

ANALYSE EN S^5 IFIPS

Y. Georgelin, revu par P. Pansu et N. Anantharaman

19 octobre 2009

Chapitre 1

Intégration

1.1 Petit rappel sur l'intégrale de Riemann*

1.1.1 Intégration des fonctions en escalier

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé, borné (= compact) de \mathbb{R} . On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision finie de $[a, b]$, $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, telle que f soit constante sur chaque sous-intervalle $]a_{i-1}, a_i[$.

Appelons $\alpha_i \in \mathbb{R}$ la valeur de f sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$. On appelle *intégrale de la fonction en escalier* f le nombre réel $\sum_{i=1}^n \alpha_i (a_i - a_{i-1})$. Ce nombre ne dépend pas de la subdivision choisie, on le note $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$.

Remarquons que la valeur de f aux points a_i n'a pas d'importance dans cette définition.

1.1.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est *intégrable au sens de Riemann* si f est bornée et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut encadrer f entre deux fonctions en escalier ϕ_n, ψ_n ,

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n$$

telles que

$$0 \leq \int_a^b \psi_n - \int_a^b \phi_n \leq \frac{1}{n}$$

(cela veut dire que les intégrales de ϕ_n et ψ_n sont très proches). Dans ce cas, les suites $\int_a^b \psi_n$ et $\int_a^b \phi_n$ ont la même limite, appelée *intégrale de Riemann de f* :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \phi_n = \int_a^b f.$$

On dit qu'une fonction à valeurs complexes est intégrable si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont intégrables. En décomposant $f = \Re f + i \Im f$, on définit alors

$$\int f = \int \Re f + i \int \Im f.$$

Exemple 1 Toute fonction continue est intégrable au sens de Riemann. L'intégrale de f est l'aire de l'épigraphe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq f(x)\}$, où l'on compte négativement la région contenue dans le demi-plan inférieur, correspondant aux régions où $f \leq 0$.

On rappelle aussi la notion de somme de Riemann : on se donne une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, et n'importe quel élément ξ_i de $[a_{i-1}, a_i]$. La somme de Riemann associée est

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(a_i - a_{i-1}).$$

Si f est Riemann-intégrable, alors les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale $\int_a^b f$ quand on fait tendre vers 0 la taille de la subdivision, $\max_i |a_i - a_{i-1}|$.

Exemple 2 *Toute fonction intégrable au sens de Riemann est bornée, mais il existe des fonctions bornées qui ne sont pas Riemann-intégrables, par exemple la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [a, b]$. En effet, posons $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$, $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q} \cap [a, b]$. Tout intervalle ouvert contient toujours un rationnel et un irrationnel. Dans la définition précédente, on aurait donc nécessairement $\phi_n = 0$ et $\psi_n = 1$ (sauf peut-être en un nombre fini de points), donc $\int_a^b \phi_n = 0$ et $\int_a^b \psi_n = b - a$. On voit ainsi que f n'est pas intégrable au sens de Riemann.*

1.1.3 Plusieurs problèmes de l'intégrales de Riemann

- on aurait envie que toute fonction bornée "raisonnable" soit intégrable. Mais on a vu qu'il est facile de construire des fonctions bornées non Riemann-intégrables.
- si f est une fonction continue, dérivable, et dont la dérivée est bornée, on ne peut pas toujours écrire $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$, parce qu'on ne sait pas si f' est intégrable au sens de Riemann.
- mauvais comportement vis-à-vis des limites : si on a une suite de fonctions (f_n) Riemann-intégrables (par exemple continues), *uniformément bornée* (c-à-d qu'il existe M tel que $|f_n(x)| \leq M$ pour tout x et tout n), telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout x , il se peut que la limite f ne soit pas Riemann-intégrable. Par exemple, on pourra essayer de construire une suite uniformément bornée (f_n) de fonctions continues, qui converge partout vers la fonction f de l'exemple 2.

L'intégrale de Lebesgue a une construction plus compliquée que celle de Riemann, mais elle ne présente pas tous ces problèmes. Dans la pratique, elle est donc beaucoup plus facile à utiliser.

1.2 Intégrale et mesure de Lebesgue : définition

On va maintenant définir l'intégrale de Lebesgue d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$.

1.2.1 Mesure d'un pavé

Dans \mathbb{R}^d , on appelle *pavé* tout ensemble de la forme

$$[a_1, b_1[\times [a_2, b_2[\times \dots \times [a_d, b_d[,$$

autrement dit c'est l'ensemble des points de coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_d) tels que $x_1 \in [a_1, b_1[$, $x_2 \in [a_2, b_2[$, etc (on peut prendre des intervalles ouverts ou fermés, cela n'a pas vraiment d'importance). En dimension $d = 1$, un pavé est un intervalle borné, pour $d = 2$ c'est un rectangle, pour $d = 3$ c'est un parallélépipède.

On définit la *mesure (de Lebesgue)* d'un pavé, par le produit des longueurs des côtés :

$$\lambda([a_1, b_1[\times [a_2, b_2[\times \dots \times [a_d, b_d[) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \dots \times (b_d - a_d).$$

Pour $d = 1$ il s'agit simplement de la longueur d'un intervalle, pour $d = 2$ c'est l'aire d'un rectangle, pour $d = 3$ le volume d'un parallélépipède. Pour cette raison on dit souvent *volume* au lieu de *mesure de Lebesgue*, même en dimension $d \geq 3$.

1.2.2 Intégrale des fonctions en escalier

Si $C = [a_1, b_1[\times [a_2, b_2[\times \dots \times [a_d, b_d[$ est un pavé, on notera $\mathbb{1}_C$ sa fonction caractéristique. C' est la fonction définie par $\mathbb{1}_C(x) = 1$ si $x \in C$, 0 si $x \notin C$.

Soit f une fonction de \mathbb{R}^d dans \mathbb{C} . On dira que f est en escalier s'il existe un nombre fini de pavés C_1, C_2, \dots, C_k , et des nombres complexes $\alpha_j \in \mathbb{C}$, tels que

$$f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbb{1}_{C_j}.$$

Remarque 3 *Cela n'a pas d'importance de demander que les pavés soient disjoints ou non. Pourquoi ? (faire un dessin).*

Une définition équivalente est donc de dire qu'il existe un nombre fini de pavés disjoints C'_1, C'_2, \dots, C'_k tels que f soit constante sur chaque C'_k . En dimension $d = 1$, on retrouve la notion de fonction en escalier définie précédemment.

On définit l'intégrale de f par

$$\int f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \lambda(C_j),$$

on rappelle que $\lambda(C_j)$ est le "volume" du pavé C_j . Cette définition coïncide avec celle du §1.1.1 en dimension $d = 1$.

1.2.3 Ensemble de mesure nulle

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble de \mathbb{R}^d . On dit qu'il est de mesure (de Lebesgue) nulle si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une suite de pavés $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, tels que

$$A \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} C_j,$$

et

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(C_j) < \varepsilon.$$

Autrement dit, on peut couvrir A par une union (éventuellement infinie, mais dénombrable) de pavés, dont la somme totale des volumes est arbitrairement petite.

Proposition 4 (i) *l'ensemble vide est de mesure nulle.*

(i') *tout singleton $\{x\}$ est de mesure nulle.*

(ii) *si A est de mesure nulle et si $B \subset A$, alors B est de mesure nulle.*

(iii) *si A et B sont de mesure nulle, alors $A \cup B$ est de mesure nulle.*

(iv) *si on a une suite d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, chacun de mesure nulle, alors l'union $\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ est aussi de mesure nulle.*

Le (i) et le (ii) et (iii) sont faciles. Le (iv) est admis. Notons qu'il est très important d'avoir une suite (c-à-d une famille dénombrable) d'ensembles. Pour une famille quelconque d'ensembles le (iv) n'est pas vrai. Par exemple, un pavé $C = [a_1, b_1[\times [a_2, b_2[\times \dots \times [a_d, b_d[$ est une réunion de points, chaque point est lui-même de mesure nulle, mais le pavé C n'est pas de mesure nulle !

Exemple 5 *Si (u_n) est une suite, l'ensemble $\cup_{n \in \mathbb{N}} \{u_n\}$ est de mesure nulle.*

Propriétés vraies presque-partout. On dit qu'une propriété (P) est vraie presque partout si l'ensemble des x n'ayant pas la propriété (P) est de mesure nulle.

Donnons des exemples pour être plus concret :

- On dit qu’une fonction f est nulle presque partout s’il existe un ensemble A de mesure nulle, tel que

$$f(x) = 0$$

pour $x \notin A$.

- on dit qu’une suite de fonctions (f_n) converge presque partout vers la fonction f , si l’ensemble des x tels que $f_n(x)$ ne converge pas vers $f(x)$ (quand $n \rightarrow +\infty$) est de mesure nulle. Autrement dit, il existe un ensemble A de mesure nulle, tel que

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

si $x \notin A$.

- soient deux fonctions f et g . On dit que $f \leq g$ presque partout s’il existe un ensemble A de mesure nulle, tel que

$$f(x) \leq g(x)$$

pour $x \notin A$.

On dit aussi “ $f(x) = 0$ pour presque tout x ”, “ $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ pour presque tout x ”, “ $f(x) \leq g(x)$ pour presque tout x ”, etc.

Remarque 6 Si f et g sont deux fonctions continues, et si $f(x) = g(x)$ pour presque tout x , alors en fait $f(x) = g(x)$ pour tout x .

1.2.4 Fonction mesurable, ensemble mesurable

Attention. Nous allons voir deux notions, celle de fonctions *mesurables* puis celle de fonctions *intégrables*, qui sont, parmi les fonctions mesurables, celles dont on peut définir l’intégrale. La notion de fonction mesurable est assez abstraite et dans la pratique, on peut considérer que toutes les fonctions sont mesurables.

Définition 7 Une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est dite (Lebesgue-)mesurable s’il existe une suite de fonctions en escalier (f_n) qui converge presque partout vers f .

Comme on le voit, cette définition est très abstraite ! Notons qu’une fonction continue est mesurable (expliquer pourquoi).

Heureusement, on a la

Proposition 8 (i) Si f et g sont mesurables, et si α et β sont des nombres complexes, alors $\alpha f + \beta g$ est une fonction mesurable (les fonctions mesurables forment un espace vectoriel).

(ii) Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables, qui converge presque partout vers f , alors la limite f est mesurable.

Dans la pratique, toutes les fonctions que l’on rencontre sont mesurables, nous ne ferons pas d’exercices demandant de montrer que telle ou telle fonction est mesurable.

Définition 9 Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^d . La fonction caractéristique $\mathbb{1}_E$ de E est définie sur \mathbb{R}^d par

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 10 On dit qu’un ensemble E est (Lebesgue-)mesurable si la fonction caractéristique $\mathbb{1}_E$ est une fonction mesurable.

Là encore, cette définition est très abstraite. Heureusement, on a la

Proposition 11 (i) si E est mesurable alors son complémentaire E^c est mesurable.

(ii) si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles mesurables, alors l'union et l'intersection $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ et $\cap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ sont des ensembles mesurables

Dans la pratique, tous les ensembles que l'on rencontre sont mesurables, nous ne ferons pas d'exercices à ce sujet.

Désormais, nous supposons implicitement que toutes les fonctions et tous les ensembles intervenant dans les énoncés sont mesurables.

1.2.5 Intégrale (de Lebesgue), mesure de Lebesgue

Intégrale des fonctions positives. Notons $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions (mesurables) à valeurs positives. On peut toujours essayer d'intégrer une telle fonction, quitte éventuellement à trouver $+\infty$ (on dit alors que la fonction n'est pas sommable, ou que l'intégrale diverge). Pour cela on utilise le théorème (difficile et admis), d'existence et d'unicité de l'intégrale de Lebesgue :

Théorème 1 Il existe une application, appelée intégrale de Lebesgue, et notée $f \mapsto \int f$, associant à chaque $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$ un nombre $\int f \in \mathbb{R} \cup +\infty$, avec les propriétés suivantes :

(i) si f est en escalier, alors $\int f$ est la quantité précédemment définie ;

(ii) (linéarité) si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ et $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$, on a $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$;

(iii) si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$, on a $\int f = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout ;

(iv) si $f \leq g$ presque partout, alors $\int f \leq \int g$;

(v) (théorème de convergence monotone) si (f_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$ (c-à-d $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$), notons $f(x) = \lim_n f_n(x)$. On a alors $\lim_n \int f_n = \int f$.

Autrement dit, pour les suites positives croissantes, on peut intervertir la limite et l'intégrale.

L'intégrale de Lebesgue est ainsi définie de manière unique.

Si f est à valeurs positives, on dit que f est intégrable, ou sommable, si $\int f$ n'est pas $+\infty$. On écrit $\int f < +\infty$, et on dit aussi que "l'intégrale est finie" (attention, cette manière de parler n'est autorisée que si f est positive!).

Intégrale des fonctions à valeurs réelles ou complexe. Soit maintenant une fonction f à valeurs réelles (de signe éventuellement variable). La valeur absolue $|f|$ est une fonction à valeurs positive. On dit que f est intégrable, ou sommable, si $\int |f| < +\infty$.

On peut décomposer f comme différence de deux fonctions positives :

$$f = f^+ - f^-$$

en posant $f^+ = \frac{f+|f|}{2}$, $f^- = \frac{|f|-f}{2}$. On a $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$: si $|f|$ est sommable, f^+ et f^- le sont aussi. Dans ce cas, $\int f^+$ et $\int f^-$ sont des nombres réels positifs, et l'on peut poser sans problème

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Si f est à valeurs complexes on se ramène au cas réel en la décomposant en parties réelles et imaginaires : $f = \Re f + i \Im f$. On dit que f est intégrable (ou sommable) si le module $|f|$ est intégrable, ou de manière équivalente si $|\Re f|$ et $|\Im f|$ sont intégrables. On pose

$$\int f = \int \Re f + i \int \Im f.$$

Remarque 12 Dans tous les cas, f est intégrable (ou sommable) si et seulement si la fonction positive $|f|$ est intégrable (ou sommable).

Pour une fonction à valeurs complexes, ou réelles mais non positives, on n'a pas le droit d'écrire $\int f$ avant d'avoir vérifié que f est sommable.

Nous verrons plus tard des manières plus concrètes de calculer des intégrales.

Proposition 13 (i) si f et g sont sommables et si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors $\alpha f + \beta g$ est sommable, et $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.

(ii) (Inégalité triangulaire pour les intégrales) Si f est sommable, on a $|\int f| \leq \int |f|$.

Notations et choix des variables : on note souvent $\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$. Attention, quand on utilise cette écriture la variable x est une variable d'intégration qui décrit tout l'espace \mathbb{R}^d , donc il faut veiller à ce que la lettre x ne soit pas utilisée ailleurs pour désigner une quantité fixée. Si c'est le cas on peut bien sûr choisir une autre lettre et écrire $\int f(y)dy$, $\int f(u)du$, etc, c'est une "variable muette".

Si on est en dimension $d = 2$ ou $d = 3$, dans les cours de physique x sera peut-être noté \vec{x} ou \vec{v} pour souligner que c'est un vecteur. On voit parfois $\int f(x)d^{(2)}x$ ou $\int f(x)d^{(3)}x$ pour indiquer la dimension 2 ou 3.

Aussi, parfois l'on décompose x selon ses coordonnées, $x = (x_1, \dots, x_d)$, et l'on note $\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \dots, x_d)dx_1 \dots dx_d$. En dimension 2 ou 3 il est courant de désigner par (x, y) ou (x, y, z) les coordonnées cartésiennes (abscisse, ordonnée, hauteur), et alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{v})d\vec{v} = \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{v})d^{(2)}\vec{v} = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dx dy,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{v})d\vec{v} = \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{v})d^{(3)}\vec{v} = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)dx dy dz.$$

Mais pour certains problèmes, il peut aussi arriver que les coordonnées soient les coordonnées sphériques (r, θ, φ) (rayon, latitude et longitude)...

Chacun choisit ses notations, l'important est que le lecteur/correcteur puisse les comprendre!

1.2.6 Espace L^1 , distance L^1

On appelle $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions sommables à valeurs complexes. On peut le munir d'une distance, appelée *distance L^1* :

$$D(f, g) = \int |f - g|.$$

Il est clair que $D(f, g) = D(g, f)$. On a bien l'inégalité triangulaire

$$D(f, h) \leq D(f, g) + D(g, h),$$

qui se vérifie en écrivant

$$\int |f - h| = \int |f - g + g - h| \leq \int (|f - g| + |g - h|) = \int |f - g| + \int |g - h|.$$

Pour avoir une distance, il faudrait enfin vérifier que si $D(f, g) = 0$, on a $f = g$. En réalité, avoir $D(f, g) = \int |f - g| = 0$ implique seulement que $f = g$ presque partout.

Remarque 14 Il est souvent utile d'écrire que $|\int f - \int g| \leq D(f, g)$ (Prop. 13 (ii)). Si la distance $D(f, g)$ est petite, alors les intégrales de f et de g sont proches (la réciproque est fautive, il n'est pas dur de trouver un exemple).

