

# PROBABILITÉS ET STATISTIQUE EN S5 IFIPS

J.-P. Lenoir

16 septembre 2009

# Chapitre 1

## Probabilités

### 1.1 Probabilité sur un ensemble fini

#### 1.1.1 Evènement aléatoire

Historiquement, la notion de probabilité s'est dégagée à partir d'exemples simples empruntés aux jeux de hasard (le mot hasard vient de l'arabe *az-zahr* : le dé).

Nous allons introduire cette notion en l'associant à un exemple : le jeu de dé.

DÉFINITIONS	EXEMPLE
Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut prévoir le résultat.	L'expérience est le jet d'un dé cubique ordinaire. Le résultat de l'expérience est le nombre indiqué sur la face supérieure du dé.
On peut alors lui associer alors un univers appelé aussi ensemble fondamental de l'expérience qui est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire. On le note $\Omega$ .	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
Un évènement aléatoire est un sous-ensemble de $\Omega$ .	L'évènement <i>obtenir un nombre pair</i> est le sous-ensemble $A = \{2, 4, 5\}$ de $\Omega$ .
On dit que l'évènement $A$ est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à $A$ .	Si la face supérieure du dé indique 5, $A$ n'est pas réalisé. Si elle indique 4, $A$ est réalisé.
Si un évènement ne contient qu'un seul élément, on dit que c'est un évènement élémentaire.	$B = \{1\}$ est un des 5 évènements élémentaires de $\Omega$ .

#### 1.1.2 De la fréquence à la probabilité de réalisation d'un évènement aléatoire

La fréquence théorique d'un évènement est la limite de la fréquence de réalisation de cet évènement lorsque le nombre de répétitions d'une même expérience tend vers l'infini (c'est ce qu'exprime une des lois de la théorie des probabilités appelée la loi faible des grands nombres).

Cela signifie que si l'on veut connaître la fréquence théorique d'apparition du nombre 6 dans notre jet de dé, il suffit de le lancer un grand nombre de fois, 10000 par exemple. La fréquence théorique cherchée, que l'on appellera probabilité de réalisation de l'évènement élémentaire  $\{6\}$ , sera très voisine de la fréquence expérimentale d'apparition du nombre 6 au cours de nos 10000 lancers. Elle sera encore plus voisine de la fréquence expérimentale obtenue lors de 100000 lancers. Le grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire efface la notion de "chance".

La notion de fréquence théorique ou de probabilité va permettre d'indiquer si, lors d'une expérience aléatoire, un évènement donné est plus ou moins susceptible d'être réalisé.

Les probabilités peuvent être classées suivant trois critères :

- Une probabilité à priori est une probabilité déterminée à l'avance, sans effectuer aucune expérience.

**Exemple.** On peut à priori accorder une probabilité de 0.5 à événement qui consiste à obtenir le côté face d'une pièce de monnaie non truquée.

- La probabilité empirique d'un événement est déterminée à l'aide de l'observation et de l'expérimentation. C'est la valeur limite de la fréquence de réalisation de événement lorsque l'expérience est réalisée un très grand nombre de fois.

**Exemple.** Si lorsqu'on a lancé la pièce de monnaie 10000 fois on constate que la fréquence du côté face se stabilise autour de 0.65, il faut envisager de réviser notre probabilité à priori et conclure que la pièce est truquée. Ce type de probabilité joue un rôle important pour les prévisions d'articles en stock chez un détaillant, pour le calcul des primes des compagnies d'assurances, etc...

- La probabilité subjective est le dernier type de probabilité. Elle intervient lorsqu'il est impossible d'établir une probabilité à priori ou une probabilité empirique.

**Exemple.** Le directeur d'une entreprise peut en se fiant à son expérience affirmer qu'il y a une probabilité de 0.6 que ses employés déclenchent une grève.

Nous nous intéresserons principalement aux deux premiers types de probabilité.

Vu qu'une probabilité peut être considérée comme une fréquence idéale, on lui connaît d'avance certaines propriétés.

- Une probabilité est une quantité sans dimension.
- Elle est toujours comprise entre 0 et 1.
- L'univers  $\Omega$  a la probabilité maximum d'être réalisé, car c'est l'événement certain. Sa probabilité de réalisation est donc égale à 1.
- Si  $A$  et  $B$  sont *incompatibles* (ensembles disjoints), la fréquence de réalisation de l'événement  $A$  ou  $B$  est la somme de la fréquence de réalisation de  $A$  et de la fréquence de réalisation de  $B$ .

### 1.1.3 Propriétés des probabilités d'un événement aléatoire

**Définition 1** Si l'univers  $\Omega$  est constitué de  $n$  événements élémentaires  $\{e_i\}$ , une mesure de probabilité sur  $\Omega$  consiste à se donner  $n$  nombres  $p_i \in [0, 1]$ , les probabilités des événements élémentaires, tels que

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Si l'événement  $A$  est la réunion disjointe de  $k$  événements élémentaires  $\{e_i\}$ , avec  $0 < k < n$ , la probabilité de  $A$  vaut, par définition,

$$p(A) = p\left(\bigcup_{i=1}^k \{e_i\}\right) = \sum_{i=1}^k p(e_i) = \sum_{i=1}^k p_i.$$

Par suite,  $0 \leq p(A) \leq 1$ .

La signification concrète de la probabilité d'un événement  $A$  est la suivante. Dans une expérience aléatoire, plus  $p(A)$  est proche de 1, plus  $A$  a de chances d'être réalisé ; plus  $p(A)$  est proche de 0, moins il a de chances d'être réalisé.

**Exemple 2** Probabilité uniforme ou équiprobabilité : tous les  $P_i$  valent  $1/n$ . La probabilité d'un sous-ensemble à  $k$  éléments vaut alors  $p(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$ .

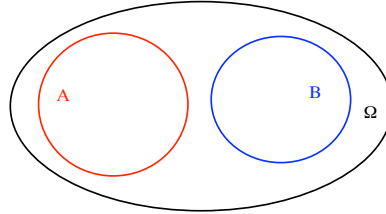
On exprime aussi cette propriété par la formule

$$p(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}.$$

Les propriétés suivantes découlent de la définition.

**Propriété 3** Si  $A$  et  $B$  sont incompatibles, i.e., si leur intersection  $A \cap B$  est vide, alors

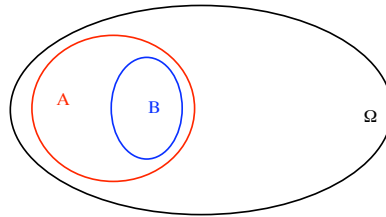
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$



**Propriété 4** Si  $B$  est un sous-ensemble de  $A$ ,

$$B \subseteq A \Rightarrow p(B) \leq p(A).$$

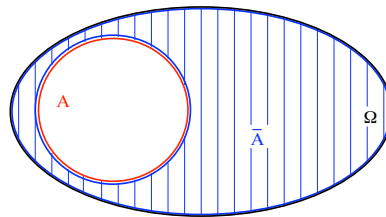
En effet,  $A = B \cup (A \setminus B)$ . Or  $B$  et  $A \setminus B$  sont incompatibles ( $A \setminus B$  est l'ensemble des éléments de  $A$  qui ne sont pas éléments de  $B$ ). Donc  $p(A) = p(B) + p(A \setminus B)$ . Comme  $p(A \setminus B)$  est positive, on obtient le résultat annoncé.



**Propriété 5** On appelle  $\emptyset$  l'évènement impossible, puisqu'il n'est jamais réalisé. Sa probabilité vaut  $p(\emptyset) = 0$ .

**Propriété 6** On note  $\bar{A}$  l'évènement contraire de  $A$ . C'est le complémentaire de  $A$  dans  $\Omega$ . Sa probabilité vaut

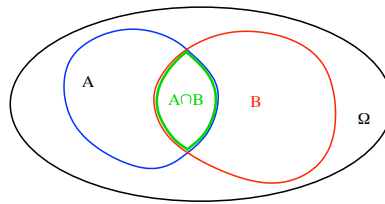
$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$



**Propriété 7** (Théorème des probabilités totales). Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles de  $\Omega$ ,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

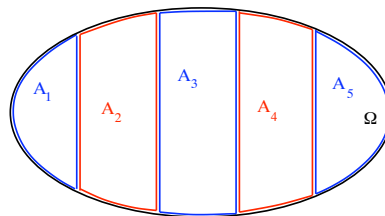
**Preuve.**  $p(A) = p(A \setminus B) + p(A \cap B)$  car  $A \setminus B$  et  $A \cap B$  sont incompatibles. De même  $p(B) = p(B \setminus A) + p(A \cap B)$  car  $B \setminus A$  et  $A \cap B$  sont incompatibles. De plus,  $p(A \cup B) = p(A \setminus B) + p(B \setminus A) + p(A \cap B)$ , car  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  et  $A \cap B$  sont incompatibles. En additionnant, il vient  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ . ■



**Propriété 8** (Généralisation du théorème des probabilités totales ou règle de l'addition). Si  $A_1, \dots, A_k$  forment une partition de  $\Omega$ , i.e. ils sont deux à deux disjoints ( $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ ), et  $\Omega = \bigcup_{j=1}^k A_j$ , alors

$$\sum_{j=1}^k p(A_j) = 1.$$

Dans cette situation, on dit parfois que les  $A_j$  forment un *système complet d'évènements*.



## 1.2 Probabilité conjointe

La probabilité que deux événements  $A$  et  $B$  se réalisent est appelée probabilité conjointe de  $A$  et  $B$ , notée  $p(A \cap B)$  et s'énonçant probabilité de  $A$  et  $B$ . Le calcul de cette probabilité s'effectue de manière différente selon que  $A$  et  $B$  sont dépendants ou indépendants, c'est-à-dire selon que la réalisation de l'un influence ou non celle de l'autre.

### 1.2.1 Événements indépendants

**Exemple 9** Je lance un dé rouge et un dé vert et je cherche la probabilité d'obtenir un total de 2. Je dois donc obtenir 1 avec chacun des deux dés. La probabilité d'obtenir 1 avec le dé rouge est  $1/6$  et demeurera  $1/6$  quelque soit le résultat du dé vert. Les deux événements "obtenir 1 avec le dé rouge" et "obtenir 1 avec le dé vert" sont indépendants.

**Propriété 10** Si deux événements sont indépendants, la probabilité qu'ils se réalisent tous les deux est égale au produit de leurs probabilités respectives. On peut donc écrire :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Dans notre exemple :  $p(\text{total} = 2) = p(\text{dé vert} = 1) \times p(\text{dé rouge} = 1) = 1/36$ .

**Remarque 11** Les tirages avec remise constituent une bonne illustration d'événements indépendants.

### 1.2.2 Événements dépendants - probabilité conditionnelle

Si deux événements sont dépendants plutôt qu'indépendants, comment calculer la probabilité que les deux se réalisent, puisque la probabilité de réalisation de l'un dépend de la réalisation de l'autre? Il nous faut connaître pour cela le degré de dépendance des deux événements qui est indiqué par la notion de probabilité conditionnelle.

**Définition 12** Soient  $A$  et  $B$  deux événements,  $A$  étant supposé de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle de  $B$  par rapport à  $A$ , la probabilité de réalisation de l'événement  $B$  sachant que  $A$  est réalisé. On la note

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

$p(B|A)$  se lit  $p$  de  $B$  si  $A$  ou  $p$  de  $B$  sachant  $A$ .

**Remarque 13** L'application :  $p_B : A \mapsto p_B(A) = p(A|B)$ ,  $\Omega \rightarrow [0, 1]$ , est une probabilité sur  $\Omega$  et vérifie toutes les propriétés d'une probabilité.

**Théorème 1** (Théorème des probabilités composées ou règle de la multiplication).

$$p(A \cap B) = p(B|A)p(A) = p(A|B)p(B).$$

En voici une généralisation. Soit  $A_1, \dots, A_k$  un système complet d'évènements. Alors

$$p(B) = \sum_{j=1}^k p(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^k p(A_j)p(B|A_j).$$

**Théorème 2** (Formule de Bayes). Soit  $A_1, \dots, A_k$  un système complet d'évènements. Soit  $E$  un évènement de probabilité non nulle. Alors

$$p(A_j|E) = \frac{p(A_j \cap E)}{p(E)} = \frac{p(A_j)p(E|A_j)}{\sum_{i=1}^k p(A_i)p(E|A_i)}.$$

**Remarque 14** Les tirages sans remise constituent une bonne illustration d'évènements dépendants.

**Exercice 15** Une urne contient 5 boules noires et 3 boules blanches. Quelle est la probabilité d'extraire 2 boules blanches en 2 tirages ?

### 1.3 Comment aborder un exercice de probabilités ?

Dans de nombreux problèmes, la recherche des solutions peut être facilitée par la démarche suivante.

1. Déterminer la liste des événements élémentaires ou décrire le contenu de l'univers  $\Omega$ .
2. Rechercher la mesure de probabilité associée à cet univers.
  - Soit la probabilité est uniforme et dans ce cas, la probabilité d'un événement  $A$  est donnée par  $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$ .
  - Soit on détermine la probabilité de chaque événement élémentaire en n'oubliant pas que la somme de toutes les probabilités de ces événements élémentaires est égale à 1.
3. Identifier correctement le ou les événements dont on cherche à évaluer la probabilité.
4. Utiliser la formule appropriée permettant de calculer la probabilité demandée. On pourra se poser la question suivante : Doit-on calculer la probabilité ?
  - D'un événement élémentaire ?
  - D'un événement contraire ?
  - Événements compatibles ou incompatibles (probabilités totales) ?
  - Événements dépendants ou indépendants (probabilités composées) ?

**Exercice 16** 1. On jette deux dés non pipés. Quelle est la probabilité d'obtenir un total de 7 points ?

2. Cette fois-ci les dés sont pipés : les numéros pairs sont deux fois plus probables que les numéros impairs. Quelle est la probabilité d'obtenir un total différent de 8 ?

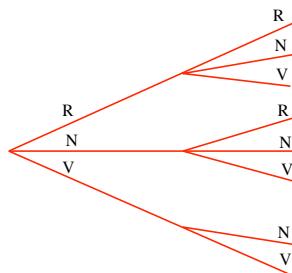
## 1.4 Techniques de dénombrement

### 1.4.1 Diagrammes arborescents ou arbres

**Exemple 17** On considère une urne qui contient deux boules rouges, deux noires et une verte. On tire deux boules sans remise. Il s'agit d'une expérience à deux étapes où les différentes possibilités qui peuvent survenir sont représentées par un arbre horizontal.

On obtient trois branches principales et trois branches secondaires pour chaque étape sauf pour le cas où une verte a été tirée en premier.

Le nombre de branches terminales de cet arbre donne le nombre d'éléments de l'univers.



Lorsqu'on rencontre beaucoup d'étapes dans une expérience et de nombreuses possibilités à chaque étape, l'arbre associé à l'expérience devient trop complexe pour être analysé. Ces problèmes se simplifient à l'aide de formules algébriques, comme on va le voir.

La démonstration de ces formules repose sur le fait que dans le cas d'une expérience à deux étapes, par exemple, un arbre qui aurait  $r$  branches principales et  $s$  branches secondaires commençant à partir des  $r$  branches principales aura  $rs$  branches terminales.

### 1.4.2 Arrangements et permutations

Envisageons un ensemble de  $n$  objets différents. Choisissons maintenant  $r$  de ces  $n$  objets et ordonnons les.

**Définition 18** Une disposition ordonnée de  $r$  objets distincts pris parmi  $n$  est appelée arrangement de  $r$  objets pris parmi  $n$  (on a obligatoirement  $r \leq n$ ).

**Combien y en a-t-il ?**

Pour compter le nombre total d'arrangements de  $r$  objets pris parmi  $n$ , il suffit de considérer les  $r$  positions comme fixées et de compter le nombre de façons dont on peut choisir les objets pour les placer dans ces  $r$  positions. C'est une expérience à  $r$  étapes où l'on applique la technique du paragraphe précédent. Pour la première position, on a  $n$  choix possibles. Pour la deuxième position, on a  $n - 1$  choix possibles... Pour la  $r$ -ième position, on a  $n - r + 1$  choix possibles. Si on désigne par  $A_n^r$  le nombre total d'arrangements cherchés, l'arbre aura  $A_n^r$  branches terminales. On conclut

**Proposition 19**

$$A_n^r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

**Rappel 20**  $n!$  (lire "factorielle  $n$ ") est le produit de tous les entiers jusqu'à  $n$ ,  $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Par convention,  $0! = 1$ .

**Exemple 21** Les arrangements de deux lettres prises parmi 4 lettres  $\{a, b, c, d\}$  sont au nombre de  $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$ . Ce sont :  $(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)$ .

**Cas particulier** :  $r = n$  Il s'agit d'ordonner  $n$  objets entre eux, c'est-à-dire d'effectuer une permutation de ces  $n$  objets.

**Définition 22** Une permutation de  $n$  éléments est une disposition ordonnée de ces  $n$  éléments.

**Proposition 23** Les permutations de  $n$  éléments sont au nombre de  $A_n^n = n!$ .

### 1.4.3 Combinaisons

**Définition 24** *Un choix de  $r$  objets distincts pris parmi  $n$  sans tenir compte de leur ordre est appelé combinaison de  $r$  objets pris parmi  $n$ .*

Dans l'exemple précédent correspondant à l'ensemble des quatre lettres  $\{a, b, c, d\}$ , la combinaison  $\{a, b\}$  est la même que la combinaison  $\{b, a\}$  alors que l'arrangement  $(a, b)$  est différent de l'arrangement  $(b, a)$ .

**Combien y en a-t-il?** Le nombre total de combinaisons de  $r$  objets pris parmi  $n$  est noté  $C_n^r$  ou  $\binom{n}{r}$ . Pour trouver l'expression de  $\binom{n}{r}$ , comparons le nombre d'arrangements et de combinaisons possibles de  $r$  objets pris parmi  $n$ .

- Dans un arrangement on choisit  $r$  objets, puis on tient compte de leur ordre.
- Dans une combinaison seul le choix des  $r$  objets compte. Comme le nombre de façons d'ordonner les  $r$  objets choisis est  $r!$ , on conclut qu'à chaque combinaison de  $r$  objets pris parmi  $n$ , on peut associer  $r!$  arrangements et donc qu'il y a  $r!$  fois plus d'arrangements que de combinaisons.

On conclut

**Proposition 25**

$$\binom{n}{r} = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

**Exemple 26** *Le nombre de combinaisons de deux lettres prises parmi quatre  $\{a, b, c, d\}$  est  $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ . Ce sont :  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$ .*

### 1.4.4 Permutations lorsque certains éléments sont semblables

Dans les paragraphes précédents, on a supposé que les  $n$  objets étaient tous différents. Il arrive parfois que les  $n$  objets en contiennent un certain nombre qui sont indiscernables.

Supposons qu'il n'y ait que  $k$  sortes d'objets distincts sur les  $n$  objets. Il y a

- $n_1$  objets de la 1-ère sorte,
- $n_2$  objets de la 2-ème sorte....
- $n_k$  objets de la  $k$ -ème sorte.

On a bien sûr  $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ .

Pour déterminer le nombre total de permutations distinctes, comparons ce nombre cherché  $\mathcal{P}$  avec le nombre obtenu si on supposait les objets différenciés. Plaçons nous dans le cas de l'exemple suivant : On cherche le nombre d'anagrammes du mot *PROBABILITE*.

Choisissons un de ces anagrammes : le plus simple est *PROBABILITE*.

- Si on différencie les lettres  $B$ , cette disposition peut provenir des deux permutations *PROB<sub>1</sub>AB<sub>2</sub>ILITE* ou *PROB<sub>2</sub>AB<sub>1</sub>ILITE*, soit 2! possibilités.
- Si on différencie les lettres  $I$ , cette disposition peut provenir des deux permutations *PROBABI<sub>1</sub>LI<sub>2</sub>TE* ou *PROBABI<sub>2</sub>LI<sub>1</sub>TE*, soit encore 2! possibilités

A un anagramme correspond donc  $2! \times 2! = 4$  permutations, ce qui signifie qu'il y a 4 fois plus de permutations que d'anagrammes. Le mot *PROBABILITE* comprend 11 lettres. Il y a 11! permutations possibles. On a donc  $\frac{11!}{2!2!} = 9979200$  anagrammes possibles.

**Cas général.** La différenciation des  $n_1$  premiers objets donnera  $n_1!$  fois plus d'éléments que ce qu'on cherche, la différenciation des  $n_2$  premiers objets donnera  $n_2!$  fois plus d'éléments que ce qu'on cherche, et finalement on trouve que  $n!$  est  $n_1!n_2!\cdots n_k!$  fois plus grand que le nombre cherché  $\mathcal{P}$ . On conclut

**Proposition 27** *Le nombre d'anagrammes d'un mot de  $n$  lettres, comportant seulement  $k < n$  lettres distinctes, en nombres  $n_1, \dots, n_k$  est*

$$\mathcal{P} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

### 1.4.5 Cas où les éléments ne sont pas obligatoirement distincts

Combien y a-t-il de manières de choisir  $r$  éléments parmi  $n$  de façon ordonnée en n'imposant pas qu'ils soient tous distincts les uns des autres ?

En 1<sup>ère</sup> position, il y a  $n$  choix possibles. En 2<sup>ème</sup> position, il y a encore  $n$  choix possibles...

En  $r$ ème position, il y a toujours  $n$  choix possibles.

Conclusion : Il y a donc  $n^r$  choix pour les  $r$  éléments ( $r$  peut être supérieur à  $n$  dans ce cas).

### 1.4.6 Récapitulation

	Conditions	Le nombre de tirages possibles est le nombre de :	Un exemple usuel
$p \geq n$	les $p$ éléments ne sont pas nécessairement tous distincts mais sont ordonnés	$p$ -listes d'éléments de $E$ , soit : $n^p$	tirages successifs avec remise de $p$ objets parmi $n$
$p < n$	les $p$ éléments sont tous distincts et ordonnés	arrangements de $p$ éléments de $E$ , soit : $A_n^p$	tirages successifs sans remise de $p$ objets parmi $n$ .
$p = n$	les $n$ éléments sont tous distincts et ordonnés	permutations des $n$ éléments de $E$ , soit : $n!$	anagrammes d'un mot formé de lettres toutes distinctes
$p < n$	les $p$ éléments sont tous distincts et non ordonnés	combinaisons de $p$ éléments de $E$ , soit $\binom{n}{p}$	tirages simultanés de $p$ objets parmi $n$ .

# Chapitre 2

## Variables aléatoires

### 2.1 Définition

**Exemple 28** *On jette deux fois une pièce de monnaie non truquée, et on s'intéresse au nombre de fois que le côté "face" a été obtenu. Pour calculer les probabilités des divers résultats, on introduira une variable  $X$  qui désignera le nombre de "face" obtenu.  $X$  peut prendre les valeurs 0,1,2.*

**Exemple 29** *On lance une fléchette vers une cible circulaire de rayon égal à 50 cm et on s'intéresse à la distance entre la fléchette et le centre de la cible. On introduira ici une variable  $X$ , distance entre l'impact et le centre de la cible, qui peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 50.*

Dans ces deux cas,  $X$  prend des valeurs réelles qui dépendent du résultat de l'expérience aléatoire. Les valeurs prises par  $X$  sont donc aléatoires.  $X$  est appelée variable aléatoire.

**Définition 30** *Soit un univers  $\Omega$  associé à une expérience aléatoire, sur lequel on a défini une mesure de probabilité. Une variable aléatoire  $X$  est une application de l'ensemble des événements élémentaires de l'univers  $\Omega$  vers  $\mathbf{R}$  (vérifiant quelques conditions mathématiques non explicitées ici).*

Une variable aléatoire est une variable (en fait une fonction !) qui associe des valeurs numériques à des événements aléatoires.

Par convention, une variable aléatoire sera représentée par une lettre majuscule  $X$  alors que les valeurs particulières qu'elle peut prendre seront désignées par des lettres minuscules  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ .

Les deux variables aléatoires définies dans les exemples 28 et 29 sont de natures différentes. La première est discrète, la seconde continue.

