

Documents disponibles sur
[www.math.polytechnique.fr/~ laszlo](http://www.math.polytechnique.fr/~laszlo)

Enseignants :

F. Golse (golse@math.polytechnique.fr),
Y. Laszlo (laszlo@math.polytechnique.fr),
C. Viterbo (viterbo@math.polytechnique.fr).

N'hésitez pas à contacter (difficultés, coquilles dans poly, questions scientifiques...) l'un de nous ou votre professeur de PC et surtout de passer au laboratoire (CMLS) pour discuter.

Les amphis 1 (topologie) et 7,8,9 (fonctions holomorphes) sont assurés par YL,
2,3,4 (intégration, Fourier) par FG et
5,6 (Hilbert) par CV.

Mathématiques : de multiples points de vue possibles.

« *To those who do not know mathematics it is difficult to get across a real feeling as to the beauty, the deepest beauty, of nature ... If you want to learn about nature, to appreciate nature, it is necessary to understand the language that she speaks.* », (R. Feynman, Nobel 1965).

« *Pourquoi les nombres sont-ils beaux ? Cela revient à se demander pourquoi la neuvième symphonie de Beethoven est belle. Si vous ne voyez pas pourquoi, personne ne pourra vous l'expliquer. Je sais que les nombres sont beaux. S'ils ne sont pas beaux, rien ne l'est.* », (P. Erdős).

Un peu de topologie



Henri Lebesgue



Georg Cantor



Émile Borel

Espaces métriques

Définition

Une distance $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}^+$ est une application symétrique vérifiant :

- 1) L'inégalité triangulaire.
- 2) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$.

On dit que X est un espace métrique.

Exemple fondamental. X partie d'un evn, $d(x, y) = \|x - y\|$.

Importance du choix des normes : l'automobiliste choisira sur $X = C^0([0, T], \mathbf{R})$ la norme $N_\infty = \sup(\text{vitesse})$ (nombre de points) ou $N_2 = \sqrt{\int (\text{vitesse})^2}$ (consommation).

Ex $C^0(\mathbf{R})$ avec $d_\infty(f, g) = \min(1, \sup |f - g|)$ distance de la *convergence uniforme*.

Adhérence

Comme pour les normés, on définit la notion d'ouvert, fermé et de convergence des suites. On se souviendra que

$$F \text{ fermé dans } X \iff X - F \text{ ouvert dans } X.$$

Terminologie

Une suite extraite de (x_n) est une suite de la forme $x_{\varphi(n)}$ avec $\varphi \nearrow \nearrow$. Les limites des suites extraites de la suite (x_n) sont ses valeurs d'adhérence.

Si (x_n) converge alors elle a une unique valeur d'adhérence.

Définition

- 1) L'adhérence \bar{Y} de $Y \subset X$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence dans X des suite à valeurs dans Y : c'est le plus petit fermé de X contenant Y .
- 2) $Y \subset X$ dense dans X ssi $\bar{Y} = X$.

Ex \mathbf{Q} dense dans \mathbf{R} , $\mathbf{R}[t]$ dense dans $(C^0([0, 1]), \sup_{[0,1]})$ mais pas dans $C^0(\mathbf{R})$ muni de $d_\infty(f, g) = \min(1, \sup |f - g|)$ (exo).

Observation : x valeur d'adhérence de (x_n) ssi

$$\forall \epsilon > 0, \text{card}(\{k | x_k \in B(x, \epsilon)\}) = \infty.$$

De même, $x \in \bar{Y}$ ssi

$$\forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap Y \neq \emptyset.$$

Corollaire

L'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (x_n) est

$$\bigcap_n \overline{\{x_k, |k \geq n\}}.$$

Distance et adhérence

Pour $Y \subset X$, on pose

$$d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y).$$

$$\text{On a } d(x, Y) = 0 \iff x \in \bar{Y}.$$

L'inégalité triangulaire donne

$$|d(x, Y) - d(x', Y)| \leq d(x, x')$$

et donc

$$x \mapsto d(x, Y) \text{ est continue.}$$

Métriques complets

Définition

Une suite (x_n) de X est de Cauchy ssi

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \text{ tel que } \forall p, q > n \ d(x_p, x_q) \leq \epsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy :

$$d(x_n, l) \leq \epsilon/2 \text{ pour } n \geq n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \epsilon \text{ pour } p, q \geq n_0.$$

Prop. Une suite de Cauchy converge ssi elle a une suite extraite convergente

Faux sans la cond. Cauchy.