1.3 Théorèmes fondamentaux

1.3.1 Théorème de convergence dominée

Théorème 2 (H. Lebesgue). Soit $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$, une suite de fonctions intégrables sur \mathbb{R} vérifiant les trois conditions :

1. Convergence. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ existe¹.

1. Il s'agit ici d'une version un peu simplifiée du théorème de convergence dominée. Le théorème complet est :

2. Domination. Pour tout k , $|f_k| \leq g$ où g est une fonction positive indépendante de k .
3. Intégrabilité. g est une fonction positive intégrable sur \mathbb{R} .

Alors f est intégrable sur \mathbb{R} , et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Le cours et les TD contiennent d'innombrables applications de ce théorème fondamental. On ne donne qu'un exemple montrant que les hypothèses 2 et 3 sont nécessaires.

Exemple 15 Soit f_k la fonction qui vaut 1 sur l'intervalle $[k, k+1[$ et 0 ailleurs. Alors $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = 0$ mais $\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = 1$ ne tend pas vers 0.

Ici il y a bien domination, les f_k sont majorées par la fonction g constante égale à 1, mais g n'est pas intégrable sur \mathbb{R} .

1.3.2 Comment vérifier qu'une fonction est intégrable ?

Voici une manière de vérifier que les fonctions d'usage courant sont intégrables ou non.

Théorème 4 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . On suppose que f est continue sauf en un nombre fini de points a_1, \dots, a_k . Alors f est intégrable sur \mathbb{R} si et seulement si les intégrales généralisées

$$\int_{-\infty}^{\rightarrow a_1} |f(x)| dx, \quad \int_{\rightarrow a_1}^{\rightarrow a_2} |f(x)| dx, \quad \dots \quad \int_{\rightarrow a_k}^{\rightarrow +\infty} |f(x)| dx$$

sont convergentes. Dans ce cas,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\rightarrow a_1} f(x) dx + \int_{\rightarrow a_1}^{\rightarrow a_2} f(x) dx + \dots + \int_{\rightarrow a_k}^{\rightarrow +\infty} f(x) dx.$$

Exemple 16 La fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x \notin [-1, 1]$, $f(x) = 0$ si $x \in [-1, 1]$ est intégrable sur \mathbb{R} .

En effet, f a deux discontinuités, -1 et 1 . f est bornée au voisinage de -1 et de 1 , donc les intégrales convergent à ces bornes, à droite comme à gauche. Les intégrales $\int_{\rightarrow +\infty} x^{-2} dx$ et $\int_{\rightarrow -\infty} x^{-2} dx$ sont convergentes, donc il y a convergence aux 6 bornes.

Exemple 17 La fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, n'est pas intégrable sur \mathbb{R} .

En effet, l'intégrale $\int_{\rightarrow 0} x^{-2} dx$ est divergente.

Exemple 18 La fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$, n'est pas intégrable sur \mathbb{R} .

Théorème 3 Soit $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$, une suite de fonctions intégrables sur \mathbb{R} telle que

- (a) Convergence presque partout. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la limite $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ existe.
- (b) Domination presque partout. Pour tout k , pour presque tout x , $|f_k(x)| \leq g(x)$ où g est une fonction positive indépendante de k .
- (c) Intégrabilité. g est une fonction intégrable sur \mathbb{R} .

Alors f est intégrable sur \mathbb{R} , et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

En effet, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ est divergente à la borne $+\infty$, bien que l'intégrale sans valeur absolue $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ soit convergente. Pour s'en convaincre, on minore $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$ par $\frac{\sin^2 x}{x}$. Sachant que

$$\int_0^x \sin^2 t dt = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4},$$

une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{\sin^2 x}{x} dx &= \left[\frac{1}{2} - \frac{\sin(2x)}{4x} \right]_0^y + \int_0^y \left(\frac{1}{2x} - \frac{\sin(2x)}{4x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(y) + \frac{1}{2} - \frac{\sin(2y)}{4y} - \int_0^y \frac{\sin(2x)}{4x^2} dx. \end{aligned}$$

La dernière intégrale possède une limite finie quand y tend vers l'infini, donc $\int_0^y \frac{\sin^2 x}{x} dx$ tend vers $+\infty$, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ diverge à la borne $+\infty$, donc il en est de même de $\int_0^y \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$. ■

1.3.3 Conséquences du théorème de convergence dominée

Corollaire 19 Continuité en un point d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Soit $f(x, s)$ une fonction à valeurs complexes, définie pour $x \in \mathbb{R}^d$ et pour $s \in]s_0, s_1[\subset \mathbb{R}$. On suppose que pour tout s fixé dans $]s_0, s_1[$, la fonction f est intégrable sur \mathbb{R} . Pour $s \in]s_0, s_1[$, on pose

$$F(s) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, s) dx.$$

On fixe $u \in]s_0, s_1[$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Continuité. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f(x, s)$ est continue en $s = u$;
2. Domination. Pour tout $s \in]s_0, s_1[$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $|f(x, s)| \leq g(x)$ où g est une fonction positive indépendante de s .
3. Intégrabilité. g est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^d .

Alors, $s \mapsto F(s)$ est continue en $s = u$, i.e.

$$\lim_{s \rightarrow u} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, s) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, u) dx.$$

Exemple 20 Soit g une fonction bornée sur \mathbb{R} . Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$, supposons que g soit continue au point x_0 . Considérons l'intégrale

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x_0 - ty)p(y)dy$$

où p est la gaussienne $p(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c}} e^{-y^2/4c}$. Montrer que $I(t)$ est continue en $t = 0$.

Corollaire 21 Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Soit $f(x, s)$ une fonction à valeurs complexes, définie pour $x \in \mathbb{R}^d$ et pour $s \in]s_0, s_1[\subset \mathbb{R}$. On suppose que pour tout s fixé dans $]s_0, s_1[$, la fonction f est intégrable sur \mathbb{R} . Pour $s \in]s_0, s_1[$, on pose

$$F(s) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, s) dx.$$

On fait les hypothèses suivantes.

1. Continuité. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f(x, s)$ est continue par rapport à la variable s ;

2. Domination. Pour tout $s \in]s_0, s_1[$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $|f(x, s)| \leq g(x)$ où g est une fonction positive indépendante de s .

3. Intégrabilité. g est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^d .

Alors, $s \mapsto F(s)$ est continue sur $]s_0, s_1[$, i.e.

$$\lim_{s \rightarrow u} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, s) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, u) dx$$

pour tout $u \in]s_0, s_1[$

Corollaire 22 (Dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre). Soit $f(x, s)$ une fonction à valeurs complexes, définie pour $x \in \mathbb{R}^d$ et pour $s \in]s_0, s_1[$. On suppose que pour tout s fixé dans $]s_0, s_1[$, la fonction f est intégrable sur \mathbb{R} . Pour $s \in]s_0, s_1[$, on pose

$$F(s) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, s) dx.$$

On fait les hypothèses suivantes.

1. Dérivabilité. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f(x, s)$ est dérivable par rapport à s ;

2. Domination. Pour tout $s \in]s_0, s_1[$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $|\frac{\partial f}{\partial s}(x, s)| \leq g(x)$ où g est une fonction positive indépendante de s .

3. Intégrabilité. g est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^d .

Alors, F est dérivable par rapport à s , de dérivée

$$F'(s) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial s}(x, s) dx.$$

Autrement dit,

$$\frac{d}{ds} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, s) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial s}(x, s) dx.$$

Remarque 23 On peut dans le corollaire 2, substituer ($z \in D \subset \mathbb{C}$, D ensemble ouvert du plan complexe) à ($s \in]s_0, s_1[\subset \mathbb{R}$). Dans ces conditions $F(z)$ est une fonction holomorphe dans D .

1.3.4 Intégrale sur un sous-ensemble de \mathbb{R}

On peut intégrer les fonctions aussi sur des sous-ensembles de \mathbb{R}^d . Cela ne conduit à aucune difficulté particulière.

Définition 24 On dit que E est mesure finie si sa fonction caractéristique (Définition 9) $\mathbb{1}_E$ est intégrable. Sa mesure de Lebesgue est l'intégrale de $\mathbb{1}_E$,

$$\lambda(E) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_E(x) dx.$$

En dimension $d = 1$, on parle aussi de "longueur de E ", en dimension $d = 2$ d'"aire", et de "volume" en dimension $d \geq 3$.

Définition 25 Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^d . Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur E . On dit que f est intégrable sur E si $\mathbb{1}_E f$ est intégrable sur \mathbb{R}^d , et on pose

$$\int_E f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_E(x) f(x) dx.$$

Exemple 26 Soit E un intervalle fermé borné. Une fonction continue sur E est automatiquement intégrable sur E .

Proposition 27 Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R} , $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Soit f une fonction intégrable sur E . Alors

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx.$$

1.3.5 Approximation par des fonctions en escalier

Proposition 28 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction g en escalier telle que $D(f, g) < \varepsilon$.

Autrement dit, on peut approximer avec une précision arbitraire (en distance L^1) toute fonction intégrable par une fonction en escalier.

1.3.6 Intégrale et primitive

On rappelle les deux théorèmes suivants, qui suffisent dans la pratique :

Théorème 5 Soit $]a, b[$ un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable et continue.

Soit $F(y) = \int_a^y f(x) dx$. Alors

1. F est une fonction dérivable sur $]a, b[$.
2. Pour tout $y \in]a, b[$, $F'(y) = f(y)$.

On en déduit :

Théorème 6 Soit $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable et telle que F' soit continue. On a

$$F(x) - F(y) = \int_y^x F'(t) dt$$

pour tous $x, y \in]a, b[$.

Si f est seulement supposée intégrable dans le théorème 5, c'est plus compliqué :

Théorème 7 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur \mathbb{R} . Soit $F(y) = \int_{]-\infty, y]} f(x) dx$. Alors

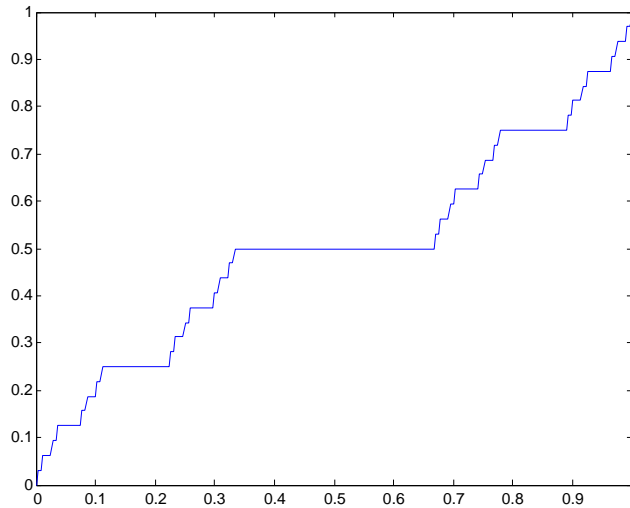
1. F est une fonction continue sur \mathbb{R} .
2. Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, F est dérivable en y , de dérivée $F'(y) = f(y)$.

C'est un théorème difficile, et admis.

Remarque 29 Il existe des fonctions continues, dérivables presque partout, mais telles que

$$f(x) - f(a) \neq \int_{[a, x]} f'(x) dx.$$

G. Cantor en a construit un exemple célèbre, connu parfois sous le nom d'escalier du diable.



Cette fonction continue est dérivable presque partout, avec une dérivée nulle, mais elle n'est pas constante.

Définition 30 Une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, est dite absolument continue s'il existe une fonction f intégrable sur tout intervalle borné telle que pour tous x et $a \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f(t) dt.$$

Remarque 31 1. Une fonction dérivable n'est pas toujours absolument continue. Par exemple, la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin x^{-2}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

a une dérivée qui n'est pas intégrable.

2. D'après le théorème 6, si F est dérivable et si F' est continue, alors F est absolument continue.

3. D'après le théorème 7, une fonction absolument continue F est dérivable presque partout, et sa dérivée est presque partout égale à f . D'une manière lapidaire, une fonction absolument continue est une fonction qui est "égale à l'intégrale de sa dérivée".

Proposition 32 Intégration par parties. Soient F et G deux fonctions absolument continues sur $[a, b]$, de dérivées respectives f et g . On a

$$\int_{[a,b]} F(x)g(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{[a,b]} f(x)G(x) dx.$$

1.3.7 Théorème de Fubini-Tonelli pour les intégrales multiples

Le théorème de Fubini-Tonelli permet de savoir si des intégrales multiples ($d \geq 2$) convergent ou divergent. Le théorème permet de plus de calculer ces intégrales de plusieurs manières différentes. On l'énonce ici en dimension $d = 2$. On notera (x, y) les coordonnées.

Théorème 8 (Fubini-Tonelli). *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On fait les hypothèses suivantes.*

- Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur \mathbb{R} .
- La fonction $x \mapsto F(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dy$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Alors f est intégrable sur \mathbb{R}^2 .

Réciproquement, si f est intégrable sur \mathbb{R}^2 , alors

- Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur \mathbb{R} .
- La fonction $y \mapsto G(y) = \int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dx$ est intégrable sur \mathbb{R} .
- on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy.$$

Voici une façon moins rigoureuse mais moins lourde de formuler le théorème, dans le cas des fonctions positives.

Corollaire 33 *Soit f une fonction positive de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .*

- Si l'une des trois expressions suivantes est finie

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy, \quad II = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx, \quad III = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy,$$

- les deux autres sont aussi finies, f est intégrable sur \mathbb{R}^2 , et de plus $I = II = III$.
- Si l'une de ces trois expressions n'est pas finie, les deux autres ne le sont pas non plus et f n'est pas intégrable sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 34 *Preuve de la formule d'intégration par parties, proposition 32.*

Par hypothèse,

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f(t) dt, \quad G(x) = G(a) + \int_{[a,x]} g(t) dt.$$

Introduisons $\tilde{F}(x) = \int_{[a,x]} |f(t)| dt$. Comme f est intégrable sur $[a, b]$, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|\tilde{F}(x)| \leq \int_{[a,b]} |f(t)| dt,$$

donc \tilde{F} est bornée. On écrit

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} F(x)g(x) dx &= \int_{[a,b]} F(a)g(x) dx + \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,x]} f(t) dt \right) g(x) dx \\ &= F(a)(G(b) - G(a)) + \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,x]} f(t)g(x) dt \right) dx. \end{aligned}$$

On définit une fonction h sur $[a, b] \times [a, b]$ par $h(x, t) = f(t)g(x)1_T(x, t)$ où $T = \{(x, t) \mid a \leq t \leq x \leq b\}$. Alors pour tout x , h est intégrable en t . L'intégrale par rapport à t du module de h vaut $\tilde{F}(x)g(x)$. Comme \tilde{F} est bornée et g est intégrable, le produit est intégrable. Le théorème de Fubini-Tonelli garantit que h est intégrable sur $[a, b] \times [a, b]$, et que

$$\int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} h(x, t) dt \right) dx = \int_{[a,b] \times [a,b]} h(x, t) dx dt.$$

Autrement dit,

$$\int_{[a,b]} F(x)g(x) dx = F(a)(G(b) - G(a)) + \int_T f(t)g(x) dx dt. \quad (1.1)$$

De même,

$$\int_{[a,b]} G(x)f(x) dx = G(a)(F(b) - F(a)) + \int_T g(t)f(x) dx dt. \quad (1.2)$$

En changeant les variables de nom (on change t en x et x en t), il vient

$$\int_T g(t)f(x) dx dt = \int_{T'} g(x)f(t) dx dt,$$

où $T' = \{(x, t) \mid a \leq x \leq t \leq b\}$. Remarquer que $T \cup T' = [a, b] \times [a, b]$ et que $T \cap T'$, la diagonale du carré, est d'aire nulle. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_T g(t)f(x) dx dt + \int_T f(t)g(x) dx dt &= \int_{T \cup T'} f(t)g(x) dx dt \\ &= \int_{[a,b] \times [a,b]} f(t)g(x) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{[a,b]}(t)f(t)1_{[a,b]}(x)g(x) dx dt \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{[a,b]}(t)f(t) dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{[a,b]}(x)g(x) dx \right) \\ &= (F(b) - F(a))(G(b) - G(a)). \end{aligned}$$

En additionnant (1.1) et (1.2), on trouve

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} F(x)g(x) dx + \int_{[a,b]} G(x)f(x) dx &= F(a)G(b) + G(a)F(b) - 2F(a)G(a) + \int_{T \cup T'} f(t)g(x) dx dt \\ &= F(a)G(b) + G(a)F(b) - 2F(a)G(a) + (F(b) - F(a))(G(b) - G(a)) \\ &= F(b)G(b) - F(a)G(a). \blacksquare \end{aligned}$$

1.3.8 Changement de variables

Nous nous limiterons ici au cas d'un changement de variable régulier, i.e. dont les composantes admettent des dérivées partielles continues.

Théorème 9 Soit ϕ une application bijective d'un ouvert A de l'espace des (x_1, \dots, x_d) sur un ouvert $B = \phi(A)$ de l'espace des (y_1, \dots, y_d) , définie par les d fonctions ϕ_i suivantes :

$$y_i = \phi_i(x_1, \dots, x_d) \quad i = 1, \dots, d,$$

où les ϕ_i sont définies, continues, à dérivées partielles du premier ordre continues sur A .