### 2.2 Variables aléatoires discrètes

**Définition 31** *Une variable aléatoire discrète est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs entières, en nombre fini ou dénombrable.*

Pour apprécier pleinement une variable aléatoire, il est important de connaître quelles valeurs reviennent le plus fréquemment et quelles sont celles qui apparaissent plus rarement. Plus précisément, on cherche les probabilités associées aux différentes valeurs de la variable

**Définition 32** *Associer à chacune des valeurs possibles de la variable aléatoire la probabilité qui lui correspond, c'est définir la loi de probabilité ou la distribution de probabilité de la variable aléatoire.*

Pour calculer la probabilité que la variable  $X$  soit égale à  $x$ , valeur possible pour  $X$ , on cherche tous les événements élémentaires  $e_i$  pour lesquels  $X(e_i) = x$ , et on a

$$p(X = x) = \sum_{i=1}^k p(\{e_i\}),$$

si  $X = x$  sur les événements élémentaires  $e_1, e_2, \dots, e_k$ .

La fonction de densité discrète  $f$  est la fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $[0, 1]$ , qui à tout nombre réel  $x_i$  associe  $f(x_i) = p(X = x_i)$ . On a bien sûr  $\sum_i f(x_i) = 1$ .

**Exemple 33** Cas de l'exemple 28.

La variable  $X =$  nombre de côtés “face” peut prendre les valeurs 0,1,2.

$$\begin{aligned} f(0) &= p(X = 0) = p(\text{pile, pile}) = \frac{1}{4}; \\ f(1) &= p(X = 1) = p(\text{pile, face}) + p(\text{face, pile}) = \frac{1}{2}; \\ f(2) &= p(X = 2) = p(\text{face, face}) = \frac{1}{4}; \\ f(x) &= 0 \text{ si } x \notin \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

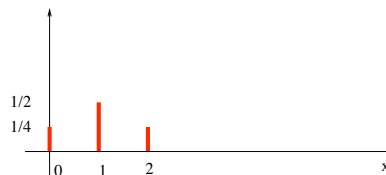
On présente sa distribution de probabilité dans un tableau.

$x$	0	1	2	total
$f(x) = p(X = x)$	1/4	1/2	1/4	1

### 2.2.1 Représentation graphique de la distribution de probabilité

Elle s'effectue à l'aide d'un diagramme en bâtons où l'on porte en abscisses les valeurs prises par la variable aléatoire et en ordonnées les valeurs des probabilités correspondantes.

Dans l'exemple du jet de pièces :



### 2.2.2 Fonction de répartition

En statistique descriptive, on a introduit la notion de fréquences cumulées croissantes. Son équivalent dans la théorie des probabilités est la fonction de répartition.

**Définition 34** La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  indique pour chaque valeur réelle  $x$  la probabilité que  $X$  prenne une valeur au plus égale à  $x$ . C'est la somme des probabilités des valeurs de  $X$  jusqu'à  $x$ . On la note  $F$ .

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i).$$

La fonction de répartition est toujours croissante, comprise entre 0 et 1 et se révélera un instrument très utile dans les travaux théoriques.

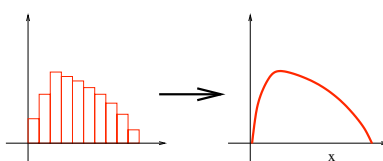
## 2.3 Variables aléatoires continues

**Définition 35** Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fini ou infini.

### 2.3.1 Fonction de densité de probabilité

Dans le cours de statistique descriptive, nous avons appris à représenter la distribution d'une variable statistique continue (ou à caractère continu) à l'aide d'un histogramme de fréquences, qui est une série de rectangles. L'aire de chaque rectangle est proportionnelle à la fréquence de la classe qui sert de base au rectangle.

Si l'on augmentait indéfiniment le nombre d'observations en réduisant graduellement l'intervalle de classe jusqu'à ce qu'il soit très petit, les rectangles correspondant aux résultats vont se multiplier tout en devenant plus étroits et à la limite vont tendre à se fondre en une surface unique limitée d'une part par l'axe des abscisses et d'autre part par une courbe continue.



On abandonne alors la notion de valeur individuelle et l'on dit que la distribution de probabilité est continue. La courbe des fréquences relatives idéalisée est alors la courbe représentative d'une fonction de densité de probabilité  $f$ .

Pour une variable statistique continue, l'aire des rectangles était un témoin fidèle de la fréquence de chaque classe. Il en va en de même pour une variable aléatoire continue mais il faudra raisonner à présent sur des classes infiniment petites d'amplitude  $dx$ . L'élément infinitésimal d'aire  $f(x) dx$  représente la probabilité que  $X$  appartienne à un intervalle d'amplitude  $dx$ ,

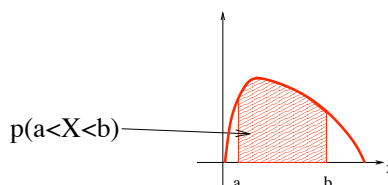
$$p(x < X \leq x + dx) = f(x) dx.$$

$f$  a donc les propriétés suivantes :

a) La courbe d'une fonction de densité de probabilité est toujours située au dessus de l'axe des abscisses donc  $f$  est une fonction toujours positive.

b) La probabilité que la variable aléatoire  $X$  soit comprise entre les limites  $a$  et  $b$  c'est-à-dire  $p(a \leq X \leq b)$ , est égale à l'aire entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction de densité de probabilité et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ ,

$$p(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$



c) L'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1 :

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) dx = 1.$$

d) Alors qu'une probabilité est sans dimension, une densité de probabilité a pour dimension celle de l'inverse de  $X$  :  $[X^{-1}]$ .

e) Il résulte de a et c qu'une densité de probabilité est une fonction *intégrable* sur  $\mathbf{R}$ .

**Remarque 36** *Le cas où on a une courbe continue est un cas théorique qui supposerait :*

- un nombre infini de mesures de la variable statistique
- une sensibilité très grande de l'appareil de mesure.

Nous supposerons toutefois que nous sommes dans ce cas lorsque nous serons en présence d'un grand nombre de mesures.

### 2.3.2 Fonction de répartition

De même que pour les variables aléatoires discrètes, on peut définir la fonction de répartition  $F$  de la variable continue  $X$  qui permet de connaître la probabilité que  $X$  soit inférieure à une valeur donnée :

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

**Propriété 37** 1.  $F$  est continue et croissante sur  $\mathbf{R}$ .

2.  $\forall x \in \mathbf{R}, F'(x) = f(x)$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .
4.  $p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ .

**Exercice 38**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = ke^{-x}$  si  $x \geq 0$ ,  $f(x) = 0$  sinon.

1. Déterminer  $k$  pour que  $f$  soit la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$ .
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable  $X$ .
3. Calculer  $p(1 < X < 2)$ .

## 2.4 Couples de variables aléatoires

Il existe beaucoup de situations où l'intérêt se porte sur la réalisation conjointe d'événements associés à deux (ou plusieurs) variables aléatoires. Nous allons envisager deux cas : celui où les variables sont discrètes et celui où elles sont continues.

### 2.4.1 Couples de variables aléatoires discrètes

**Loi de probabilité conjointe**

Considérons deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$ . Il nous faut pour modéliser le problème une fonction qui nous donne la probabilité que  $(X = x_i)$  en même temps que  $(Y = y_j)$ . C'est la loi de probabilité conjointe.

**Définition 39** *Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes dont l'ensemble des valeurs possibles sont respectivement  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et  $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ . Associer à chacune des valeurs possibles  $(x_i, y_j)$  du couple  $(X, Y)$ , la probabilité  $f(x_i, y_j)$ , c'est définir la loi de probabilité conjointe ou fonction de densité conjointe des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ ,*

$$f(x_i, y_j) = p((X = x_i) \text{ et } (Y = y_j)).$$

Le couple  $(X, Y)$  s'appelle variable aléatoire à deux dimensions et peut prendre  $m \times n$  valeurs.

**Proposition 40** 1. Pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $0 \leq f(x_i, y_j) \leq 1$ .

$$2. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) = 1.$$

On peut représenter graphiquement  $f$  sous forme d'un diagramme en bâtons en trois dimensions.

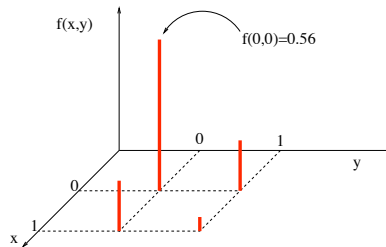
**Exemple 41** Soit  $X$  le nombre de piques obtenus lors du tirage d'une carte dans un jeu ordinaire de 52 cartes et  $Y$  le nombre de piques obtenus dans un deuxième tirage, la première carte n'étant pas remise.  $X$  et  $Y$  ne prennent que les valeurs 0 (pas de pique) ou 1 (un pique).

Détermination de la loi du couple  $(X, Y)$ .

$$\begin{aligned} f(0,0) &= \frac{39}{52} \times \frac{38}{51} = 0.56, & f(1,0) &= \frac{13}{52} \times \frac{39}{51} = 0.19, \\ f(0,1) &= \frac{39}{52} \times \frac{13}{51} = 0.19, & f(1,1) &= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} = 0.06. \end{aligned}$$

On vérifie que la somme de ces valeurs est égale à 1.

On représente  $f$  sous forme d'un diagramme en bâtons en trois dimensions.



### Loi de probabilité marginale

Lorsqu'on connaît la loi conjointe des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , on peut aussi s'intéresser à la loi de probabilité de  $X$  seule et de  $Y$  seule. Ce sont les lois de probabilité marginales.

**Définition 42** Soit  $(X, Y)$  une variable aléatoire à deux dimensions admettant comme loi de probabilité conjointe  $f(x, y)$ . Alors, les lois de probabilité marginales de  $X$  et  $Y$  sont définies respectivement par

$$\begin{aligned} f_X(x_i) &= p(X = x_i) = \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n, \\ f_Y(y_j) &= p(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_j) \text{ pour } j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Si la loi de probabilité conjointe du couple  $(X, Y)$  est présentée dans un tableau à double entrée, nous obtiendrons la loi de probabilité marginale  $f_X$  de  $X$  en sommant les  $f(x_i, y_j)$ , suivant l'indice  $j$  (par colonnes) et celle de  $Y$ ,  $f_Y$ , en sommant les  $f(x_i, y_j)$  suivant l'indice  $i$  (par lignes).

**Exemple 43** Lois marginales de l'exemple 41.

	$Y = y_1 = 0$	$Y = y_2 = 1$	$f_X(x_i)$
$X = x_1 = 0$	0.56	0.19	0.75
$X = x_2 = 1$	0.19	0.06	0.25
$f_Y(y_j)$	0.75	0.25	1.00

**Remarque 44** Le couple  $(X, Y)$  et les deux variables  $X$  et  $Y$  constituent trois variables aléatoires distinctes. La première est à deux dimensions, les deux autres à une dimension.

### Loi de probabilité conditionnelle

Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment déterminer la probabilité de réalisation de deux événements lorsqu'ils sont dépendants l'un de l'autre. Pour cela, nous avons introduit la notion de probabilité conditionnelle en posant

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}.$$

La notion équivalente dans le cas d'un couple de variables aléatoires est celle de loi de probabilité conditionnelle permettant de mesurer la probabilité que  $X$  soit égale à une valeur donnée lorsqu'on connaît déjà la valeur que prend  $Y$ .

**Définition 45** Soit la variable aléatoire  $(X, Y)$  à deux dimensions admettant comme loi conjointe  $f(x, y)$  et comme lois marginales  $f_X(x)$  et  $f_Y(y)$ . Si l'on suppose que la probabilité que  $X$  prenne la valeur  $x_i$  n'est pas nulle, alors la probabilité conditionnelle de  $(Y = y_j)$  sachant que  $(X = x_i)$  s'est réalisé est définie par

$$f(y_j|x_i) = \frac{f(x_i, y_j)}{f_X(x_i)}.$$

Les probabilités  $f(y_j|x_i)$  associées aux différentes valeurs possibles  $y_j$  de  $Y$  constituent la loi de probabilité conditionnelle de  $Y$ .

De même, si l'on suppose que la probabilité que  $Y$  prenne la valeur  $y_j$  n'est pas nulle, alors la probabilité conditionnelle de  $(X = x_i)$  sachant que  $(Y = y_j)$  s'est réalisé est définie par

$$f(x_i|y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)}.$$

Les probabilités  $f(x_i|y_j)$  associées aux différentes valeurs possibles  $x_i$  de  $X$  constituent la loi de probabilité conditionnelle de  $X$ .

### Cas de variables aléatoires indépendantes

Lorsque deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, la loi conditionnelle de  $X$ , pour toute valeur de  $Y$ , est identique à la loi marginale de  $X$  et lorsque la loi conditionnelle de  $Y$ , pour toute valeur de  $X$ , est identique à la loi marginale de  $Y$ . Autrement dit,

**Proposition 46** Soit  $(X, Y)$  une variable aléatoire à deux dimensions admettant comme loi de probabilité conjointe la fonction  $f(x, y)$  et comme lois de probabilité marginales  $f_X(x)$  et  $f_Y(y)$ . Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si les probabilités conjointes sont égales au produit des probabilités marginales,  $f(x_i, y_j) = f_X(x_i) \times f_Y(y_j)$  pour toutes les valeurs  $(x_i, y_j)$ .

Pour conclure que deux variables ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver une valeur du couple  $(X, Y)$  pour laquelle la relation précédente n'est pas satisfaite.

**Exemple 47** Dans l'exemple du tirage de cartes, nous savons, par exemple que  $p((X = 0) \text{ et } (Y = 1)) = f(0, 1) = 0.19$ , alors que  $p(X = 0) \times p(Y = 1) = f_X(0) \times f_Y(1) = 0.75 \times 0.25 = 0.188$ .

Conclusion : les variables  $X$  et  $Y$  sont dépendantes, ce qui paraît cohérent étant donné que le tirage était effectué sans remise.

### 2.4.2 Couple de variables aléatoires continus

Dans le cas de deux variables continues  $X$  et  $Y$ , le couple  $(X, Y)$  est dit continu.

**Fonction de densité de probabilité conjointe**

La distribution de probabilité conjointe de  $X$  et de  $Y$  est décrite par une *fonction de densité de probabilité conjointe*  $f(x, y)$  définie pour chaque valeur  $(x, y)$  du couple  $(X, Y)$ . La fonction  $f$  détermine une surface au-dessus de l'ensemble des valeurs  $(x, y)$ .

On a  $p((X, Y) \in D) =$  volume sous la surface représentative de  $f$  et au-dessus du domaine  $D$  du plan  $(xOy)$ .

Dans le cas où  $D$  est un rectangle  $[c, d] \times [u, v]$ ,

$$p((c < X \leq d) \text{ et } (u < Y \leq v)) = \int_{[c,d] \times [u,v]} f(x, y) dx dy.$$

**Propriété 48** 1. Pour tout couple  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $f(x, y) \geq 0$ .

2.  $\int_{\mathbf{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$ .

3. Il en résulte qu'une densité de probabilité conjointe est une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^2$ .

**Densité de probabilité marginale**

De même que pour les couples de variables aléatoires discrètes, on définit les fonctions densités de probabilité marginales et conditionnelles. Pour les définir dans le cas continu, il suffit de remplacer les sommes du cas discret par des intégrales.

**Définition 49** Soit  $(X, Y)$  une variable aléatoire continue à deux dimensions admettant comme densité de probabilité conjointe la fonction  $f(x, y)$ . Alors, les densités de probabilité marginales de  $X$  et  $Y$  sont définies respectivement par

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dy \text{ pour } x \in \mathbf{R}, \\ f_Y(y) &= \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx \text{ pour } y \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

**Variables indépendantes**

**Proposition 50** Deux variables continues  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si la fonction de densité de probabilité conjointe est égale au produit des fonctions de densité marginales.

Autrement dit, pour tout couple  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Dans ce cas, le théorème de Fubini-Tonelli donne

$$\begin{aligned} p((c < X \leq d) \text{ et } (u < Y \leq v)) &= \int_{[c,d] \times [u,v]} f(x, y) dx dy \\ &= \left( \int_c^d f_X(x) dx \right) \left( \int_u^v f_Y(y) dy \right). \end{aligned}$$

**2.5 Paramètres descriptifs d'une distribution**

En statistique descriptive, nous avons caractérisé les distributions statistiques des valeurs observées par certains nombres représentatifs qui résumaient de façon commode et assez complète la distribution. Pour apprécier la tendance centrale d'une série d'observations, nous avons employé, entre autres, la moyenne arithmétique et pour caractériser la dispersion de la série autour de la moyenne, nous avons introduit la variance ou l'écart quadratique moyen.

### 2.5.1 Espérance mathématique d'une distribution de probabilité

Si l'on s'imagine que le nombre d'observations croît indéfiniment (on passe d'un échantillon de taille  $n$  à la population toute entière), les fréquences observées vont tendre vers les probabilités théoriques et on admet que la moyenne calculée sur l'échantillon de taille  $n$  va tendre vers une valeur limite qui sera la moyenne de l'ensemble des valeurs de la population entière. On l'appelle espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$ , car c'est la valeur moyenne que l'on s'attend à avoir dans un échantillon de grande taille.

**Définition 51** 1. *Cas d'une variable discrète*

- Soit  $X$  une variable aléatoire discrète qui prend un nombre fini de valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et dont la loi de probabilité est  $f : f(x_i) = p(X = x_i)$ . L'espérance mathématique de  $X$ , notée  $E(X)$ , est définie par

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i).$$

- Si la variable aléatoire  $X$  prend un nombre dénombrable de valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , son espérance mathématique est alors définie par  $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$ , à condition que la série converge absolument.

2. *Cas d'une variable continue.* Si la variable aléatoire  $X$  est continue et a pour fonction de densité de probabilité  $f$ , son espérance mathématique est

$$E(X) = \int_{\mathbf{R}} x f(x) dx,$$

pourvu que la fonction  $x \mapsto x f(x)$  soit intégrable sur  $\mathbf{R}$ .

### 2.5.2 Variance d'une distribution de probabilités

En effectuant le même raisonnement que précédemment pour passer d'un échantillon de taille  $n$  à la population totale, on suppose que la variance calculée sur l'échantillon tend vers une limite lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini. Cette limite est appelée variance de la variable aléatoire  $X$ .

**Définition 52** – On appelle variance de la variable aléatoire  $X$  la valeur moyenne des carrés des écarts à la moyenne,

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2).$$

Le calcul de la variance se simplifie en utilisant l'expression :

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

- On appelle écart-type de la variable aléatoire  $X$  la racine carrée de sa variance.

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue,

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète finie,

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 f(x_i) = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 f(x_i) \right) - E(X)^2.$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue,

$$\text{Var}(X) = \int_{\mathbf{R}} (x - E(X))^2 f(x) dx = \left( \int_{\mathbf{R}} x^2 f(x) dx \right) - E(X)^2.$$

### 2.5.3 Fonction caractéristique d'une distribution de probabilité

**Définition 53** On appelle fonction caractéristique de la variable aléatoire  $X$  la fonction  $\xi_X$  définie sur  $\mathbf{R}$  par

$$\xi_X(u) = E(e^{-2i\pi u X}).$$

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète finie,

$$\xi_X(u) = \sum_{i=1}^n f(x_i) e^{-2i\pi u x_i}.$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue,

$$\xi_X(u) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi u x} f(x) dx.$$

Dans le cas continu, on constate que  $\xi_X = Ff$  est la transformée de Fourier de la densité de probabilité. Elle existe donc toujours puisque la densité de probabilité est intégrable au sens de Lebesgue.

**Proposition 54** Soit  $X$  une variable aléatoire qui possède une espérance et une variance. Alors

$$\begin{aligned} E(X) &= -\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{du} \xi_X(u)|_{u=0}, \\ \text{Var}(X) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{d^2}{du^2} \xi_X(u)|_{u=0} - \left( \frac{d}{du} \xi_X(u)|_{u=0} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

**Preuve.** Dans le cas discret,

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \xi_X(u) &= \sum_{i=1}^n -2i\pi x_i f(x_i) e^{-2i\pi u x_i} = -2i\pi E(X e^{-2i\pi u X}), \\ \frac{d^2}{du^2} \xi_X(u) &= \sum_{i=1}^n -4\pi^2 x_i^2 f(x_i) e^{-2i\pi u x_i} = -4\pi^2 E(X^2 e^{-2i\pi u X}), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \xi_X''(0) - (\xi_X'(0))^2 &= -4\pi^2 E(X^2) + 4\pi^2 E(X)^2 \\ &= -4\pi^2 (E(X^2) - E(X)^2) \\ &= -4\pi^2 \text{Var}(X). \end{aligned}$$

Dans le cas continu, le calcul est le même, au moyen de la formule pour la dérivée de la transformée de Fourier. ■

**Remarque 55** Une loi de probabilité régit le comportement d'une variable aléatoire. Cette notion abstraite est associée à la population, c'est-à-dire à l'ensemble de tous les résultats possibles d'un phénomène particulier. C'est pour cette raison que l'espérance et la variance de la loi de probabilité, qui n'ont aucun caractère aléatoire, sont appelés paramètres de la distribution de probabilité.

### 2.5.4 Propriétés de l'espérance mathématique et de la variance

Résumons les principales propriétés de ces deux paramètres dans un tableau.

Changement d'origine	Changement d'échelle	Transformation affine
$E(X + c) = E(X) + c$	$E(aX) = aE(X)$	$E(aX + c) = aE(X) + c$
$Var(X + c) = Var(X)$	$Var(aX) = a^2Var(X)$	$Var(aX + c) = a^2Var(X)$
$\sigma(X + c) = \sigma(X)$	$\sigma(aX) =  a \sigma(X)$	$\sigma(aX + c) =  a \sigma(X)$
$\xi_{X+c}(u) = e^{-2i\pi cu} \xi_X(u)$	$\xi_{aX}(u) = \xi_X(au)$	$\xi_{aX+c}(u) = e^{-2i\pi cu} \xi_X(au)$

**Définition 56** – Une variable aléatoire  $X$  est dite centrée si son espérance mathématique est nulle.

- Une variable aléatoire  $X$  est dite réduite si son écart-type est égal à 1.
- Une variable aléatoire centrée réduite est dite standardisée.

A n'importe quelle variable aléatoire  $X$ , on peut associer la variable standardisée

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

En divisant la variable centrée par son écart-type, une valeur située à un écart-type de la moyenne sera ramenée à 1, une autre située à deux écarts-types sera ramenée à 2 : l'échelle de référence, ou unité de mesure, d'une variable centrée-réduite est l'écart-type.

Les valeurs des variables centrées-réduites sont complètement indépendantes des unités de départ. Une mesure exprimée en mètres ou en centimètres donne exactement la même variable centrée-réduite. On peut ainsi faire des comparaisons entre variables de natures différentes. Si un enfant est à +3 écarts-types de la moyenne pour sa taille et +1 écart-type pour son poids, on sait qu'il est plus remarquable par sa taille que par son poids.

L'examen des variables centrées-réduites est très pratique pour déceler les valeurs "anormalement" grandes ou "anormalement" petites.

Le passage d'une variable aléatoire  $X$  à une variable standardisée est requis pour l'utilisation de certaines tables de probabilité. C'est le cas pour l'utilisation de la table de la loi normale que nous traiterons dans le prochain chapitre.

### Combinaisons de plusieurs variables aléatoires

1. Somme et différence.

Dans tous les cas,

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= E(X) + E(Y), \\ E(X - Y) &= E(X) - E(Y). \end{aligned}$$

Dans le cas de variables *indépendantes* :

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= Var(X) + Var(Y), \\ Var(X - Y) &= Var(X) + Var(Y). \end{aligned}$$

2. Produit. Dans le cas de variables *indépendantes*,

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

3. Conséquence. Dans le cas de variables *indépendantes*,

$$\xi_{X+Y} = \xi_X \xi_Y.$$

Ceci montre que, dans le cas de variables continues indépendantes, la densité de probabilité de  $X + Y$  est le *produit de convolution* des densités de probabilité de  $X$  et de  $Y$ .

**Covariance de deux variables aléatoires**

Lorsque deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes, il existe une caractéristique qui permet de déterminer l'intensité de leur dépendance. C'est la covariance.