Définition

X est complet si toute suite de Cauchy converge.

Prop. Soit $Y' \subset X$ complet. Alors Y complet ssi Y fermé.

Ex.

$\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$ normés sont complets, $(\mathbf{Q}, |\bullet|)$ ne l'est pas.

Un produit fini de métriques (X_i, d_i) complets, muni de la distance somme

$$d((x_i), (y_i)) = \sum_i d_i(x_i, y_i),$$

est un métrique complet .

$C^0([-1, 1])$ muni de $M_\infty(f) = \sup |f|$ est complet.

$C^0([-1, 1])$ muni de $M_2(f) = \sqrt{\int |f|^2}$ ne l'est pas (cf. poly).

Importance des normes en dimension infinie.

Critère de complétude des evn

Un evn est complet ssi toute série abs. convergente converge.

► \Rightarrow

$$\text{Si } \sum \|x_n\| < \infty, \text{ alors } \sum_{k=0}^n x_k$$

suite de Cauchy donc converge.

► \Leftarrow Soit (x_n) de Cauchy. On construit par récurrence (x_{n_k}) extraite

$$\text{avec } \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}.$$

La série

$$\sum (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

est abs. convergente donc convergente et la suite extraite x_{n_k} converge et donc également x_n . ■

Fermés emboîtés dans un complet

Définissons le diamètre d'une partie X d'un métrique par

$$\text{diam}(X) = \sup_{x, y \in X} d(x, y) \in \bar{\mathbf{R}}^+ = [0, \infty].$$

Théorème des fermés emboîtés

L'intersection d'une suite décroissantes de fermés non vides F_n d'un complet dont le diamètre tend vers 0 est réduite à un point.

► Unicité : si

$$x, y \in \bigcap F_n, \text{ on a } \text{diam}(F_n) \geq d(x, y)$$

et donc $d(x, y) = 0$. ■

► Existence : on choisit $x_n \in F_n$. Si $p \leq q$,

$$x_p, x_q \in F_p \text{ donc } d(x_p, x_q) \leq \text{diam}(F_p) \rightarrow 0.$$

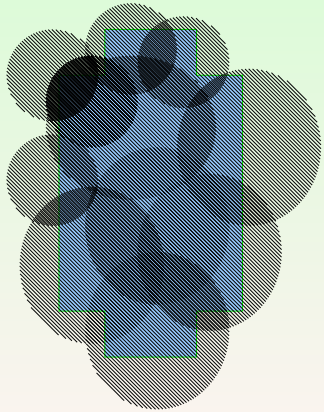
Ainsi, (x_n) de Cauchy converge vers $x \in X$.

Fixons p . On a

$$x = \lim_n x_{n+p}, \text{ limite d'une suite d'éléments de } F_{n+p} \subset F_p.$$

Donc $\forall p, x \in F_p$ car F_p fermé.

Le problème des sous-recouvrements ouverts finis



Mais

$$]0, 1[= \bigcup_{n>0}]1/n, 1 - 1/n[$$

n'a pas de sous-recouvrement fini.

Compacité

Définition

Un espace métrique X est compact

1) Si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini, ou (équivalent, passer au complémentaire)

1') Si toute famille de fermés d'intersection vide admet une sous famille FINIE d'intersection vide.

a) Si $Y \subset X$ et X compact alors Y compact ssi Y fermé.