Soit $J_\phi(x_1, \dots, x_d)$ le jacobien de l'application ϕ , i.e. le déterminant

$$J_\phi(x_1 \dots x_d) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_d}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_d}{\partial x_d} \end{vmatrix}.$$

Pour que $f(y_1 \dots y_d)$ soit intégrable sur l'ensemble $\phi(A)$, il faut et il suffit que la fonction de \vec{x} , $f(\phi_1(x_1 \dots x_d), \dots, \phi_d(x_1 \dots x_d))$, multipliée par $|J_\phi(x_1 \dots x_d)|$, soit intégrable sur A . On a alors

$$\int_{\phi(A)} f(\vec{y}) dy_1 \dots dy_d = \int_A f(\phi_1(\vec{x}) \dots \phi_d(\vec{x})) |J_\phi(\vec{x})| dx_1 \dots dx_d.$$

1.3.9 Lien entre intégrale et mesure

Pour les fonctions de plusieurs variables comme pour les fonction d'une variable réelle, l'intégrale s'exprime comme volume de la région comprise entre le graphe et un plan.

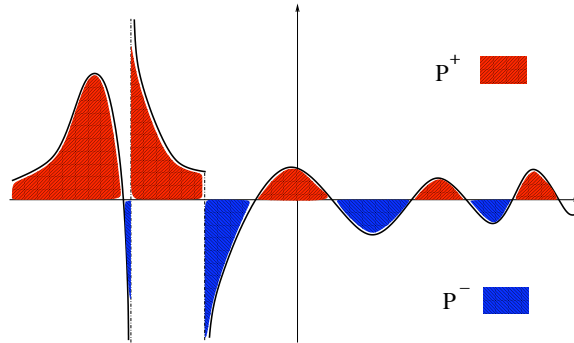
Proposition 35 Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction. Dire que f est intégrable revient à dire que si $f = f^+ + f^-$, où f^+ (resp. f^-) est la partie positive (resp. négative) de f , alors

- L'ensemble $P^+ = \{(\vec{x}, y) \mid 0 \leq y < f^+(\vec{x})\}$, a une mesure finie pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^{d+1} .
- L'ensemble $P^- = \{(\vec{x}, y) \mid f^-(\vec{x}) < y \leq 0\}$, a une mesure finie pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^{d+1} .

Si tel est le cas,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{x}) d^d \vec{x} = A^+ - A^-,$$

où $A^+(A^-)$ sont les mesures de Lebesgue respectives des ensembles $P^+(P^-)$.



1.3.10 A retenir

Pour montrer qu'une fonction f d'une variable réelle est intégrable,

- On remarque qu'elle est continue sauf en un nombre finie de points.
- On étudie la convergence de l'intégrale généralisée de f sur chacun des morceaux, à chaque borne.

Pour montrer qu'une fonction f de deux variables réelles est intégrable,

- On remarque qu'elle est continue par morceaux en chaque variable.
- On étudie l'intégrabilité en une variable (méthode précédente).
- On étudie l'intégrabilité de l'intégrale par rapport à une variable comme fonction de l'autre variable (méthode précédente).
- On applique le théorème de Fubini-Tonelli.

Eventuellement, il peut être utile d'effectuer préalablement un changement de variable.

1.4 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

1.4.1 Définition

Définition 36 Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R}^d . On appelle transformée de Fourier de f , la fonction Ff de \mathbb{R}^d dans \mathbb{C} , définie, pour $u \in \mathbb{R}^d$, par l'intégrale

$$(Ff)(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi\langle u, x \rangle} f(x) dx,$$

où l'on a noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^d .

Pour alléger la présentation, on se limitera à $d = 1$ (mais toutes les propriétés seraient valides en dimension quelconque). La définition devient :

Définition 37 Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} . On appelle transformée de Fourier de f , la fonction Ff de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , définie, pour $u \in \mathbb{R}$, par l'intégrale

$$(Ff)(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ux} f(x) dx.$$

Remarque 38 1. Cette fonction Ff est définie pour tout $u \in \mathbb{R}$ car l'intégrale est finie pour tout u réel. En effet,

$$|\exp(-2i\pi ux)f(x)| = |f(x)|,$$

et, par hypothèse, $|f|$ est intégrable.

2. Les notations pour la transformée de Fourier sont nombreuses :

$$(Ff)(u) = (TFf)(u) = \hat{f}(u) = \dots$$

3. Les conventions sont encore plus nombreuses, elles sont toutes de la forme

$$(Ff)(u) = a^{-1} \int_{\mathbb{R}} \exp(-2ibxu) f(x) dx,$$

où les coefficients numériques a et b contiennent un nombre varié de puissances de 2 et de π . Prendre garde à la convention adoptée dans l'ouvrage que vous consultez

4. En physique, pour $d = 1$, x est souvent la variable de temps, et $f(x)$ représente l'amplitude d'un signal au cours du temps. Dans ce cas, $(Ff)(u)$ représente sa distribution en fréquences (ou nombres d'ondes...). C'est la distribution spectrale du signal f . L'ensemble des points u de \mathbb{R} tels que $(Ff)(u) \neq 0$ est appelé spectre de f .

Nous admettrons sans démonstration la propriété suivante.

Proposition 39 Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} . Alors

$$(Ff)(u) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \text{ presque partout.}$$

Son interprétation physique est intéressante. Pour un signal intégrable, si la fonction spectrale est nulle, le signal est nul physiquement car mathématiquement nul presque partout.

1.4.2 Propriétés de Ff pour f intégrable sur \mathbb{R}

1. *Linéarité.* Pour $a, b \in \mathbb{C}$ et f, g intégrables,

$$F(af + bg) = a(Ff) + b(Fg).$$

2. *Réalité.*

– Si f est à valeurs réelles, (Ff) a la symétrie hermitienne suivante

$$(Ff)(-u) = \overline{(Ff)(u)}.$$

– Si f a la symétrie hermitienne, Ff est une fonction à valeurs réelles.

3. *Parité.* Si f est paire (impaire), (Ff) est paire (impaire).

4. *Réalité et parité.* Si f est réelle et paire, (Ff) l'est aussi.

5. *Translation et modulation*

– Si $(\tau_z f)(x) = f(x - z)$ définit la translatée $\tau_z f$ de f d'une quantité z , on a

$$(F\tau_z f)(u) = e^{-2i\pi uz} (Ff)(u).$$

– Pour f intégrable sur \mathbb{R} , posons $h_v(x) = e^{2i\pi vx} f(x)$, où $v \in \mathbb{R}$, on a

$$(Fh_v)(u) = (Ff)(u - v).$$

6. *Dilatation.* Pour f intégrable sur \mathbb{R} , et $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, posons $(d_a f)(x) = f(\frac{x}{a})$. On a

$$(Fd_a f)(u) = |a|(Ff)(au).$$

Remarque 40 *Les dilatations portant sur f et Ff vont en sens inverse l'une de l'autre, ce qui veut dire que si on étale f d'un facteur a^{-1} , on va contracter Ff d'un facteur a . L'interprétation physique de cette propriété mathématique est claire : La fonction spectrale d'un signal est d'autant plus étalée que le signal est étroit.*

Proposition 41 *Si f est intégrable, alors Ff est bornée, on a $|Ff(u)| \leq \int |f|$ pour tout u .*

Proposition 42 *Soit $f_k, k = 1, 2, \dots$ une suite de fonctions intégrables sur \mathbb{R} qui convergent en distance L^1 vers f . Alors les fonctions Ff_k convergent uniformément sur \mathbb{R} vers Ff .*

1.4.3 Exemples

$f(x)$	$Ff(u)$
$e^{-b x } \quad (b > 0)$	$\frac{2b}{4\pi^2 u^2 + b^2} \quad (1)$
$\frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\frac{\pi}{a} e^{-2\pi a u } \quad (2)$
$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$(\pi/a)^{\frac{1}{2}} \exp(-\pi^2 u^2/a) \quad (3)$
$\Pi(x)$	$\frac{\sin(2\pi ua)}{\pi u}$ et $F\Pi(0) = 2a \quad (4)$

où la fonction Π est la *fonction porte* définie par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq a; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 43 *La transformée de Fourier $F(f)$ d'une fonction intégrable f n'est pas toujours une fonction intégrable, comme le montre l'exemple de la fonction Π .*

1.4.4 Théorème de Riemann-Lebesgue

Théorème 10 (Riemann-Lebesgue). *Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} , alors*

1. Ff est bornée sur \mathbb{R} .
2. Ff est continue sur \mathbb{R} .
3. $(Ff)(u)$ tend vers 0 quand u tend vers $\pm\infty$.

Remarque 44 *En physique, ce théorème donne le comportement à l'infini de la distribution spectrale d'un signal intégrable. Il veut dire aussi que si une seule des trois conditions indiquées n'est pas réalisée, le signal n'est pas une fonction intégrable.*

1.4.5 Formule de Plancherel

Proposition 45 Formule de Plancherel. *Soient f et g des fonctions intégrables sur \mathbb{R} . Alors*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(Fg)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (Ff)(y)g(y) dy. \quad (1.3)$$

1.4.6 Transformée de Fourier inverse

Le résultat principal est ici un résultat négatif.

La transformée de Fourier d'une fonction intégrable n'est pas nécessairement intégrable.

Exemple 46 Soit $f(x) = 1$ pour $|x| \leq a$ et $f(x) = 0$ pour $|x| > a$. Alors

$$(Ff)(u) = \frac{\sin 2\pi ua}{\pi u},$$

qui n'est pas intégrable sur \mathbb{R} (cf. Exemple 18).

En fait, il n'existe pas de formule d'inversion valable pour toute fonction f intégrable sur \mathbb{R} . On a cependant le théorème suivant.

Théorème 11 Si f et Ff sont intégrables sur \mathbb{R} , alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} Ff(u)e^{2i\pi ux} du.$$

On retrouve la Proposition 39 :

Corollaire 47 Si f est intégrable et si $Ff = 0$, alors $f(x) = 0$ pour presque tout x .

Corollaire 48 Si f et g sont intégrables et si $Ff = Fg$, alors $f(x) = g(x)$ pour presque tout x .

En effet, $Ff = Fg$ se réécrit $F(f - g) = 0$, et on peut appliquer le Corollaire 47 pour conclure que $f(x) - g(x) = 0$ pour presque tout x .

Enfin, en combinant le corollaire précédent et la remarque 6, on obtient :

Corollaire 49 Si f et g sont continues et intégrables, et si $Ff = Fg$, alors $f(x) = g(x)$ pour tout x .

1.4.7 Comportement à l'infini de f et dérivabilité de Ff

En appliquant le théorème de dérivation sous le signe \int , on démontre que si f et xf sont intégrables, alors Ff est dérivable et

$$(Ff)'(u) = (F[-2i\pi xf])(u).$$

Plus généralement, on a la proposition suivante.

Proposition 50 Si $f, xf, \dots, x^p f$ sont intégrables, alors (Ff) admet des dérivées jusqu'à l'ordre p et, pour $k = 1, 2, \dots, p$,

$$(Ff)^{(k)}(u) = (F[(-2i\pi x)^k f])(u).$$

Inversement, on a :

Proposition 51 Soit f une fonction intégrable \mathbb{R} , dérivable, et dont la dérivée f' est continue et intégrable sur \mathbb{R} . Alors

$$(Ff')(u) = 2i\pi u(Ff)(u).$$

Ceci se démontre en faisant une intégration par parties.

Généralisation : Si f est intégrable, p -fois dérivable, et si les dérivées successives $f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(p)}$ sont continues et intégrables sur \mathbb{R} , alors, pour $k = 1, 2, \dots, p$,

$$(Ff^{(k)})(u) = (2i\pi u)^k (Ff)(u).$$

Remarque 52 Dans ce cas, on a un renforcement du théorème de Riemann-Lebesgue : on a

$$|Ff(u)| \leq \frac{1}{|2\pi u|^p} \int |f^{(p)}|$$

où l'on voit que $Ff(u)$ tend vers 0 (quand $|u|$ tend vers l'infini) plus vite que $\frac{1}{|u|^p}$.

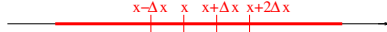
1.5 Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

1.5.1 Motivation

On s'intéresse à la diffusion de la chaleur dans un solide homogène et isotrope. Pour simplifier, on suppose le solide unidimensionnel (fil infiniment fin), et infiniment long, représenté par l'axe réel \mathbb{R} . La température f est une fonction de la position $x \in \mathbb{R}$ et du temps $t \in [0, +\infty)$. A chaque instant t , pendant un temps Δt , un volume infinitésimal entre x et $x + \Delta x$ reçoit de la chaleur de ses voisins $[x - \Delta x, x]$ et $[x + \Delta x, x + 2\Delta x]$, proportionnellement à la différence de leurs températures. Par conséquent

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + \alpha(f(x - \Delta x, t) - f(x, t)) + \alpha(f(x + \Delta x, t) - f(x, t)),$$

où α est une quantité sans dimension, qui dépend des propriétés physiques du solide, et supposée indépendante de x et de t , car le solide est homogène.



On utilise les développements limités (de Taylor-Young)

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \dots, \quad f(x + \Delta x, t) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + \dots,$$

il vient, aux restes près,

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2.$$

Cela conduit à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{1.4}$$

où c est homogène au carré d'une longueur divisé par un temps. Depuis D. Poisson, cette équation est connue sous le nom d'*équation de la chaleur*.

Comment résoudre l'équation (1.4)? Une méthode est d'utiliser la transformée de Fourier. On rappelle que $f(x, t)$ est une fonction de l'espace x et du temps t . On notera $f_t(x) = f(x, t)$. Pour tout t , f_t est maintenant une fonction sur \mathbb{R} , de même que $\frac{\partial f}{\partial t}$, etc... Prenons la transformée de Fourier des deux côtés de (1.4), par rapport à la variable d'espace x (en supposant que les deux côtés sont des fonctions de L^1). Autrement dit, posons

$$(Ff_t)(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ux} f_t(x) dx.$$

Ainsi $(Ff_t)(u)$ est maintenant une fonction de (t, u) , ou encore une fonction de u dépendant du temps t . On a

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = cF\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right).$$

On va poursuivre les calculs en supposant que tous les théorèmes du cours s'appliquent. Par dérivation sous le signe \int , on a $F(\frac{\partial f}{\partial t})(u) = \frac{d}{dt}(Ff)$. On a aussi $F(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(u) = (2i\pi u)^2 Ff(u)$, grâce à la Proposition 51. Par conséquent, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$, la fonction $g = Ff_t$ satisfait

$$\frac{\partial}{\partial t} g(u) = c(2i\pi u)^2 g(u).$$

La solution de cette équation différentielle est

$$g(u) = e^{c(2i\pi u)^2 t} (Ff_0)(u) = e^{-4\pi^2 c u^2 t} (Ff_0)(u).$$

On voit déjà que si f_0 a été supposée intégrable, (Ff_0) est bornée et donc, pour $t > 0$, $u \mapsto e^{-4\pi^2 cu^2 t}(Ff_0)(u)$ est intégrable (grâce à la décroissance très rapide de la gaussienne).

On peut donc poser

$$f_t(x) = F^{-1}g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi ux} e^{-4\pi^2 cu^2 t} (Ff_0)(u) du \quad (1.5)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi u(x-y)} e^{-4\pi^2 cu^2 t} f_0(y) du dy \quad (1.6)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_0(y) p_t(x-y) dy \quad (1.7)$$

où l'on a posé $p_t(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi uy} e^{-4\pi^2 cu^2 t} du = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{-y^2/4ct}$ (transformée de Fourier d'une gaussienne). Là encore, on a supposé que le théorème de Fubini-Tonelli s'appliquait. Il faudra plus tard justifier la rigueur de ces calculs, mais pour l'instant essayons d'interpréter (1.7). La fonction $f_0(y)$ représente la température en y , à l'instant 0; de même, $f_t(x)$ est la température en x , à l'instant t . La quantité $p_t(x-y)$ représente la chaleur diffusée (par unité de température) de y vers x pendant le temps t . L'équation (1.7) se lit ainsi : la température en x à l'instant t s'obtient en sommant, sur tous les y , la température en y à l'instant 0 multipliée par la chaleur diffusée de y vers x pendant le temps t .

On remarque que la chaleur diffusée de y vers x , $p_t(x-y)$, ne dépend que de la différence $x-y$: c'est une expression du fait que le solide est homogène (la chaleur diffuse de la même manière partout). Aussi, $p_t(x-y) = p_t(y-x)$, la chaleur diffuse de la même manière dans les deux directions (le solide est isotrope).

Une expression du type $\int f(y)g(x-y)dy$ s'appelle le produit de convolution de f et g .

1.5.2 Définition

Définition 53 Soient f et g deux fonctions intégrables sur \mathbb{R} . On appelle convolution de f et de g , la fonction k définie par l'intégrale

$$k(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt.$$

On note $k = f \star g$.

Le fait que l'intégrale soit définie ne va pas de soi. C'est une conséquence remarquable du théorème de Fubini-Tonelli, voir plus loin. Attention, le produit de deux fonctions intégrables n'est pas intégrable en général.

Exemple 54 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|^{-1/2}$ pour $x \in [-1, 0[\cup]0, 1]$, et $f(x) = 0$ sinon. Alors f est intégrable sur \mathbb{R} , mais f^2 ne l'est pas. Par conséquent, $(f \star f)(x)$ n'est pas définie en $x = 0$, mais l'est pour tout $x \neq 0$.