**Définition 57** *La covariance de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est définie par*

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

**Proposition 58** 1. *Si deux variables aléatoires sont indépendantes, leur covariance est nulle.*

2. *Attention : La réciproque n'est pas vraie. Deux variables de covariance nulle ne sont pas obligatoirement indépendantes.*

3. *Si deux variables aléatoires sont dépendantes,*

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(X)E(Y) + \text{Cov}(X, Y), \\ \text{Var}(X + Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

# Chapitre 3

## Principales distributions de probabilités

### Introduction

De nombreuses situations pratiques peuvent être modélisées à l'aide de variables aléatoires qui sont régies par des lois spécifiques. Il importe donc d'étudier ces modèles probabilistes qui pourront nous permettre par la suite d'analyser les fluctuations de certains phénomènes en évaluant, par exemple, les probabilités que tel événement ou tel résultat soit observé.

La connaissance de ces lois théoriques possède plusieurs avantages sur le plan pratique :

- Les observations d'un phénomène particulier peuvent être remplacées par l'expression analytique de la loi où figure un nombre restreint de paramètres (1 ou 2, rarement plus).
- La loi théorique agit comme modèle (idéalisation) et permet ainsi de réduire les irrégularités de la distribution empirique. Ces irrégularités sont souvent inexplicables et proviennent de fluctuations d'échantillonnage, d'imprécision d'appareils de mesure ou de tout autre facteur incontrôlé ou incontrôlable.
- Des tables de probabilités ont été élaborées pour les lois les plus importantes. Elles simplifient considérablement les calculs.

Ce cours présente trois distributions discrètes : la distribution binomiale, la distribution géométrique et la distribution de Poisson. Puis il aborde deux distributions continues : la distribution exponentielle et la distribution normale. Il importe de bien comprendre quelles sont les situations concrètes que l'on peut modéliser à l'aide de ces distributions. Viennent enfin trois distributions théoriques dont la fonction n'est pas de modéliser mais de servir d'outils dans les problèmes d'estimation et de test.

### 3.1 Distribution binomiale

#### 3.1.1 Variable de Bernoulli ou variable indicatrice

##### Définition

**Définition 59** Une variable aléatoire discrète qui ne prend que les valeurs 1 et 0 avec les probabilités respectives  $p$  et  $q = 1 - p$  est appelée variable de Bernoulli.

**Exemple 60** Une urne contient deux boules rouges et trois boules vertes. On tire une boule de l'urne. La variable aléatoire  $X =$  nombre de boules rouges tirées est une variable de Bernoulli. On a :  $p(X = 1) = 2/5 = p$ ,  $p(X = 0) = 3/5 = q$ .

Plus généralement, on utilisera une variable de Bernoulli lorsqu'on effectue une épreuve qui n'a que deux issues : le succès ou l'échec. Une telle expérience est alors appelée épreuve de Bernoulli. On affecte alors 1 à la variable en cas de succès et 0 en cas d'échec.

**Distribution de probabilités**

$x$	0	1
$f(x) = p(X = x)$	$q$	$p$

**Paramètres de la distribution**

On calcule

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = (0^2q + 1^2p) - p^2 = p - p^2 = pq, \\ \xi_X(u) &= E(e^{-2i\pi u X}) = 1 \cdot q + e^{-2i\pi u} p = q + p \cos(2\pi u) + ip \sin(2\pi u). \end{aligned}$$

$E(X) = p$	$V(X) = pq$	$\sigma(X) = \sqrt{pq}$	$\xi_X(u) = q + pe^{-2i\pi u}$
------------	-------------	-------------------------	--------------------------------

**3.1.2 Distribution binomiale**

**Situation concrète**

- a) On effectue une épreuve de Bernoulli. Elle n'a donc que deux issues : le succès avec une probabilité  $p$  ou l'échec avec une probabilité  $q$ .
  - b) On répète  $n$  fois cette épreuve.
  - c) Les  $n$  épreuves sont indépendantes entre elles, ce qui signifie que la probabilité de réalisation de l'événement "succès" est la même à chaque épreuve et est toujours égale à  $p$ .
- Dans cette situation, on s'intéresse à la variable  $X =$  "nombre de succès au cours des  $n$  épreuves".

**Distribution de probabilités**

Appelons  $X_i$  les variables de Bernoulli associées à chaque épreuve. Si la  $i$ -ème épreuve donne un succès,  $X_i$  vaut 1. Dans le cas contraire  $X_i$  vaut 0. La somme de ces variables comptabilise donc le nombre de succès au cours des  $n$  épreuves. On a donc  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .  $X$  peut prendre  $n + 1$  valeurs :  $0, 1, \dots, n$ .

Cherchons la probabilité d'obtenir  $k$  succès, c'est-à-dire  $p(X = k)$ .

La probabilité d'avoir  $k$  succès suivis de  $n - k$  échecs est  $p^k q^{n-k}$  car ces résultats sont indépendants les uns des autres.

La probabilité d'avoir  $k$  succès et  $n - k$  échecs dans un autre ordre de réalisation est toujours  $p^k q^{n-k}$ . Donc tous les événements élémentaires qui composent l'événement  $(X = k)$  ont même probabilité.

Combien y en a-t-il ? Autant que de façons d'ordonner les  $k$  succès par rapport aux  $n - k$  échecs. Il suffit de choisir les  $k$  places des succès parmi les  $n$  possibles et les  $n - k$  échecs prendront les places restantes. Or il y a  $\binom{k}{n}$  manières de choisir  $k$  places parmi  $n$ .

Finalement, on obtient

$$p(X = k) = \binom{k}{n} p^k q^{n-k}.$$

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit une *loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$* . On note  $X \hookrightarrow B(n, p)$ .

Remarque : L'adjectif binomial vient du fait que lorsqu'on somme toutes ces probabilités, on retrouve le développement du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1.$$

NB : La loi binomiale est tabulée en fonction des 2 paramètres  $n$  et  $p$ .

**Paramètres descriptifs de la distribution**

Nous savons que  $X = X_1 + \dots + X_n$  avec  $E(X_i) = p$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , donc  $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np$ .

Les variables  $X_i$  sont indépendantes et  $Var(X_i) = pq$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , donc  $Var(X) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n) = npq$ . D'autre part, les fonctions caractéristiques se multiplient, donc  $\xi_X(u) = (q + pe^{-2i\pi u})^n$ .

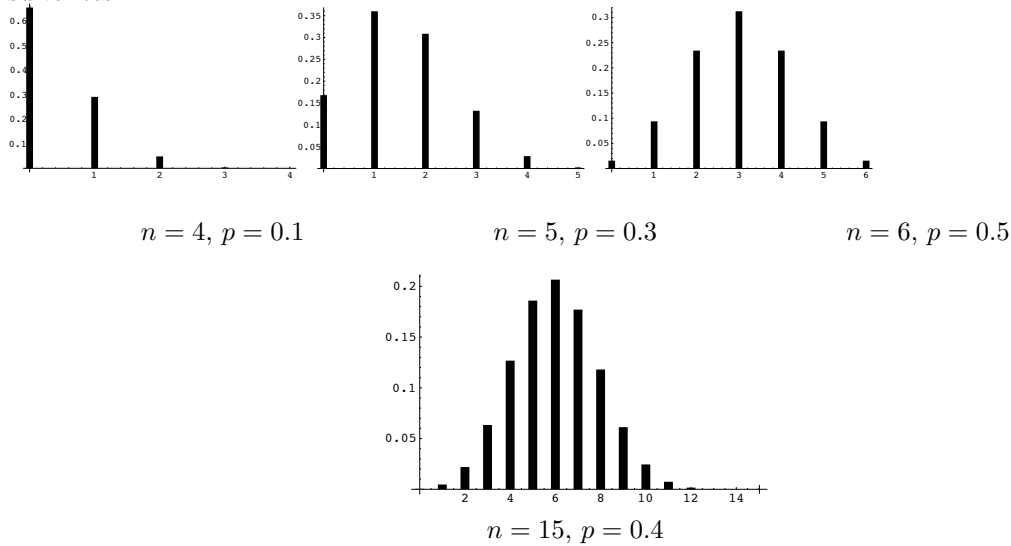
$E(X) = np$	$V(X) = npq$	$\sigma(X) = \sqrt{npq}$	$\xi_X(u) = (q + pe^{-2i\pi u})^n$
-------------	--------------	--------------------------	------------------------------------

**Remarque 61** La formule donnant l'espérance semble assez naturelle. En effet, le nombre moyen de succès (qui correspond à la signification de l'espérance) est intuitivement égal au produit du nombre d'essais par la probabilité de réalisation d'un succès.

**Propriétés de la distribution binomiale**

*Forme de la distribution binomiale*

La représentation graphique de la distribution de la loi binomiale est habituellement présentée sous la forme d'un diagramme en bâtons. Puisque la loi dépend de  $n$  et  $p$ , nous aurons diverses représentations graphiques si nous faisons varier  $n$  et/ou  $p$  comme c'est le cas pour les figures suivantes.



On peut effectuer plusieurs remarques à propos de ces diagrammes.

- a) La forme de la distribution est symétrique si  $p = 1/2$ , quelque soit  $n$ .
- b) Elle est dissymétrique dans le cas où  $p \neq 1/2$ . Si  $p$  est inférieur à 0.50, les probabilités sont plus élevées du côté gauche de la distribution que du côté droit (asymétrie positive). Si  $p$  est supérieur à 1/2, c'est l'inverse (asymétrie négative).
- c) La distribution tend à devenir symétrique lorsque  $n$  est grand. De plus, si  $p$  n'est pas trop voisin de 0 ou 1, elle s'approchera de la distribution de la loi normale que l'on verra plus loin dans ce chapitre.

*Somme de deux variables binomiales*

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont des variables *indépendantes* qui suivent des lois binomiales  $B(n_1, p)$  et  $B(n_2, p)$  respectivement, alors  $X_1 + X_2$  suit une loi binomiale  $B(n_1 + n_2, p)$ .

Cette propriété s'interprète facilement : si  $X_1$  représente le nombre de succès en  $n_1$  épreuves identiques indépendantes et  $X_2$  en  $n_2$  épreuves indépendantes entre elles et indépendantes des premières avec la même probabilité de succès que les premières, alors  $X_1 + X_2$  représente le nombre de succès en  $n_1 + n_2$  épreuves identiques et indépendantes.

## 3.2 Distribution géométrique

### 3.2.1 Situation concrète

- a) On effectue une épreuve de Bernoulli. Elle n'a donc que deux issues : le succès avec une probabilité  $p$  ou l'échec avec une probabilité  $q = 1 - p$ .
- b) On répète l'épreuve jusqu'à l'apparition du premier succès.
- c) Toutes les épreuves sont indépendantes entre elles.

Dans cette situation, on s'intéresse à la variable  $X =$  "nombre de fois qu'il faut répéter l'épreuve pour obtenir le premier succès".

**Remarque 62** *On est donc dans les mêmes hypothèses que pour la loi binomiale, mais le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance. On s'arrête au premier succès.*

### 3.2.2 Distribution de probabilités

L'ensemble des valeurs prises par  $X$  est  $1, 2, 3, \dots$ . On cherche la probabilité d'avoir recours à  $n$  épreuves pour obtenir le premier succès.

Ce succès a une probabilité de réalisation de  $p$ . Puisque c'est le premier, il a été précédé de  $n - 1$  échecs qui ont chacun eu la probabilité  $q$  de se produire. Étant donné l'indépendance des épreuves, on peut dire que la probabilité de réalisation de  $n - 1$  échecs suivis d'un succès est le produit des probabilités de réalisation de chacun des résultats,

$$p(X = n) = q^{n-1}p.$$

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit une *loi géométrique de paramètre  $p$* . On note  $X \hookrightarrow G(p)$ .

**Remarque 63** *L'appellation géométrique vient du fait qu'en sommant toutes les probabilités, on obtient une série géométrique. En effet,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}p = \frac{p}{1-q} = 1.$$

### 3.2.3 Paramètres descriptifs de la distribution

On calcule

$$\begin{aligned} \xi_X(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}p e^{-2i\pi un} \\ &= p e^{-2i\pi u} \sum_{k=0}^{\infty} q^k e^{-2i\pi uk} \\ &= \frac{p e^{-2i\pi u}}{1 - q e^{-2i\pi u}}, \end{aligned}$$

et on en tire, en dérivant par rapport à  $u$  en  $u = 0$ , l'espérance et la variance.

$E(X) = 1/p$	$Var(X) = q/p^2$	$\sigma(X) = \sqrt{q}/p$	$\xi_X(u) = \frac{p e^{-2i\pi u}}{1 - q e^{-2i\pi u}}$
--------------	------------------	--------------------------	--

**Remarque 64** *On peut interpréter l'expression de l'espérance de façon intuitive. En effet en  $n$  épreuves, on s'attend à obtenir  $np$  succès et par conséquent, le nombre moyen d'épreuves entre deux succès devrait être  $\frac{n}{np} = \frac{1}{p}$ .*

### 3.2.4 Propriété remarquable de la distribution géométrique

La propriété la plus importante de la loi géométrique est sans doute d'être *sans mémoire*. En effet, la loi de probabilité du nombre d'épreuves à répéter jusqu'à l'obtention d'un premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli identiques indépendantes est la même quel que soit le nombre d'échecs accumulés auparavant. Mathématiquement, cela se traduit par

$$p(X > n + m | X > n) = p(X > m).$$

On comprend intuitivement que cela découle de l'indépendance des épreuves qui sont toutes identiques. La loi géométrique est la seule distribution de probabilité discrète qui possède cette propriété. En effet, si une variable aléatoire  $Y$  à valeurs dans  $\mathbf{N}$  satisfait, pour tous  $n, m \in \mathbf{N}$ ,  $p(Y > n+m | Y > n) = p(Y > m)$ , alors  $p(Y > m+n) = p(Y > n)p(Y > m)$ . Posant  $q = p(Y > 1)$ , il vient  $p(Y > n) = q^n$ , d'où  $p(Y = n) = p(Y > n-1) - p(Y > n) = q^{n-1} - q^n = q^{n-1}(1 - q)$ .

## 3.3 Distribution de Poisson

La loi de Poisson est attribuée à Simeon D. Poisson, mathématicien français (1781-1840). Cette loi fut proposée par Poisson dans un ouvrage qu'il publia en 1837 sous le titre "Recherche sur la probabilité de jugements en matière criminelle et en matière civile".

### 3.3.1 Situation concrète

Beaucoup de situations sont liées à l'étude de la réalisation d'un événement dans un intervalle de temps donné (arrivée de clients qui se présentent à un guichet d'une banque en une heure, apparitions de pannes d'un réseau informatique en une année, arrivée de malades aux urgences d'un hôpital en une nuit,...). Les phénomènes ainsi étudiés sont des phénomènes d'attente.

Pour décrire les réalisations dans le temps d'un événement donné, on peut

- soit chercher le nombre de réalisations de l'événement dans un intervalle de temps donné qui est distribué suivant une loi de Poisson.
- soit chercher le temps entre deux réalisations successives de l'événement qui est distribué suivant une loi exponentielle (voir section suivante).

On va voir que la première loi (loi de Poisson) peut être interprétée comme un cas limite d'une loi binomiale et la seconde comme un cas limite d'une loi géométrique.

### 3.3.2 Processus de Poisson

Précisons les hypothèses faites relativement à la réalisation de l'événement qui nous intéresse.

1. Les nombres de réalisations de l'événement au cours d'intervalles de temps disjoints sont des variables aléatoires indépendantes, c'est-à-dire que le nombre de réalisations au cours d'un intervalle de temps est indépendant du nombre de réalisations au cours d'intervalles de temps antérieurs.
2. La probabilité pour que l'événement se réalise une fois, au cours d'un petit intervalle de temps  $\Delta t$ , est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle et vaut  $\alpha \Delta t$ , où  $\alpha$  est une valeur positive que l'on suppose constante tout au long de la période d'observation.
3. Il est très rare d'observer plus d'une fois l'événement au cours d'un petit intervalle de temps  $\Delta t$ , c'est-à-dire que la probabilité pour que l'événement se réalise plus d'une fois au cours de l'intervalle de temps  $\Delta t$  est négligeable.

Les hypothèses 1., 2., 3. caractérisent ce qu'on appelle un *processus de Poisson*.  $\alpha$  est une constante du processus qui représente le nombre moyen de réalisations par unité de temps et que l'on appelle l'*intensité* du processus.

Sous ces hypothèses, la variable aléatoire  $X =$  "nombre de fois où l'événement considéré se réalise au cours d'un intervalle de temps de durée  $t$ " est distribuée suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = \alpha t$ .

### 3.3.3 Distribution de probabilités

Nous cherchons à déterminer la loi de probabilité de la variable  $X =$  “nombre de réalisations d’un événement donné pendant un intervalle de temps  $t$ ”, sachant que le nombre moyen de réalisations de cet événement par unité de temps est  $\alpha$ . Or, nous connaissons déjà la loi de probabilités de la variable  $Y =$  “nombre de réalisations d’un événement donné, de probabilité  $p$ , au cours de  $n$  essais”. Il s’agit d’une loi binomiale  $B(n, p)$ .

Pour comprendre la relation entre ces deux lois, divisons l’intervalle de temps de longueur  $t$ , en  $n$  petits intervalles de temps disjoints de longueur  $\Delta t = t/n$  pour  $n$  assez grand.

L’hypothèse 3. permet d’affirmer que dans chacun de ces  $n$  petits intervalles il n’y a principalement que deux possibilités : l’événement se réalise une fois ou ne se réalise pas (cela sera d’autant plus vrai que  $n$  est grand). Dans chaque intervalle, la variable “nombre de réalisations de l’événement” est une variable de Bernoulli.

L’hypothèse 2. permet d’affirmer que dans chacun de ces  $n$  petits intervalles, la probabilité de réalisation de l’événement est constante et égale à  $\alpha \Delta t = \alpha t/n$ . Les variables de Bernoulli ont donc toutes le même paramètre  $p = \alpha t/n$ .

L’hypothèse 1. permet d’affirmer que les  $n$  variables de Bernoulli sont indépendantes.

La somme de ces  $n$  variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p = \alpha t/n$  est une variable qui suit la loi binomiale  $B(n, \alpha t/n)$  et qui représente approximativement le nombre de réalisations de l’événement dans l’intervalle de temps  $t$ . Si on choisit  $n$  de plus en plus grand, on a de plus en plus d’intervalles, la probabilité de réalisations de l’événement dans chaque intervalle est de plus en plus petite et la distribution  $B(n, \alpha t/n)$  se rapproche de plus en plus de la distribution que l’on cherche à déterminer, c’est-à-dire de la distribution de Poisson de paramètre  $\alpha t$ . On conclut

**Définition 65** On peut considérer la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  comme la loi limite d’une loi binomiale  $B(n, \lambda/n)$  lorsque  $n$  tend vers l’infini, le produit des paramètres  $n \cdot \lambda/n$  restant toujours constant égal à  $\lambda$ .

On écrit  $X \leftrightarrow P(\lambda)$ .

**Proposition 66** La loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  est donnée par

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

**Preuve.** Si  $Y$  suit une loi  $B(n, \lambda/n)$ , on sait que

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \binom{k}{n} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left[\frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n}\right]. \end{aligned}$$

Chaque terme du produit entre crochets tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l’infini. Il y a  $k$  termes, c’est-à-dire un nombre fini. Donc le crochet tend vers 1. De même,  $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$  tend vers 1. De plus,

$$\ln\left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \sim n \times \left(-\frac{\lambda}{n}\right)$$

tend vers  $-\lambda$  lorsque  $n$  tend vers l’infini, donc  $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$  tend vers  $e^{-\lambda}$ . On conclut que  $P(Y = k)$  tend vers  $e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ . ■

**Remarque 67** Il existe des tables donnant la fonction de densité et la fonction de répartition de la loi de Poisson en fonction des différentes valeurs de  $\lambda$  (pour  $\lambda \leq 15$ ).

### 3.3.4 Paramètres descriptifs de la distribution

On calcule, lorsque  $X \leftrightarrow P(\lambda)$ ,

$$\xi_X(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-2i\pi uk} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-2i\pi u}}.$$

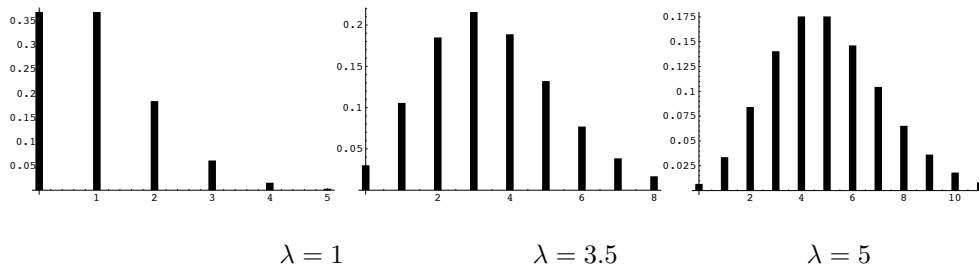
On en déduit le tableau

$E(X) = \lambda$	$Var(X) = \lambda$	$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$	$\xi_X(u) = e^{\lambda(e^{-2i\pi u} - 1)}$
------------------	--------------------	------------------------------	--

La loi  $P(\lambda)$  est la loi limite de la loi  $B(n, \lambda/n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. On constate que l'espérance mathématique et la variance de la loi  $B(n, \lambda/n)$  convergent vers celles de la loi  $P(\lambda)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Cela peut se vérifier directement, en appliquant le théorème de convergence dominée pour la mesure Peigne de Dirac (intersion d'une sommation et d'une limite).

### 3.3.5 Propriétés de la distribution de Poisson

#### Allure de la distribution



#### Commentaires.

- En général, le diagramme est dissymétrique par rapport à  $\lambda$  avec étalement vers la droite. Les valeurs élevées d'une variable de Poisson sont peu rencontrées.
- A mesure que  $\lambda$  augmente, la forme de la distribution tend à devenir symétrique et s'approche de celle de la loi normale que nous traiterons plus loin dans ce chapitre. Cela est vérifié pour  $\lambda \geq 10$  et même acceptable pour  $\lambda \geq 5$ .

#### Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

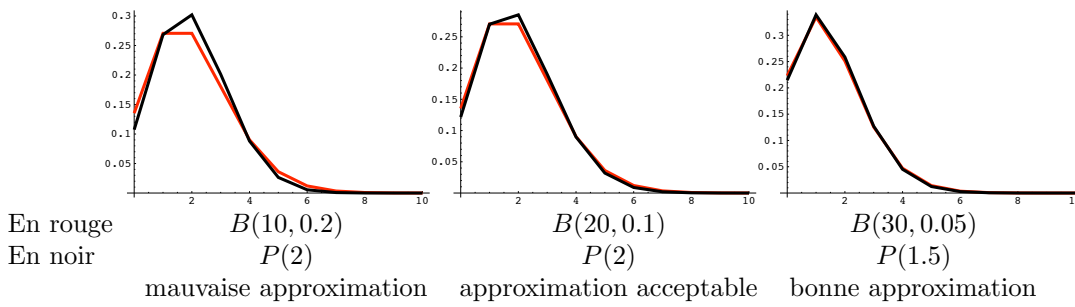
La loi binomiale dépend de deux paramètres  $n$  et  $p$ . Bien qu'il existe quelques tables, elle est n'est pas simple à utiliser. La loi de Poisson ne dépend que d'un paramètre ce qui la rend plus pratique. Il faut donc avoir toujours présent à l'esprit que, lorsque les conditions le permettent, on peut avoir intérêt à remplacer une loi binomiale par une loi de Poisson.

Lorsque  $n$  est grand et  $p$  petit, de telle façon que le produit  $np = \lambda$  reste petit par rapport à  $n$ , la loi binomiale  $B(n, p)$  peut être approchée par la loi de Poisson  $P(\lambda)$  (revoir ce qui a été dit sur ce sujet dans le paragraphe "Distribution de probabilités"). Cette approximation s'appliquant lorsque  $p$  est petit, la loi de Poisson est appelée la loi des événements rares. En pratique, l'approximation est valable si  $n > 20$ ,  $p \leq 0.1$  et  $np \leq 5$ .

On approche la loi  $B(n, p)$  par la loi  $P(np)$  dès que  $n > 20$ ,  $p \leq 0.1$  et  $np \leq 5$ .