Cor. Une intersection décroissante $\bigcap K_i$ de compacts non vides est non vide. Sinon

$$\bigcap_{J \text{ FINI}} K_j = \emptyset \text{ et } K_N = \bigcap_{J \text{ FINI}} K_j \text{ avec } N = \sup(J \text{ FINI}).$$

b) L'image continue d'un compact est compacte.

Théorème de Dini

Toute suite décroissante $f_n \in C^0(X, \mathbf{R}), n \geq 0$ de fonctions continues à support compact convergeant en tout point vers 0 converge uniformément, ie $\lim_n \sup_X |f_n(x)| = 0$.



Pour $\epsilon > 0$, posons $F_n = \{x \in X | f_n(x) \geq \epsilon\}$.

La suite F_n décroît comme f_n et F_n (fermé dans le compact support de f_0) est compact.

Comme $\lim f_n(x) = 0$ pour tout x , on a $\bigcap F_n = \emptyset$ et donc

$$\exists N | F_N = \emptyset$$

(une intersection décroissante de compacts $\neq \emptyset$ est $\neq \emptyset$).

On a donc $\forall n \geq N F_n = \emptyset$ et donc $0 \leq \sup f_n < \epsilon$. ■

Théorème de Borel-Lebesgue

Soit X métrique. Alors X est compact ssi toute suite a une suite extraite convergente. En particulier un compact est complet.

► \Rightarrow On doit montrer : l'intersection décroissante de compacts

$$\bigcap_{n \geq 0} \overline{\{x_k, k \geq n\}}$$

est non vide. Sinon, comme X est compact,

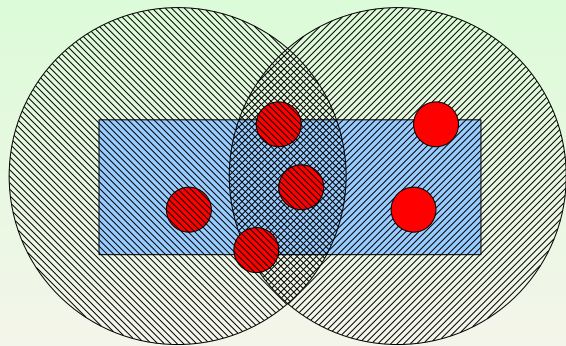
$$\exists N | \overline{\{x_k, k \geq N\}} = \emptyset,$$

une contradiction.

\Leftarrow On montre le lemme clef :

Nombre de Lebesgue

Soit U_j recouvrement ouvert de X séquentiellement compact. Il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in X, \exists i, B(x, \delta) \subset U_i$.



Boules de Lebesgue d'un recouvrement ouvert d'un compact

Si toute union finie des U_j est $\neq X$. Soit δ un nombre de Lebesgue. On construit (récurrence) x_n telle que (abus)

$$B(x_n, \delta) \subset U_n \text{ et } x_n \notin U_1, \dots, U_{n-1}.$$

Si $d(x_m, x_n) < \delta$ pour $m < n$, on aurait $x_n \in B(x_m, \delta) \subset U_m$.

On a donc $d(x_m, x_n) \geq \delta$ pour tout $m \neq n$ et donc x_n n'aurait pas de suite extraite convergente. ■

Appl.

- a) Un compact est complet.
- b) Un produit fini de métriques compacts est un métrique compact (avec la distance somme).

Ex. $[-A, A]$ compact (dichotomie), donc également

$$([-A, A]^N, N_1(x) = \sum |x_i|).$$

Appl. : $f \in C^0(\text{compact}, \mathbf{R})$ bornée et atteint ses bornes.

► Sinon, on construit x_n tel que

$$\forall n \forall i B(x_n, 1/n) \not\subset U_i.$$

Si $x = \lim x_{\varphi(n)}$, $\varphi \nearrow \nearrow$, il existe j tel que ,

$$x \in U_j \text{ et donc } B(x, 1/N) \subset U_j \text{ pour } N \gg 0.$$

Comme

$$\lim x_{\varphi(n)} = x \text{ et } \lim 1/\varphi(n) = 0, \text{ on a}$$

$$B(x_{\varphi(n)}, 1/\varphi(n)) \subset B(x, 1/N) \text{ si } n \gg 0,$$

une **contradiction**.