En effet, l'intégrale généralisée $\int_{-0} x^{-1/2} dx$ est convergente à la borne 0, mais $\int_{-0} x^{-1} dx$ ne l'est pas.

1.5.3 Propriétés de la fonction convolution

Proposition 55 Soient f et g deux fonctions intégrables sur \mathbb{R} .

1. Le nombre $(f \star g)(x)$ est défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
2. La fonction $f \star g$ est intégrable sur \mathbb{R} , on a

$$\int |f \star g| \leq \int |f| \times \int |g|$$

et

$$\int f \star g = \int f \times \int g.$$

3. Si f est de plus une fonction bornée, alors $f \star g$ est continue et bornée.

1.5.4 Propriétés algébriques du produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

Proposition 56 Soient f, g et h des fonctions intégrables sur \mathbb{R} .

1. Commutativité

$$f \star g = g \star f.$$

2. Distributivité

$$f \star (ag + bh) = a(f \star g) + b(f \star h).$$

3. Associativité

$$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h.$$

On dit que $L^1(\mathbb{R})$ forme une algèbre pour l'addition et le produit \star , appelée algèbre de convolution.

1.5.5 Produit de convolution et transformation de Fourier

Théorème 12 Soient f et g deux fonctions intégrables sur \mathbb{R} . Alors

$$F(f \star g) = (Ff)(Fg).$$

Autrement dit, la transformation de Fourier F réalise un homomorphisme algébrique de l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$ (avec les opérations \star et $+$) dans² l'algèbre des fonctions continues et bornées qui tendent vers zéro à l'infini (opérations de multiplication et d'addition ordinaires).

1.5.6 Retour sur l'équation de la chaleur

Proposition 57 Soit $f(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, une solution de l'équation de la chaleur sur \mathbb{R} . On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, f_t est intégrable.
2. Pour tous $0 < T < T'$, pour $t \in [T, T']$, les fonctions $f_t : x \mapsto f(x, t)$ sont dominées par une fonction intégrable sur \mathbb{R} , ainsi que leurs dérivées par rapport au temps $\frac{\partial f_t}{\partial t}$.
3. Lorsque t tend vers 0, f_t tend vers f_0 en distance L^1 .

Alors $f(x, t)$ est donnée par la formule intégrale suivante

$$f(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{-(x-y)^2/4ct} f(y, 0) dy \quad (1.8)$$

Réciproquement, si $x \mapsto f(x)$ est une fonction intégrable sur \mathbb{R} , la formule (1.8) définit une solution de l'équation de la chaleur qui satisfait aux conditions 1, 2, et 3 avec $f(\cdot, 0) = f$.

Interprétation. Notons A_t l'opérateur qui à une fonction intégrable f associe la fonction f_t , solution au temps t de l'équation de la chaleur de condition initiale f (lorsque $f > 0$, f modélise une distribution de température, et f_t est température obtenue après qu'on a laissé la chaleur diffuser pendant un temps t). On constate que

$$A_t f = p_t \star f,$$

comme suggéré au paragraphe 1.5.1. Ici, le temps est fixé et la variable x est une variable d'espace. La fonction p_t interprète comme le résultat de la diffusion en temps t d'une quantité unité de chaleur déposée au point 0. On appelle la famille de fonctions p_t le *noyau de la chaleur*, ou la *solution fondamentale* de l'équation de la chaleur.

² Inclusion *stricte*, car par exemple la fonction $f(t) = t/(1+|t|)\ln(|t|)$ n'est l'image d'aucune fonction intégrable par F .

1.6 Epilogue

L'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables est *insuffisant* pour les besoins de la physique. Regardons par exemple le cas de l'équation de la chaleur. On a envie de dire que si au temps $t = 0$, f_0 est une quantité unité de chaleur, concentrée au point y_0 , alors la répartition de température au temps t est $p_t(x - y_0)$. Pour l'instant, nous ne disposons d'aucun objet mathématique qui permette de décrire une telle source ponctuelle.

En effet, il n'existe pas de fonction intégrable δ_{y_0} telle que $\delta_{y_0} \star p_t(x) = p_t(x - y_0)$ pour tout x . Démontrons le pour $y_0 = 0$, la preuve s'adapte facilement au cas général :

Proposition 58 *Il n'existe pas de fonction intégrable δ telle que*

$$\delta \star p_t = p_t.$$

Remarque 59 *Par conséquent, il n'existe pas de fonction intégrable δ telle que $\delta \star f = f$ pour tout f . En d'autres termes, il n'existe pas d'unité pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.*

Ce résultat est très gênant pour l'utilisateur du produit de convolution. La théorie des *distributions* résoud ce problème.

1.7 Bibliographie

- Il y a peu d'ouvrages élémentaires qui exposent la mesure et l'intégration au sens de Lebesgue, citons cependant
 - A.J. WEIR, *Lebesgue integration and measure*, Cambridge University Press.
- Ouvrages généraux sur le cours.
 - C. GASQUET, P. WITOMSKI, *Analyse de Fourier et applications*, Masson.
 - H. REINHARD, *Cours de mathématique du signal*, Dunod Université.
- Recueil d'exercices corrigés.
 - F. BAYEN, C. MARGARIA, *Problèmes de mathématiques appliquées*, Ellipses.
- Cours complet avec exercices corrigés.
 - P. BENOIST-GUEUTAL, M. COURBAGE, *Mathématiques pour la physique*, Eyrolles.
 - W. APPEL, *Mathématique pour la physique et les physiciens*, H&K Editions.

Chapitre 2

Fonctions d'une variable complexe

2.1 Objets du plan complexe

2.1.1 Le plan complexe \mathbb{C}

On peut définir un point z du plan complexe \mathbb{C} par la donnée de deux coordonnées réelles de différentes manières.

Par exemple

$$z = x + iy \text{ où } x, y \in \mathbb{R}$$

ou bien encore

$$z = \rho e^{i\theta}$$

avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ à $2k\pi$ près.

On a donc $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Rappelons aussi que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ et que

$$z = 0 \Leftrightarrow \rho = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0.$$

Remarque 60 On ne doit pas utiliser les relations d'ordre $>$ et $<$ pour deux nombres complexes quelconques.

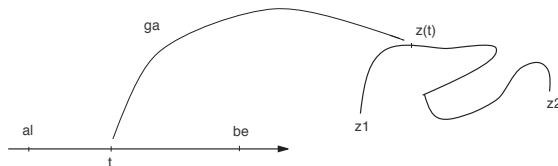
2.1.2 Disques

Disque ouvert : $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$.

Disque fermé : $\bar{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$.

2.1.3 Chemins

Un chemin $L(z_1, z_2)$ du plan complexe peut être caractérisé par une fonction γ à valeurs complexes $z(t) = \gamma(t)$ du paramètre réel $t \in [\alpha, \beta]$. La fonction γ est continue en t , à dérivée en t continue par morceaux.



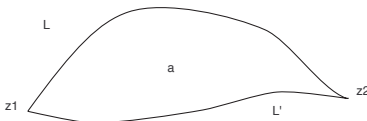
Remarque 61 1. On peut considérer avec profit une image en terme de cinématique du point matériel dans le plan : on considère que $z(t)$ représente la position à l'instant t d'un point mobile M . Le point M est autorisé à un changement brusque de direction en certains points de sa trajectoire, en dehors de ces points la vitesse est une fonction continue.

2. On peut avoir $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ pour des temps t_1 et t_2 différents.

2.1.4 Chemins homotopes

Deux chemins L et L' ayant mêmes extrémités sont dits *homotopes* s'il est possible de les déformer l'un en l'autre d'une manière continue (intuitivement : sans les déchirer à aucun moment au cours de cette déformation).

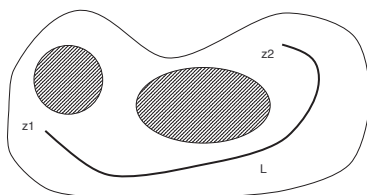
Remarque 62 Cette dernière opération si elle est toujours possible dans \mathbb{C} tout entier, n'est pas toujours possible dans $\mathbb{C} - \{a\}$.



2.1.5 Domaine connexe

C'est un ensemble D de points du plan complexe \mathbb{C} tels que

1. Chaque point z_0 de D peut être le centre d'un *disque ouvert* entièrement contenu dans D .
2. Deux points quelconques z_1 et z_2 de D peuvent être reliés entre eux par un chemin L entièrement contenu dans D .



2.1.6 Domaine simplement connexe

C'est un domaine connexe D où deux chemins quelconques joignant deux points arbitraires z_1 et z_2 de D sont homotopes tout en restant dans D .

Exemple 63 Un disque ouvert est simplement connexe alors que le domaine précédent ne l'est pas.

2.2 Séries entières

2.2.1 Définition

Les polynômes à coefficients complexes $z \mapsto \mathcal{P}(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_dz^d$ peuvent être vus comme des fonctions de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . On a envie de passer des sommes finies aux sommes infinies.

Définition 64 On appelle série entière une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ de la forme

$$f_n(z) = a_n z^n.$$

On la note $\sum a_n z^n$.

Exemple 65 On appelle série exponentielle la série entière de terme général $z^n/n!$, $n \geq 0$.

2.2.2 Rayon de convergence

Théorème 13 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un nombre $R \in [0, +\infty]$ tel que

1. Si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ est divergente.

Définition 66 On appelle le nombre fourni par le théorème 13 le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Le disque $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ s'appelle le disque de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exemple 67 Le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est égal à 1. Sur le disque de convergence, la somme de cette série vaut $\frac{1}{1-z}$.

En effet, $R \leq 1$ car la série diverge en $z = 1$. D'autre part, elle converge pour tout z tel que $|z| < 1$, donc $R \geq 1$. On conclut que $R = 1$. L'identité remarquable

$$1 + z + \dots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

montre que si $|z| < 1$, les sommes partielles de la série convergent vers $\frac{1}{1-z}$.

Exemple 68 Le rayon de convergence de la série exponentielle est égal à $+\infty$.

En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut appliquer le critère de d'Alembert au module $|z^n/n!|$.

2.2.3 Dérivation terme à terme

Définition 69 Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, soit $r > 0$. Soit f une fonction définie sur le disque de centre z_0 et de rayon r dans \mathbb{C} . On dit que f est dérivable au sens complexe s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \ell \right| = 0.$$

Le nombre ℓ s'appelle la dérivée de f en z_0 , notée $f'(z_0)$.

Exemple 70 Un polynôme $z \mapsto \mathcal{P}(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d$ est dérivable au sens complexe, de dérivée $\mathcal{P}'(z_0) = a_1 + 2a_2 z_0 + \dots + da_d z_0^{d-1}$.

Théorème 14 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence n'est pas nul. Alors sa somme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est dérivable au sens complexe sur le disque de convergence, et sa dérivée f' s'obtient en dérivant terme à terme,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

2.2.4 Séries de Laurent

Définition 71 Une série de Laurent, c'est une série de fonctions de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$, i.e. une série de puissances positives et négatives de z .

Pour que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ converge, il faut et il suffit que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (1/z)^n$ convergent. Par conséquent, une série de Laurent possède une couronne de convergence $A = \{R_1 < |z| < R_2\}$. Le théorème de dérivation terme à terme (Théorème 14) s'étend aux séries de Laurent.

2.3 Fonctions holomorphes dans un domaine

2.3.1 Définition

Soit $z = x + iy \in D$ et $z \mapsto f(z) \equiv f(x + iy)$ une fonction définie pour $z \in D$.

Définition 72 La fonction f est holomorphe dans D , si l'une des trois conditions suivantes (I, II ou III) est satisfaite

- I. La fonction f est dérivable au sens complexe en tout point z_0 de D .
- II. Si on décompose $f(x, y)$ en parties réelle $P(x, y)$ et imaginaire $Q(x, y)$

$$f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

- 1. Les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont continues en tout point $z = x + iy$ de D .
- 2. Les dérivées partielles P'_x P'_y Q'_x Q'_y existent et sont continues en x et y en tout point de D .
- 3. Les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann en tout point de D .

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

III. Pour tout $z_0 \in D$, la fonction $h \mapsto f(z_0 + h)$ est égale, au voisinage de 0, à la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)h^n.$$

- Remarque 73**
- 1. Les propriétés I, II et III sont équivalentes seulement lorsqu'on considère un domaine D . Elles ne sont plus équivalentes si on ne considère qu'un seul point. On dit que ce sont des propriétés localement équivalentes mais pas ponctuellement.
 - 2. Les conditions de Cauchy-Riemann seules (cf. la définition II) n'assurent pas l'holomorphicité.
 - 3. La condition III s'appelle traditionnellement condition **d'analyticité**.

- Proposition 74**
- 1. Une fonction holomorphe dans D est continue en tout point de D .
 - 2. Une fonction holomorphe dans D est bornée sur tout disque fermé (plus généralement une union finie de tels disques) contenu dans D .

2.3.2 Exemples de fonctions holomorphes

- 1. $z \mapsto z$.
- 2. $z \mapsto \mathcal{P}(z)$ où \mathcal{P} est un polynôme en z .
- 3. $z \mapsto e^{az} = 1 + az + \frac{1}{2}(az)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(az)^n + \dots$, où $a \in \mathbb{C}$.
Ces trois dernières fonctions sont holomorphes dans tout le plan complexe.
- 4. $z \mapsto \frac{1}{z}$, qui est holomorphe dans $\mathbb{C} - \{0\}$.
- 5. $z \mapsto \frac{\mathcal{P}(z)}{\mathcal{Q}(z)}$, où \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont des polynômes en z , est holomorphe dans \mathbb{C} privé des racines de l'équation $\mathcal{Q}(z) = 0$.
- 6. La dérivée p -ème $f^{(p)}$ d'une fonction f holomorphe dans D est holomorphe dans D . (En déduire que $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$).

2.3.3 Propriétés algébriques des fonctions holomorphes

Supposons données deux fonctions $z \mapsto f(z)$ et $z \mapsto g(z)$ holomorphes dans un domaine commun D du plan complexe. On a alors

1. $af(z) + bf(z)$ qui est holomorphe dans D pour a et $b \in \mathbb{C}$.
2. $f(z)g(z)$ est holomorphe dans D .
3. $\frac{f(z)}{g(z)}$ est holomorphe dans D privé des points de D où $g(z) = 0$.
4. (Loi de composition des fonctions holomorphes) Soient $z \mapsto f_1(z)$ holomorphe dans D_1 et $z \mapsto f_2(z)$ holomorphe dans D_2 et supposons que l'image $f_1(D_1)$ soit contenue dans D_2 , on a alors : $z \mapsto f_2(f_1(z))$ qui est holomorphe dans D_1 .

2.4 Intégrales le long de chemins du plan complexe

2.4.1 Définition

Définition 75 Soit $L : [\alpha, \beta] \rightarrow \gamma(t)$ un chemin du plan complexe. Soit $z \mapsto f(z)$ une fonction de la variable complexe z , qu'on suppose holomorphe dans un domaine D contenant le chemin L . On appelle intégrale de f le long de L , la quantité notée $\int_L f(z) dz$ donnée par

$$\int_L f(z) dz = \int_{[\alpha, \beta]} f(\gamma(t)) \frac{d\gamma(t)}{dt} dt.$$

Remarque 76 En décomposant $f(z)$ en partie réelle et imaginaire

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

de même pour $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. On pourra encore écrire $\int_L f(z) dz$ sous la forme d'une intégrale curviligne dans le plan des variables réelles x et y ,

$$\int_L f(z) dz = \int_L P(x, y) dx - Q(x, y) dy + i \int_L P(x, y) dy + Q(x, y) dx$$

Il est très instructif de considérer l'analogie mécanique suivante. On peut dire que $\int_L f(z) dz$ représente le travail accompli par la force $f(z)$ appliquée sur un point mobile se trouvant au point $z(t)$ à l'instant t sur la trajectoire L , lorsqu'il parcourt tout le chemin L avec la vitesse $\frac{d\gamma(t)}{dt}$.

Proposition 77 L'intégrale $\int_L f(z) dz$ est indépendante de la paramétrisation prise pour décrire L .

Ceci veut dire que si $t' \in [\alpha', \beta'] \rightarrow z(t') = \mu(t')$ est une autre paramétrisation équivalente¹ de L ,

$$\int_L f(z) dz = \int_{[\alpha, \beta]} f(\mu(t')) \frac{d\mu(t')}{dt'} dt' = \int_{[\alpha, \beta]} f(\gamma(t)) \frac{d\gamma(t)}{dt} dt.$$

L'analogie en mécanique du point de cette propriété n'est autre que l'invariance, par rapport à la vitesse du point mobile, du travail accompli par une force appliquée sur ce point lors de son déplacement le long d'un chemin donné.