**RÈGLE IMPORTANTE.** Lorsqu'on approche une loi par une autre, on choisit le ou les paramètres de la loi approchante de manière que l'espérance (et la variance lorsqu'on a suffisamment de paramètres) de la loi approchante soit égale à l'espérance (et la variance) de la loi approchée.

#### Comparaison des distributions.



### Somme de deux lois de Poisson

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont des variables aléatoires *indépendantes* qui suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , alors  $X_1 + X_2$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

### 3.3.6 Importance pratique de la loi de Poisson

Le physicien et le technologue rencontrent la loi de Poisson dans de nombreuses circonstances.

#### Le comptage en radioactivité, microanalyse X, analyse SIMS...

Un détecteur compte le nombre de particules qu'il reçoit pendant un temps de comptage  $t_0$ . Ce nombre  $X$  obéit à une loi de Poisson dont le paramètre  $\lambda$  est le produit du flux moyen de particules  $\alpha$  pendant le temps de comptage  $t_0$ .

Conséquence. L'espérance mathématique de  $X$  est  $\alpha t_0$  et l'écart-type sur  $X$  est  $\sqrt{\alpha t_0}$ . Il en résulte que la variabilité de  $X$  (quotient de l'espérance sur l'écart-type) devient très grande quand le nombre moyen de particules observé est petit. Si les valeurs prises par  $X$  sont proches de 10 correspondant à une espérance  $\alpha t_0$  proche de 10, l'écart-type est proche de 3, ce qui donne une variabilité de 30%. Ceci est parfaitement visible sur le "profil SIMS<sup>1</sup>" présenté à la page suivante. Le bruit devient important lorsque  $X$  est entre 10 et 15.

Dans la mesure du possible, l'expérimentateur sera alors amené à augmenter le temps de comptage pour augmenter les valeurs de  $X$ .

#### Contrôle de qualité

On effectue un contrôle de qualité sur des composants fabriqués par une unité de production. Un composant est réputé bon (ou mauvais) lorsqu'il satisfait (ou non) à des spécifications. Le critère de choix est donc qualitatif. Le taux moyen de rejets (pièces mauvaises) est appelé  $p$ . On effectue un tirage de  $n$  pièces. La probabilité de trouver  $k$  pièces mauvaises dans cet échantillon de taille  $n$  est donnée par une loi de Poisson  $P(np)$ , car on peut approcher la loi binomiale par la loi de Poisson (*loi des événements rares*).

Lorsque  $np$  est petit, le rapport devient grand et la variabilité sur  $k$  rend le contrôle imprécis. Ceci explique que, dans un contrôle de qualité, la taille des échantillons tirés de la population des pièces fabriquées doit être au moins de l'ordre de 100.

#### Dénombrement d'événements survenant dans un espace délimité

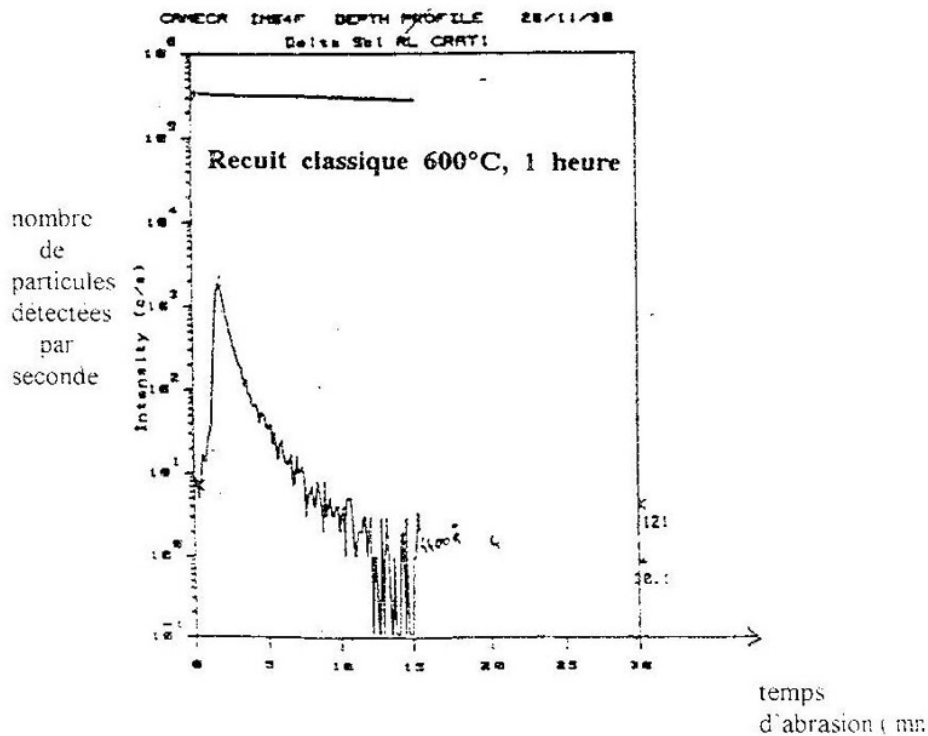
La loi de Poisson permet de modéliser aussi bien le nombre d'événements survenant pendant un temps donné que le nombre d'événements survenant dans un espace délimité.

1. S.I.M.S. (Secondary Ions Mass Spectroscopy) : méthode permettant une analyse quantitative des impuretés dans une masse solide. Un faisceau d'ions primaires abrase le matériau. Parmi les atomes arrachés à la cible, certains sont ionisés (ions secondaires). Ils sont triés en masse au moyen d'une déflexion magnétique et comptés pendant des intervalles de temps  $t_0$  au cours du processus d'abrasion. On obtient ainsi le profil de concentration de l'impureté dans le matériau.

Par exemple, si on appelle  $X$  le nombre de particules bombardant une cible de surface  $S$  soumise à une irradiation de fluence  $F$  (mesurée en  $m^{-2}$ ), alors  $X$  suit une loi  $P(FS)$ .  $FS$  est donc analogue au  $\alpha t_0$  du comptage en temps.

La loi de Poisson sert donc aussi à décrire des phénomènes de localisation spatiale et non plus seulement temporelle, c'est-à-dire qu'elle modélisera aussi bien le nombre d'accidents qui peuvent survenir en une matinée que le nombre d'accidents qui peuvent survenir sur une section donnée d'autoroute.

### PROFIL S.I.M.S.



## 3.4 Distribution exponentielle

### 3.4.1 Situation concrète

On se place dans le cas d'un phénomène d'attente décrit au paragraphe 3 et on s'intéresse à la variable aléatoire qui représente le temps d'attente pour la réalisation d'un événement ou le temps d'attente entre la réalisation de deux événements successifs. Si on se place dans le cas où l'intensité  $\alpha$  du processus de Poisson est constante, ce temps d'attente suit une loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ .

**Exemple.** Lorsque l'événement attendu est la mort d'un individu (ou la panne d'un équipement),  $\alpha$  s'appelle le taux de mortalité (ou le taux de panne). Dire qu'il a une valeur constante, c'est supposer qu'il n'y a pas de vieillissement (ou pas d'usure s'il s'agit d'un équipement), la mort ou la panne intervenant de façon purement accidentelle.

### 3.4.2 Distribution de probabilité

On veut déterminer la loi de la variable  $T =$  "temps d'attente entre la réalisation de deux événements successifs" où le nombre moyen de réalisations de l'événement par unité de temps est

$\alpha$ . Pour cela, nous allons procéder comme dans le paragraphe 3 : Si  $t$  est la longueur de l'intervalle de temps sur lequel dure notre étude, nous le divisons en  $n$  petits intervalles de longueur  $t/n$ . Appelons  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre d'intervalles de temps que l'on doit laisser s'écouler pour obtenir la réalisation de l'événement suivant. Chaque intervalle possédant la même probabilité  $\alpha t/n$  de voir l'événement se produire,  $X$  suit, par définition, la loi géométrique de paramètre  $\alpha t/n$ . Le temps d'attente  $T$  est alors le produit de ce nombre d'intervalles par le temps de chaque intervalle,  $T = \alpha t/n \times X$ .

On cherche  $p(T > t_0) = p(X > nt_0/t)$ , et lorsque  $n$  tend vers l'infini on obtient

$$p(T > t_0) = e^{-\alpha t_0} = \int_{t_0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha u} du.$$

Ceci nous permet d'affirmer que la fonction de densité de la variable  $T$  est  $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$  si  $x > 0$ , 0 sinon.

**Définition 68** La loi exponentielle de paramètre  $\alpha$  décrit la distribution d'une variable continue  $X$  qui ne prend que des valeurs positives selon la fonction de densité  $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ . On la note  $Exp(\alpha)$ .

### 3.4.3 Paramètres descriptifs de la distribution

On vient de voir que la loi exponentielle est la loi limite d'une loi géométrique. On a  $T \sim \frac{t}{n}X$  où  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $\frac{\alpha t}{n}$ . Or  $E(T) \sim \frac{t}{n}E(X) = \frac{t}{n}(\frac{\alpha t}{n})^{-1} = \frac{1}{\alpha}$  et  $Var(T) \sim \frac{t^2}{n^2}Var(X) = \frac{t^2}{n^2} \frac{1 - \frac{\alpha t}{n}}{(\frac{\alpha t}{n})^2} \sim \frac{1}{\alpha^2}$ .

**Proposition 69**

$$E(T) = \frac{1}{\alpha}, \quad Var(T) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

**Remarque 70** On peut très facilement retrouver ces résultats en effectuant un calcul direct à partir de la fonction de densité en utilisant les formules de définition de l'espérance et la variance (peut-être pourriez-vous le faire à titre d'exercice)

### 3.4.4 Propriétés de la distribution exponentielle

1. Comme la loi géométrique, la loi exponentielle est sans mémoire. C'est la seule loi continue qui possède cette propriété. Elle provient bien entendu du fait que le paramètre  $\alpha$  est constant.
2. Une somme de  $n$  variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre  $\alpha$  n'est pas une variable de loi exponentielle mais une variable qui suit une loi gamma de paramètres  $n$  et  $\alpha$ . Une telle loi est aussi appelée loi d'ERLANG d'ordre  $n$ . Elle représente le temps d'attente requis avant qu'un événement se réalise  $n$  fois.
3. La loi exponentielle est aussi couramment utilisée dans les problèmes de datation en géochronologie.

## 3.5 Distribution normale

Du point de vue historique, la nature et l'importance exceptionnelle de cette loi furent pressenties en 1773 par Abraham de Moivre lorsqu'il considéra la forme limite de la loi binomiale.

En 1772, Simon Laplace l'étudia dans sa théorie des erreurs. Mais c'est seulement en 1809 pour Carl Friedrich Gauss et en 1812 pour Simon Laplace qu'elle prit sa forme définitive. C'est ainsi qu'on l'appelle tantôt loi de Laplace, tantôt loi de Gauss, tantôt loi de Laplace-Gauss. On trouve aussi l'expression, consacrée par une longue tradition, de loi normale (ce qui ne signifie pas pour autant que les autres lois soient « anormales »). Elle jouit d'une importance fondamentale car

un grand nombre de méthodes statistiques reposent sur elle. Ceci est lié au fait qu'elle intervient comme loi limite dans des conditions très générales.

Pour faire ressortir toute son importance et sa forme, W.J. Youden, du National Bureau of Standards, a eu l'ingénieuse idée de la présenter telle qu'elle apparaît ci-dessous.

La  
loi normale  
des erreurs  
constitue l'une  
des généralisations  
les plus étendues de  
la philosophie naturelle  
dans l'histoire de l'humanité.  
Elle est un outil précieux pour la  
recherche en sciences physiques et  
sociales ainsi qu'en médecine, en agriculture  
et en génie. Elle est indispensable à l'analyse et à  
l'interprétation des données obtenues par l'observation ou  
l'expérience.

### 3.5.1 Situation concrète

On rencontre souvent des phénomènes complexes qui sont le résultat de causes nombreuses, d'effet faible, et plus ou moins indépendantes. Un exemple typique est celui de l'erreur commise sur la mesure d'une grandeur physique. Cette erreur résulte d'un grand nombre de facteurs tels que : variations incontrôlables de la température ou de la pression, turbulence atmosphérique, vibrations de l'appareil de mesure, etc...Chacun des facteurs a un effet faible, mais l'erreur résultante peut ne pas être négligeable. Deux mesures faites dans des conditions que l'expérimentateur considère comme identiques pourront alors donner des résultats différents.

Donc dès que nous serons dans une situation où la distribution dépend de causes

- en grand nombre et indépendantes,
- dont les effets s'additionnent,
- dont aucune n'est prépondérante,

alors nous serons en présence de la distribution normale. C'est le cas, par exemple :

- En métrologie, pour la distribution des erreurs d'observation.
- En météorologie, pour la distribution de phénomènes aléatoires tels que la température et la pression.
- En biologie, pour la distribution de caractères biométriques comme la taille ou le poids d'individus appartenant à une population homogène. En technologie, pour la distribution des cotes des pièces usinées.
- En économie, pour les fluctuations accidentelles d'une grandeur économique (production, ventes, ....) autour de sa tendance, etc.....

### 3.5.2 Distribution de probabilité

**Définition 71** Une variable aléatoire continue suit une loi normale si l'expression de sa fonction de densité de probabilités est de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

La loi dépend des deux réels  $m$  et  $\sigma$  appelés paramètres de la loi normale. On la note  $\mathcal{N}(m, \sigma)$ .

**Remarque 72** 1. Une fonction de densité de probabilité étant toujours positive, le paramètre  $\sigma$  est donc un réel strictement positif.

2. On démontre que  $f$  est bien une fonction de densité de probabilité car  $\int_{\mathbf{R}} f(x) dx = 1$ . Pour le démontrer on utilise que  $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$  (c'est l'intégrale de Gauss).
3. La loi normale étant tabulée, cette expression nous sera de peu d'utilité. Il est important néanmoins de préciser à quoi correspondent  $m$  et  $\sigma$ .

### 3.5.3 Paramètres descriptifs de la distribution

La fonction caractéristique d'une variable normale standard  $X$  vaut

$$\xi_X(u) = e^{-2i\pi mu - 2\pi^2 \sigma^2 u^2}.$$

On en déduit, à l'aide de la formule qui exprime l'espérance et la variance à partir des dérivées de la fonction caractéristique, que

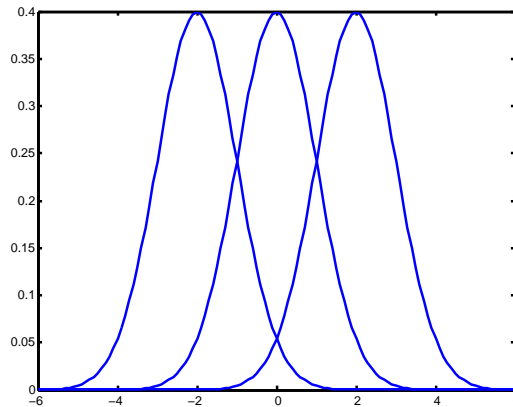
$$E(X) = m, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

On peut aussi faire le calcul directement, à partir de l'intégrale de Gauss.

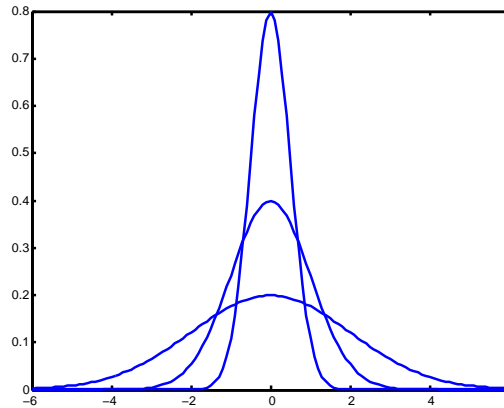
### 3.5.4 Propriétés de la distribution normale

#### Forme de la distribution normale

La fonction de densité de probabilités de la loi normale a la forme d'une « courbe en cloche ». En fait il ne s'agit pas d'une courbe unique mais plutôt d'une famille de courbes dépendant de  $m$  et  $\sigma$ .



Écarts types identiques, espérances  $-2, 0, 2$  différentes



Espérances identiques, écarts types  $0.5, 1, 2$  différents

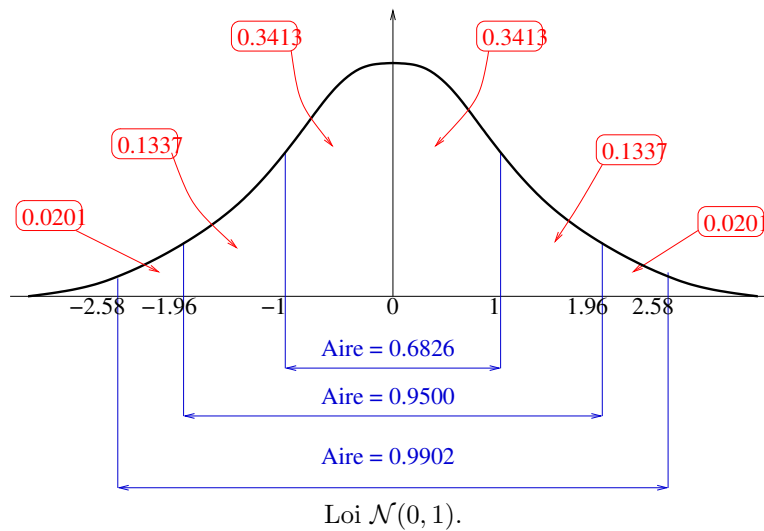
On peut effectuer quelques remarques à propos de ces courbes.

- a) La distribution est symétrique par rapport à la droite d'équation  $x = m$ . Donc l'aire sous la courbe de part et d'autre de cette droite est égale à 0.5.
- b) La distribution est d'autant plus étalée que  $\sigma$  est grand.
- c) L'axe des abscisses est une asymptote et l'aire sous la courbe à l'extérieur de l'intervalle  $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$  est négligeable.

Pour fixer les idées, on peut indiquer que

$$\begin{aligned} p(m - \sigma < X < m + \sigma) &= 0.6826 \\ p(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) &= 0.9544 \\ p(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) &= 0.9974. \end{aligned}$$

Cela peut être visualisé sur le graphique ci-après.



- d)  $\sigma$  représente la différence des abscisses entre le sommet de la courbe et le point d'inflexion.
- e) La longueur à mi-hauteur de la courbe (L.M.H. ou en anglais F.W.H.M. Full Width Half Maximum) vaut  $2.35\sigma$ . Cette distance est souvent employée par le spectroscopiste pour déterminer expérimentalement  $\sigma$ . Cette méthode doit cependant être utilisée avec précaution car il faut s'assurer que les "bruits" permettent d'observer correctement le "pied" de la courbe.

**Somme de deux variables normales**

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables indépendantes. Si  $X_1$  suit  $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$  et  $X_2$  suit  $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ , alors  $X_1 + X_2$  suit  $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$ .

**Loi normale centrée réduite ou loi normale standardisée**

Nous avons vu dans le chapitre 2 qu'à toute variable aléatoire  $X$ , on pouvait associer une variable dite standardisée  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  d'espérance nulle et de variance unité (ceci résultait des propriétés de translation et de changement d'échelle).

On montre assez facilement que si on effectue cette transformation sur une variable suivant une loi normale, la variable standardisée suit encore une loi normale mais cette fois-ci de paramètres 0 et 1. La loi standardisée est appelée loi normale centrée réduite, et notée  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Donc si  $X$  suit  $\mathcal{N}(m, \sigma)$ , on pose  $T = \frac{X - m}{\sigma}$  et  $T$  suit  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

On peut résumer la correspondance de la façon suivante :

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$	$T = \frac{X - m}{\sigma}$	$T \sim \mathcal{N}(0, 1)$
$E(X) = m$		$E(T) = 0$
$Var(X) = \sigma^2$		$Var(T) = 1$

Il faut garder à l'esprit que concrètement  $T$  est le nombre d'écarts-type entre la valeur de  $X$  et la moyenne.

La loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  est tabulée à l'aide la fonction de répartition des valeurs positives. Elle donne les valeurs de  $\Phi(t) = p(0 \leq T \leq t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$  pour  $t > 0$ . Ce nombre représente l'aire sous la courbe représentative de la distribution et au dessus de l'intervalle  $[0, t]$ . Pour cette raison la table de la loi normale est aussi appelée table d'aires. Cette table ne dépend d'aucun paramètre, mais permet cependant de déterminer les probabilités de n'importe quelle distribution normale!

**Comment utiliser la table d'aires ?**

La première colonne de la table indique les unités et les dixièmes des valeurs de  $T$  alors que les centièmes des valeurs de  $T$  se lisent sur la ligne supérieure de la table. La valeur trouvée à l'intersection de la ligne et de la colonne adéquates donne l'aire cherchée.

a) Je cherche la valeur de  $p(0 < T < 0,5)$ . A l'intersection de la ligne "0.5" et de la colonne "0.00", je lis 0.1915.

b) Je cherche la valeur de  $p(-0.5 \leq T \leq 0)$ . J'utilise la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées et j'en conclus que  $p(-0.5 \leq T \leq 0) = p(0 \leq T \leq 0.5) = 0.1915$ . Et que pensez-vous de la valeur de  $p(-0.5 < T < 0)$  ?

c) Je cherche la valeur de  $p(-2.24 \leq T \leq 1.12)$ . L'aire cherchée correspond à la somme suivante

$$p(-2.24 \leq T \leq 1.12) = p(-2.24 \leq T \leq 0) + p(0 < T \leq 1.12) = 0.4875 + 0.3686 = 0.8561.$$

d) Je cherche la valeur de  $p(1 \leq T \leq 2)$ . L'aire cherchée correspond à la différence suivante

$$p(1 \leq T \leq 2) = p(0 \leq T \leq 2) - p(0 \leq T \leq 1) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359.$$

e) Je cherche la valeur  $t$  de  $T$  telle que  $p(0 \leq T \leq t) = 0.4750$ . C'est le problème inverse de celui des exemples précédents. Il s'agit de localiser dans la table l'aire donnée et de déterminer la valeur de  $T$  correspondante. Je trouve  $t = 1.96$ .

**Remarque 73** Si la valeur de l'aire ne peut se lire directement dans les valeurs de la table, on pourra toujours effectuer une interpolation linéaire entre deux valeurs adjacentes ou prendre la valeur la plus proche.

## 3.6 Approximation par des lois normales

### 3.6.1 Théorème central limite (ou de tendance normale)

**Théorème 3** *Hypothèses : Soit une suite de variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  vérifiant les conditions suivantes :*

1. *Les variables sont indépendantes.*
2. *Leurs espérances mathématiques  $m_1, m_2, \dots, m_n$  et leurs variances  $\text{Var}(X_1), \text{Var}(X_2), \dots, \text{Var}(X_n)$  existent toutes.*
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sup_k \text{Var}(X_k)}{\sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j)} = 0.$

*Conclusion : La distribution de la variable somme  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  se rapproche de la distribution normale lorsque  $n$  tend vers l'infini.*

**Preuve.** Dans le cas particulier où les variables  $X_k$  ont toutes la même loi.

Quitte à standardiser, on peut supposer que  $X_k$  est d'espérance nulle et de variance 1. Alors sa fonction caractéristique a un développement limité, au voisinage de  $u = 0$ , de la forme

$$\xi_{X_k}(u) = 1 - 2\pi^2 u^2 + \dots$$

Posons

$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}} X = \frac{1}{\sqrt{n}} (X_1 + \dots + X_n).$$

Alors

$$\begin{aligned} \xi_Y(u) &= \xi_X\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \xi_{X_k}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{2\pi^2 u^2}{n} + \dots\right)^n \\ &\sim e^{-2\pi^2 u^2}, \end{aligned}$$

qui est la fonction caractéristique de la distribution normale standard  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Remarque 74** *C'est ce théorème très important qui nous permet d'affirmer que la situation concrète énoncée au début de ce paragraphe nous met en présence d'une loi normale. En effet,*

- $X_1, X_2, \dots, X_n$  correspondent aux différents facteurs de fluctuations.
- Le grand nombre de causes est assuré par le fait que  $n$  tend vers l'infini.
- L'indépendance parle d'elle-même.
- Additionner les effets revient à considérer la variable somme.
- Dire qu'aucun facteur n'est prépondérant est traduit par l'hypothèse (3) du théorème.

En pratique, ceci se vérifie dès que  $n \geq 30$ .