Compacts de \mathbf{R}^N

Lemme. Les compacts de (\mathbf{R}^N, N_1) sont les fermés bornés.

► Un compact est fermé et borné (contenu dans un nombre fini de boules).

Réci., si $X \subset \mathbf{R}^N$ est fermé borné, pour A assez grand on a

$$X \subset [-A, A]^N \text{ qui est compact.} \blacksquare$$

Corollaire du lemme

Tous les normes de \mathbf{R}^N sont équivalentes.

(Bolzano-Weierstraß) Les compacts de l'evn \mathbf{R}^n sont les fermés bornés.

Faux pour les normés de dim infinie et pour les distances.

► preuve de l'équivalence des normes

Applications de la compacité vers la mesure

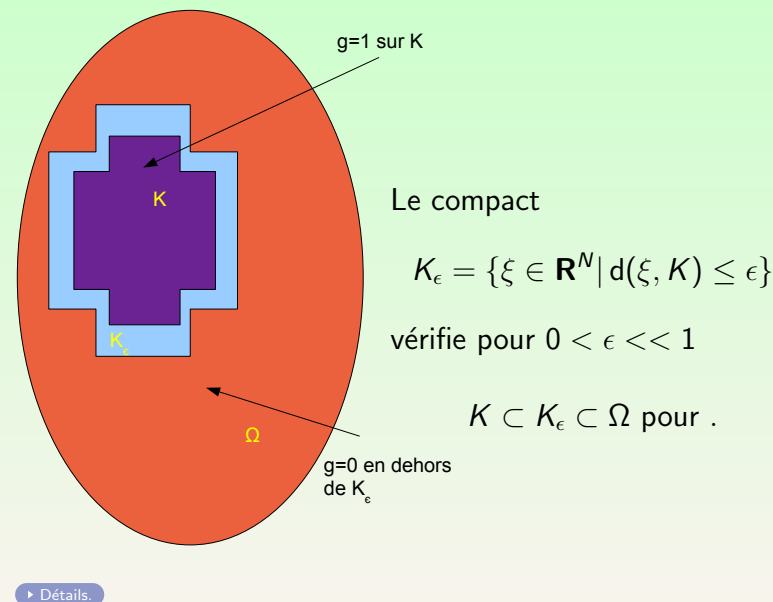
Soit Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $C_c(\Omega)$ le \mathbf{R} -espace vectoriel des fonctions continues à support compact et $\Lambda : C_c(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ une forme linéaire **positive**, ie

$$f \geq 0 \Rightarrow \Lambda(f) \geq 0.$$

Application fondamentale de Dini

Soit $f_n \in C^0(\Omega, \mathbf{R})$, $n \geq 0$ suite décroissante de fonctions continues à support compact convergeant en tout point vers 0. Alors $\lim \Lambda(f_n) = 0$.

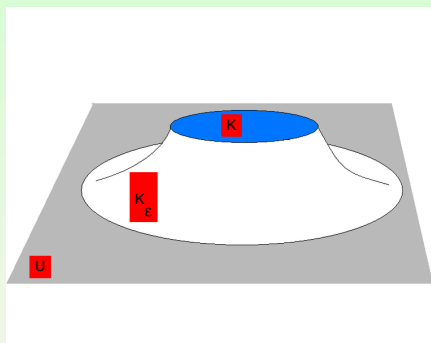
► Soit $\Omega \supset K$ compact en dehors duquel f_0 (et donc tous les f_n par décroissance de (f_n)) est nul.