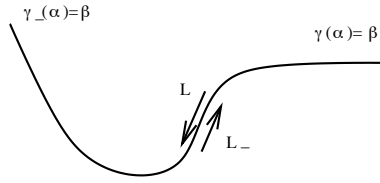
Proposition 78 Soit L_- un chemin identique à L mais décrit en sens inverse par la paramétrisation

$$t \in [\alpha, \beta] \rightarrow z(t) = \gamma_-(t) \in L_-$$

avec $\gamma_-(\alpha) = \gamma(\beta)$ et $\gamma_-(\beta) = \gamma(\alpha)$, alors

$$\int_L f(z) dz = - \int_{L_-} f(z) dz.$$

1. C'est à dire que $t' = \Phi(t)$ et $\gamma(t) = \mu(\Phi(t))$ où Φ est une fonction continue croissante à dérivée continue par morceaux, appliquant de façon bijective $[\alpha, \beta]$ sur $[\alpha', \beta']$.



Proposition 79 (Formule de majoration). Soit f holomorphe dans un domaine connexe D et $L : [\alpha, \beta] \rightarrow z(t)$ un chemin contenu dans D . Alors

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq \lambda(L) \sup_{z \in L} |f(z)|,$$

où $\lambda(L)$ est la longueur de L .

Proposition 80 Soit $f(z)$ holomorphe dans un domaine connexe D et $L : [\alpha, \beta] \rightarrow z(t)$ un chemin contenu dans D . On a alors

$$\int_L f'(z) dz = f(z(\beta)) - f(z(\alpha)).$$

2.4.2 Les fonctions $z \mapsto \log z$, $z \mapsto \text{Log} z$ et $z \mapsto z^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{C}$

Définition des fonctions “logarithme complexe”

Considérons la fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ définie et holomorphe sur le domaine connexe (mais non simplement connexe) $\mathbb{C} - \{0\}$. Soit d'autre part $L(z)$ un chemin issu du point $u = 1$ situé sur l'axe réel et allant jusqu'au point $u = z \in \mathbb{C} - \{0\}$ en évitant le point $u = 0$. Considérons l'intégrale dépendant de z

$$F(z) = \int_{L(z)} \frac{1}{u} du$$

A-t-on ainsi défini une fonction $z \mapsto F(z)$ sur $\mathbb{C} - \{0\}$? La réponse est négative car en prenant $L(z) = \Gamma$, le cercle unité centré en 0 on aurait d'après l'exemple fondamental

$$F(e^{2i\pi}) = 2i\pi.$$

Cependant le point $z = e^{2i\pi}$ étant confondu avec le point $z = 1$ on devrait avoir

$$F(e^{2i\pi}) = F(1) = 0,$$

d'où la contradiction.

En revanche, l'application $z \mapsto F(z)$ est bien une fonction définie sur $\mathbb{C} - \Delta(\alpha)$ où $\Delta(\alpha)$ est une demi-droite issue de l'origine faisant un angle α avec l'axe réel. En effet, le chemin $L(z)$ ne peut alors accomplir un tour complet autour du point 0. On évite donc la situation précédente. Il est traditionnel d'appeler chacune de ces différentes fonctions des *déterminations du logarithme*.

La fonction Log ou détermination principale du logarithme

Elle est définie par $\text{Log} z = F(z)$ où

$$F(z) = \int_{L(z)} \frac{1}{u} du$$

avec $z \in \mathbb{C} - \Delta_-$ où Δ_- est la demi-droite des réels négatifs ou nuls.

Proposition 81 1. La fonction Log est holomorphe en z pour $z \in \mathbb{C} - \Delta_-$.

2. Pour $z = x \in]0, \infty[$ on a $\text{Log} z|_{z=x} = \ln x$.

3. $\frac{d}{dz} \text{Log} z = \frac{1}{z}$ pour $z \in \mathbb{C} - \Delta_-$.

4. Si $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0, \infty[$ et $\theta \in]-\pi, +\pi[$,

$$\text{Log} z = \ln \rho + i\theta,$$

où $\ln(x)$ représente le logarithme népérien de x .

Une autre fonction $\log z$

Elle est définie par $\log z = F(z)$ où

$$F(z) = \int_{L(z)} \frac{1}{u} du$$

avec $z \in \mathbb{C} - \Delta_+$ où Δ_+ est la demi droite des réels positifs ou nuls.

(On remarque que 1 n'appartient pas à $L(z)$, mais 1 est de longueur nulle.)

On peut démontrer les propriétés suivantes de cette fonction \log .

1. Cette fonction \log est holomorphe en z pour $z \in \mathbb{C} - \Delta_+$.
2. Pour $z = x \in]0, \infty[$ on a pour $\epsilon > 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log(x + i\epsilon) = \ln x.$$

On en déduit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log(x - i\epsilon) = \ln x + 2i\pi.$$

3. $\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$ pour $z \in \mathbb{C} - \Delta_+$.
4. Si $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0, \infty[$ et $\theta \in]0, 2\pi[$,

$$\log z = \ln \rho + i\theta.$$

Propriétés communes aux déterminations de $\log z$

1. Pour z_1 et z_2 à l'intérieur du domaine d'holomorphie de la fonction \log considérée

$$\int_{L(z_1, z_2)} \frac{1}{z} dz = \log(z_2) - \log(z_1),$$

pour tout chemin $L(z_1, z_2)$ allant de z_1 vers z_2 tout en restant dans le domaine d'holomorphie de la fonction \log considérée.

2. $e^{\log z} = z$ pour $z \in \mathbb{C} - \Delta_+$; $e^{\text{Log} z} = z$ pour $z \in \mathbb{C} - \Delta_-$.
- 3.

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 + 2ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Log} z_1 z_2 = \text{Log} z_1 + \text{Log} z_2 + 2im\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

avec en général $k \neq m$.

Exercice 82 Calculer $\text{Log} z_1 z_2$ pour $z_1 = z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Que vaut m dans ce cas ?

Les fonctions $z \mapsto z^\alpha$ pour α complexe

Remarquons qu'il ne suffit pas d'écrire " z^α " pour définir la fonction $z \mapsto z^\alpha$ en tant que fonction holomorphe en z lorsque l'exposant α est un nombre complexe. La seule façon simple pour définir la fonction en question est de l'exprimer à l'aide des fonctions logarithmes. Lorsqu'on a défini une fonction logarithme, on peut définir $z \mapsto z^\alpha$ par la formule

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

où \log désigne la fonction $z \mapsto \log z$ choisie.

Le domaine de définition et d'holomorphie de $z \mapsto z^\alpha$ est donc pour α complexe quelconque, celui de la fonction \log qu'on a choisie : le plan complexe \mathbb{C} privé d'une demi-droite particulière.

Cependant, pour des valeurs particulières de α le domaine d'holomorphie de $z \mapsto z^\alpha$ est plus grand que celui donné par le domaine de la fonction \log considérée. On a en particulier

1. Lorsque $\alpha = m$ entier positif ou nul, la fonction $z \mapsto z^m$ peut être définie et holomorphe sur tout le plan complexe $z \in \mathbb{C}$.
2. Lorsque $\alpha = -n$ où n est entier positif, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z^n}$ peut être définie et holomorphe pour $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Exercice 83 La fonction

$$z \mapsto i \arg z = \log z - \ell n|z|$$

est-elle holomorphe ?

2.4.3 Théorème de Cauchy

Définition 84 Un chemin ayant ses extrémités confondues est un lacet, on dit aussi souvent circuit ou contour.

Théorème 15 Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D , soit C un circuit entièrement contenu dans D . Alors

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Corollaire 85 Supposons que L et L' soient deux chemins contenus dans un domaine connexe D , ayant leurs deux extrémités z_1 et z_2 communes et qui sont homotopes entre eux dans D (voir figure). Si f est holomorphe dans D ,

$$\int_L f(z) dz = \int_{L'} f(z) dz.$$

D'une manière plus générale,

Corollaire 86 Si f est holomorphe dans un domaine D contenant deux circuits C et C' pouvant être déformés l'un dans l'autre d'une manière continue en restant dans D , alors

$$\int_C f(z) dz = \int_{C'} f(z) dz.$$

2.5 Théorie de Cauchy

C'est l'étude des propriétés des intégrales de fonctions holomorphes sur des chemins contenus dans le domaine d'holomorphicité de ces fonctions.

2.5.1 Exemple fondamental

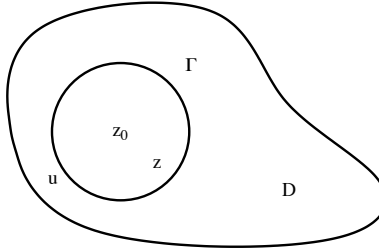
Proposition 87 Pour $m \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{C}$, considérons la fonction de la variable complexe $z \mapsto \frac{1}{(z-a)^m}$. C'est une fonction définie et holomorphe sur le domaine connexe (mais non simplement connexe) $D = \mathbb{C} - \{a\}$. Considérons d'autre part un circuit Γ constitué par un cercle de rayon r centré au point a . Alors

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^m} dz = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 1, \\ 2i\pi & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

2.5.2 La formule intégrale de Cauchy

Théorème 16 Soit f une fonction holomorphe dans un domaine connexe D . Considérons un cercle Γ contenu dans D et centré en z_0 (on le supposera parcouru dans le sens trigonométrique). Soit un point z à l'intérieur de Γ . On peut exprimer $f(z)$ en fonction des valeurs $f(u)$ de f sur Γ ,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{u-z} du.$$



Remarque 88 On peut remplacer Γ par tout autre circuit obtenu par déformation continue de Γ et gardant z en son intérieur, à condition de rester dans D (Corollaire 85).

Exercice 89 Exprimer les coefficients a_n (cf. Définition 72) à l'aide de l'intégrale de $f(z)/(z - z_0)^{n+1}$ sur Γ .

2.6 Calcul des résidus.

2.6.1 Résidu

Supposons que la fonction $z \mapsto f(z)$ soit définie et holomorphe dans un domaine connexe (mais non simplement connexe) de la forme $D - \{a\}$. Supposons que pour z appartenant au disque ouvert $0 < |z - a| < \rho$ (disque privé du point a) la fonction f soit développable en une série de Laurent convergente de la forme

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z - a)^n$$

(sur la couronne $0 < |z - a| < \rho$ de rayon intérieur nul).

Alors, pour un cercle Γ de centre a et de rayon $r \in]0, \rho[$, contenu dans $D - \{a\}$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2i\pi c_{-1}.$$

Définition 90 Le nombre complexe c_{-1} s'appelle le résidu de f au point a et se note

$$c_{-1} = \text{Rés}(f, a).$$

Exemple 91 Soit f une fonction holomorphe au voisinage de 0 , telle que $f(0) \neq 0$. Alors la fonction définie par $g(z) = f(z)/z$ a un résidu en 0 qui vaut $f(0)$.

En effet, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors $g(z) = \frac{a_0}{z} + a_1 + a_2 z + \dots + a_{n+1} z^n + \dots$.

Définition 92 On dit que f possède un pôle d'ordre $N \geq 1$ en $z = a$ lorsque son développement en série de Laurent commence à l'ordre $n = -N$,

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n(z - a)^n,$$

avec $c_{-N} \neq 0$.

Lorsque le pôle est d'ordre $N = 1$ en $z = a$, on dit que le pôle est simple.

Exemple 93 Soit $f(z) = \frac{\mathcal{P}(z)}{\mathcal{Q}(z)}$ une fraction rationnelle. Alors chaque racine de multiplicité m de \mathcal{Q} est un pôle d'ordre m de f .

Si la dénominateur \mathcal{Q} n'a que des racines simples, alors f n'a que des pôles simples.

Proposition 94 Soit f une fonction qui possède un pôle simple en a . Le résidu de f en a est donné par la formule

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z).$$

2.6.2 Théorème des résidus

Théorème 17 Soit $z \rightarrow f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine connexe $D' = D - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ où D est supposé simplement connexe, les a_j sont en nombre fini. On note $\text{Rés}(f, a_j)$ le résidu de f en a_j . Considérons un chemin fermé C contenu dans D' et entourant k_j fois chaque point a_j . Alors

$$\int_C f(z) dz = 2i\pi \sum_{j=1}^n k_j \text{Rés}(f, a_j).$$

2.6.3 Lemmes de Jordan

Le théorème des résidus permet de calculer de nombreuses intégrales par la méthode dite "des résidus". Cependant, pour mener à bien les calculs il est indispensable de connaître le comportement de $\int_{\Gamma(R)} f(z) dz$ où $\Gamma(R)$ est un arc de cercle d'ouverture constante et $R \rightarrow \infty$ (même question pour $\Gamma(r)$ et $r \rightarrow 0$). On a pour cela les deux lemmes suivants dits *lemmes de Jordan*.

Lemme 95 On suppose que pour z appartenant à une portion de disque centré en 0 et d'ouverture $\theta_2 - \theta_1$,

- on puisse trouver pour $|z| = r < r_0$ une constante $M(r_0)$ indépendante de r telle que $|zf(z)| < M(r_0)$.
- Pour presque tout $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ on ait $\lim_{r \rightarrow 0} r e^{i\theta} f(re^{i\theta}) = l_1$.

Alors

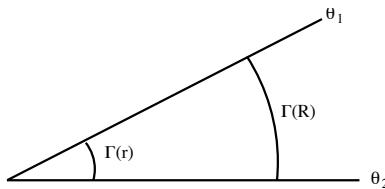
$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma(r)} f(z) dz = i l_1 (\theta_2 - \theta_1).$$

Lemme 96 On suppose que pour z appartenant à une portion de disque centré en 0 et d'ouverture $\theta_2 - \theta_1$,

- On puisse trouver pour $|z| = R > R_0$ une constante $M(R_0)$ indépendante de R telle que $|zf(z)| < M(R_0)$.
- Pour presque tout $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ on ait $\lim_{R \rightarrow \infty} R e^{i\theta} f(R e^{i\theta}) = l_2$.

Alors

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma(R)} f(z) dz = i l_2 (\theta_2 - \theta_1).$$



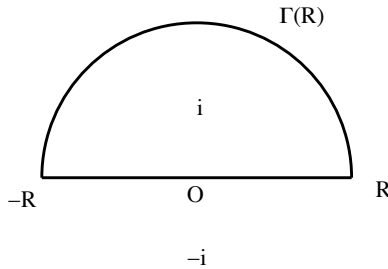
2.6.4 Exemple

Calcul de l'intégrale $I(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx$ pour $t > 0$ puis pour t réel.
 On choisit la fonction de la variable complexe z

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2},$$

définie et holomorphe sur $D = \mathbb{C}$ privé des deux points i et $-i$. On choisit un contour constitué d'un intervalle $[-R, R]$ de l'axe des réels et d'un demi-cercle $\Gamma(R)$, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel, de rayon R assez grand pour entourer le point i .

Comme $1+z^2 = (z-i)(z+i)$ et que le numérateur de $f(z)$ ne s'annule pas pour $z = i$, le point $a_1 = i$ est de toute évidence un pôle simple pour la fonction f .



Application du théorème des résidus.

$$\int_{[-R,R]} f(z) dz + \int_{\Gamma(R)} f(z) dz = 2i\pi \text{Rés}(f, i).$$

Application du Lemme de Jordan.

Calculons $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma(R)} f(z) dz$. On a

$$zf(z) = z \frac{e^{itz}}{1+z^2},$$

et pour $z \in \Gamma(R)$ la paramétrisation

$$z(\theta) = R \cos \theta + iR \sin \theta \quad \theta \in [0, \pi].$$

Par conséquent,

$$|zf(z)| = R \frac{e^{-Rt \sin \theta}}{|R^2 e^{2i\theta} + 1|} \leq \frac{R}{|R^2 - 1|},$$

car $t \sin \theta \geq 0$.

1. Posons $M(R) = \frac{R}{|R^2-1|}$. Puisque de toute évidence $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$, il y a une valeur R_0 telle que pour $R > R_0$ on ait $M(R) < M(R_0)$.

2. Par ailleurs on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |zf(z)| = 0,$$

ce qui impose que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma(R)} zf(z) dz = 0$, donc que $l_2 = 0$.

Le lemme 96 s'applique donc sur $\Gamma(R)$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma(R)} f(z) dz = 0.$$

Calcul du résidu de f en $z = i$. Puisque le point i est pôle simple de f , on peut appliquer la formule 94 donnant le résidu en un pôle simple

$$\text{Rés}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-t}}{2i}.$$

Calcul de $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$. La fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable sur \mathbb{R} , on a donc

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} f(z) dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Prenons la $\lim_{R \rightarrow \infty}$ de chacun des deux membres de la formule du théorème des résidus,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{[-R, R]} f(z) dz + \int_{\Gamma(R)} f(z) dz \right] = 2i\pi \frac{e^{-t}}{2i}.$$

Finalement, pour $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-t}.$$

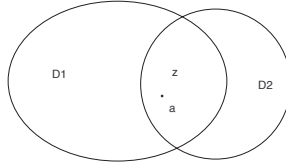
Question : Que vaut $I(t)$ pour $t \leq 0$?

2.7 Principe du prolongement analytique

Ce ‘‘principe’’ permet, connaissant la valeur d’une fonction holomorphe en certains points de son domaine d’holomorphie, de déterminer sa valeur en tout point de ce domaine.

Théorème 18 Soit $z \mapsto f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine D du plan complexe telle que $f(z_i) = 0$ pour une suite infinie de points z_i qui converge vers un point $a \in D$. Alors $f(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

Théorème 19 (dit du prolongement analytique). Soient deux fonctions f_1 et f_2 holomorphes chacune dans leurs domaines respectifs D_1 et D_2 supposés connexes. Supposons que $f_1(z_i) = f_2(z_i)$ pour (au minimum) une suite infinie de points $z_i \in D_1 \cap D_2$ convergente vers un point $a \in D_1 \cap D_2$.