### 3.6.2 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Une variable qui suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  peut toujours être considérée comme une somme de  $n$  variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p$ .

$$X = X_1 + \dots + X_n,$$

où  $X_i$  sont des variables de Bernoulli. Les hypothèses du théorème centrale limite étant vérifiées, on peut affirmer que, lorsque  $n$  tend vers l'infini, la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  tend vers une loi normale.

La loi normale qui l'approche le mieux est celle qui possède la même espérance  $np$  et le même écart-type  $\sqrt{npq}$ ,  $q = 1 - p$ .

Or la distribution binomiale est asymétrique sauf lorsque  $p = 1/2$ . La distribution normale, elle, est symétrique. L'approximation sera valable lorsque  $p$  n'est pas trop voisin de 0 ou 1 et sera d'autant meilleure que  $p$  est proche de  $1/2$  et que  $n$  est grand.

En pratique :

On approche la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$ dès que $\begin{cases} n \geq 30 \\ np \geq 15 \\ nq \geq 15 \end{cases}$
---

### 3.6.3 La correction de continuité

Cette approximation pose deux problèmes.

1. *On remplace une distribution concernant un nombre fini de valeurs par une distribution sur  $\mathbf{R}$  tout entier.*

Étant donné qu'à l'extérieur de l'intervalle  $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$  la distribution normale est presque nulle, cela ne pose pas de problèmes.

2. *On remplace une distribution discrète par une distribution continue.*

Il nous faut donc appliquer ce qu'on appelle une *correction de continuité*. Si on nomme  $X$  la variable binomiale et  $Y$  la variable normale, on remplacera une valeur  $k$  de  $X$  par un intervalle de  $Y$  centré sur  $k$  et d'amplitude 1, ce qui signifie que l'on écrit

$$p(X = k) \simeq p\left(k - \frac{1}{2} < Y < k + \frac{1}{2}\right).$$

Dans la pratique lorsque  $n$  est très grand, cette correction n'est pas nécessaire. On l'effectuera cependant si on souhaite une grande précision.

**Remarque 75** *Remplacer une loi binomiale par une loi normale simplifie considérablement les calculs.*

En effet les tables de la loi binomiale dépendent de deux paramètres et les valeurs de  $n$  dans ces tables sont limitées supérieurement par 20. La loi normale, elle, après standardisation ne dépend d'aucun paramètre .

### 3.6.4 Approximation de la loi de Poisson par la loi normale

On démontre qu'on peut aussi approcher la loi de Poisson par la loi normale pour les grandes valeurs du paramètre de la loi de Poisson. La seule qui puisse convenir est celle qui a même espérance et même variance. On approche donc la loi  $\mathcal{P}(\lambda)$  par la loi  $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$ . En pratique, cela s'applique dès que  $\lambda \geq 16$ .

On approche la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$ dès que $\lambda \geq 16$
---

**Remarque 76** *La loi de Poisson étant elle aussi une loi discrète, on peut avoir à appliquer la correction de continuité.*

## 3.7 Quelques conseils pour résoudre les problèmes

Voici, lorsqu'elle s'applique, une méthode de travail qui peut guider votre démarche.

1. Suite à l'énoncé du problème, identifier correctement à l'aide de mots la variable aléatoire que vous allez considérer.
2. Préciser les valeurs possibles que peut prendre cette variable.

3. Identifier correctement la loi de probabilité qu'elle suit en essayant de reconnaître dans le problème une situation type.
4. Déterminer les paramètres de la loi.
5. Utiliser les formules théoriques ou les tables pour déterminer les probabilités demandées. Face à de longs calculs et en l'absence de tables correspondant à vos ou votre paramètre, penser à approcher votre loi par une autre.

### 3.7.1 Quelques exercices types

**Exercice 77** *Supposons qu'une tentative pour obtenir une communication téléphonique échoue (par exemple, parce que la ligne est occupée) avec la probabilité 0.25 et réussisse avec la probabilité 0.75. On suppose que les tentatives sont indépendantes les unes des autres. Quelle est la probabilité d'obtenir la communication si l'on peut effectuer trois tentatives au maximum ?*

**Exercice 78** *Un fabricant de pièces de machine prétend qu'au plus 10% de ses pièces sont défectueuses. Un acheteur a besoin de 120 pièces. Pour disposer d'un nombre suffisant de bonnes pièces, il en commande 140. Si l'affirmation du fabricant est valable, quelle est la probabilité que l'acheteur reçoive au moins 120 bonnes pièces ?*

**Exercice 79** *Les statistiques antérieures d'une compagnie d'assurances permettent de prévoir qu'elle recevra en moyenne 300 réclamations durant l'année en cours. Quelle est la probabilité que la compagnie reçoive plus de 350 réclamations pendant l'année en cours ?*

**Exercice 80** *Le nombre moyen de clients qui se présentent à la caisse d'un supermarché sur un intervalle de 5 minutes est de 10. Quelle est la probabilité qu'aucun client ne se présente à la caisse dans un intervalle de deux minutes (deux méthodes possibles) ?*

## 3.8 Distributions dérivant du modèle gaussien

Les distributions que nous allons étudier sont importantes non pas pour représenter des modèles théoriques de séries statistiques comme les précédentes, mais en raison du rôle qu'elles jouent dans les problèmes d'estimation ou de tests que nous verrons par la suite. Pour l'instant leurs définitions peuvent sembler complexes, notamment parce que la notion de « degrés de liberté » n'a pas encore été précisée. Pour le moment, il importe simplement de connaître leur définition et de savoir lire les tables correspondantes.

### 3.8.1 La distribution du $\chi^2$ de Pearson

Elle a été découverte en 1905 par le mathématicien britannique Karl Pearson (1857-1936) qui travailla également sur les problèmes de régression avec le généticien Sir Francis Galton. Cette distribution (qui se prononce khi-deux) est très importante pour tester l'ajustement d'une loi théorique à une distribution expérimentale (test du  $\chi^2$ ) et pour déterminer la loi de la variance d'un échantillon.

**Définition 81** *Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires indépendantes qui suivent toute la loi normale centrée réduite, alors la quantité  $X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$  est une variable aléatoire distribuée selon la loi du  $\chi^2$  à  $n$  degrés de liberté.*

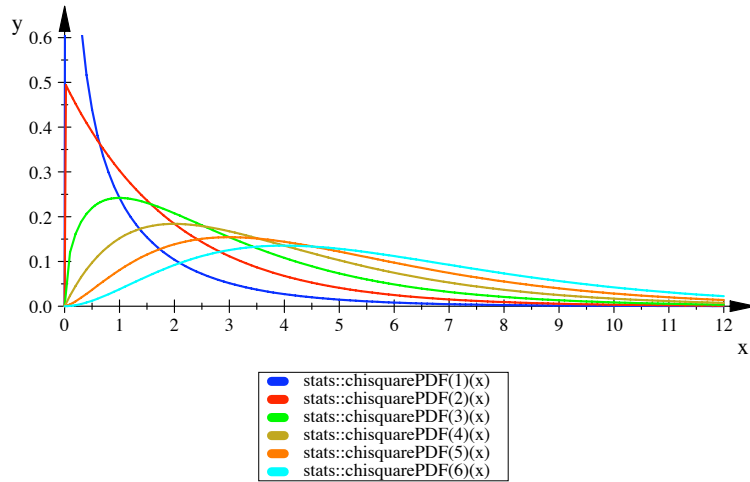
On note  $X \rightarrow \chi_n^2$ .

**Forme de la distribution**

L'expression de la densité de probabilités étant très compliquée et d'aucun intérêt pour nous, nous ne la donnons pas ici.

La distribution du  $\chi^2$  est continue à valeurs positives et présente un étalement sur le côté supérieur. Elle ne dépend que du nombre de degrés de liberté  $n$ .

Ci-dessous, densité de  $\chi_n^2$  pour  $n = 1, \dots, 6$ .



**Paramètres descriptifs**

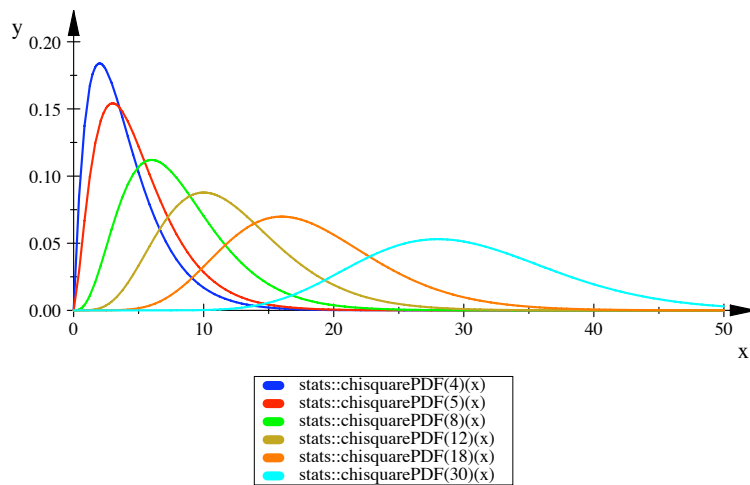
$$E(X) = n, \quad V(X) = 2n.$$

**Somme de deux variables qui suivent une loi du  $\chi^2$**

Si  $X_1 \rightarrow \chi_{n_1}^2$  et  $X_2 \rightarrow \chi_{n_2}^2$  sont indépendantes, alors  $X_1 + X_2 \rightarrow \chi_{n_1+n_2}^2$ .

**Approximation par une loi normale**

A mesure que  $n$  augmente, la loi du  $\chi^2$  tend vers la loi normale, comme on peut le constater sur le graphique ci-dessous.



Densité de  $\chi_n^2$  pour  $n = 4, 5, 8, 12, 18, 30$ .

En pratique, on peut considérer que pour  $n \geq 30$ , on peut remplacer la loi du  $\chi^2$  à  $n$  degrés de liberté par la loi normale  $\mathcal{N}(n, \sqrt{2n})$ .

### Utilisation de la table de Pearson

Pour des raisons de commodité, au lieu de donner la table des fonctions de répartition des variables aléatoires  $\chi_n^2$  pour les différentes valeurs de  $n$ , on donne, en fonction de  $n$  (nombre de degrés de liberté) et d'une probabilité  $\alpha$  que l'on peut choisir, la valeur  $\chi_{\alpha,n}^2$  définie par  $P(\chi^2 > \chi_{\alpha,n}^2) = \alpha$ .  $\alpha$  est un seuil et a en fait une signification particulière dans les problèmes d'estimation et de tests. Il sera défini ultérieurement.

### 3.8.2 La distribution de Fisher-Snedecor

Cette distribution fut découverte par l'anglais Fisher en 1924 puis tabulée par Snédecor en 1934. Elle intervient lors des comparaisons des variances de deux échantillons (test d'hypothèse F).

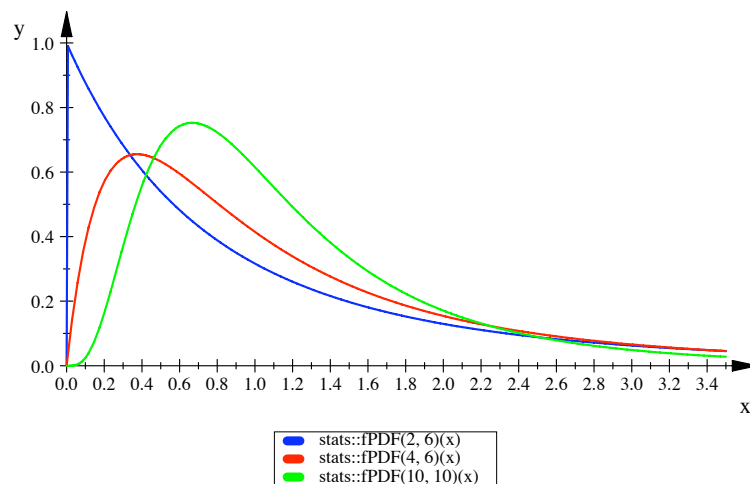
**Définition 82** Si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux une loi de khi-deux de degrés de liberté respectifs  $n_1$  et  $n_2$ , alors la quantité  $F = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$  est une variable aléatoire qui suit la loi de Fisher-Snedecor à  $n_1$  et  $n_2$  degrés de liberté.

On note  $F \rightarrow F_{n_1, n_2}$ . Cette variable ne prend que des valeurs positives.

#### Forme de la distribution

On n'écrit pas ici l'expression de la fonction de densité, compliquée et inutile pour nous. Les formes de distribution dépendent de  $n_1$  et  $n_2$  et sont dissymétriques.

A mesure que les valeurs  $n_1$  et  $n_2$  augmentent, la loi de Fisher tend vers une loi normale.



Densité de F pour  $(n_1, n_2) = (2, 6), (4, 6), (10, 10)$ .

#### Utilisation de la table de la distribution de Fisher

Les valeurs tabulées de la variable  $F$  dépendent d'un seuil  $\alpha$  que l'on peut choisir et des nombres de degré de liberté  $n_1$  et  $n_2$ . La table donne la valeur  $F_{\alpha, n_1, n_2}$  définie par  $P(F > F_{\alpha, n_1, n_2}) = \alpha$ .

**Remarque 83** Il faut faire attention à l'ordre de  $n_1$  et  $n_2$ .  $n_1$  représente le nombre de degrés de liberté du numérateur et  $n_2$  celui du dénominateur et ne peuvent être intervertis.

**Remarque 84** Le nombre  $G_{\alpha, n_1, n_2}$  tel que  $P(F < G_{\alpha, n_1, n_2}) = \alpha$  est l'inverse de  $F_{\alpha, n_2, n_1}$ .

En effet, si une variable  $X$  suit la loi  $F_{n_1, n_2}$ , alors  $1/X$  suit la loi  $F_{n_2, n_1}$ .

### 3.8.3 La distribution de Student

Student est le pseudonyme de V.S Gosset, 1908.

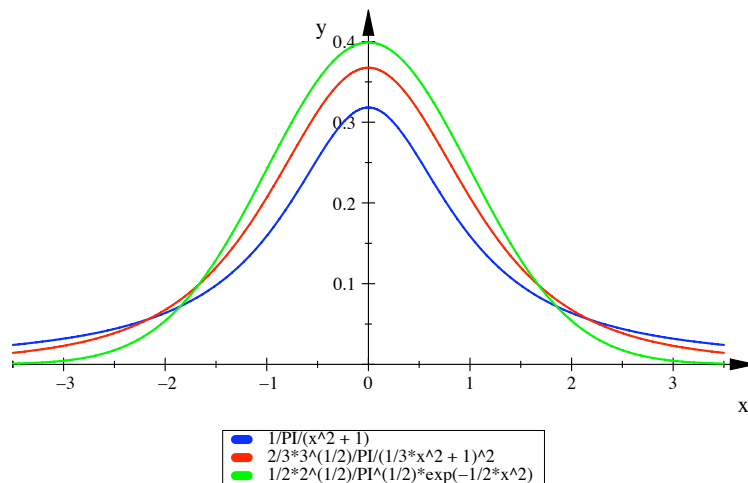
**Définition 85** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes, la première étant distribuée selon une loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$  et la deuxième selon une loi de khi-deux à  $n$  degrés de liberté. La quantité  $T = \frac{X\sqrt{n}}{\sqrt{Y}}$  est une variable aléatoire qui suit une loi de Student à  $n$  degrés de liberté.

On écrit  $T \rightarrow T_n$ .

#### Allure de la distribution

La densité de probabilité est de forme complexe et nous n'en aurons jamais besoin.

La distribution est symétrique par rapport à l'origine et un peu plus aplatie que la distribution normale centrée réduite. Elle ne dépend que de la valeur  $n$  qui est son nombre de degrés de liberté.



Densité de  $T_n$  pour  $n = 1, 3$  et densité de la loi normale standard.

#### Paramètres descriptifs

On a  $E(T_n) = 0$  si  $n > 1$  et  $Var(T_n) = \frac{n}{n-2}$  si  $n > 2$ .

#### Approximation par la loi normale

A mesure que  $n$  augmente, la distribution de Student à  $n$  degrés de liberté se rapproche de plus en plus de celle de la loi normale centrée réduite.

En pratique : si  $T \rightarrow T_n$  pour  $n \geq 30$ , on pourra écrire que  $T \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

#### Tables de la loi de Student

Les valeurs tabulées de la variable  $T$  dépendent d'un seuil  $\alpha$  que l'on peut choisir et du nombre de degré de liberté  $n$ . La table donne la valeur  $t_{\alpha, n}$  définie par  $P(|T| > t_{\alpha, n}) = \alpha$ .

# Chapitre 4

## Distributions d'échantillonnage

### 4.1 Généralités sur la notion d'échantillonnage

#### 4.1.1 Population et échantillon

On appelle population la totalité des unités de n'importe quel genre prises en considération par le statisticien. Elle peut être finie ou infinie.

Un échantillon est un sous-ensemble de la population étudiée.

Qu'il traite un échantillon ou une population, le statisticien décrit habituellement ces ensembles à l'aide de mesures telles que le nombre d'unités, la moyenne, l'écart-type et le pourcentage.

- Les mesures que l'on utilise pour décrire une population sont des paramètres. Un paramètre est une caractéristique de la population.
- Les mesures que l'on utilise pour décrire un échantillon sont appelées des statistiques. Une statistique est une caractéristique de l'échantillon.

Nous allons voir dans ce chapitre et dans le suivant comment les résultats obtenus sur un échantillon peuvent être utilisés pour décrire la population. On verra en particulier que les statistiques sont utilisées pour estimer les paramètres.

Afin de ne pas confondre les statistiques et les paramètres, on utilise des notations différentes, comme le présente le tableau récapitulatif suivant.

	POPULATION	ÉCHANTILLON
DÉFINITION	C'est l'ensemble des unités considérées par le statisticien.	C'est un sous-ensemble de la population choisie pour étude.
CARACTÉRISTIQUES	Ce sont les paramètres	Ce sont les statistiques
NOTATIONS	N = taille de la population (si elle est finie)	n = taille de l'échantillon
Si on étudie un caractère quantitatif	moyenne de la population $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ écart-type de la population $\sigma_{pop} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2}$	moyenne de l'échantillon $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ écart-type de l'échantillon $\sigma_{ech} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
Si on étudie un qualitatif	proportion dans la population $p$	proportion dans l'échantillon $f$

#### 4.1.2 L'échantillonnage

##### Avantages de l'échantillonnage

- Coût moindre.
- Gain de temps.
- C'est la seule méthode qui donne des résultats dans le cas d'un test destructif.

### Méthodes d'échantillonnage

- Échantillonnage sur la base du jugement (par exemple, dans les campagnes électorales certains districts électoraux sont des indicateurs fiables de l'opinion publique).
- Échantillonnage aléatoire simple. Tous les échantillons possibles de même taille ont la même probabilité d'être choisis et tous les éléments de la population ont une chance égale de faire partie de l'échantillon (On utilise souvent une table de nombres aléatoires pour s'assurer que le choix des éléments s'effectue vraiment au hasard).

**Remarque 86** *Il existe deux autres méthodes d'échantillonnage aléatoire mais elles ne nous intéressent pas ici . Ce sont l'échantillonnage stratifié et l'échantillonnage par grappes.*

Bien entendu, seul l'échantillonnage aléatoire nous permettra de juger objectivement de la valeur des estimations faites sur les caractéristiques de la population.

### Inconvénient de l'échantillonnage

L'échantillonnage a pour but de fournir suffisamment d'informations pour pouvoir faire des déductions sur les caractéristiques de la population. Mais bien entendu, les résultats obtenus d'un échantillon à l'autre vont être en général différents et différents également de la valeur de la caractéristique correspondante dans la population. On dit qu'il y a des fluctuations d'échantillonnage. Comment, dans ce cas, peut-on tirer des conclusions valables ? En déterminant les lois de probabilités qui régissent ces fluctuations. C'est l'objet de ce chapitre.

## 4.2 La variable aléatoire : moyenne d'échantillon

### 4.2.1 Introduction

Position du problème :

Si nous prélevons un échantillon de taille  $n$  dans une population donnée, la moyenne de l'échantillon nous donnera une idée approximative de la moyenne de la population. Seulement si nous prélevons un autre échantillon de même taille, nous obtiendrons une autre moyenne d'échantillon. Sur l'ensemble des échantillons possibles, on constatera que certains ont une moyenne proche de la moyenne de la population et que d'autres ont une moyenne qui s'en écarte davantage.

Comment traiter le problème ?

Un échantillon de taille  $n$  (appelé aussi un  $n$ -échantillon), obtenu par échantillonnage aléatoire, va être considéré comme le résultat d'une expérience aléatoire. A chaque échantillon de taille  $n$  on peut associer la valeur moyenne des éléments de l'échantillon. On a donc défini une variable aléatoire qui à chaque  $n$ -échantillon associe sa moyenne échantillonnale. On la note  $\bar{X}$ . Cette variable aléatoire possède bien entendu :

- Une distribution de probabilité.
- Une valeur moyenne (la moyenne des moyennes d'échantillons, vous suivez toujours ?).
- Un écart-type.

Le but de ce paragraphe est de déterminer ces trois éléments.

Avant de continuer, essayons de comprendre sur un exemple ce qui se passe.

**Exemple 87** *Une population est constituée de 5 étudiants en statistique (le faible effectif n'est pas dû à un manque d'intérêt pour la matière de la part des étudiants mais au désir de ne pas multiplier inutilement les calculs qui vont suivre ! ). Leur professeur s'intéresse au temps hebdomadaire consacré à l'étude des statistiques par chaque étudiant.*

On a obtenu les résultats suivants.

Étudiant	Temps d'étude (en heures)
A	7
B	3
C	6
D	10
E	4
Total	30

La moyenne de la population est  $m = 30/5 = 6$ .

Si le professeur choisit un échantillon de taille 3, quelles sont les différentes valeurs possibles pour la moyenne de son échantillon ? Quelle relation existe-t-il entre cette moyenne d'échantillon et la véritable moyenne 6 de la population ?

Toutes les possibilités sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

Numéro de l'échantillon	Échantillon	Valeurs du temps d'étude dans cet échantillon	Moyennes de l'échantillon
1	A, B, C	7,3,6	5.33
2	A, B, D	7,3,10	6.67
3	A, B, E	7,3,4	4.67
4	A, C, D	7,6,10	7.67
5	A, C, E	7,6,4	5.67
6	A, D, E	7,10,4	7.00
7	B, C, D	3,6,10	6.33
8	B, C, E	3,6,4	4.33
9	B, D, E	3,10,4	5.67
10	C, D, E	6,10,4	6.67
Total			60.00

On constate que :

- Il y a 10 échantillons ( $C_5^3 = 10$ ).
- La moyenne des échantillons varie entre 4.33 et 7.67, ce qui signifie que la distribution des moyennes d'échantillon est moins dispersée que la distribution des temps d'étude des étudiants, située entre 3 et 10.
- Il est possible que deux échantillons aient la même moyenne. Dans cet exemple, aucun n'a la moyenne de la population ( $m = 6$ ).
- La moyenne des moyennes d'échantillon est  $E(\bar{X}) = 60/10 = 6$ .

En fait, nous allons voir que le fait que l'espérance de  $\bar{X}$  (c'est-à-dire la moyenne des moyennes d'échantillon) est égale à la moyenne de la population n'est pas vérifié seulement dans notre exemple. C'est une loi générale.

Bien, me direz-vous, mais pourquoi faire tout cela ? Dans la réalité, on ne choisit qu'un seul échantillon. Alors comment le professeur de statistique qui ne connaît qu'une seule moyenne d'échantillon pourra-t-il déduire quelque chose sur la moyenne de la population ? Tout simplement en examinant "jusqu'à quel point" la moyenne d'un échantillon unique s'approche de la moyenne de la population. Pour cela, il lui faut la distribution théorique de la variable aléatoire  $\bar{X}$  ainsi que l'écart-type de cette distribution.

#### 4.2.2 Définition de la variable moyenne d'échantillon

On considère une population dont les éléments possèdent un caractère mesurable qui est la réalisation d'une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi de probabilité d'espérance  $m$  et d'écart-type  $\sigma_{pop}$ . On suppose que la population est infinie ou si elle est finie que l'échantillonnage se fait avec remise.