La fonction continue

$$\xi \mapsto g(\xi) = \sup(1 - d(\xi, K)/\epsilon, 0)$$

vaut 1 sur K et 0 en dehors du compact $K_\epsilon \subset \Omega$. Donc



On a donc $g \in C_c(\Omega)$ et $f_n = gf_n$. Ainsi,

$$0 \leq \Lambda(f_n) = \Lambda(gf_n) \leq \sup(f_n)\Lambda(g) \text{ et on applique Dini. } \blacksquare$$

Quelques mots sur la dénombrabilité

On dit qu'un ensemble X est dénombrable s'il est en bijection avec une partie de \mathbf{N} , i. e. si on peut numéroter

$$X = \{x_1, \dots, x_n, \dots \mid n \leq \text{card}(X)\}$$

pour $\mathbf{N} \supset X \neq \emptyset$ [poser

$$x_1 = \inf(X), x_{n+1} = \inf_{x \in X} \{x > x_n\} \text{ pour } 1 \leq n < \text{card}(X).]$$

Propriété

Une partie d'un dénombrable, l'image d'un dénombrable sont dénombrables.

► Preuve

Applications :

1)

Un produit fini de deux dénombrables est dénombrable.

Il suffit (récurrence) de prouver que \mathbf{N}^2 est dénombrable. Mais $(n, m) \mapsto 2^n 3^m$ l'identifie à une partie de \mathbf{N} .

2)

Une réunion dénombrable $\cup X_n$ de dénombrables est dénombrable.

Il suffit d'écrire

$X_n = \{x_{n,i}, i \geq 0\}$ et de considérer $(n, i) \mapsto x_{n,i}$.

3)

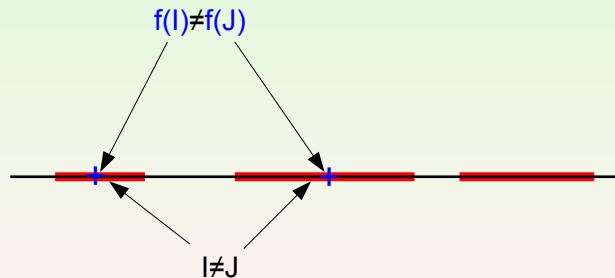
$\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \pm 1 \times \mathbf{N}^* \cup \{0\}$ et $\mathbf{Q} = \cup_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{1}{n} \mathbf{Z}$ sont dénombrables.

Mais \mathcal{F} dénombrable : pour tout $I \in \mathcal{F}$,

choisissons un rationnel $f(I) \in \mathbf{Q} \cap I$

(densité des rationnels).

L'application $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{Q}$ est injective et donc \mathcal{F} dénombrable. ■



▶ injectivité de f

Dénombrabilité et topologie de \mathbf{R}

Un ouvert U de \mathbf{R} est réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts disjoints.

▶ Pour $x \in U$, soit I_x la réunion des intervalles ouverts contenant x : c'est le plus grand intervalle ouvert contenant x .

Si $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, on a $J = I_x \cup I_y$ intervalle ouvert contenant x, y et donc (maximalité)

$$J = I_x = I_y.$$

Ainsi, les I_x sont disjoints ou confondus 2 à 2.

Considérons l'ensemble de parties de U

$$\mathcal{F} = \{I_x, x \in U\}. \text{ On a}$$

$$U = \bigsqcup_{I \in \mathcal{F}} I \text{ (union disjointe).}$$

Argument diagonal de Cantor

$I = [0, 1[$ (et donc \mathbf{R}) n'est pas dénombrable.

▶ On suppose $I = \{x_n, n \geq 0\}$. On écrit le développement (propre) en base 10

$$x_n = \sum_{k \geq 1} a_{k,n} 10^{-k}.$$

On pose $a_n = 2$ si $a_{n,n} = 1$ et $a_n = 1$ sinon : $\forall n, a_n \neq a_{n,n}$.

$$\text{On pose } x = \sum_{k \geq 1} a_k 10^{-k} = x_n \text{ dév. propre.}$$

Si $\exists n$ tel que $x = x_n$, on a $a_n = a_{n,n}$, contradiction. ■



Fin de l'amphi.