibilité de calculer les L_n apparaît un autre phénomène : les calculs n'utilisent pas la positivité de n.

Définition 16.0.17. — *Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on définit l'endomorphisme de L_n de $\mathcal{F}_\infty$ par*

$$\mathrm{L}_n = \frac{1}{2} \sum_j : a_{-j} a_{j+n} : .$$

Ainsi, pour tout n la formule (15.b) est valable.

17. La représentation de l'algèbre de Virasoro

On va définir une nouvelle algèbre de Lie, dite de Virasoro, en deux étapes.
D'abord, on considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}$ des champs de vecteurs *méromorphes* base

$$\mathrm{d}_n = -z^{n+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}, n \in \mathbf{Z}$$

avec comme plus haut le crochet celui des champs des vecteurs, à savoir

$$[\mathrm{d}_n, \mathrm{d}_m]_0 = (n-m)\mathrm{d}_{n+m}.$$

On définit ensuite une extension centrale $\mathfrak{Vir} = \mathbf{C}.c \oplus \mathfrak{L}$ de $\mathfrak{L}$ par $\mathbf{C}.c$ par les règles c central et

$$[\mathrm{d}_n, \mathrm{d}_m] = (n-m)\mathrm{d}_{n+m} + \delta_{n,-m} \frac{m^3 - m}{12} c. \tag{17.a}$$

Miguel Virasoro

Lemme 17.0.18. — $\mathfrak{Vir}$ *est une algèbre de Lie.*

Preuve : On doit vérifier l'identité de Jacobi, autrement dit

$$[[\mathrm{d}_p, \mathrm{d}_q], \mathrm{d}_r] + [[\mathrm{d}_q, \mathrm{d}_r], \mathrm{d}_p] + [[\mathrm{d}_r, \mathrm{d}_p], \mathrm{d}_q] = 0$$

pour tout $p, q, r \in \mathbf{Z}$. C'est un calcul. □

Notons que $\mathfrak{L}^+$ est bien une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{Vir}$ puisque la partie centrale s'annule sur $\mathfrak{L}^+$. En fait, et c'est un point clef de la théorie des cordes, la représentation $\mathfrak{L}^+ \to \mathrm{End}(\mathcal{F}_\infty)$ se prolonge à $\mathfrak{Vir}$. Précisément, on a

***Proposition 17.0.19* (Sugawara).** — *Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, les opérateurs L_n vérifient*

$$[\mathrm{L}_n, \mathrm{L}_m] = (n-m)\mathrm{L}_{n+m} + \delta_{n,-m}\frac{m^3-m}{12}\mathrm{Id}$$

de sorte que l'application linéaire

$$\begin{cases} \hat{\mathfrak{h}} & \to & \mathrm{End}(\mathcal{F}_\infty) \\ d_n & \mapsto & \mathrm{L}_n \\ c & \mapsto & \mathrm{Id} \end{cases}$$

est un morphisme d'algèbre de Lie.

Preuve : On utilise la même astuce pour se débarrasser de l'ordre normal (pourtant indispensable pour définir les L_n sans sommer une infinité de termes non nuls !). On écrit d'abord, avec la convention d'écriture que les sommes en jeu sont des sommes finies une fois évaluées sur $v \in \mathcal{F}_\infty$ donné, l'ensemble d'indice étant aussi grand qu'on veut dans $\mathbf{Z}$.

$$[\mathrm{L}_m, \mathrm{L}_n] = \frac{1}{2}\sum_j [a_{-j}a_{j+m}, \mathrm{L}_n] \tag{17.b}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j a_{-j}[a_{j+m}, \mathrm{L}_n] + \frac{1}{2}\sum_j [a_{-j}, \mathrm{L}_n]a_{j+m} \tag{17.c}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j (j+m)a_{-j}a_{j+m+n} - \frac{1}{2}\sum_j ja_{-j+n}a_{j+m} \tag{17.d}$$