On a alors

1. $f_1(z) = f_2(z)$ pour tout $z \in D_1 \cap D_2$.
2. Il existe une fonction unique $z \mapsto F(z)$ holomorphe dans le domaine $z \in D_1 \cup D_2$ telle que
 - $F(z) = f_1(z)$ pour $z \in D_1$
 - $F(z) = f_2(z)$ pour $z \in D_2$

Dans de telles circonstances, on dit que la fonction $z \mapsto F(z)$ est le ‘‘prolongement analytique’’ de f_1 (ou de f_2) du domaine D_1 (ou D_2) au domaine $D_1 \cup D_2$.

Remarque 97 Dans la pratique, il se trouve très souvent que $f_1(z) = f_2(z)$ sur un segment ouvert de $D_1 \cap D_2$, le théorème 2 s’applique donc.

Exemple 98 Considérons les fonctions

$$z \mapsto f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

qui est holomorphe dans le disque $|z| < 1$, et

$$z \mapsto f_2(z) = \frac{1}{1-z},$$

qui est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Puisque $f_1(z) = f_2(z)$ pour les $z = x$ réels compris entre 0 et 1, on déduit du Théorème 19 que f_1 est “prolongeable analytiquement” en une fonction F (égale ici à f_2) holomorphe dans tout le plan complexe privé du point $z = 1$.

Chapitre 3

Réurrences linéaires et séries entières

Définition 99 Soient a_0, \dots, a_h des réels tels que $a_h \neq 0$. On dit qu'une suite u_n est définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre h correspondante si, pour tout $n \geq 0$,

$$a_h u_{n+h} + a_{h-1} u_{n+h-1} + \dots + a_0 u_n = 0.$$

Clairement, une telle suite est entièrement déterminée par les valeurs initiales u_0, \dots, u_{h-1} . Comment calculer le terme général? Comment donner un développement asymptotique du terme général? On va utiliser pour cela la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$, qu'on appelle parfois *série génératrice* de la suite u_n .

Exemple 100 La suite de Fibonacci (*Léonard de Pise, 1202*) est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour $n \geq 0$.

3.0.1 Rayon de convergence de la série génératrice

Définition 101 Le polynôme caractéristique de la relation de récurrence linéaire est

$$P(z) = a_h z^h + \dots + a_0.$$

Exemple 102 Pour la suite de Fibonacci, le polynôme caractéristique est $P(z) = z^2 - z - 1$, dont les racines sont $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\phi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Proposition 103 f est une fraction rationnelle dont le dénominateur est égal au polynôme réciproque $D(z) = z^h P(\frac{1}{z}) = a_h + a_{h-1}z + \dots + a_0 z^h$.

Exemple 104 Pour la suite de Fibonacci, la série génératrice vaut

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi z} - \frac{1}{1 - \phi' z} \right).$$

Corollaire 105 Soit r une des racines du polynôme caractéristique P de plus petit module. Sauf pour des valeurs exceptionnelles des conditions initiales, le rayon de convergence de f vaut $1/|r|$.

Exemple 106 Pour la suite de Fibonacci, le rayon de convergence vaut $\frac{1}{\phi} = -\phi' = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

3.0.2 Calcul du terme général

Corollaire 107 *On suppose $h = 2$. Soient r et r' les racines complexes du polynôme caractéristique. Si elles sont distinctes, il existe des constantes C et C' telles que*

$$u_n = Cr^n + C'r'^n.$$

Si r est une racine double, il existe des constantes C et C' telles que

$$u_n = Cr^n + C'nr^n.$$

Dans le cas général, notons r_1, \dots, r_k les racines complexes du polynôme caractéristique, et m_1, \dots, m_k leurs multiplicités. Il existe des polynômes P_j de degrés au plus $m_j - 1$ tels que

$$u_n = \sum_{j=1}^k P_j(n)r_j^n.$$

3.0.3 Développement asymptotique

C'est celle des racines du polynôme caractéristique dont le module est le plus grand, et, s'il y en a plusieurs, celle (notons la r) parmi celles-ci dont la multiplicité m est la plus grande qui détermine le comportement asymptotique de u_n . Il existe une constante c telle que $|u_n| = cn^{m-1}|r|^n + o(n^{m-1}|r|^n)$. Pour des conditions initiales exceptionnelles, il arrive que $c = 0$.

Exemple 108 *Pour la suite de Fibonacci, l'expression $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \phi'^n)$ montre que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n$.*

En particulier, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers ϕ , le nombre d'or.

Chapitre 4

Distributions

4.1 Introduction

Il y a plusieurs raisons pour introduire la notion de distribution. Certaines sont d'ordre purement physique (expérimental même) alors que d'autres sont des raisons plus mathématiques.

4.1.1 Unité pour la convolution.

Comme nous l'avons remarqué lors de l'étude de la convolution des fonctions intégrables, il n'y a pas de fonction intégrable Δ qui puisse servir d'unité pour le produit de convolution de ces fonctions. Dans l'espace des distributions, il y a effectivement une telle distribution unité pour le produit de convolution : c'est la distribution de Dirac, qui satisfait à

$$\delta * T = T * \delta = T.$$

4.1.2 Densité de charge d'une charge ponctuelle

En électrostatique, le potentiel électrique $V(\vec{r})$ en un point \vec{r} donné de l'espace, pour une distribution de charge de densité $\rho(\vec{r})$ donnée est solution de l'équation de Laplace

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\vec{r}).$$

La question qu'on se pose est de savoir ce que signifie cette équation dans la limite où la charge, source du potentiel, peut d'une manière physiquement raisonnable être assimilée à une charge ponctuelle. On sait que dans ce cas le potentiel créé (mesuré physiquement) est un potentiel en $\frac{1}{r}$. L'équation de Laplace pose par contre dans ce cas un problème mathématique sérieux : quelle est la densité de charge d'une charge ponctuelle ? La réponse la plus simple se trouve naturellement dans la théorie des distributions. La densité d'une telle charge est en fait proportionnelle à une distribution de Dirac située au point où se trouve la charge électrique.

4.1.3 Mesure d'une grandeur physique

Considérons la mesure d'une grandeur physique relativement courante comme la température d'un fil rectiligne "en un point donné". On peut se convaincre que pour des raisons évidentes, une telle mesure n'est jamais réalisable parfaitement. Tout thermomètre, quel que soit le principe physique utilisé pour la mesure, possède une *extension spatiale* qu'il est impossible de réduire à celle d'un point : ce qu'il faudrait réaliser pour pouvoir mesurer la température en un point x_0 .

On peut cependant admettre, dans le cas d'une mesure réaliste de température, que le thermomètre prend en compte toutes les températures dans un "voisinage" du point x_0 selon une fonction de sensibilité ϕ_0 (fig.1.) de telle sorte que pour une fonction de répartition $T(x)$ de la

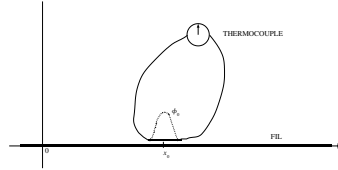


FIGURE 4.1 – Mesure d’une température le long d’une barre

température le long de la barre (fonction dont on ignore *a priori* ce qu’elle vaut *vraiment* en un point précis de la barre), on puisse dire que la température mesurée T sera en fait

$$T_0 = \int T(x)\phi_0(x) dx.$$

Si on effectuait la mesure en un autre point x_1 on obtiendrait

$$T_1 = \int T(x)\phi_1(x) dx$$

etc...

On voit que la température mesurée T , dans l’hypothèse où les fonctions $T(x)$, ϕ_0 , ϕ_2 etc... sont suffisamment régulières, se présente sous la forme d’une expression linéaire en la fonction de sensibilité ϕ . On peut noter avantageusement cette expression sous la forme

$$\langle T, \phi \rangle = \int T(x)\phi(x) dx$$

Lorsque le produit $x \mapsto T(x)\phi(x)$ est intégrable Lebesgue, cette écriture est parfaitement justifiée. Cependant, dans beaucoup de cas concrets, la grandeur physique en question (ici il s’agirait de $T(x)$) se révèle être trop *singulière* pour que l’intégrale écrite puisse avoir un sens quelconque avec un choix réaliste pour la fonction ϕ .

Partant de cet échec, on a progressivement abstrait l’idée de concepts mathématiques qui ne préserveraient que l’indispensable de l’expression

$$\langle T, \phi \rangle = \int T(x)\phi(x) dx,$$

partant d’un ensemble de fonctions ϕ représentant de manière suffisante toutes les mesures d’une grandeur physique donnée qu’il est possible d’effectuer. L’ensemble des fonctions ϕ prend alors naturellement le nom d’ensemble de **fonctions “test” ou fonctions “d’essai”**. La mesure d’une grandeur physique T est alors représentée par le “crochet”

$$\langle T, \phi \rangle$$

indépendamment d’une forme intégrale ou non pour cette expression. L’ensemble des grandeurs T “mesurables” par les fonctions d’essai prend alors le nom générique de **distributions**.

Quel doit être le minimum exigé pour les objets ainsi considérés ?

1. L'ensemble des fonctions d'essai constitue un *espace vectoriel de fonctions*. C'est-à-dire que toute combinaison linéaire à coefficients complexes de fonctions d'essai est encore une fonction d'essai.
2. L'ensemble des distributions est l'ensemble des **formes linéaires** sur l'espace vectoriel des fonctions d'essai.
3. Le résultat de la mesure de T par ϕ est alors le nombre complexe $\langle T, \phi \rangle$.

Remarque. Dans un esprit d'utilisation pratique (et élémentaire) des distributions, nous réduisons ici, les considérations d'analyse fonctionnelle au minimum. Pour cette raison, nous considérerons que **toutes** les formes linéaires sur nos espaces de fonctions test sont des formes linéaires *continues*. Mathématiquement on sait que de telles formes linéaires non continues existent, mais comme personne n'a réussi, à ce jour, à les écrire explicitement, nous ferons comme si elles n'existaient pas!

4.2 L'espace des fonctions d'essai \mathcal{D}

Choisissons pour commencer un espace de fonctions test qui présente toutes les caractéristiques nécessaires aussi bien physiques que mathématiques.

Définition 109 *Les fonctions test $x \mapsto \phi(x)$ sont définies pour x réel et sont à valeurs complexes. On exige d'elles qu'elles soient indéfiniment dérivables pour toutes les valeurs de x (elles sont donc C^∞). Elles sont de plus, nulles en dehors d'un intervalle borné. L'ensemble de ces fonctions est désigné par $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ou simplement \mathcal{D} .*

L'ensemble des fonctions test de \mathcal{D} constitue un espace vectoriel sur \mathbb{C} . On peut se convaincre que ce sont là des propriétés raisonnables pour des fonctions de sensibilité d'appareil.

Exemple 110 *La fonction ξ_a définie par*

$$\xi_a(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{a^2}{a^2-x^2}) & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{si } |x| \geq a \end{cases}$$

est pour $a > 0$ une fonction d'essai.

Exemple 111 *Si α est une fonction indéfiniment dérivable et si ϕ est une fonction de \mathcal{D} , alors leur produit $\alpha\phi$ est une fonction de \mathcal{D} .*

On montre (voir au paragraphe 4.11.1) que la classe de toutes les fonctions α telles que $\alpha\phi$ est une fonction de \mathcal{D} quel que soit ϕ appartenant à \mathcal{D} , est précisément l'ensemble de toutes les fonctions C^∞ .

Remarque 112 *Pour ceux qui veulent en savoir plus, il faut dire qu'il est possible de définir une notion de proximité entre deux fonctions de \mathcal{D} . C'est ce qu'on désigne sous le nom de topologie sur \mathcal{D} (voir au paragraphe 4.11.2).*

Exemple 113 *Soient f une fonction intégrable sur \mathbb{R} , nulle en dehors d'un intervalle borné et ϕ une fonction de \mathcal{D} . Alors leur produit de convolution*

$$(f * \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(x-t) dt$$

est une fonction de \mathcal{D} .

Exemple 114 *Soit ϕ une fonction de \mathcal{D} . Alors les fonctions translatée $\tau_a\phi$ et dilatée $d_\lambda\phi$ sont aussi dans \mathcal{D} . On rappelle que*

$$(\tau_a\phi)(x) = \phi(x-a)$$

où a est réel et que

$$(d_\lambda\phi)(x) = \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

où λ est un nombre réel différent de 0.

Exemple 115 Les fonctions d'essai de \mathcal{D} ainsi que toutes leurs dérivées sont intégrables et bornées.

Ces deux propriétés sont souvent utilisées dans les calculs.

4.3 L'espace des distributions \mathcal{D}'

En accord avec la discussion de l'introduction, nous définissons les distributions de la façon suivante.

Définition 116 Une distribution est une application T qui à chaque fonction de \mathcal{D} fait correspondre un nombre complexe $T(\phi)$ FINI qui vérifie la propriété suivante

$$T(a\phi + b\psi) = aT(\phi) + bT(\psi)$$

pour tous nombres complexes a et b et toutes fonctions d'essai ϕ et ψ dans \mathcal{D} .

Remarque 117 En termes algébriques, on voit donc qu'une distribution T est une **forme linéaire** sur l'espace vectoriel \mathcal{D} . D'où la notation \mathcal{D}' qui indique que l'espace des distributions est en fait **un espace dual** de l'espace vectoriel des fonctions d'essai (voir au paragraphe 4.11.3).

En théorie des distributions on note en général $T(\phi)$ sous la forme $\langle T, \phi \rangle$ et on dit que la distribution T est appliquée à ϕ . Ceci est en conformité avec notre notation de l'introduction qui exprime le fait qu'on peut dire que physiquement $\langle T, \phi \rangle$ est le résultat d'une mesure "par ϕ " de la distribution T .

L'espace des distributions \mathcal{D}' est aussi un espace vectoriel sur \mathbb{C} , il suffit pour cela de définir la somme $T_1 + T_2$ de deux distributions ainsi que le produit aT d'un nombre complexe a et d'une distribution T . On définit

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$$

pour tout ϕ dans \mathcal{D} , et

$$\langle aT, \phi \rangle = a \langle T, \phi \rangle .$$

pour tout nombre complexe a et tout ϕ dans \mathcal{D} .

La distribution nulle, quant à elle, est définie par

$$T = 0 \iff \langle T, \phi \rangle = 0$$

pour tout ϕ dans \mathcal{D} .

Remarquons qu'une telle définition est parfaitement raisonnable du point de vue expérimental puisqu'elle veut dire qu'une quantité physique est nulle si et seulement si n'importe quelle mesure représentée par ϕ donne un résultat nul.

Mise en garde. Il n'est pas question de définir le produit de deux distributions quelconques entre elles car cela, on le verra par la suite, ne peut se faire que dans des cas **extrêmement limités**. Ce dernier point est bien entendu une des tares principale de la théorie des distributions et limite ainsi leur utilisation aux *problèmes linéaires*. Il touche d'ailleurs aux aspects les plus fondamentaux de la physique quantique moderne.

4.3.1 Les distributions régulières

Définition 118 Une fonction f est dite **localement intégrable** si elle est intégrable sur tout intervalle borné (fini). On note $f \in L^1_{loc}$ cette propriété.

Exemple 119 À toute fonction localement intégrable on peut associer une distribution définie par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x) dx,$$

pour toute fonction d'essai ϕ dans \mathcal{D} .

Exemple 120 *Étant données deux fonctions localement intégrables f et g égales presque partout, i.e.*

$$f(x) = g(x) \text{ pour presque tout } x,$$

les distributions associées sont égales,

$$T_f = T_g.$$

La réciproque est aussi vraie (voir au paragraphe 4.11.4). D'où

Théorème 20

$$T_f = 0 \iff f(x) = 0 \text{ pour presque tout } x.$$

Définition 121 *Une distribution T est **régulière** si elle est associée à une fonction localement intégrable f .*

Notation 122 *Lorsque le contexte ne prête à aucune confusion, il est très souvent plus simple de noter T_f tout simplement f .*

Par contre la notation $f(x)$, tolérée pour une fonction f l'est moins pour la distribution T_f , car elle laisse croire à tort qu'il est possible de connaître la valeur d'une distribution en un point précis x (elle est cependant utilisée!).

Exemple 123 *C'est ainsi que nous définissons la distribution (régulière) constante C par*

$$\langle C, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} C\phi(x) dx = C \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx,$$

pour toute fonction d'essai ϕ . En particulier $C = 0$ définit la distribution (régulière) nulle.

Exemple 124 *De même, la fonction de Heaviside*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

définit la distribution de Heaviside H par

$$\langle H, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^+} \phi(x) dx,$$

et la fonction $2H(x) - 1 = \text{sgn}(x)$ définit la distribution ϵ , qui est aussi notée sgn_x .

4.3.2 Distributions non régulières

Définition 125 *Toute distribution qui n'est pas régulière est dite non régulière.*

Exemple 126 *La distribution de Dirac à l'origine δ est définie par*

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$$

pour toute fonction d'essai ϕ .

Elle n'est pas régulière.

