

# Reconstruction creuse déterministe, d'après Guruswami, Lee et Razborov

Pierre Pansu

21 février 2008

## 1 Objectif

Exposer brièvement des résultats récents, trouvés dans la littérature informatique, qui utilisent l'estimée somme-produit de Bourgain, Katz et Tao.

Aujourd'hui, c'est une construction explicite de sous-espaces dont l'intersection avec la boule unité de  $\ell^1$  est presque ronde, par Guruswami, Lee et Razborov.

## 2 Distorsion des sous-espaces

### 2.1 Compression

En compression, la méthode suivante est à la mode, depuis les travaux de Candes/Tao et Donoho (voir [KT]). Il s'agit de coder des vecteurs  $u \in \mathbb{R}^N$ , en faisant l'hypothèse qu'ils sont  $k$ -creux, i.e. que seules  $k$  composantes du vecteur sont non nulles (e.g., on a décomposé un signal dans une base d'ondelettes, et on n'a conservé que les  $k$  composantes de plus grande intensité). On parvient à construire des matrices  $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \ll N$ , qui ont la propriété suivante. Si on minimise la norme  $\ell^1$  des vecteurs  $v$  tels que  $\Phi(v) = \Phi(u)$ , on retombe forcément sur  $u$ . On dispose d'un algorithme polynômial pour reconstruire  $u$  à partir de  $\Phi(u)$ , on peut donc coder  $u$  par  $\Phi(u)$  qui est beaucoup plus petit.

La raison géométrique très grossière est que les vecteurs creux sont dans des coins très aigus de la boule  $\ell^1$ . Un sous-espace affine qui contient un tel point a toutes les chances de toucher la boule  $\ell^1$  en ce point. Donoho, puis Candes et Tao, ont dégagé des conditions suffisantes sur le noyau de  $\Phi$ , qui prennent la forme de comparaisons entre normes  $\ell^1$  et  $\ell^2$  des projections des vecteurs du noyau sur des paquets de coordonnées. Kashin et Temlyakov ont notablement simplifié ces conditions, en éliminant les projections sur des paquets de coordonnées.

**Définition 1** La distorsion d'un sous-espace vectoriel  $X \subset \mathbb{R}^N$  est

$$\Delta(X) = \sqrt{N} \max_{x \in X} \frac{|x|_2}{|x|_1}.$$

**Exemple 2** *La distorsion est au plus égale à  $\sqrt{N}$ , avec égalité (entre autres) pour l'espace  $\mathbb{R}^N$  entier.*

Les sous-espaces favorables à la reconnaissance des vecteurs creux sont ceux dont la distorsion est nettement inférieure à  $\sqrt{N}$ .

**Théorème 3** [KT]. *Soit  $X \subset \mathbb{R}^N$  un sous-espace de codimension  $n$  tel que  $\Delta(X) \leq D$ . Alors  $X$  reconstruit uniquement les vecteurs  $k$ -creux pour  $k = \frac{N}{4D^2}$ .*

**Remarque 4** *Le théorème de Dvoretzky (et l'amélioration qu'en a donné V. Milman), affirme que dans tout espace de Banach de dimension  $N$ , il existe un sous-espace vectoriel de dimension  $k = \text{const.}(\epsilon) \frac{\log(k)}{k}$  tel que la norme induite soit à distance (de Banach-Mazur) au plus  $1 + \epsilon$  d'un espace euclidien. Ici, on se pose une question différente, car il s'agit de comparer directement des normes, et non des normes à changement de coordonnées linéaire près. On ne peut pas espérer trouver un sous-espace de distorsion proche de 1.*

## 2.2 Résultats

Un sous-espace choisi au hasard est ce qui se fait de mieux.