- On prélève un échantillon aléatoire de taille  $n$  et on mesure les valeurs de  $X$  sur chaque élément de l'échantillon. On obtient une suite de valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

- Si on prélève un deuxième échantillon toujours de taille  $n$ , la suite des valeurs obtenues est  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ , puis  $x''_1, x''_2, \dots, x''_n$ ... etc... pour des échantillons supplémentaires.
- $x_1, x'_1, x''_1, \dots$  peuvent être considérées comme les valeurs d'une variable aléatoire  $X_1$  qui suit la loi de  $X$ . De même,  $x_2, x'_2, x''_2, \dots$  peuvent être considérées comme les valeurs d'une variable aléatoire  $X_2$  qui suit aussi la loi de  $X$ , ... et  $x_n, x'_n, x''_n, \dots$  celles d'une variable aléatoire  $X_n$  qui suit encore et toujours la même loi, celle de  $X$ .
- $X_1$  pourrait se nommer "valeur du premier élément d'un échantillon".  $X_2$  pourrait se nommer "valeur du deuxième élément d'un échantillon". .... $X_n$  pourrait se nommer "valeur du  $n$ -ième élément d'un échantillon".
- L'hypothèse d'une population infinie ou d'un échantillonnage avec remise nous permet d'affirmer que ces  $n$  variables aléatoires sont indépendantes.

Rappel sur les notations : Par convention, on note toujours les variables aléatoires à l'aide de lettres majuscules ( $X_i$ ) et les valeurs qu'elles prennent dans une réalisation à l'aide de lettres minuscules ( $x_i$ ).

Si les valeurs prises par  $X$  dans un échantillon sont  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la moyenne  $\bar{x}$  de l'échantillon est donnée par  $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . Cette valeur n'est rien d'autre que la valeur prise

dans cet échantillon de la variable aléatoire  $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

**Définition 88** On définit donc la variable aléatoire moyenne d'échantillon  $\bar{X}$  par

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

### 4.2.3 Paramètres descriptifs de la distribution

On applique les propriétés de l'espérance et de la variance étudiées au chapitre 2.

- $E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{nm}{n} = m$ , car les variables suivent toutes la même loi d'espérance  $m$ .
- $Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{n\sigma_{pop}^2}{n^2} = \frac{\sigma_{pop}^2}{n}$ , car les variables suivent toutes la même loi de variance et sont indépendantes.

**Proposition 89**

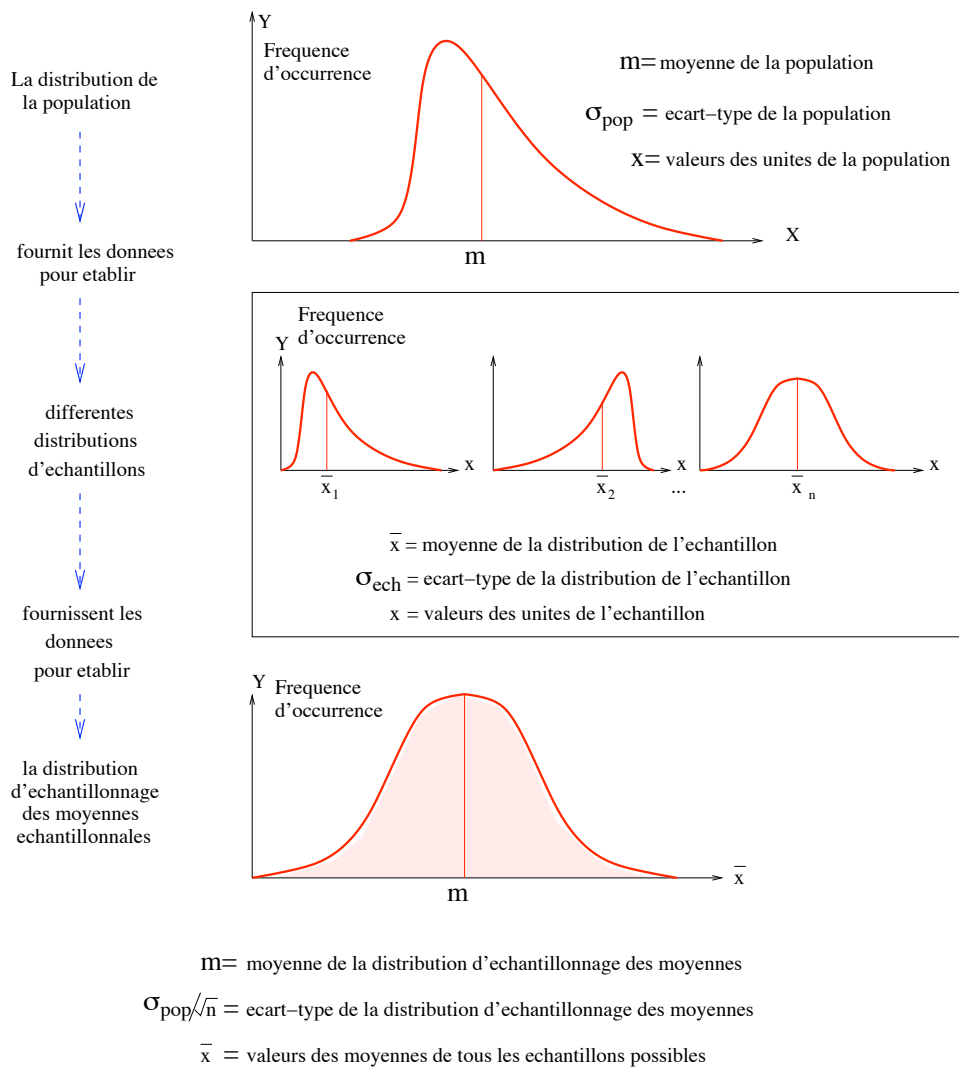
$$E(\bar{X}) = m, \quad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma_{pop}^2}{n}.$$

**Remarque 90** 1. Nous venons de démontrer ce que nous avons constaté sur notre exemple : la moyenne de la distribution d'échantillonnage des moyennes est égale à la moyenne de la population.

2. On constate que plus  $n$  croît, plus  $Var(\bar{X})$  décroît.

Dans l'exemple d'introduction, nous avons en effet constaté que la distribution des moyennes d'échantillon était moins dispersée que la distribution initiale. En effet, à mesure que la taille de l'échantillon augmente, nous avons accès à une plus grande quantité d'informations pour estimer la moyenne de la population. Par conséquent, la différence probable entre la vraie valeur de la moyenne de la population et la moyenne échantillonnale diminue. L'étendue des valeurs possibles de la moyenne échantillonnale diminue et le degré de dispersion de la distribution aussi.  $\sigma(\bar{X})$  est aussi appelé l'erreur-type de la moyenne.

On peut schématiser le passage de la distribution de la variable aléatoire  $X$  à celle de la variable aléatoire  $\bar{X}$  en passant par les différents échantillons par le graphique ci-après.



Mais connaître les paramètres descriptifs de la distribution de  $\bar{X}$  ne suffit pas. Il faut connaître aussi sa distribution de probabilité. On se demande alors : dépend elle

1. de la distribution de  $X$  ?
2. de la taille  $n$  de l'échantillon ?

### 4.3 Distribution de la moyenne d'échantillon

Nous allons distinguer deux cas : celui des grands échantillons ( $n \geq 30$ ) et celui des petits échantillons ( $n < 30$ ).

#### 4.3.1 Cas des grands échantillons : $n \geq 30$ .

On peut appliquer le théorème central-limite.

1. Nous sommes en présence de  $n$  variables aléatoires indépendantes.
2. Elles suivent la même loi d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma_{pop}^2$ , donc aucune n'est prépondérante.

**Conclusion.** Lorsque  $n$  devient très grand, la distribution de  $S = X_1 + \dots + X_n$  se rapproche de celle de la loi normale d'espérance  $nm$  et de variance  $n\sigma_{pop}^2$ ,  $S$  suit approximativement  $\mathcal{N}(nm, n\sigma_{pop}^2)$ .

Par conséquent, pour  $n$  assez grand, la distribution de  $\bar{X} = S/n$  se rapproche de celle de la loi normale d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma_{pop}^2/n$  c'est-à-dire  $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}})$ . On peut donc considérer que  $\frac{\bar{X} - m}{\sigma_{pop}/\sqrt{n}}$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Proposition 91** *Si  $n \geq 30$ ,  $\bar{X}$  suit approximativement  $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}})$ .*

**Remarque 92** – *En pratique, on considère que cela est vrai à partir de  $n \geq 30$  et que lorsque la forme de la distribution de  $X$  est pratiquement symétrique,  $n \geq 15$  est convenable.*

- *Ce théorème est très puissant car il n'impose aucune restriction sur la distribution de  $X$  dans la population.*
- *Si la variance est inconnue, un grand échantillon ( $n \geq 30$ ) permet de déduire une valeur fiable pour  $\sigma_{pop}^2$  en calculant la variance de l'échantillon  $\sigma_{ech}^2$  et en posant*

$$\sigma_{pop}^2 = \frac{n}{n-1} \sigma_{ech}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

*comme on le verra au paragraphe suivant.*

### 4.3.2 Cas des petits échantillons : $n < 30$

Nous nous plaçons alors exclusivement dans le cas où  $X$  suit une loi normale dans la population. Nous allons encore distinguer deux cas : celui où  $\sigma_{pop}$  est connu et celui où  $\sigma_{pop}$  est inconnu.

#### Cas où $\sigma_{pop}$ est connu

$X$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma_{pop})$  donc les variables  $X_i$  suivent toutes la même loi  $\mathcal{N}(m, \sigma_{pop})$ . De plus elles sont indépendantes. D'après la propriété vue au chapitre 3 sur la somme de lois normales indépendantes,  $S = X_1 + \dots + X_n$  a une distribution normale et la variable  $\bar{X} = S/n$  suit aussi une loi normale, la loi  $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}})$ . Donc  $\frac{\bar{X} - m}{\sigma_{pop}/\sqrt{n}}$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Si $\left\{ \begin{array}{l} n < 30 \\ \sigma_{pop} \text{ connu} \end{array} \right.$ , $\bar{X}$ suit $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}})$ .
---

#### Cas où $\sigma_{pop}$ est inconnu

Lorsque l'échantillonnage s'effectue à partir d'une population normale de variance inconnue et que la taille de l'échantillon est petite ( $n < 30$ ), l'estimation de la variance effectuée au paragraphe précédent n'est plus fiable. On ne peut plus écrire  $\sigma_{pop}^2 \simeq \frac{n}{n-1} \sigma_{ech}^2$  car  $\sigma_{ech}^2$  varie trop d'échantillon en échantillon.

L'écart-type de la distribution de  $\bar{X}$  n'est donc plus une constante  $\frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}$  connue approximativement grâce à  $\frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}} \simeq \frac{\sigma_{ech}}{\sqrt{n-1}}$ . On va alors considérer que l'écart-type de  $\bar{X}$  sera donné dans chaque échantillon par une valeur différente de  $\frac{\sigma_{ech}}{\sqrt{n-1}}$ .

Nous devons donc considérer  $\sigma_{ech}$  comme la réalisation d'une variable aléatoire, la variable écart-type d'échantillon, notée  $\Sigma_{ech}$  et définie par  $\Sigma_{ech}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .

La variable aléatoire  $T = \frac{\bar{X} - m}{\Sigma_{ech}/\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n-1}(\bar{X} - m)}{\Sigma_{ech}}$  ne suit plus alors une loi normale car le dénominateur n'est pas une constante.

En divisant numérateur et dénominateur par  $\sigma_{pop}$ , on écrit  $T$  sous la forme

$$T = \frac{\sqrt{n-1}(\bar{X} - m)}{\Sigma_{ech}} = \frac{\sqrt{n-1} \frac{\bar{X}-m}{\sigma_{pop}/\sqrt{n}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma_{pop}}\right)^2}}.$$

On reconnaît au numérateur une variable aléatoire qui suit une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , multipliée par un facteur  $\sqrt{n-1}$ , et au dénominateur une somme de carrés de variables suivant aussi la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Le carré du dénominateur suit donc une loi du  $\chi^2$ . Mais quel est son nombre de degrés de liberté ?

### Le concept de degré de liberté

- Pourquoi chercher le nombre de degrés de liberté ?  
Pour pouvoir utiliser correctement les tables de lois de probabilité qui dépendent d'un nombre de degrés de liberté (en particulier pour la distribution de Student et celle du  $\chi^2$ ).
- Que représente le nombre de degrés de liberté ?  
C'est une quantité qui est toujours associée à une somme de carrés et qui représente le nombre de carrés indépendants dans cette somme.
- Comment calculer le nombre de degrés de liberté ?  
Il y a deux façons de procéder.
  1. Soit on effectue la différence entre le nombre total de carrés et le nombre de relations qui lient les différents éléments de la somme.
  2. Soit on effectue la différence entre le nombre total de carrés et le nombre de paramètres que l'on doit estimer pour effectuer le calcul.

Dans le cas de notre somme  $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma_{pop}}\right)^2$ , envisageons les deux façons de compter le nombre de degrés de liberté.

1. Le nombre de carrés dans la somme est  $n$ . Il y a une relation entre les variables  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0$ . Le nombre de degrés de liberté est donc  $n - 1$ .
2. Le nombre de carrés dans la somme est  $n$ . Lorsqu'on dit que  $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma_{pop}}\right)^2$  est une somme de carrés de variables normales centrées réduites, on remplace  $m$  par  $\bar{X}$ . On a donc estimé un paramètre. On trouve encore que le nombre de degrés de liberté est  $n - 1$ .

**Proposition 93** Si  $\begin{cases} n < 30 \\ \sigma_{pop} \text{ connu} \end{cases}$ , la variable  $T = \frac{\bar{X} - m}{\Sigma_{ech}/\sqrt{n-1}}$  suit une loi de Student à  $n - 1$  degrés de liberté, notée  $T_{n-1}$ .

Revoir éventuellement la définition de la loi de Student dans le chapitre précédent.

**Remarque 94** Dans ce dernier cas (petits échantillons et  $X$  suit une loi normale de variance inconnue), on ne trouve pas directement la loi suivie par mais celle suivie par  $T = \frac{\bar{X} - m}{\Sigma_{ech}/\sqrt{n-1}}$ .

**Exercice 95** Le responsable d'une entreprise a accumulé depuis des années les résultats à un test d'aptitude à effectuer un certain travail. Il semble plausible de supposer que les résultats au test d'aptitude sont distribués suivant une loi normale de moyenne  $m = 150$  et de variance  $\sigma_{pop}^2 = 100$ . On fait passer le test à 25 individus de l'entreprise. Quelle est la probabilité que la moyenne de l'échantillon soit entre 146 et 154 ?

## 4.4 La variable aléatoire : variance d'échantillon

La variance  $\sigma_{ech}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  d'un  $n$ -échantillon est la réalisation de la variable aléatoire  $\Sigma_{ech}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ . On peut se demander si cette variable possède la même propriété que la variable moyenne d'échantillon, c'est-à-dire si l'espérance de  $\Sigma_{ech}^2$  est égale à la variance de la population.

### 4.4.1 Espérance de la variable aléatoire $\Sigma_{ech}^2$

**Proposition 96**

$$E(\Sigma_{ech}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma_{pop}^2.$$

**Preuve.** Autre expression de  $\Sigma_{ech}^2$  :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ech}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m + m - \bar{X})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)(m - \bar{X}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m - \bar{X})^2 \\ &= A + B + C, \end{aligned}$$

Or,  $B = \frac{2}{n} (m - \bar{X}) \sum_{i=1}^n (X_i - m) = -2(m - \bar{X})^2$  et  $C = (m - \bar{X})^2$ . On en déduit que

$$\Sigma_{ech}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - (m - \bar{X})^2.$$

Il vient

$$\begin{aligned} E(\Sigma_{ech}^2) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E((X_i - m)^2) - E((\bar{X} - m)^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Var(X_i) - Var(\bar{X}) \\ &= \sigma_{pop}^2 - \frac{1}{n} \sigma_{pop}^2 = \frac{n-1}{n} \sigma_{pop}^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Interprétation géométrique. Quitte à retrancher une constante, on peut supposer que  $E(X_i) = 0$ , de sorte que  $Var(X_i) = E(X_i^2)$ . Notons  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $\vec{1} = (1, \dots, 1)$ . Pour un vecteur aléatoire, on note

$$Var(\vec{X}) = E(\|\vec{X} - E(\vec{X})\|^2) = \sum_{i=1}^n Var(X_i).$$

Ici,  $E(\vec{X}) = 0$ ,  $Var(\vec{X}) = n\sigma_{pop}^2$ .

Le vecteur  $\bar{X}\vec{\mathbf{1}}$  est la projection orthogonale de  $\vec{X}$  sur la droite de vecteur directeur  $\vec{\mathbf{1}}$ . Par conséquent,  $\vec{X} - \bar{X}\vec{\mathbf{1}}$  est la projection orthogonale de  $\vec{X}$  sur l'hyperplan orthogonal à  $\vec{\mathbf{1}}$ . Pythagore donne

$$\|\vec{X}\|^2 = \|\vec{X} - \bar{X}\vec{\mathbf{1}}\|^2 + \|\bar{X}\vec{\mathbf{1}}\|^2,$$

i.e.

$$\text{Var}(\vec{X}) = \text{Var}(\vec{X} - \bar{X}\vec{\mathbf{1}}) + \text{Var}(\bar{X}\vec{\mathbf{1}}).$$

Comme les  $X_i$  sont indépendants, la variance de la projection orthogonale de  $\vec{X}$  sur une droite  $D$  est facile à calculer. Soit  $\vec{e} = (e_1, \dots, e_n)$  un vecteur directeur de  $D$ , la projection orthogonale est  $(\vec{X} \cdot \vec{e})\vec{e}$ . Or

$$\begin{aligned} \text{Var}(\vec{X} \cdot \vec{e}) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n e_i X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i^2 \text{Var}(X_i) \\ &= \sigma_{pop}^2 \left(\sum_{i=1}^n e_i^2\right) \\ &= \sigma_{pop}^2. \end{aligned}$$

On conclut que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Sigma_{ech}^2) &= \frac{1}{n} \text{Var}(\vec{X} - \bar{X}\vec{\mathbf{1}}) \\ &= \frac{1}{n} (\text{Var}(\vec{X}) - \sigma_{pop}^2) \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma_{pop}^2 \end{aligned}$$

**Conclusion.** La moyenne des variances d'échantillon n'est pas la variance de la population, mais la variance de la population multipliée par  $\frac{n-1}{n}$ . Bien sûr, si  $n$  est très grand, ces deux nombres seront très proches l'un de l'autre.

#### 4.4.2 La variable aléatoire $S^2$

##### Définition de $S^2$

Pour pouvoir déterminer une valeur approchée de  $\sigma_{pop}^2$  et savoir quelle erreur on commet en effectuant cette approximation, on veut disposer d'une variable dont l'espérance est la variance de la population. Nous allons donc considérer une nouvelle variable aléatoire  $S^2$ .

**Définition 97** On appelle variance d'échantillon la variable aléatoire  $S^2$  définie par

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \Sigma_{ech}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

On a bien entendu  $E(S^2) = \sigma_{pop}^2$ .

Nous verrons plus tard que cela signifie que  $S^2$  est un estimateur *sans biais* de  $\sigma_{pop}^2$ .

**Distribution de  $S^2$**

Nous supposons ici que  $X$  suit une loi normale.

On considère la variable  $Y = \frac{n\Sigma_{ech}^2}{\sigma_{pop}^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma_{pop}}\right)^2$ .

$Y$  est une somme d'écartés réduits relatifs à une variable normale. D'après ce que nous avons vu au chapitre 3, paragraphe 7.1, nous pouvons affirmer que  $Y$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $n - 1$  degrés de liberté (on perd un degré de liberté car on a estimé le paramètre  $m$  par  $\bar{X}$ ).

**Proposition 98**  $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_{pop}^2}$  suit une loi  $\chi_{n-1}^2$ .

**Remarque 99** Encore une fois, on n'a pas directement la loi de  $S^2$  mais celle de  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_{pop}^2}$ .

**Approximation de la distribution de  $S^2$  dans le cas des grands échantillons :  $n \geq 30$**

Nous avons vu au chapitre 3 que lorsque  $n$  est grand ( $n \geq 30$ ), on pouvait approcher la loi  $\chi_{\nu}^2$  par la loi  $\mathcal{N}(\nu, \sqrt{2\nu})$ . Donc  $Y$  suit approximativement une loi normale,  $E(Y) \simeq n - 1$  et  $Var(Y) \simeq 2(n - 1)$ .

**Proposition 100** Si  $n \geq 30$ ,  $S^2$  suit une loi  $\mathcal{N}(\sigma_{pop}^2, \sigma_{pop}^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}})$ , en première approximation.

**Preuve.** La loi de  $S^2$  est alors approximativement normale, son espérance vaut  $\sigma_{pop}^2$  et sa variance approximativement

$$Var(S^2) = Var\left(\frac{\sigma_{pop}^2}{n-1} Y\right) = \frac{\sigma_{pop}^4}{(n-1)^2} Var(Y) \simeq \frac{2\sigma_{pop}^4}{n-1} \blacksquare$$

## 4.5 Distribution de la variable proportion d'échantillon

Il arrive fréquemment que nous ayons à estimer dans une population une proportion  $p$  d'individus possédant un caractère qualitatif donné.

Bien sûr, cette proportion  $p$  sera estimée à l'aide des résultats obtenus sur un  $n$ -échantillon. La proportion  $f$  obtenue dans un  $n$ -échantillon est la valeur observée d'une variable aléatoire  $F$ , fréquence d'apparition de ce caractère dans un échantillon de taille  $n$ , appelée proportion d'échantillon. On se pose une troisième fois la question. La moyenne des fréquences d'observation du caractère sur l'ensemble de tous les échantillons de taille  $n$  est-elle égale à la proportion  $p$  de la population ?

### 4.5.1 Paramètres descriptifs de la distribution de $F$

$F$  est la fréquence d'apparition du caractère dans un échantillon de taille  $n$ . Donc  $F = X/n$  où  $X$  est le nombre de fois où le caractère apparaît dans le  $n$ -échantillon.

Par définition  $X$  suit  $\mathcal{B}(n, p)$ . Donc  $E(F) = np$  et  $Var(F) = npq$ .

Il en résulte que

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad Var(X) = npq$$

**Conséquences.**

1. La réponse à la question que nous nous posons est oui : l'espérance de la fréquence d'échantillon est égale à la probabilité théorique d'apparition dans la population.
2. Lorsque la taille de l'échantillon augmente, la variance de  $F$  diminue, ce qui est logique : plus on a d'informations, plus il est probable que la proportion observée dans l'échantillon soit proche de la proportion de la population.

### 4.5.2 Distribution de la proportion d'échantillon dans le cas des grands échantillons

On sait que si  $n \geq 30$ ,  $np \geq 15$  et  $nq \geq 15$ , on peut approcher la loi binomiale par la loi normale de même espérance et de même écart-type. Donc  $F$  suit approximativement  $\mathcal{N}(p, \sqrt{\frac{pq}{n}})$ , et la variable  $T = \frac{F - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$  suit alors approximativement la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Exercice 101** *Selon une étude sur le comportement du consommateur, 25% d'entre eux sont influencés par la marque, lors de l'achat d'un bien. Si on interroge 100 consommateurs pris au hasard, quelle est la probabilité pour qu'au moins 35 d'entre eux se déclarent influencés par la marque ?*

En pratique, il est peu fréquent de connaître  $p$  : on doit plutôt l'estimer à partir d'un échantillon. Comment faire ? C'est ce que nous traiterons dans le prochain chapitre.

# Chapitre 5

## Estimation

### 5.1 Introduction

Estimer ne coûte presque rien,  
Estimer incorrectement coûte cher.

Vieux proverbe chinois.