Exemple 127 *La distribution de Dirac δ_{x_0} au point $x_0 \in \mathbb{R}$ est définie par*

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0)$$

pour toute fonction d'essai ϕ .

Mise en garde. Les ouvrages de Physique et d'Électronique utilisent dans leur grande majorité la notation $\delta(x)$ pour la distribution δ et $\delta(x - x_0)$ pour la distribution δ_{x_0} . Cette notation est une source d'erreur constante dans les calculs, puisqu'elle laisse supposer que ces distributions ont une valeur donnée en un point donné. Pour éviter les erreurs, il est donc fortement recommandé d'effectuer les calculs au sens des distributions, quitte à présenter ensuite les formules finales comme le font traditionnellement les physiciens et les électroniciens.

Exemple 128 La forme linéaire $vp\frac{1}{x}$ définie par

$$\langle vp\frac{1}{x}, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{x < -\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{x > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx \right]$$

pour toute fonction d'essai ϕ , est une distribution non régulière.

4.4 Suites et séries de distributions

4.4.1 Limite d'une suite de distributions.

Définition 129 On dit que la suite de distributions $\{T_n\}_0^\infty$ de \mathcal{D}' , converge vers la distribution T si la suite de nombres complexes $\langle T_n, \phi \rangle$ tend vers le nombre complexe $\langle T, \phi \rangle$ pour toute fonction d'essai ϕ de \mathcal{D} .

On écrit cela sous la forme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{D})T_n = T.$$

Ce qui, d'après la définition est équivalent à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle$$

pour toute fonction d'essai ϕ de \mathcal{D} .

Remarque 130 Si cette distribution limite T existe, elle est unique.

Remarque 131 Si on peut trouver un nombre $K(\phi)$ qui dépend de la fonction d'essai ϕ choisie et qui est tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \phi \rangle = K(\phi)$$

Alors la suite de distributions T_n tend vers la distribution T , et on a

$$\langle T, \phi \rangle = K(\phi).$$

Remarque 132 Du point de vue expérimental, cette **limite au sens des distributions** veut dire que pour n suffisamment grand la mesure par ϕ de la grandeur T_n donne pratiquement la même valeur que celle de T . Il ne devient plus possible de distinguer expérimentalement ces deux distributions.

Noter qu'une suite de distributions régulières peut avoir comme limite une distribution régulière.

Exercice 133 Montrer que si T_λ est la distribution associée à la fonction $\sin \lambda x$, on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')T_\lambda = 0.$$

Noter qu'une suite de distributions régulières peut avoir comme limite une distribution non régulière.

Exercice 134 On définit la fonction porte Π par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

et on pose $g_k(x) = k\Pi(kx)$. Montrer que l'on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')g_k = \delta.$$

4.4.2 Séries de distributions

Définition 135 On considère la suite de distributions $\{T_n\}_1^\infty$. On dit que la série de distributions

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n$$

définit une distribution T de \mathcal{D}' , si la suite des sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=1}^N T_n$$

converge au sens des distributions vers T , c'est-à-dire, lorsqu'on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{D}') \sum_{n=1}^N T_n = T.$$

Dans la pratique, on a très souvent des séries du type $\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n$. Dans ce cas la définition de la convergence est tout à fait analogue au cas précédent : il suffit en fait de considérer la convergence de la suite des sommes partielles "symétriques" $S_N = \sum_{n=-N}^N T_n$.

Exemple 136 La suite $\Delta_N = \sum_{n=-N}^N \delta_n$ converge dans \mathcal{D}' vers une distribution notée $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$, qu'on appelle *Cha* et qu'on note *III* (lettre de l'alphabet cyrillique). En physique on l'appelle aussi "Peigne de Dirac".

4.4.3 Suites de fonctions convergeant vers δ

Deux théorèmes sont d'un usage courant et permettent de reconnaître si une suite de distributions régulières converge vers δ .

Théorème 21 Soit $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ une suite de fonctions positives intégrables telles que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$ et que $f_n(x)$ soit nulle en dehors d'un intervalle $[-\varepsilon_n, +\varepsilon_n]$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Alors la suite de distributions régulières définies par f_n tend vers δ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')f_n = \delta.$$

Théorème 22 Soit f une fonction intégrable vérifiant $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$. On considère, pour $\varepsilon > 0$ la distribution régulière définie par la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Alors f_ε tend vers δ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathcal{D}')f_\varepsilon = \delta.$$

Exercice 137 Démontrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')g_k = \delta$ pour

$$g_k(x) = k\Pi(kx)$$

et pour

$$g_k(x) = \frac{\xi_a(kx)}{\int_{\mathbb{R}} \xi_a(kx) dx}$$

où Π et ξ_a ont été définis précédemment.

Exercice 138 Démontrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')g_k = \delta$ pour

$$g_k(x) = \frac{\sin^2 kx}{\pi kx^2}$$

et pour

$$g_k(x) = \frac{1}{k\pi} \frac{1}{x^2 + \frac{1}{k^2}}.$$

Exercice 139 En admettant (voir au paragraphe 4.11.5) que l'on a pour $\lambda > 0$ (avec des notations incorrectes !)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\mathcal{D}') \frac{\sin \lambda x}{x} = \pi \delta,$$

donner une interprétation correcte de la formule des physiciens

$$\delta(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi kx} dx.$$

Remarque 140 On voit donc sur ces derniers exemples qu'il est possible d'approcher une distribution aussi "singulière" que δ par des distributions "extrêmement" régulières. Le cas le plus spectaculaire étant celui qui est fourni par le deuxième exemple de l'exercice 138, où les distributions approchant δ sont associées à des fonctions $g_k(x)$ qui se trouvent être des fonctions d'essai dans \mathcal{D} .

Ceci est en fait une propriété générale. On démontre qu'on peut approcher toute distribution de \mathcal{D}' par une suite de distributions régulières associées à des fonctions d'essai de \mathcal{D} . On dit que l'espace \mathcal{D} est **dense** dans \mathcal{D}' .

4.5 Opérations élémentaires sur les distributions

Exercice 141 Désignons par f et g les distributions régulières associées aux deux fonctions localement intégrables f et g . Montrer que l'on a, pour toute fonction d'essai ϕ

- a) $\langle f + g, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle + \langle g, \phi \rangle$
- b) $\langle \lambda f, \phi \rangle = \lambda \langle f, \phi \rangle$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$
- c) $\langle \alpha f, \phi \rangle = \langle f, \alpha \phi \rangle$ pour α , fonction C^∞
- d) $\langle \tau_a f, \phi \rangle = \langle f, \tau_{-a} \phi \rangle$ pour $a \in \mathbb{R}$
- e) $\langle d_a f, \phi \rangle = \langle f, |a| d_{1/a} \phi \rangle$ pour $a \in \mathbb{R} - 0$

Pour pouvoir reproduire ces résultats particuliers, on pose par définition, pour toute fonction test ϕ :

Somme. Pour deux distributions T_1 et T_2 ;

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle .$$

Produit par un nombre. Pour une distribution T et un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\langle \lambda T, \phi \rangle = \lambda \langle T, \phi \rangle .$$

Produit par une fonction C^∞ . Soient une distribution T de \mathcal{D}' et α une fonction C^∞ , on définit leur produit αT par

$$\langle \alpha T, \phi \rangle = \langle T, \alpha \phi \rangle .$$

Exemple 142 Pour α , fonction C^∞

$$\alpha \delta = \alpha(0) \delta.$$

Cette relation est souvent interprétée en physique en disant que δ est une **distribution propre** de l'**opérateur de multiplication** par une fonction α , avec la **valeur propre** $\alpha(0)$.

Exemple 143 En désignant par x la fonction qui à x donne x

$$x\delta = 0.$$

Exemple 144

$$xvp\frac{1}{x} = 1.$$

Cette relation est extrêmement intéressante, car elle nous dit que l'inverse de x au sens des distributions n'est autre que la distribution $vp\frac{1}{x}$ et non pas $\frac{1}{x}$ qui, de toute évidence ne *peut pas* définir une distribution régulière (pourquoi?).

Exemple 145 Soit α , une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est C^∞ et qui ne s'annule jamais. Pour toute distribution T , on a

$$\alpha T = 0 \iff T = 0.$$

On admettra (voir au paragraphe 4.11.6) que si $T \in \mathcal{D}'$

$$xT = 0 \iff T = k\delta.$$

où k est un nombre complexe arbitraire.

Translation. Pour $a \in \mathbb{R}$, la translatée $\tau_a(T)$ d'une distribution T est définie par

$$\langle \tau_a T, \phi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \phi \rangle.$$

Exemple 146

$$\tau_a \delta = \delta_a.$$

Exemple 147 Soit α une fonction indéfiniment dérivable et T une distribution de \mathcal{D}' . Pour tout a réel,

$$\tau_a(\alpha T) = (\tau_a \alpha)(\tau_a T).$$

Exemple 148 Pour tout x_0 réel,

$$(x - x_0)T = 0 \iff T = k\delta_{x_0}.$$

Dilatation. Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la dilatée $d_a T$ d'une distribution T est définie par

$$\langle d_a T, \phi \rangle = \langle T, |a|d_{\frac{1}{a}} \phi \rangle.$$

Exemple 149

$$d_a \delta = |a|\delta.$$

Exemple 150

$$d_a \delta_{x_0} = |a|\delta_{ax_0}.$$

4.5.1 Parité

Posons $\check{T} = d_{-1}T$

Exemple 151 Pour toute fonction test ϕ ,

$$\langle \check{T}, \phi \rangle = \langle T, \check{\phi} \rangle,$$

où $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$.

Définition 152 On dit que T est une distribution paire si $\check{T} = T$ et impaire si $\check{T} = -T$.

Exemple 153 La distribution δ est paire, de même que $\delta_{x_0} + \delta_{-x_0}$.

Exemple 154 La distribution $vp\frac{1}{x}$ est impaire, de même que $\text{sgn}_x = 2H - 1$.

Exemple 155 La distribution H n'a pas de parité bien définie, de même que δ_{x_0} pour $x_0 \neq 0$.

Exercice 156 Toute distribution peut s'écrire de façon unique comme somme d'une distribution paire et d'une distribution impaire

$$T = \frac{T + \check{T}}{2} + \frac{T - \check{T}}{2}$$

Appliquer cette formule aux distributions H et δ_{x_0} .

4.6 Dérivée d'une distribution

C'est une opération qui est *toujours* réalisable et cela autant de fois que l'on veut sur les distributions!

Exemple 157 Considérons une fonction $x \mapsto f(x)$ qui est dérivable à dérivée continue pour tout x , on dit que c'est une fonction C^1 , et on note $x \mapsto f'(x)$ sa dérivée. Les deux fonctions f et f' définissent chacune une distribution que nous noterons aussi respectivement f et f' et on a

$$\langle f', \phi \rangle = - \langle f, \phi' \rangle .$$

Définition 158 Par analogie, nous dirons que la dérivée d'une distribution T est la distribution T' définie par

$$\langle T', \phi \rangle = - \langle T, \phi' \rangle$$

pour toute fonction d'essai ϕ .

On vérifie que pour une distribution régulière T_f associée à une fonction f qui est C^1 , on retrouve la formule précédente.

Exemple 159 a) Pour une constante K on a $K' = 0$.

b) $H' = \delta$

c) $(\text{sign}_x)' = 2\delta$

Exemple 160 La dérivée p -ième $\delta^{(p)}$ de δ est définie par

$$\langle \delta^{(p)}, \phi \rangle = (-1)^p \phi^{(p)}(0),$$

pour toute fonction d'essai ϕ .

Exemple 161 Les deux distributions δ et δ' sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que si a et b sont deux nombres complexes arbitraires

$$a\delta + b\delta' = 0 \iff a = b = 0.$$

Exemple 162 Si T est une distribution et α une fonction C^∞ , on a

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'.$$

On admettra aussi (voir au paragraphe 4.11.7) que l'on a

$$T' = 0 \iff T = K$$

où K est une constante.

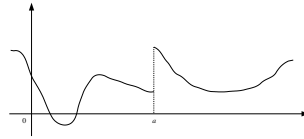


FIGURE 4.2 – Fonction C^1 par morceaux

Théorème 23 Formule des sauts. Soit une fonction f qui est C^1 par morceaux, on suppose pour simplifier la présentation, qu'elle n'a de discontinuité qu'en un seul point a de l'axe réel, on a

$$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sigma_a \delta_a.$$

où σ_a désigne le saut (fini) de la fonction au point a ,

$$\sigma_a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(a + \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(a - \varepsilon),$$

et où on a noté $T_{\{f'\}}$ la distribution régulière associée à la fonction définie presque partout $x \rightarrow f'(x)$.

La généralisation est immédiate au cas où la fonction f possède N sauts aux points $\{a_i\}_1^N$

$$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sum_{i=1}^N \sigma_{a_i} \delta_{a_i}$$

et même au cas où $N = \infty$ sous la condition que la série écrite soit une série convergente au sens des distributions.

Exercice 163 Calculer la dérivée au sens des distributions de

- a) La distribution régulière Π définie par la fonction porte $\Pi(x)$.
- b) La distribution régulière Λ définie par la fonction

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 164 Calculer, au sens des distributions, les dérivées

- a) $(|x|)^{(p)}$.
- b) $(|x|^n)'$ pour n entier et ≥ 1 .
- c) $(\alpha H)^{(p)}$ où α est une fonction C^∞ .

Application. L'étudiant qui a l'occasion d'utiliser un oscillographe cathodique pourra "dériver" à l'oscillographe n'importe quel signal et se convaincre sur un exemple donné (la distribution H par exemple) que le résultat obtenu n'est autre que la dérivée du signal au sens des distributions.

4.7 Les opérateurs continus sur \mathcal{D}'

Définition 165 Un opérateur linéaire A sur \mathcal{D}' est une application linéaire de \mathcal{D}' dans \mathcal{D}' , c'est-à-dire que

$$A(aT_1 + bT_2) = aA(T_1) + bA(T_2)$$

pour tout nombre complexe a, b et toute distribution T_1 et T_2 de \mathcal{D}' .

Définition 166 Un opérateur A est un **opérateur continu** si, quelle que soit la suite convergente $\{T_n\}$ de distributions T_n de \mathcal{D}'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')T_n = T,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')(AT_n) = AT.$$

La dernière égalité peut encore s'écrire sous la forme lapidaire

$$\lim(AT_n) = A(\lim T_n),$$

indiquant que la continuité d'un opérateur A veut dire qu'on est autorisé à permuter l'action de A et la prise de la limite.

Exemple 167 Les opérateurs suivants, définis sur \mathcal{D}' , sont tous continus

- a) $T \rightarrow T + T_0$ où $T_0 \in \mathcal{D}'$
- b) $T \rightarrow aT$ où $a \in \mathbb{C}$
- c) $T \rightarrow \alpha T$ où $\alpha \in C^\infty$
- d) $T \rightarrow \tau_a T$ où $a \in \mathbb{R}$
- e) $T \rightarrow d_a T$ où $a \in \mathbb{R}$
- f) $T \rightarrow T'$

Exercice 168 Montrer que $\tau_1 III = III$. Que veut dire ce résultat? Montrer que III est paire.

Exercice 169 Calculer III' ; αIII où α est C^∞ . Calculer $(e^{2i\pi x} - 1)III$.

Exercice 170 Calculer $(|\cos x|)''$.

Exercice 171 Montrer que $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')(\lambda \cos \lambda x) = 0$

Remarque 172 Une catégorie extrêmement importante d'opérateurs continus est constituée par les **filtres** en théorie du signal.

4.8 Série de Fourier d'une distribution périodique

Définition. On dit qu'une distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est **T -périodique** si on a pour une translation positive τ_T

$$\tau_T(U) = U.$$

Le nombre T est une **période** de la distribution U et le plus petit de ces nombres est appelé **période fondamentale**.

Définition 173 Soit U une distribution, I un intervalle de \mathbb{R} . On dit que le support de U est contenu dans I si, pour toute fonction d'essai ϕ nulle sur I , $\langle U, \phi \rangle = 0$.

On dit que U est à support borné si son support est contenu dans un intervalle borné.

Théorème 24 Si U est une distribution périodique de période T , il existe une distribution V à support borné telle que

$$U = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{kT}(V).$$

Exemple 174 Soit f une fonction T -périodique dans $L^1(T)$, elle définit une distribution T -périodique U_f et on peut prendre pour V la distribution régulière définie par la fonction v

$$v(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [a, a + T[\text{ où } a \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 175 Prenons pour V la distribution de Dirac à l'origine. Donner l'expression de la distribution T -périodique III_T ainsi obtenue.

Définition 176 Soit U une distribution T -périodique telle que $U = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{kT}(V)$. On appelle coefficients de Fourier de U les nombres complexes

$$c_k(U) = \frac{1}{T} \langle V, e^{-ik\omega t} \rangle,$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 177 Le nombre $\langle V, e^{-ik\omega t} \rangle$ est parfaitement défini puisque la fonction $t \rightarrow e^{-ik\omega t}$ est une fonction C^∞ et que le support de V est borné.

Théorème 25 Soit U une distribution T -périodique, alors

$$U = \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{D}') \sum_{k=-N}^{k=+N} c_k(U) e^{ik\omega t},$$

et pour $k \neq 0$, on a $|c_k(U)| \leq \text{Const.} |k|^r$, où r est un entier positif.