**Théorème 5** [K], [GG]. *Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times N$  dont les coefficients sont tirés au hasard dans  $\{\pm 1\}$ . Avec probabilité tendant vers 1 quand  $N$  et  $n$  tendent vers l'infini,*

$$\Delta(\ker A) \leq \sqrt{\frac{N}{n} \left(1 + \log\left(\frac{N}{n}\right)\right)}.$$

Par conséquent, les sous-espaces tirés au hasard reconstruisent uniquement les vecteurs  $k$ -creux pour  $k = \frac{n}{4 \log(N/n)}$ . Le théorème exposé aujourd'hui fournit de façon déterministe des sous-espaces satisfaisants lorsque le rapport  $N/n$  tend vers l'infini assez lentement.

**Théorème 6** [GLR]. *Pour toute fonction positive  $N \mapsto \eta(N)$ , il existe un algorithme déterministe qui produit, en un temps polynômial, des sous-espaces vectoriels  $X \subset \mathbb{R}^N$  de dimensions  $\geq (1 - \eta)N$  et de distorsions*

$$\Delta(X) \leq (\eta^{-1} \log \log N)^{C \log \log N}.$$

Lorsque  $N/n$  croît comme une puissance de  $\log N$ , la distorsion obtenue est de la forme  $(\frac{N}{n} (1 + \log(\frac{N}{n})))^{C \log \log N}$ , ce qui est moins bon que le tirage aléatoire, mais permet tout de même de reconstruire les vecteurs  $k$ -creux avec  $k = N / (\log N)^{C \log \log \log(N)}$ .

### 3 Stratégie

Etant donné un sous-espace vectoriel  $L$  de  $\mathbb{R}^d$  et un graphe biparti  $G$  qui possède  $N$  sommets de gauche, et dont tous les sommets de droite sont de même degré  $d$ , considérons le sous-espace  $X(G, L)$  de  $\mathbb{R}^N$  formé des vecteurs dont la restriction aux premiers voisins de chaque sommet de droite appartient à  $L$ . Si le graphe  $G$  a un bon profil asymétrique (e.g. linéaire), alors  $X(G, L)$  a une faible distorsion. Les graphes bipartis aléatoires ont un profil linéaire, mais aucun graphe explicite (et constructible en un temps polynômial en  $N$ ) n'a un aussi bon profil. L'estimée somme-produit garantit que le graphe  $ab + c$  a un profil suffisant pour les sous-ensembles de petite taille. Pour les grandes tailles, il vaut mieux utiliser les graphes de Ramanujan ([LPS]).

#### 3.1 Profil des graphes bipartis

Un graphe biparti a son ensemble de sommets divisé en deux parties  $V_L$  et  $V_R$ , les sommets de gauche et ceux de droite. Un sous-ensemble  $S \subset V_L$  a un bord  $\partial S$  contenu dans  $V_R$ , c'est l'ensemble des voisins des éléments de  $S$ .

**Définition 7** *Le profil asymétrique d'un graphe biparti est la fonction qui à un entier  $m$  associe  $\Lambda(m)$ , le minimum des tailles des bords des sous-ensembles de  $V_L$  de taille au moins  $m$ .*

**Exemple 8** *Pour le graphe biparti complet, alors  $\Lambda(m) = |V_R|$  dès que  $m > 0$ .*

**Exemple 9** *Pour le graphe biparti aléatoire de degré  $d$ ,  $\Lambda(m) = c(d)m$ .*

**Théorème 10** [GLR], interprétation de [BKSSW]. *Il existe une constante absolue  $\epsilon > 0$  telle que, pour tout premier  $p$ , le graphe biparti tel que*

$$V_L = \mathbb{F}_p^3, \quad V_R = \{1, 2, 3, 4\} \times \mathbb{F}_p,$$

*et où  $(a, b, c) \in \mathbb{F}_p^3$  est relié à  $(1, a)$ ,  $(2, b)$ ,  $(3, c)$  et  $(4, ab + c)$ , a un profil asymétrique  $\Lambda(m) \geq \min\{p^{0.9}, m^{1/3+\epsilon}\}$ .*

