MAT311 - 2010-2011.
Analyse réelle et complexe

Devoir numéro 2.
A RENDRE IMPERATIVEMENT AVANT LE 22 JUIN

Espaces de Hilbert et Fonctions holomorphes

Problème I : Les opérateurs à noyau.

Soit $K(x,y)$ une fonction de $L^2([0,1]^2,\mathbb{C})$. On considère l'opérateur

$$F_K : f \longrightarrow \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

de $L^2([0,1],\mathbb{C})$ dans lui-même.

1. Montrer que l'opérateur F_K est continu et qu'il est auto-adjoint si et seulement si $K(x,y) = \overline{K}(y,x)$.
   On veut montrer que l'opérateur F_K est compact.
2. Soit f_n une suite bornée de $L^2([0,1],\mathbb{C})$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'elle converge faiblement vers f. Montrer en utilisant le théorème de Fubini, que pour presque tout x, on a
$$\int_0^1 K(x,y)f_n(y)dy = \langle K(x,\bullet), f_n(\bullet)\rangle \longrightarrow \langle K(x,\bullet), f\rangle = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$
3. En déduire que $F_K f_n$ est une suite qui converge presque partout. Démontrer l'inégalité
$$\|F_K f(x)\|_{L^2} \leq k(x)\|f\|_{L^2}$$
   où $k(x) = \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy$ et le fait que $k(x) \in L^2$. Utiliser le théorème de convergence dominée pour conclure que $F_K f_n$ converge dans $L^2([0,1],\mathbb{C})$ vers $F_K f$.
4. En déduire la proposition suivante
   Proposition. *Il existe une suite (φ_n, λ_n) de solutions de*
$$\int_0^1 K(s,t)\varphi(t)dt = \lambda\varphi(s)$$
   telle que $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ soit une base Hilbertienne, et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels tendant vers 0. On a
$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n(s)\overline{\varphi}_n(t)$$
5. Montrer que
$$\int_{[0,1]^2} |K(s,t)|^2 dsdt = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n^2$$
6. En déduire que les λ_n vérifient $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty$, condition plus forte que la simple convergence vers 0 des λ_n.

Problème II : Problème de Mittag-Leffler.

Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et S l'ensemble de ses pôles.

1. Montrer que l'intersection de S et d'un compact de $\mathbb{C}$ est finie. En déduire que S est dénombrable.
2. Si S est infini, montrer qu'il existe une bijection

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & S \\ n & \mapsto & z_n \end{array} \right.$$

telle que

$$\lim |z_n| = \infty.$$

Inversement, soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes deux à deux distincts (non nuls pour simplifier l'exposition) qui tend vers l'infini et $P_n, n \geq 0$ une suite de polynômes à valeurs complexes nuls en 0. On cherche à montrer l'existence de f méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont l'ensemble des pôles est exactement

$$\Sigma = \{a_n, n \geq 0\}$$

telle que la partie polaire de f en a_n soit

$$P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right).$$

3. Montrer l'existence de $Q_n \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\forall z \text{ tel que } |z| \leq |a_n|/3,\ \left|P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - Q_n(z)\right| \leq \left|\frac{2z}{a_n}\right|^n.$$

On choisit Q_n comme plus haut et on pose

$$f_n = P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - Q_n(z).$$

4. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur tout compact contenu dans $\mathbb{C} - \Sigma$.
5. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ répond au problème.