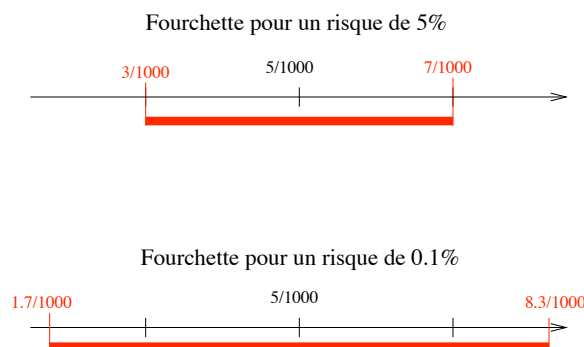
Dans de nombreux domaines (scientifiques, économiques, épidémiologiques...), on a besoin de connaître certaines caractéristiques d'une population. Mais, en règle générale, on ne peut pas les évaluer facilement du fait de l'effectif trop important des populations concernées. La solution consiste alors à estimer le paramètre cherché à partir de celui observé sur un échantillon plus petit.

L'idée de décrire une population à partir d'un échantillon réduit, à l'aide d'un "multiplicateur", n'a été imaginée que dans la seconde moitié du XVIII<sup>ème</sup> siècle, notamment par l'école arithmétique politique anglaise. Elle engendra une véritable révolution : l'observation d'échantillons permettait d'éviter des recensements d'une lourdeur et d'un prix exorbitants. Toutefois, on s'aperçut rapidement que les résultats manquaient d'exactitude. Nous savons maintenant pourquoi : on ne prenait en considération ni la *représentativité* de l'échantillon, ni les *fluctuations* d'échantillonnage. C'est là que le hasard intervient.

La première précaution à prendre est donc d'obtenir un échantillon représentatif. Nous pourrions en obtenir un par tirage au sort (voir le chapitre précédent sur l'échantillonnage aléatoire simple) : le hasard participe donc au travail du statisticien qui l'utilise pour pouvoir le maîtriser ! Mais, même tiré au sort, un échantillon n'est pas l'image exacte de la population, en raison des fluctuations d'échantillonnage. Lorsque, par exemple, on tire au sort des échantillons dans une urne contenant 20 % de boules blanches, on obtient des échantillons où la proportion de boules blanches fluctue autour de 20 %. Ces fluctuations sont imprévisibles : le hasard peut produire n'importe quel écart par rapport à la proportion de la population (20 %). Cependant, on s'en doute, tous les écarts ne sont pas également vraisemblables : les très grands écarts sont très peu probables. Au moyen du calcul des probabilités, le statisticien définit un intervalle autour du taux observé, intervalle qui contient probablement le vrai taux : c'est "l'intervalle de confiance" ou, plus couramment, la "fourchette".

Si l'on ne peut connaître le vrai taux par échantillonnage, peut-on au moins le situer avec certitude dans la fourchette ? Non. Le hasard étant capable de tous les caprices, on ne peut raisonner qu'en termes de probabilités, et la fourchette n'a de signification qu'assortie d'un certain risque d'erreur. On adopte souvent un risque de 5 % : cinq fois sur cent, le taux mesuré sur l'échantillon n'est pas le bon, le vrai taux étant en dehors de la fourchette. On peut diminuer le risque d'erreur mais alors la fourchette grandit et perd de son intérêt. Bien entendu, il existe une infinité de fourchettes, une pour chaque risque d'erreur adopté. On doit trouver un compromis entre le risque acceptable et le souci de précision.

**Exemple 102** *Mesure du taux de séropositifs pour le sida dans une population.*



On a observé 25 séropositifs sur un échantillon de 5000 sujets, soit un taux de 0.5%. Ce taux observé n'a de signification qu'assorti d'une fourchette : le risque que le vrai taux sorte d'une fourchette comprise entre 0.3% et 0.7% est acceptable (figure du haut). On peut diminuer ce risque, mais alors la fourchette est plus large, et devient moins intéressante (figure du bas).

Dans ce cours, nous allons apprendre à estimer à l'aide d'un échantillon :

- Dans le cas d'un caractère quantitatif la moyenne  $m$  et l'écart-type d'une population.
- Dans le cas d'un caractère qualitatif, la proportion  $p$  de la population.

Ces estimations peuvent s'exprimer par une seule valeur (estimation ponctuelle), soit par un intervalle (estimation par intervalle de confiance). Bien sûr, comme l'échantillon ne donne qu'une information partielle, ces estimations seront accompagnées d'une certaine marge d'erreur.

## 5.2 L'estimation ponctuelle

### 5.2.1 Définition

Estimer un paramètre, c'est en chercher une valeur approchée en se basant sur les résultats obtenus dans un échantillon. Lorsqu'un paramètre est estimé par un seul nombre, déduit des résultats de l'échantillon, ce nombre est appelé *estimation ponctuelle* du paramètre.

L'estimation ponctuelle se fait à l'aide d'un *estimateur*, qui est une variable aléatoire d'échantillon. L'estimation est la valeur que prend la variable aléatoire dans l'échantillon observé.

### 5.2.2 Propriétés des estimateurs ponctuels

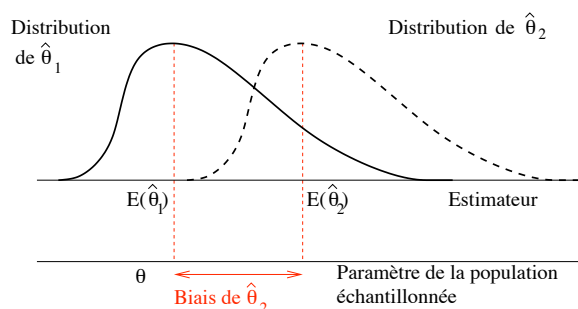
Lorsqu'on utilise fréquemment des estimateurs ponctuels on souhaite qu'ils possèdent certaines propriétés. Ces propriétés sont importantes pour choisir le meilleur estimateur du paramètre correspondant, c'est-à-dire celui qui s'approche le plus possible du paramètre à estimer. Un paramètre inconnu peut avoir plusieurs estimateurs. Par exemple, pour estimer le paramètre  $m$ , moyenne d'une population, on pourrait se servir de la moyenne arithmétique, de la médiane ou du mode. Les qualités que doit posséder un estimateur pour fournir de bonnes estimations sont décrites ci-après.

**Définition 103** Estimateur non biaisé. On note  $\theta$  le paramètre de valeur inconnue,  $\hat{\theta}$  l'estimateur de  $\theta$ .

Un estimateur est sans biais si la moyenne de sa distribution d'échantillonnage est égale à la valeur  $\theta$  du paramètre de la population à estimer, c'est-à-dire si  $E(\hat{\theta}) = \theta$ .

Si l'estimateur est biaisé, son biais est mesuré par l'écart suivant :  $\text{BIAIS} = E(\hat{\theta}) - \theta$ .

La figure suivante représente les distributions d'échantillonnage d'un estimateur sans biais  $\hat{\theta}_1$  et d'un estimateur biaisé  $\hat{\theta}_2$ .



**Exemple 104** On a vu au chapitre 4 que  $E(\bar{X}) = m$ . Donc la moyenne d'échantillon  $\bar{X}$  est un estimateur sans biais du paramètre  $m$ , moyenne de la population.

En revanche, la médiane d'échantillon  $M_e$  est un estimateur biaisé lorsque la population échantillonnée est asymétrique.

**Exemple 105** Nous avons vu également que  $E(\Sigma_{ech}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma_{pop}^2$ . Donc  $\Sigma_{ech}^2$  est un estimateur biaisé du paramètre  $\sigma_{pop}^2$ , variance de la population.

C'est pour cette raison que l'on a introduit la variance d'échantillon  $S^2 = \frac{n}{n-1}\Sigma_{ech}^2$  qui est un estimateur sans biais de  $\sigma_{pop}^2$ , puisque  $E(S^2) = \sigma_{pop}^2$ .

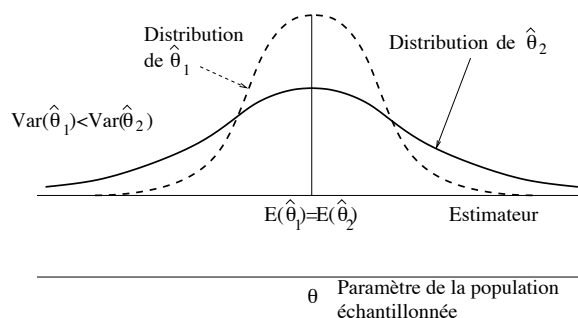
L'absence de biais, à elle toute seule, ne garantit pas que nous avons un bon estimateur. En effet, certains paramètres peuvent avoir plusieurs estimateurs sans biais. Le choix parmi les estimateurs sans biais s'effectue en comparant les variances des estimateurs. En effet, un estimateur sans biais mais à variance élevée peut fournir des estimations très éloignées de la vraie valeur du paramètre.

**Définition 106** Estimateur efficace. *Un estimateur sans biais est efficace si sa variance est la plus faible parmi les variances des autres estimateurs sans biais.*

Ainsi, si  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  sont deux estimateurs sans biais du paramètre  $\theta$ , l'estimateur  $\hat{\theta}_1$  est plus efficace que  $\hat{\theta}_2$  si

$$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta \quad \text{et} \quad V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2).$$

La notion d'estimateur efficace peut s'illustrer de la façon suivante :



**Définition 107** Estimateur convergent. *Un estimateur  $\hat{\theta}$  est convergent si sa distribution tend à se concentrer autour de la valeur inconnue à estimer,  $\theta$ , à mesure que la taille d'échantillon augmente, c'est-à-dire si  $n \rightarrow \infty$ .*

Par exemple,  $\bar{X}$  est un estimateur convergent puisque  $V(\bar{X}) = \frac{\sigma_{pop}^2}{n}$  tend vers 0.

**Remarque 108** *Un estimateur sans biais et convergent est dit absolument correct.*

Ces trois propriétés sont les principales qualités que nous recherchons pour un estimateur. Nous n'insisterons pas sur les propriétés mathématiques que doivent posséder les estimateurs.

Conséquences : L'étude du chapitre 4 nous a appris que

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= m & \text{et} & & V(\bar{X}) &= \frac{\sigma_{pop}^2}{n}, \\ E(S^2) &= \sigma_{pop}^2 & \text{et} & & V(S^2) &= \frac{2\sigma_{pop}^4}{n-1}, \\ E(F) &= p & \text{et} & & V(F) &= \frac{pq}{n}. \end{aligned}$$

On peut donc affirmer que :

- $\bar{X}$  est un estimateur absolument correct de la moyenne  $m$  pour un caractère quantitatif.
- $S^2$  est un estimateur absolument correct de la variance pour un caractère quantitatif.
- $F$  est un estimateur absolument correct de la proportion  $p$  pour un caractère qualitatif.

Nous pourrions donc estimer  $m$  par  $\bar{X}$ ,  $\sigma_{pop}^2$  par  $S^2$ ,  $p$  par  $F$ .

Mais les estimations ponctuelles bien qu'utiles, ne fournissent aucune information concernant la précision des estimations, c'est-à-dire qu'elles ne tiennent pas compte de l'erreur possible dans l'estimation, erreur attribuable aux fluctuations d'échantillonnage. Quelle confiance avons-nous dans une valeur unique ? On ne peut répondre à cette question en considérant uniquement l'estimation ponctuelle obtenue des résultats de l'échantillon. Il faut lui associer un intervalle qui permet d'englober avec une certaine fiabilité, la vraie valeur du paramètre correspondant.

## 5.3 Estimation par intervalle de confiance

### 5.3.1 Définition

L'estimation par intervalle d'un paramètre inconnu  $\theta$  consiste à calculer, à partir d'un estimateur choisi  $\hat{\theta}$ , un intervalle dans lequel il est vraisemblable que la valeur correspondante du paramètre s'y trouve. L'intervalle de confiance est défini par deux limites  $LI$  et  $LS$  auxquelles est associée une certaine probabilité, fixée à l'avance et aussi élevée qu'on le désire, de contenir la valeur vraie du paramètre. La probabilité associée à l'intervalle de confiance et exprimée en pourcentage est égale à  $S$  où  $S$  est le seuil de confiance ou niveau de confiance de l'intervalle, exprimé également en pourcentage. Autrement dit,

$$P(LI \leq \theta \leq LS) = S,$$

où

- $LI$  est la limite inférieure de l'intervalle de confiance.
- $LS$  est la limite supérieure de l'intervalle de confiance.
- $S$  est la probabilité associée à l'intervalle d'encadrer la vraie valeur du paramètre.

$LI$  et  $LS$  sont appelées les *limites de confiance* de l'intervalle et sont des quantités qui tiennent compte des fluctuations d'échantillonnage, de l'estimateur  $\hat{\theta}$  et du seuil de confiance  $S$ . La quantité  $1 - S$  est égale à la probabilité, exprimée en pourcentage, que l'intervalle n'encadre pas la vraie valeur du paramètre. On note  $\alpha = 1 - S$ .  $\alpha$  s'appelle le risque ou le *seuil de signification* de l'intervalle.

A quoi correspond l'intervalle de confiance ?

Si nous répétons l'expérience un grand nombre de fois (prélever un grand nombre de fois un échantillon de taille  $n$  de la même population), dans 100S cas sur 100 les intervalles obtenus (différents à chaque réalisation de l'expérience) recouvrent la vraie valeur du paramètre.

Remarques :

- L'intervalle ainsi défini est un intervalle aléatoire puisqu'avant l'expérience, les limites de l'intervalle sont des variables aléatoires (elles sont fonctions des observations de l'échantillon).
- Le niveau de confiance est toujours associé à l'intervalle et non au paramètre inconnu  $\theta$ .  $\theta$  n'est pas une variable aléatoire : il est ou n'est pas dans l'intervalle  $[LI, LS]$ .

- Le niveau de confiance doit être choisi *avant* que ne s'effectue l'estimation par intervalle. Il arrive souvent que le chercheur non averti calcule plusieurs intervalles d'estimation à des niveaux de confiance différents et choisisse par la suite l'intervalle qui lui semble le plus approprié. Une telle approche constitue en réalité une interprétation inacceptable des données en ce qu'elle fait dire aux résultats échantillonnaires ce que l'on veut bien entendre.
- Il y a une infinité de solutions possibles pour déterminer l'intervalle  $[LI, LS]$ . On choisira de prendre des risques symétriques, c'est-à-dire de choisir  $LI$  et  $LS$  tels que

$$P(\theta \leq LI) = P(\theta \geq LS) = \frac{1 - S}{2}.$$

Pour calculer l'intervalle de confiance, on doit connaître la distribution d'échantillonnage (distribution de probabilité) de l'estimateur correspondant, c'est-à-dire connaître de quelle façon sont distribuées toutes les valeurs possibles de l'estimateur obtenues à partir de tous les échantillons possibles de même taille prélevés de la même population. Ce travail a été effectué au chapitre précédent. Nous allons voir à présent comment déduire des distributions d'échantillonnage la construction des intervalles de confiance.

### 5.3.2 Estimation d'une moyenne par intervalle de confiance

On se propose d'estimer, par intervalle de confiance, la moyenne  $m$  d'un caractère mesurable d'une population. Il s'agit donc de calculer, à partir de la moyenne  $\bar{x}$  (valeur prise par l'estimateur  $\bar{X}$ ) de l'échantillon, un intervalle dans lequel il est vraisemblable que la vraie valeur de  $m$  se trouve. Cet intervalle se définit d'après l'équation  $P(A \leq m \leq B) = S$ . Les limites  $A$  et  $B$  de cet intervalle sont des quantités aléatoires et prendront, après avoir prélevé l'échantillon et calculé l'estimation  $\bar{x}$ , la forme  $LI \leq m \leq LS$ . Nous allons déterminer  $LI$  et  $LS$  en utilisant la distribution d'échantillonnage de  $\bar{X}$ . L'étude du chapitre 4 nous amène donc à distinguer deux cas, suivant la taille de l'échantillon.

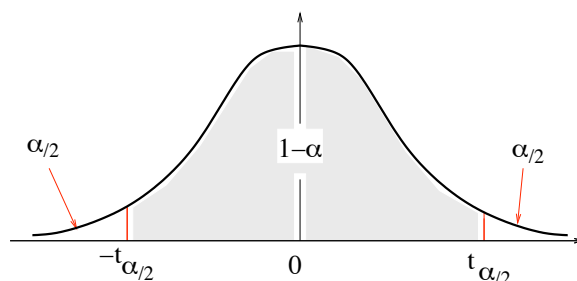
#### a. On dispose d'un grand échantillon ( $n \geq 30$ ) ou d'un petit échantillon ( $n < 30$ ) dont la distribution est normale d'écart-type connu $\sigma_{pop}$

Dans ces conditions on considère que la variable aléatoire  $\bar{X}$  suit une loi normale,

$$\bar{X} \rightarrow \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}\right).$$

Donc  $T = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}}$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

On cherche à déterminer  $A$  et  $B$  tels que  $P(A \leq m \leq B) = S$ .



Puisqu'on choisit des risques symétriques, on va déterminer dans la table de la loi normale centrée réduite la valeur  $t_{\alpha/2}$  telle que  $P(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) = S$ , ce qui peut s'écrire

$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}\right) = S,$$

qui est bien de la forme cherchée en posant

$$A = \bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}, \quad B = \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}.$$

**Signification.** Avant toute expérience, la probabilité que l'intervalle aléatoire  $[\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}]$  contienne la vraie valeur de  $m$  est  $S$ . Ces deux limites sont des variables aléatoires qui prendront des valeurs numériques particulières une fois que l'échantillon est choisi et qu'on a obtenu la valeur de  $\bar{x}$  (réalisation de la variable aléatoire  $\bar{X}$ ). On en déduit par la suite un intervalle d'extrémités fixes (et non plus un intervalle aléatoire) qui s'écrit  $[\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}]$ , et on lui attribue, non pas une probabilité, mais un niveau de confiance de  $S$  de contenir la vraie valeur de  $m$ .

**Conclusion.** A partir d'un échantillon de grande taille ( $n \geq 30$ ) ou à partir d'un échantillon de petite taille ( $n < 30$ ), prélevé à partir d'une population normale de moyenne  $m$  (inconnue) et de variance  $\sigma_{pop}^2$  connue, on définit un intervalle de confiance ayant un niveau de confiance  $S$  de contenir la vraie valeur de  $m$  par

$$[\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}].$$

**Remarque 109** Dans le cas d'un grand échantillon, si la variance  $\sigma_{pop}^2$  de la population est inconnue, on peut l'estimer sans problème par la variance d'échantillon  $s^2 = \frac{n}{n-1} \sigma_{ech}^2$  (voir chapitre 4).

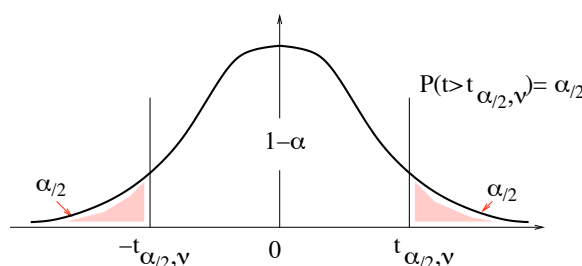
**b. On dispose d'un petit échantillon ( $n < 30$ ) et la distribution de  $X$  est normale d'écart-type inconnu**

Dans ces conditions, l'étude du chapitre 4 nous a appris que nous ne disposons pas directement de la loi de  $\bar{X}$  mais de celle de

$$T = \frac{\bar{X} - m}{\Sigma_{ech}/\sqrt{n-1}}.$$

$T$  suit une loi de Student à  $n - 1$  degrés de liberté :  $T \rightarrow T_{n-1}$ .

Pour trouver l'intervalle de confiance de  $m$  au risque  $\alpha$ , nous allons procéder comme dans le cas précédent.



On détermine dans la table de la loi de Student la valeur  $t_{\alpha/2, \nu}$  (où  $\nu = n - 1$ ) telle que  $P(-t_{\alpha/2, \nu} \leq T \leq t_{\alpha/2, \nu}) = S$ , ce qui peut s'écrire

$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2, \nu} \frac{\Sigma_{ech}}{\sqrt{n-1}}, \bar{X} + t_{\alpha/2, \nu} \frac{\Sigma_{ech}}{\sqrt{n-1}}\right) = S.$$

Après avoir choisi l'échantillon,  $\bar{X}$  a pris la valeur  $\bar{x}$  et  $\Sigma_{ech}$  la valeur  $\sigma_{ech}$ . On en déduit par la suite un intervalle d'extrémités fixes (et non plus un intervalle aléatoire) qui s'écrit  $[\bar{x} - t_{\alpha/2, \nu} \frac{\sigma_{ech}}{\sqrt{n-1}}, \bar{x} + t_{\alpha/2, \nu} \frac{\sigma_{ech}}{\sqrt{n-1}}]$  et on lui attribue, non pas une probabilité, mais un niveau de confiance de  $S$  de contenir la vraie valeur de  $m$ .

**Conclusion.** A partir d'un échantillon de petite taille ( $n < 30$ ), prélevé à partir d'une population normale de moyenne  $m$  (inconnue) et de variance  $\sigma_{pop}^2$  inconnue, on définit un intervalle de confiance ayant un niveau de confiance  $S$  de contenir la vraie valeur de  $m$  par

$$\left[ \bar{x} - t_{\alpha/2, \nu} \frac{\sigma_{ech}}{\sqrt{n-1}}, \bar{x} + t_{\alpha/2, \nu} \frac{\sigma_{ech}}{\sqrt{n-1}} \right],$$

où  $\nu = n - 1$  est le nombre de degrés de liberté de la distribution de Student.

On pourra bien sûr remplacer  $\frac{\sigma_{ech}}{\sqrt{n-1}}$  par  $\frac{s}{\sqrt{n}}$ .

### 5.3.3 Remarques

1. L'intervalle de confiance pourra être numériquement différent chaque fois qu'on prélève un échantillon de même taille de la population puisque l'intervalle est centré sur la moyenne de l'échantillon qui varie de prélèvement en prélèvement.

2. Le niveau de confiance est associé à l'intervalle et non au paramètre  $m$ . Il ne faut pas dire que la vraie valeur de  $m$  a, disons 95 chances sur 100, de se trouver dans l'intervalle mais plutôt que l'intervalle de confiance a 95 chances sur 100 de contenir la vraie valeur de  $m$  ou encore que 95 fois sur 100, l'intervalle déterminé contiendra la vraie valeur de  $m$ . Une fois que l'intervalle est calculé,  $m$  est ou n'est pas dans l'intervalle (pour une population donnée,  $m$  est une constante et non une variable aléatoire).

3. Plus le niveau de confiance est élevé, plus l'amplitude de l'intervalle est grande. Pour la même taille d'échantillon, on perd de la précision en gagnant une plus grande confiance.

4. Dans le cas où la variance de la population est inconnue, des échantillonnages successifs de la population peuvent conduire pour une même taille d'échantillon et le même niveau de confiance, à des intervalles de diverses amplitudes parce que l'écart-type  $s$  variera d'échantillon en échantillon.

### 5.3.4 Estimation d'une variance par intervalle de confiance

On se propose d'estimer, par intervalle de confiance, la variance  $\sigma_{pop}^2$  d'un caractère mesurable d'une population. Il s'agit donc de déterminer, à partir de la variance de l'échantillon  $\sigma_{ech}^2$ , un intervalle dans lequel il est vraisemblable que la vraie valeur de  $\sigma_{pop}^2$  se trouve.

On cherche un intervalle  $[A, B]$  vérifiant  $P(A \leq \sigma_{pop}^2 \leq B) = S$ . Les limites de cet intervalle prendront, après avoir prélevé l'échantillon et calculé l'estimation les valeurs prises par les deux quantités aléatoires  $A$  et  $B$ , la forme  $a \leq \sigma_{pop}^2 \leq b$ .

Nous allons déterminer  $A$  et  $B$  en utilisant la distribution d'échantillonnage de la variance d'échantillon  $S^2$ .

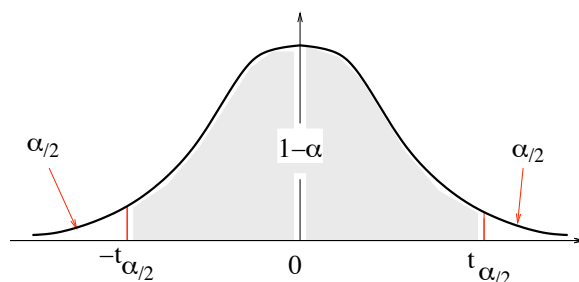
Nous supposons par la suite que la population est "normale", c'est-à-dire que le caractère  $X$  suit une loi normale. L'étude du chapitre 4 nous amène donc à distinguer deux cas.