**Remarque 11** *Trivialement, si  $S \subset V_L$ ,  $|\partial S| \geq |S|^{1/3}$ .*

En effet, si  $S_1 = \{(1, a) \mid (a, b, c) \in S\}$ , etc..., alors  $S \rightarrow S_1 \times S_2 \times S_3$ ,  $(a, b, c) \mapsto ((1, a), (2, b), (3, c))$  est injective, donc  $|S| \leq |S_1| \times |S_2| \times |S_3|$ , d'où  $|\partial S| \geq |S_1| + |S_2| + |S_3| \geq |S|^{1/3}$ .

Autrement dit, l'estimée somme-produit permet d'améliorer un petit peu cette inégalité triviale, de façon uniforme en  $p$ .

Ce profil peut paraître très mauvais (bien moins que linéaire). Attention, le nombre de sommets de gauche est le cube du nombre de sommets de droite,  $|V_L| = |V_R|^3$ , donc il y a forcément peu de premiers voisins. En revanche, il y a beaucoup de seconds voisins, ce qui donne la propriété d'expansion souhaitée.

## 3.2 Mécanisme améliorant la distorsion

Voici une formulation technique de la distorsion.

**Définition 12** *Un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^d$  est  $(t, T, \epsilon)$ -étalé si tout vecteur de  $X$  satisfait*

$$\min_{S; |S| \leq T} |x_S|_2 \geq \epsilon \min_{S; |S| \leq t} |x_S|_2$$

On montre aisément qu'un espace  $(T, t, \epsilon)$ -étalé a une distorsion petite.

**Lemme 13** *Soit  $L$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^d$  qui est  $(0, t, \epsilon)$ -étalé. Soit  $G$  un graphe biparti de profil asymétrique  $\Lambda$ , dont les sommets gauches sont de degré au plus  $D$  et les sommets droits de degré exactement  $d$ . Alors pour tout  $T$ , le sous-espace  $X(G, L)$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^{V_R}$  dont la restriction aux voisins d'un sommet droit appartient toujours à  $L$  est  $(T, \frac{t}{T}\Lambda(T), \frac{\epsilon}{\sqrt{2D}})$ -étalé.*

Ce lemme n'est que l'un des nombreux ingrédients de la preuve du théorème 6.

## Références

- [BKT] Bourgain, Jean; Katz, Netz; Tao, Terry. *A sum-product estimate in finite fields, and applications*. Geom. Funct. Anal. **14** (2004), no. 1, 27–57.
- [BKSSW] Barak, Boaz; Kindler, Guy; Shaltiel, Ronen, Sudakov, Benny; Wigderson, Avi. *Simulating independance : new constructions of condensers, Ramsey graphs, dispersers, and extractors*. STOC 2005 et <http://www.math.ias.edu/~avi/PUBLICATIONS/MYPAPERS/bkssw04/bkssw04.pdf>
- [GG] Garnaev, A. Yu.; Gluskin, E. D. *The widths of a Euclidean ball*. Dokl. Akad. Nauk SSSR **277** (1984), no. 5, 1048–1052.
- [GLR] Guruswami, Venkatesan; Lee, James; Razborov, Alexander. *Almost Euclidean subspaces of  $\ell_1^N$  via expander codes*. SODA 2008 et <http://www.cs.washington.edu/homes/jrl/papers/spread.pdf>
- [K] Kašin, B. S. *The widths of certain finite-dimensional sets and classes of smooth functions*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41** (1977), no. 2, 334–351.
- [KT] Kashin, B.S., Temlyakov, V.N. *A remark on compressed sensing*. <http://www.dsp.ece.rice.edu/cs/KT2007.pdf>
- [LPS] Lubotzky, A.; Phillips, R.; Sarnak, P. *Ramanujan graphs*. Combinatorica **8** (1988), no. 3, 261–277.