Inversement. Une suite de nombres $\{c_k\}_{-\infty}^{\infty}$ satisfaisant à l'inégalité précédente est la suite des coefficients de Fourier d'une distribution T -périodique.

Proposition 178 Soit U' la dérivée de la distribution T -périodique U , on a alors

$$c_k(U') = ik\omega c_k(U).$$

Exercice 179 Calculer les coefficients de Fourier $c_k(III_T)$ et $c_k III_T$.

4.9 Méthode de la variation de la constante

Motivation. Considérons un système physique, par exemple, un oscillateur harmonique gouverné par une équation différentielle de la forme $ay'' + by' + cy = F(t)$, où $F(t)$ est un terme de forçage. On donne au système une impulsion brutale au temps $t = 0$. Cela signifie que $F(t)$ est proportionnel à la distribution de Dirac à l'origine. Quelle est la réponse du système ? On est amené à résoudre des équations différentielles dont le second membre est une distribution, avec inconnue distribution.

4.9.1 Cas des équations différentielles du premier ordre

On commence par résoudre les équations différentielles de la forme

$$(\mathcal{E}) \quad a(x)y' + b(x)y = U,$$

où a et b sont des fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} , a ne s'annule pas et U est une distribution.

Proposition 180 La méthode classique de résolution s'étend au cas où le second membre est une distribution.

1. On résoud l'équation homogène. On trouve des solutions proportionnelles, $f(x) = C e^{c(x)}$ où c est une primitive de $-b/a$.

2. On cherche une solution particulière de l'équation (\mathcal{E}) sous la forme $T = e^{c(x)}U$, où U est une distribution inconnue. Cela conduit à $T' = e^{-c}U$, qui possède une solution T_0 .
3. Toutes les solutions sont de la forme $T = T_0 + C e^{c(x)}$.

Exemple 181 Résoudre l'équation différentielle $y' + 2xy = \delta_0$.

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $f(x) = C e^{x^2}$. Il reste à résoudre $T' = e^{-x^2}\delta_0 = \delta_0$, soit $T_0 = H$, fonction d'Heaviside. Toutes les solutions sont de la forme $T = (H + C)e^{x^2}$.

4.9.2 Cas des équations différentielles à coefficients constants

Revenons au problème initial, un oscillateur qu'on brutalise. Tant que $t < 0$, il ne se passe rien, donc la solution est nulle. Lorsque $t > 0$, le système oscille librement, son mouvement est solution de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$. Donc on peut penser que la solution est de la forme $f(t)H$ où f est solution de l'équation homogène.

Proposition 182 L'équation différentielle $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \delta_0$ possède une solution de la forme $f(t)H$ où f est solution de l'équation homogène $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

4.9.3 Seconds membres généraux

Définition 183 Si U est une distribution et ϕ une fonction d'essai, on peut définir une fonction $U \star \phi$ par

$$U \star \phi(x) = \langle U, \tau_x \hat{\phi} \rangle.$$

Exemple 184 Pour toute fonction d'essai ϕ , $\delta \star \phi = \phi$.

Proposition 185 Pour toute distribution U et toute fonction d'essai ϕ , la fonction $U \star \phi$ est indéfiniment dérivable, et

$$(U \star \phi)' = U' \star \phi = U \star \phi'.$$

Corollaire 186 Si U est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \delta_0$, alors $T = U \star \phi$ est une solution de $ay'' + by' + cy = \phi$.

4.9.4 Interprétation

Revenons au problème initial, un oscillateur initialement au repos, que l'on soumet à une force $F(t)$. Son mouvement est donc gouverné par l'équation $ay'' + by' + cy = F(t)$.

Supposons que F est une fonction d'essai, nulle tant que $t < 0$. Pour calculer le mouvement, on doit d'abord calculer la *réponse impulsionnelle*, i.e. la solution de l'équation $ay'' + by' + cy = \delta_0$ qui est de la forme $U = f(t)H$ (la méthode de la variation de la constante peut nous y aider). Ensuite, il suffit de calculer le produit de convolution $U \star F$. Autrement dit, la réponse impulsionnelle sert en quelque sorte de matrice pour l'opérateur qui à une excitation F associe le mouvement résultant $y = U \star F$.

4.10 Retour sur l'équation de la chaleur

4.10.1 Rappel

On rappelle que lorsque la chaleur diffuse le long d'un fil conducteur homogène infini, la température $f(x, t)$ à l'abscisse x et à l'instant t obéit à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{4.1}$$

où c est une constante physique. On a vu, dans le cours d'intégration, que lorsque la répartition initiale de la température, la fonction $f_0(x) = f(x, 0)$, est intégrable sur \mathbb{R} , la répartition $f_t(x) = f(x, t)$ de la température au temps $t > 0$ est donnée par

$$f_t = p_t \star f_0, \tag{4.2}$$

où, pour $t > 0$,

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Que signifie cette fonction p_t ?

4.10.2 Equation de la chaleur à donnée initiale distribution

La fonction p_t s'interprète comme la répartition de la température obtenue au temps t lorsqu'une quantité unité de chaleur est placée initialement à l'origine. Comment donner un sens précis à cette affirmation ? En montrant que la formule (4.2) s'étend à toutes les distributions à support borné, et en particulier, à la distribution de Dirac, et en vérifiant que, dans le cas où f_0 est la distribution de Dirac, $f_t = p_t$.

Définition 187 Soit U une distribution à support borné. On définit la distribution $p_t \star U$ comme suit. Si ϕ est une fonction d'essai,

$$\langle p_t \star U, \phi \rangle = \langle U, p_t \star \phi \rangle$$

Remarque 188 Pour justifier la définition 187, il faut vérifier qu'elle coïncide avec la définition 183 pour les distributions régulières associées aux fonctions d'essai, i.e. que si ϕ et ψ sont des fonctions d'essai,

$$\int_{\mathbb{R}^2} p_t(y) \psi(x-y) \phi(x) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} p_t(y) \phi(x-y) \psi(x) dx dy.$$

Comme p_t est paire, cette identité équivaut après changement de variable à

$$\int_{\mathbb{R}^2} p_t(y) \psi(-x+y) \phi(-x) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} p_t(y) \phi(x-y) \psi(x) dx dy.$$

Autrement dit,

$$((p_t \star \hat{\psi}) \star \phi)(0) = ((p_t \star \phi) \star \hat{\psi})(0),$$

ce qui résulte de la commutativité et de l'associativité de la convolution des fonctions intégrables. ■

Proposition 189 Pour $t > 0$ la distribution $p_t \star U$ est régulière, c'est une fonction indéfiniment dérivable en t et en x , qui est solution de l'équation de la chaleur (4.1). De plus,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\mathcal{D}') p_t \star U = U.$$

Exemple 190 Cas de la distribution de Dirac : $p_t \star \delta_0 = p_t$.

En effet, pour toute fonction d'essai ϕ ,

$$\begin{aligned} \langle p_t \star \delta_0, \phi \rangle &= \langle \delta_0, p_t \star \phi \rangle \\ &= p_t \star \phi(0) \\ &= \langle p_t, \phi \rangle. \blacksquare \end{aligned}$$

4.10.3 Conclusion

Notons A_t l'opérateur qui à une répartition de température initiale associe la répartition de température obtenue en laissant la chaleur diffuser pendant un temps t . Sur l'espace des polynômes trigonométriques sur un fil fini, on sait diagonaliser l'équation de la chaleur, et donc calculer explicitement A_t . La même méthode marche sur un fil infini, à condition de remplacer une série de Fourier finie par la transformation de Fourier. La matrice finie de A_t est remplacée par une sorte de matrice infinie indexée par les réels, la convolution par le noyau de la chaleur.

Cette démarche est assez générale, elle s'applique à d'autres équations d'évolution à coefficients constants, comme l'équation de Schrödinger ou l'équation des ondes.

Signalons une particularité de l'équation de la chaleur. La température devient, après diffusion, très régulière. L'équation des ondes ne se comporte pas comme cela (les ondes possèdent des fronts). Voici une explication mathématique, qui repose à nouveau sur l'analogie avec les matrices finies. L'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ a toutes ses valeurs propres de la forme $-k^2$, elles sont négatives. Par conséquent, les valeurs propres de A_t sont de forme $e^{-k^2 ct}$, elles tendent vers 0 lorsque k tend vers l'infini. L'opérateur A_t écrase les hautes fréquences, donc il rend les fonctions davantage différentiables.

4.10.4 A retenir

- Une distribution n'a pas de valeur en un point, cela peut seulement être mesuré par une fonction d'essai.
- Il est utile de se savoir translater et dilater des distributions.
- Des distributions non régulières comme la distribution de Dirac, apparaissent souvent comme limites de distributions régulières, par dilatation.
- Toute distribution peut-être dérivée. Pour les fonctions dérivables par morceaux mais possédant des sauts, la dérivée comporte des distributions de Dirac.
- La méthode de la variation de la constante s'étend aux distributions.
- La convolution s'étend à certaines familles de distributions, et c'est utile pour résoudre des équations différentielles.

4.11 Appendices

Ces appendices contiennent des démonstrations éludées en cours de route.

4.11.1 Caractérisation des fonctions C^∞

Soit α telle que $\alpha\phi \in \mathcal{D}$ pour toute $\phi \in \mathcal{D}$.

Ceci entraîne en particulier $\alpha\phi \in C^\infty$. La fonction ξ_2 est strictement positive sur $[-1, +1]$, donc $\frac{1}{\xi_2}$ est C^∞ sur $[-1, +1]$. On peut donc écrire

$$\frac{1}{\xi_2} \cdot f\xi_2 \in C^\infty$$

or

$$\frac{1}{\xi_2} \cdot f\xi_2 = f$$

et f est par conséquent C^∞ sur l'intervalle $[-1, +1]$. Un raisonnement analogue montrerait, en prenant des translatées de ξ_2 , que f est C^∞ sur tout intervalle $[n, n+2]$ avec $n \in \mathbb{Z}$, donc C^∞ sur \mathbb{R} . Par suite

$$\alpha\phi \in \mathcal{D}$$

pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}$ est équivalent à $\alpha \in C^\infty$.

4.11.2 Topologie sur \mathcal{D}

Sur \mathcal{D} nous avons la notion de convergence suivante. On dit qu'une suite ϕ_j de \mathcal{D} converge vers $\phi \in \mathcal{D}$ pour $j \rightarrow \infty$ si

1. Les ϕ_j sont nulles en dehors d'un même intervalle borné.
2. $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_R |\phi_j^{(n)} - \phi^{(n)}| = 0$ pour $n = 1, 2, \dots$

4.11.3 Topologie sur \mathcal{D}'

Une distribution T est une forme linéaire continue sur \mathcal{D} au sens où

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\mathcal{D})\phi_j = \phi$$

(selon la définition du paragraphe 4.11.2) entraîne que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |T(\phi_j) - T(\phi)| = 0.$$

4.11.4 $T_f = 0 \Rightarrow f = 0$ presque partout

Par définition

$$T_f = 0 \Leftrightarrow \langle T_f, \phi \rangle = 0$$

pour toute fonction d'essai $\phi \in \mathcal{D}$. Qui est encore équivalent à

$$\int_R f(x)\phi(x)dx = 0$$

pour toute fonction d'essai $\phi \in \mathcal{D}$.

Mais toute fonction d'essai $\phi \in \mathcal{D}$ peut s'écrire

$$\phi(x) = e^{-2i\pi ux}\psi,$$

où $u \in R$ et $\psi \in \mathcal{D}$ (il suffit d'écrire

$$\phi(x) = e^{-2i\pi ux}e^{2i\pi ux}\phi(x)$$

et de poser $\psi(x) = e^{2i\pi ux}\phi(x)$).

Alors

$$\int_R f(x)\phi(x) dx = \int_R e^{-2i\pi ux} f(x)\psi(x) = 0$$

pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}$

$$= F[f\psi](u) = 0$$

pour tout $u \in R$.

Or $F[f\psi](u) = 0$ implique que $f\psi = 0$ presque partout, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}$, donc, en particulier pour une fonction de la forme $\psi = \tau_n \xi_1$, où $n \in Z$. Donc $f = 0$ presque partout sur chaque intervalle de la forme $[n, n + 1]$, c'est-à-dire que l'ensemble E_n des points de $[n, n + 1]$ où $f \neq 0$ est de longueur nulle. Comme $\bigcup_n [n, n + 1] = \mathbb{R}$, on peut dire que l'ensemble des points de \mathbb{R}^n où $f \neq 0$ est de longueur nulle.

4.11.5 Convergence des distributions $\frac{\sin \lambda x}{x}$

Ceci est un simple exercice, à condition de montrer d'abord le lemme suivant

Lemme 191 Toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$ peut s'écrire sous la forme

$$\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x),$$

où la fonction ψ est une fonction C^∞ .

4.11.6 Résolution de l'équation $xT = 0$ pour $T \in \mathcal{D}'$

Par définition

$$xT = 0 \Leftrightarrow \langle xT, \phi \rangle = 0$$

pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$.

Or

$$\langle xT, \phi \rangle = \langle T, x\phi \rangle.$$

Il en résulte que T est nulle sur toute fonction χ de la forme $\chi = x\phi$ avec $\phi \in \mathcal{D}$. Mais ces fonctions χ ne remplissent pas tout \mathcal{D} . Elles sont en fait caractérisées par la condition $\chi(0) = 0$.

En effet, si $\chi = x\phi$ avec $\phi \in \mathcal{D}$, on a $\chi(0) = 0$.

Inversement, si $\chi \in \mathcal{D}$ vérifie $\chi(0) = 0$, on peut l'écrire (voir au paragraphe 4.11.5)

$$\chi(x) = x\phi(x),$$

où $\phi \in \mathcal{D}$.

Soit alors $\psi_0 \in \mathcal{D}$ une fonction fixée, choisie de telle sorte que $\psi_0(0) = 1$. On peut écrire, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}$, lequel est un espace vectoriel

$$\psi = \psi(0)\psi_0 + \chi$$

$$\psi(0) = \psi(0)\psi_0(0) + \chi(0)$$

$$= \psi(0) + \chi(0)$$

d'où $\chi(0) = 0$.

Alors

$$\langle T, \psi \rangle = \psi(0) \langle T, \psi_0 \rangle + \langle T, \chi \rangle$$

et compte tenu de ce que

$$\langle T, \chi \rangle = 0$$

$$= \psi(0) \langle T, \psi_0 \rangle$$

$$= C\psi(0)$$

en posant $\langle T, \psi_0 \rangle = C$

$$= \langle C\delta, \psi \rangle$$

pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}$. Donc, T est nécessairement de la forme

$$T = C\delta.$$

La réciproque est évidente, car si $T = C\delta$, on a $xT = 0$ pour toute constante C .

En résumé

$$xT = 0 \Leftrightarrow T = C\delta,$$

où C est un nombre complexe.

4.11.7 Résolution de l'équation $T' = 0$ pour $T \in \mathcal{D}'$

Cette équation est équivalente à

$$\langle T', \phi \rangle = - \langle T, \phi \rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Par conséquent, T est nulle lorsqu'elle est testée par toute fonction qui est la dérivée d'une fonction de \mathcal{D} . Mais les fonctions ϕ_0 de ce type ne remplissent pas tout \mathcal{D} . Elles sont caractérisées en fait par les deux conditions

$$\phi_0 \in \mathcal{D}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_0 = 0,$$

constituant ainsi un sous-espace vectoriel $E_0 \subset \mathcal{D}$.

On a donc

$$\langle T, \phi_0 \rangle = 0$$

pour toute fonction $\phi_0 \in E_0$.

Rappelons que T ne sera connue que si ses valeurs $\langle T, \phi \rangle$ sont connues pour toute $\phi \in \mathcal{D}$.

Considérons alors une fonction $\phi_1 \in \mathcal{D}$ n'appartenant pas à E_0 , choisie de telle sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_1 = 1.$$

L'espace \mathcal{D} étant un espace vectoriel, on peut toujours écrire, pour $\phi \in \mathcal{D}$ quelconque

$$\phi = \phi_1 \int_{\mathbb{R}} \phi + \phi_0$$

où $\phi_0 \in \mathcal{D}$.

On remarque que nécessairement $\phi_0 \in E_0$ car

$$\int_{\mathbb{R}} \phi = \int_{\mathbb{R}} \phi_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} \phi + \int_{\mathbb{R}} \phi_0,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_0 = 0.$$

De plus, la valeur de T testée par $\phi \in \mathcal{D}$ quelconque sera alors connue si on connaît $\langle T, \phi_1 \rangle$. En effet

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, \phi_1 \rangle \int_{\mathbb{R}} \phi + \langle T, \phi_0 \rangle$$

Le dernier terme étant nul, on a en posant $\langle T, \phi_1 \rangle = k$,

$$\langle T, \phi \rangle = k \int_{\mathbb{R}} \phi = \langle k, \phi \rangle$$

pour toute $\phi \in \mathcal{D}$.

Il en résulte que T est nécessairement de la forme

$$T = k.$$

Réciproquement, si $T = k$ on a $T' = 0$. En résumé

$$T' = 0 \Leftrightarrow T = k,$$

où k est une constante complexe.