On va remettre dans l'ordre normal. Dans la première somme, on sépare les indices j tels que
1)$-j \leq j+m+n$ pour lesquels l'ordre est l'ordre normal des indices j tels que
2)$-j > j+m+n$. Pour ceux là, on observe que a_{-j} et a_{j+m+n} commutent sauf si $m+n=0$ de sorte qu'on a

$$a_{-j}a_{j+m+n} =: a_{-j}a_{j+m+n} : +\delta_{n,-m}[a_{-j}, a_{j+m+n}] =: a_{-j}a_{j+m+n} : -j\delta_{n,-m}.$$

Mais si $n+m$ est nul, $j<0$ de sorte qu'on a

$$\frac{1}{2}\sum_j (j+m)a_{-j}a_{j+m+n} = \frac{1}{2}\sum_j (j+m) : a_{-j}a_{j+m+n} : -\frac{1}{2}\sum_{j<0} j(j+m)\delta_{n,-m}.$$

Exactement de la même manière dans la seconde somme, on obtient

$$\frac{1}{2}\sum_j ja_{-j+n}a_{j+m} = \frac{1}{2}\sum_j j : a_{-j+n}a_{j+m} : -\frac{1}{2}\sum_{j\geq -m} j(j+m)\delta_{n,-m}$$

où l'on rappelle que les sommes sont finies, mais sommées sur un intervalle de $\mathbf{Z}$ aussi grand qu'on veut.

En additionnant et en changeant d'indice $j \mapsto j+n$ dans la seconde somme, on obtient

$$[\mathrm{L}m, \mathrm{L}_n] = (m-n)\mathrm{L}_{m+n} - \frac{1}{2}\sum_{j<-m}^{-1} j(j+m)\delta_{n,-m}.$$

On calcule alors $-\frac{1}{2}\sum_{j<-m}^{-1} j(j+m) = (m^3-m)/12$ pour conclure. □

Le lecteur intéressé par ce sujet, notamment pour le lien entre cette théorie et la correspondance bosons-fermions, pourra consulter [**3**], référence de laquelle les derniers présentés calculs sont essentiellement issus.

18. Remarques finales

On pourrait penser que l'action de la partie négative de $\mathfrak{Vir}$ engendrée par les $\mathrm{d}_n, n \leq 0$ devrait s'obtenir aussi simplement que celle de la partie positive, simplement en changeant z en z^{-1}. C'est plus compliqué que cela, car cette opération ne préserve pas $\mathbf{C}[z]$ et donc on n'a plus préservation du vecteur de vide. On pourrait obtenir une représentation de cette manière, mais il faudrait montrer qu'on a encore un vecteur de vide pour l'action tordue, ce qui est lourd. C'est pourquoi l'on a procédé de cette manière.

Par ailleurs, comme on le voit, ce n'est pas $\mathfrak{L}$ qui agit, mais $\mathfrak{Vir}$, à savoir une extension centrale avec action scalaire du centre. Autrement dit, on a une action projective de $\mathfrak{L}$: c'est une situation en tout point analogue à la situation métaplectique.

On peut se demander si l'étrange facteur central $\frac{m^3-m}{12}\delta_{m,-n}$ a une propriété particulière, autrement dit s'il y a d'autres extensions centrales non triviales de $\mathfrak{L}$ par $\mathbf{C}$. En fait, il n'y en a essentiellement qu'une (voir [**3**, 1.3]).

19. Appendice

On veut donner ici quelques détails de plus sur la définition de $\exp(itu)$ dans le cas auto-adjoint. La clef est d'approximer u par des opérateurs continus auto-adjoints, qui donc eux ont une exponentielle simplement définie par la série entière habituelle, puis de passer à la limite. Il n'est pas question de donner la preuve dans son intégralité, qui est assez longue quoique élémentaire, mais de donner les idées clefs.

Soit donc u auto-adjoint.

Lemme 19.0.20. — *Soit $\lambda \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$. Alors $u+\lambda$ est une bijection de* D sur *$\mathcal{H}$. Son inverse $(u+\lambda)^{-1}$ est continu de norme $\leq 1/|\mathrm{Im}(\lambda)$.*

Preuve : Comme $(u(x), x) = (x, u(x)) = \overline{(u(x), x)}$, on a $(u(x), x) \in \mathbf{R}$. On déduit que ses valeurs propres sont réelles et donc $u+\lambda$ est injectif. Montrons la surjectivité.

