École polytechnique 2009-2010

MAT 311 Analyse réelle et complexe

Feuille d'exercices 8 (Fonctions holomorphes II et III)

Exercice 1. Montrer qu'une fonction holomorphe sur Ω à valeurs réelles est constante [Utiliser les relations de Cauchy ou considérer $\exp(if)$].

Exercice 2. Trouver toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ telles que

$$\forall z \in \mathbf{C},\ |f(z)| \leq \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\,.$$

Exercice 3. Soit f holomorphe sur $\mathbf{C}$. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C}, |f(z)| \leq a + b|z|^m.$$

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $r > 0$ on a

$$|f^{(n)}(0)| \leq Cr^{m-n}.$$

b) En déduite que f est un polynôme de degré $\leq m$.

Exercice 4. Soit γ le cercle trigonométrique orienté. Donner la valeur, avec le minimum de calculs, des intégrales

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$

pour les fonctions f de la variable complexe suivantes :

a) $f(z) = z^2; f(z) = |z|^2$.

b) $\dfrac{z+1}{z^4+16}; \dfrac{z^4+z}{z^3}; \mathrm{Re}(z^2)$.

c) $\dfrac{z+1}{16z^4+1}$.

Exercice 5. On désigne par Ω un ouvert non vide connexe de $\mathbf{C}$.

a) Montrer que si le produit de deux fonctions holomorphes sur Ω est nul, l'une des deux fonctions est nulle.

Soit D un disque ouvert de rayon fini, d'adhérence le disque fermé $\bar{D}$. Soient f, g deux fonctions continues sur $\bar{D}$, holomorphes sur D.

b) Montrer que si f, g est nulle sur le cercle $\partial\bar{D} = \bar{D} - D$, alors f ou g est nulle sur $\bar{D}$.

c) [Plus difficile] Montrer que si f est nulle sur un arc de cercle $\gamma \subset \partial\bar{D}$ de longueur positive, alors f est nulle sur $\bar{D}$.

Exercice 6. [Lemmes de Jordan]

Soit f continue sur le demi plan $\mathbf{H} = \{z|\mathrm{Im}(z) > 0\}$ et C_R le cercle (orienté) de centre 0 et de rayon R. On suppose

$$\lim_{\substack{z\in\mathbf{H}\\|z|\to\infty}} zf(z) = 0.$$

a) Montrer qu'on
$$\lim_{R\to} \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

b) Énoncer et démontrer un résultat analogue quand R tend vers 0.

c) Calculer
$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}},\ n \geq 1.$$

d) On suppose maintenant seulement
$$\lim_{\substack{z\in\mathbf{H}\\ |z|\to\infty}} f(z) = 0.$$

Montrer qu'on
$$\lim_{R\to} \int_{C_R} \mathrm{e}^{iz} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

e) Calculer la transformée de Fourier de $\dfrac{1}{1+x^4}$.

Exercice 7. [Lemme de Schwarz] Soit f holomorphe sur le disque unité ouvert D. On suppose $f(0) = 0$ et $f(z) \leq 1$ pour tout $z \in D$.

a) Montrer que
$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} D^* & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & f(z)/z \end{array} \right.$$

se prolonge uniquement en une fonction holomorphe sur D.

b) En considérant
$$\sup_{|z|=R} |g(z)|,$$

montrer qu'on a
$$\forall z \in D,\ g(z) \leq 1.$$

c) En déduire $|f'(0)| \leq 1$.

d) Supposons $\exists z \in D$ tel que $|f(z) = |z|$. Montrer qu'il existe α de module 1 tel que
$$\forall z \in D,\ f(z) = \alpha z.$$

e) Supposons $|f'(0)| = 1$. Montrer
$$\forall z \in D,\ f(z) = f'(0)z.$$

f) Soient $a \in U$. Montrer que

$\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ est un biholomorphisme de D. Quel est son inverse.

g) Trouver tous les biholomorphismes de D [Utiliser les e) et f)].