On a donc

$$|(u+\lambda)x,x)| \geq |\mathrm{Im}((u+\lambda)x,x) = |\mathrm{Im}(\lambda)|(x,x) \tag{19.a}$$

de sorte que (Cauchy-Schwarz)

$$||(u+\lambda)x|| \geq |\mathrm{Im}(\lambda)|||x||.$$

Montrons que l'image I_λ de $(u+\lambda)$ est fermée. Soit donc $y_n = (u+\lambda)(x_n) \in \mathrm{I}_\lambda$ convergeant vers $y \in \mathcal{H}$. On a donc

$$||x_n - x_m|| \leq \frac{||y_n - y_m||}{|\mathrm{Im}(\lambda)|}$$

prouvant que x_n est de Cauchy, donc converge vers $x \in \mathcal{H}$. On déduit que la suite $(x_n, u(x_n) = y_n - \lambda x_n)$ du graphe de u converge vers $(x, y-\lambda x)$. Comme le graphe est fermé, on a $y - \lambda x = u(x)$ et donc $y \in \mathrm{I}_\lambda$, ce qu'on voulait. Montrons que I_λ est dense. Soit donc y dans l'orthogonal. La formule

$$\langle u(x) + \lambda(x), y\rangle = 0$$

prouve que $x \mapsto \mathfrak{u}(x), y\rangle$ est continue sur $\mathrm{dom}(u)$ donc $y \in \mathrm{dom}(u^*) = \mathrm{dom}(u)$ puisque u autoadjoint. On a alors

$$\langle x, u(y) + \bar{\lambda}(y)\rangle = 0 \text{ pour tout } x \in \mathrm{dom}(u)$$

et donc $u(y) = -\bar{\lambda} y$ par densité de $\mathrm{dom}(u)$. Comme les valeurs propres de u sont réelles, y est nul puisque $\bar{\lambda} \notin \mathbf{R}$ de sorte que $u + \lambda$ est bijectif. Ainsi, $\mathrm{I}_\lambda = \mathcal{H}$ puisque dense et fermé. L'inégalité (19.a) se réécrit en posant $x = (u+\lambda)^{-1}(y)$

$$||(u+\lambda)^{-1}(y)|| \leq \frac{||y||}{|\mathrm{Im}(\lambda)|}$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

L'idée est alors de considérer

$$u_\epsilon = \frac{(1+i\epsilon u)^{-1} - 1}{i\epsilon}.$$

En développant formellement à l'ordre 1 en ϵ, on s'attend à $\lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon = u$, ce qui est bien le cas au sens où pour tout $v \in \mathrm{dom}(u)$, on a

$$\lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon(v) = u(v).$$

On montre alors que les exponentielles usuelles $\exp(itu_\epsilon)(v)$ convergent pour tout $v \in \mathcal{H}$ vers un vecteur noté $\exp(itu)(v)$ qui a les bonnes propriétés. Pour les (longues) vérifications, adapter [**1**, VII.7].

Références

[1] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Masson, Paris, 1983.

[2] François Bruhat. *Représentations des groupes localement compacts.* Notes de cours polycopiées. ENS, 45 rue d'Ulm, Paris, 1969.

[3] V. G. Kac and A. K. Raina. *Bombay lectures on highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras*, volume 2 of *Advanced Series in Mathematical Physics.* World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, NJ, 1987.

[4] Gérard Lion and Michèle Vergne. *The Weil representation, Maslov index and theta series*, volume 6 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston, Mass., 1980.

[5] Niels Skovhus Poulsen. On the canonical commutation relations. *Math. Scand.*, 32 :112–122, 1973.

[6] Andrew Pressley and Graeme Segal. *Loop groups.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986. Oxford Science Publications.

[7] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis.* Academic Press, New York, 1980.

[8] David Shale. Linear symmetries of free boson fields. *Trans. Am. Math. Soc.*, 104 :149–167, 1962.

[9] John von Neumann. Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operationen. *Math. Annal.*, 104 :570–578, 1931.

[10] André Weil. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math.*, 104 :143–211, 1964.

---

28 janvier 2010

Yves Laszlo, École Poytechnique, CMLS, 91128 Palaiseau Cedex, France
E-mail : laszlo@math.polytechnique.fr