#### a. La population est "normale" et on dispose d'un grand échantillon ( $n \geq 30$ )

La variance d'échantillon  $S^2 = \frac{n}{n-1} \Sigma_{ech}^2$  suit approximativement une loi normale (voir chapitre 4),  $S^2 \rightarrow \mathcal{N}(\sigma_{pop}^2, \sigma_{pop}^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}})$ , donc

$$T = \frac{S^2 - \sigma_{pop}^2}{\sigma_{pop}^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}}$$

suit une loi normale centrée réduite.



On peut déterminer dans la table de la loi normale centrée réduite la valeur  $t_{\alpha/2}$  telle que  $P(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) = S$ , ce qui peut s'écrire

$$P\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{S^2 - \sigma_{pop}^2}{\sigma_{pop}^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}} \leq t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

Comme on a un grand échantillon, on peut estimer  $\sigma_{pop}^2$  par  $s^2 = \frac{n}{n-1} \sigma_{ech}^2$ . Soit encore

$$P\left(S^2 - t_{\alpha/2} s^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sigma_{pop}^2 \leq S^2 + t_{\alpha/2} s^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) = 1 - \alpha,$$

qui est bien de la forme cherchée.

Ces deux limites sont des variables aléatoires qui prendront des valeurs numériques particulières une fois que l'échantillon est choisi et qu'on a obtenu la valeur de  $s^2$  (réalisation de la variable aléatoire  $S^2$ ). On en déduit par la suite un intervalle d'extrémités fixes (et non plus un intervalle aléatoire) qui s'écrit  $[s^2 - t_{\alpha/2} s^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sigma_{pop}^2 \leq s^2 + t_{\alpha/2} s^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}]$ , et on lui attribue un niveau de confiance  $S$  de contenir la vraie valeur de  $\sigma_{pop}^2$ .

**Conclusion.** A partir d'un échantillon de grande taille ( $n \geq 30$ ), prélevé à partir d'une population normale de variance  $\sigma_{pop}^2$  inconnue, on définit un intervalle de confiance ayant un niveau de confiance  $1 - \alpha$  de contenir la vraie valeur de  $\sigma_{pop}^2$  par

$$\left[s^2 - t_{\alpha/2} s^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sigma_{pop}^2 \leq s^2 + t_{\alpha/2} s^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right].$$

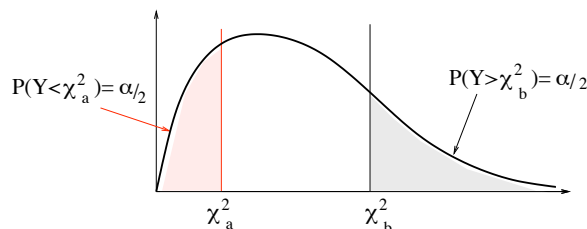
**b. La population est "normale" et on dispose d'un petit échantillon ( $n < 30$ )**

La variable

$$Y = \frac{n \Sigma_{ech}^2}{\sigma_{pop}^2} = \frac{(n-1) S^2}{\sigma_{pop}^2}$$

suit une loi du  $\chi^2$  à  $n - 1$  degrés de liberté (voir chapitre 4),  $Y \rightarrow \chi_{n-1}^2$ .

Nous allons chercher un intervalle  $[\chi_a^2, \chi_b^2]$  de valeurs telles que  $P(\chi_a^2 \leq Y \leq \chi_b^2) = S$ .



On choisit un intervalle correspondant à des risques symétriques, c'est-à-dire tel que

$$P(Y < \chi_a^2) = P(\chi_b^2 < Y) = \frac{1 - S}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Les deux valeurs  $\chi_a^2$  et  $\chi_b^2$  se déterminent à l'aide des tables. On peut alors écrire que  $P(\chi_a^2 \leq \frac{n\Sigma_{ech}^2}{\sigma_{pop}^2} \leq \chi_b^2) = S$  et donc que

$$P\left(\frac{n\Sigma_{ech}^2}{\chi_b^2} \leq \sigma_{pop}^2 \leq \frac{n\Sigma_{ech}^2}{\chi_a^2}\right) = S.$$

Ces deux limites sont des variables aléatoires qui prendront des valeurs numériques particulières une fois que l'échantillon est choisi et qu'on a obtenu la valeur de  $s^2$  (réalisation de la variable aléatoire  $S^2$ ). On en déduit par la suite un intervalle d'extrémités fixes qui s'écrit  $[\frac{n\sigma_{ech}^2}{\chi_b^2}, \frac{n\sigma_{ech}^2}{\chi_a^2}]$  et on lui attribue un niveau de confiance  $S$  de contenir la vraie valeur de  $\sigma_{pop}^2$ .

**Conclusion.** A partir d'un échantillon de petite taille ( $n < 30$ ), prélevé à partir d'une population normale de variance  $\sigma_{pop}^2$  inconnue, on définit un intervalle de confiance ayant un niveau de confiance  $S$  de contenir la vraie valeur de  $\sigma_{pop}^2$  par

$$\left[\frac{n\sigma_{ech}^2}{\chi_b^2}, \frac{n\sigma_{ech}^2}{\chi_a^2}\right].$$

### 5.3.5 Estimation d'une proportion par intervalle de confiance

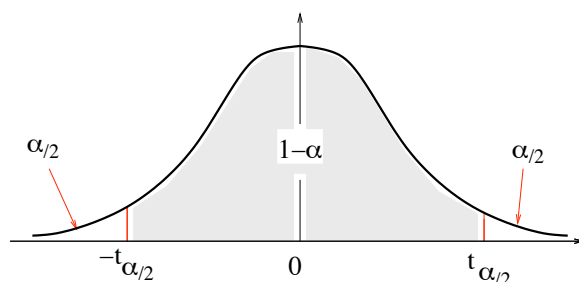
On se propose d'estimer, par intervalle de confiance, la proportion  $p$  d'un caractère quantitatif d'une population. Il s'agit donc de déterminer, à partir de la proportion de l'échantillon  $f$ , un intervalle dans lequel il est vraisemblable que la vraie valeur de  $p$  s'y trouve. On cherche un intervalle  $[A, B]$  vérifiant  $P(A \leq p \leq B) = S$ . Les limites de cet intervalle prendront, après avoir prélevé l'échantillon et calculé les valeurs prises par les deux quantités aléatoires  $A$  et  $B$ , la forme  $LI \leq p \leq LS$ .

Nous allons déterminer  $A$  et  $B$  en utilisant la distribution d'échantillonnage de la proportion d'échantillon  $F$ .

Nous supposons que nous sommes en présence d'un *grand échantillon* ( $n \geq 30$ ) et que  $p$  (que nous devons estimer) n'est pas trop petit ( $np \geq 15$  et  $nq \geq 15$ ). La fréquence d'échantillon  $F$  suit approximativement une loi normale (voir chapitre 4),  $F \rightarrow \mathcal{N}(p, \sqrt{\frac{pq}{n}})$ . Donc

$$T = \frac{F - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

suit approximativement une loi normale centrée réduite.



On peut déterminer dans la table de la loi normale centrée réduite la valeur  $t_{\alpha/2}$  telle que  $P(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) = S$ . Ce qui peut s'écrire :

$$P(-t_{\alpha/2} \leq \frac{F - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq t_{\alpha/2}) = S.$$

Le problème est qu'on ignore la valeur de  $p$  et qu'elle intervient dans l'écart-type. Comme  $n$  est grand, il est correct d'estimer  $p$  par la valeur  $f$  (prise par l'estimateur  $F$ ) trouvée dans l'échantillon.

En effet, la grande taille de l'échantillon garantit que  $f$  ne fluctue pas trop d'échantillon en échantillon. Soit encore

$$P\left(F - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \leq p \leq F + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right) = S.$$

qui est bien de la forme cherchée.

Ces deux limites sont des variables aléatoires qui prendront des valeurs numériques particulières une fois que l'échantillon est choisi et qu'on a obtenu la valeur de  $f$  (réalisation de la variable aléatoire  $F$ ). On en déduit par la suite un intervalle d'extrémités fixes qui s'écrit  $\left[f - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}, f + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$  et on lui attribue un niveau de confiance  $S$  de contenir la vraie valeur de  $p$ .

**Conclusion.** A partir d'un échantillon de grande taille ( $n \geq 30$ ), prélevé à partir d'une population dont la proportion  $p$  d'un caractère qualitatif est inconnue mais pas trop petite, on définit un intervalle de confiance ayant un niveau de confiance  $S$  de contenir la vraie valeur de  $p$  par

$$\left[f - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}, f + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right].$$

### 5.3.6 Comment contrôler l'erreur ?

Il arrive souvent que la précision de l'estimation soit spécifiée avant même que l'échantillon ne soit prélevé. Par exemple, vous voulez vérifier un lot de pièces de machinerie : ces pièces doivent avoir un certain diamètre et l'erreur tolérée dans la fabrication doit être très petite, sinon plusieurs d'entre elles seront inutilisables. Pour vérifier le lot, vous prélevez un échantillon, mais vous voulez que l'estimation se fasse avec la plus petite erreur d'échantillonnage possible : vous voulez une estimation précise. D'une trop grande erreur d'échantillonnage résulte une longueur d'intervalle trop grande et cela rend souvent inutile l'intervalle de confiance construit.

Nous pouvons contrôler l'erreur d'échantillonnage en choisissant une taille d'échantillon appropriée. L'erreur d'échantillonnage survient lorsque l'échantillon ne prend pas en considération la population dans sa totalité. Chaque fois qu'un échantillon est prélevé, nous perdons une certaine partie de l'information concernant la population, ce qui entraîne inmanquablement une erreur dans l'estimation. Par conséquent, si nous voulons un très haut niveau de précision, nous devons prélever un échantillon dont la taille permet d'extraire de la population l'information suffisante pour réaliser l'estimation avec la précision désirée.

Nous verrons en travaux dirigés sur des exemples comment procéder.

# Chapitre 6

## Les tests d'hypothèse

### 6.1 Généralités

#### 6.1.1 Principe d'un test d'hypothèses

Les tests d'hypothèse constituent un autre aspect important de l'inférence statistique. Le principe général d'un test d'hypothèse peut s'énoncer comme suit :

- On étudie une population dont les éléments possèdent un caractère (mesurable ou qualitatif) et dont la valeur du paramètre relative au caractère étudié est inconnue.
- Une hypothèse est formulée sur la valeur du paramètre : cette formulation résulte de considérations théoriques, pratiques ou encore elle est simplement basée sur un pressentiment.
- On veut porter un jugement sur la base des résultats d'un échantillon prélevé de cette population.

Il est bien évident que la statistique (c'est-à-dire la variable d'échantillonnage) servant d'estimateur au paramètre de la population ne prendra pas une valeur rigoureusement égale à la valeur théorique proposée dans l'hypothèse. Cette variable aléatoire comporte des fluctuations d'échantillonnage qui sont régies par des distributions connues.

Pour décider si l'hypothèse formulée est supportée ou non par les observations, il faut une méthode qui permettra de conclure si l'écart observé entre la valeur de la statistique obtenue dans l'échantillon et celle du paramètre spécifiée dans l'hypothèse est trop important pour être uniquement imputable au hasard de l'échantillonnage.

*La construction d'un test d'hypothèse consiste en fait à déterminer entre quelles valeurs peut varier la variable aléatoire, en supposant l'hypothèse vraie, sur la seule considération du hasard de l'échantillonnage.*

Les distributions d'échantillonnage d'une moyenne, d'une variance et d'une proportion que nous avons traitées dans un chapitre précédent vont être particulièrement utiles dans l'élaboration des tests statistiques.

#### 6.1.2 Définition des concepts utiles à l'élaboration des tests d'hypothèse

##### **Hypothèse statistique.**

Une *hypothèse statistique* est un énoncé (une affirmation) concernant les caractéristiques (valeurs des paramètres, forme de la distribution des observations) d'une population.

##### **Test d'hypothèse.**

Un *test d'hypothèse* (ou test statistique) est une démarche qui a pour but de fournir une règle de décision permettant, sur la base de résultats d'échantillon, de faire un choix entre deux hypothèses statistiques.

**Hypothèse nulle ( $H_0$ ) et hypothèse alternative ( $H_1$ ).**

L'hypothèse selon laquelle on fixe à priori un paramètre de la population à une valeur particulière s'appelle l'*hypothèse nulle* et est notée  $H_0$ . N'importe quelle autre hypothèse qui diffère de l'hypothèse  $H_0$  s'appelle l'*hypothèse alternative* (ou contre-hypothèse) et est notée  $H_1$ .

C'est l'hypothèse nulle qui est soumise au test et toute la démarche du test s'effectue en considérant cette hypothèse comme vraie.

Dans notre démarche, nous allons établir des règles de décision qui vont nous conduire à l'acceptation ou au rejet de l'hypothèse nulle  $H_0$ . Toutefois cette décision est fondée sur une information partielle, les résultats d'un échantillon. Il est donc statistiquement impossible de prendre la bonne décision à coup sûr. En pratique, on met en oeuvre une démarche qui nous permettrait, à long terme de rejeter à tort une hypothèse nulle vraie dans une faible proportion de cas. La conclusion qui sera déduite des résultats de l'échantillon aura un caractère probabiliste : on ne pourra prendre une décision qu'en ayant conscience qu'il y a un certain risque qu'elle soit erronée. Ce risque nous est donné par le seuil de signification du test.

**Seuil de signification du test**

Le risque, consenti à l'avance et que nous notons  $\alpha$ , de rejeter à tort l'hypothèse nulle  $H_0$  alors qu'elle est vraie, s'appelle le *seuil de signification* du test et s'énonce en probabilité ainsi,

$$\alpha = P(\text{rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}).$$

A ce seuil de signification, on fait correspondre sur la distribution d'échantillonnage de la statistique une *région de rejet* de l'hypothèse nulle (appelée également région critique). L'aire de cette région correspond à la probabilité  $\alpha$ . Si par exemple on choisit  $\alpha = 0.05$ , cela signifie que l'on admet d'avance que la variable d'échantillonnage peut prendre, dans 5% des cas, une valeur se situant dans la zone de rejet de  $H_0$ , bien que  $H_0$  soit vraie et ceci uniquement d'après le hasard de l'échantillonnage. Sur la distribution d'échantillonnage correspondra aussi une région complémentaire, dite *région d'acceptation* de  $H_0$  (ou région de non-rejet) de probabilité  $1 - \alpha$ .

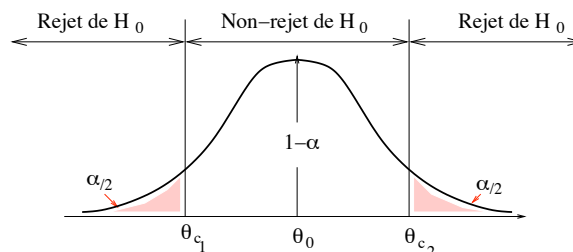
**Remarque 110** 1. Les seuils de signification les plus utilisés sont  $\alpha = 0.05$  et  $\alpha = 0.01$ , dépendant des conséquences de rejeter à tort l'hypothèse  $H_0$ .

2. La statistique qui convient pour le test est donc une variable aléatoire dont la valeur observée sera utilisée pour décider du « rejet » ou du « non-rejet » de  $H_0$ . La distribution d'échantillonnage de cette statistique sera déterminée en supposant que l'hypothèse  $H_0$  est vraie.

**Exemple 111** Supposons que nous affirmions que la valeur d'un paramètre  $\theta$  d'une population est égale à la valeur  $\theta_0$ . On s'intéresse au changement possible du paramètre  $\theta$  dans l'une ou l'autre direction (soit  $\theta > \theta_0$ , soit  $\theta < \theta_0$ ). On effectue un test bilatéral.

Les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  sont alors 
$$\begin{cases} H_0 & \theta = \theta_0 \\ H_1 & \theta \neq \theta_0. \end{cases}$$

On peut schématiser les régions de rejet et de non-rejet de  $H_0$  comme suit :



Si, suite aux résultats de l'échantillon, la valeur de la statistique utilisée se situe dans l'intervalle  $[\theta_{c_1}, \theta_{c_2}]$ , on acceptera  $H_0$  au seuil de signification choisi. Si, au contraire, la valeur obtenue est supérieure à  $c_2$  ou inférieure à  $c_1$ , on rejette  $H_0$  et on accepte  $H_1$ .

**Remarque 112** Si on s'intéresse au changement du paramètre dans une seule direction, on opte pour un test unilatéral, en choisissant comme hypothèse  $H_1$  soit  $\theta > \theta_0$ , soit  $\theta < \theta_0$ . La région critique est alors localisée uniquement à droite ou uniquement à gauche de la région d'acceptation.

Dans un souci de simplification, nous nous intéresserons dans ce cours essentiellement aux tests bilatéraux.

## 6.2 Tests permettant de déterminer si un échantillon appartient à une population donnée

### 6.2.1 Test sur une moyenne : comparaison d'une moyenne expérimentale à une moyenne théorique dans le cas d'un caractère quantitatif

Nous voulons déterminer si l'échantillon de taille  $n$  dont nous disposons appartient à une population de moyenne  $m_0$  au seuil de signification  $\alpha$ . Nous allons dans tous les tests travailler de la même façon, en procédant en quatre étapes.

**1ère étape :** Formulation des hypothèses.

L'échantillon dont nous disposons provient d'une population de moyenne  $m$ . Nous voulons savoir si  $m = m_0$ . On va donc tester l'hypothèse  $H_0$  contre l'hypothèse  $H_1$  : 
$$\begin{cases} H_0 & m = m_0 \\ H_1 & m \neq m_0. \end{cases}$$

**2ème étape :** Détermination de la fonction discriminante du test et de sa distribution de probabilité.

- On détermine la statistique qui convient pour ce test. Ici, l'estimateur de la moyenne  $m$ , c'est-à-dire  $\bar{X}$ , semble tout indiqué.
- On détermine la loi de probabilité de  $\bar{X}$  en se plaçant sous l'hypothèse  $H_0$ . Deux cas peuvent se produire.

**Premier cas :** L'échantillon est de grande taille (ou bien la population est normale de variance  $\sigma_{pop}^2$  connue).

$\bar{X}$  suit alors une loi normale de moyenne  $m_0$  (puisque'on se place sous  $H_0$ ) et d'écart-type  $\frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}$ ,  $\bar{X} \rightarrow \mathcal{N}(m_0, \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}})$ . On pose

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{\frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{n}}}.$$

$T$  mesure un écart réduit.  $T$  est aussi appelée *fonction discriminante du test*.  $T \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Deuxième cas :** L'échantillon est de petite taille (prélevé au hasard d'une population normale de variance  $\sigma_{pop}^2$  inconnue).

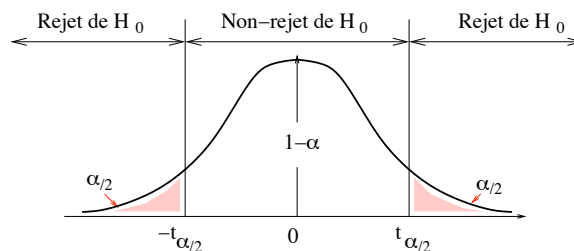
Dans ce cas la fonction discriminante du test sera

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{\frac{\Sigma_{ech}}{\sqrt{n-1}}}.$$

Ici  $T \rightarrow T_{n-1}$  (loi de Student à  $n - 1$  degrés de liberté).

**3ème étape :** Détermination des valeurs critiques de  $T$  délimitant les zones d'acceptation et de rejet.

On impose toujours à la zone d'acceptation de  $H_0$  concernant l'écart réduit d'être centrée autour de 0.



Il nous faut donc déterminer dans la table la valeur maximale  $t_{\alpha/2}$  de l'écart réduit imputable aux variations d'échantillonnage au seuil de signification  $\alpha$ , c'est-à-dire vérifiant  $P(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ .

**4ème étape :** Calcul de la valeur de  $T$  prise dans l'échantillon et conclusion du test.

On calcule la valeur  $t_0$  prise par  $T$  dans l'échantillon.

- Si la valeur  $t_0$  se trouve dans la zone de rejet, on dira que l'écart-réduit observé est statistiquement significatif au seuil  $\alpha$ . Cet écart est anormalement élevé et ne permet pas d'accepter  $H_0$ . On rejette  $H_0$ .
- Si la valeur  $t_0$  se trouve dans la zone d'acceptation, on dira que l'écart-réduit observé n'est pas significatif au seuil  $\alpha$ . Cet écart est imputable aux fluctuations d'échantillonnage. On accepte  $H_0$ .

### 6.2.2 Tests sur une proportion

Nous nous proposons de tester si la proportion  $p$  d'éléments dans la population présentant un certain caractère qualitatif peut être ou non considérée comme égale à une valeur hypothétique  $p_0$ . Nous disposons pour ce faire de la proportion d'éléments possédant ce caractère dans un échantillon de taille  $n$ . Nous allons procéder comme au paragraphe précédent, en quatre étapes.

**1ère étape :** Formulation des hypothèses.

L'échantillon dont nous disposons provient d'une population dont la proportion d'éléments présentant le caractère qualitatif est  $p$ . Nous voulons savoir si  $p = p_0$ . On va donc tester l'hypothèse

$$H_0 \text{ contre l'hypothèse } H_1 : \begin{cases} H_0 & p = p_0 \\ H_1 & p \neq p_0 \end{cases}.$$

**2ème étape :** Détermination de la fonction discriminante du test et de sa distribution de probabilité.

On détermine la statistique qui convient pour ce test. Ici, l'estimateur de la proportion  $p$ , c'est-à-dire  $F$ , semble tout indiquée.

On détermine la loi de probabilité de  $F$  en se plaçant sous l'hypothèse  $H_0$ . On suppose que l'on dispose d'un grand échantillon (et que "p n'est pas trop petit" (de manière que l'on ait  $np \geq 15$  et  $n(1 - p) \geq 15$ ).  $F$  suit alors une loi normale de moyenne  $p_0$  (puisqu'on se place sous  $H_0$ ) et d'écart-type  $\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ ,  $F \rightarrow \mathcal{N}(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}})$ .

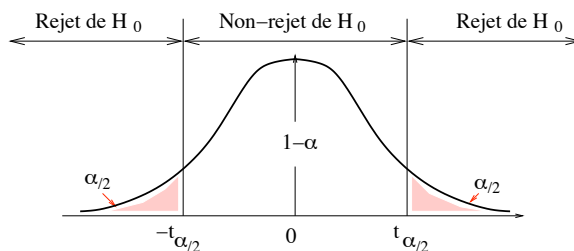
On pose

$$T = \frac{F - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$

$T$  mesure un écart réduit.  $T$  est aussi appelée fonction discriminante du test.  $T \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

**3ème étape :** Détermination des valeurs critiques de  $T$  délimitant les zones d'acceptation et de rejet.

On impose toujours à la zone d'acceptation de  $H_0$  concernant l'écart réduit d'être centrée autour de 0.



Il nous faut donc déterminer dans la table la valeur maximale  $t_{\alpha/2}$  de l'écart réduit imputable aux variations d'échantillonnage au seuil de signification  $\alpha$ , c'est-à-dire vérifiant  $P(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ .

**4ème étape :** Calcul de la valeur de  $T$  prise dans l'échantillon et conclusion du test.

On calcule la valeur  $t_0$  prise par  $T$  dans l'échantillon.

- Si la valeur  $t_0$  se trouve dans la zone de rejet, on dira que l'écart-réduit observé est statistiquement significatif au seuil  $\alpha$ . Cet écart est anormalement élevé et ne permet pas d'accepter  $H_0$ . On rejette  $H_0$ .
- Si la valeur  $t_0$  se trouve dans la zone d'acceptation, on dira que l'écart-réduit observé n'est pas significatif au seuil  $\alpha$ . Cet écart est imputable aux fluctuations d'échantillonnage. On accepte  $H_0$ .

Nous étudierons ces sortes de tests sur des exemples en travaux dirigés.

## 6.3 Risques de première et de deuxième espèce

### 6.3.1 Définitions

Tous les règles de décision que nous avons déterminées acceptaient un risque  $\alpha$  qui était le risque de rejeter à tort l'hypothèse  $H_0$ , c'est-à-dire le risque de rejeter l'hypothèse  $H_0$ , alors que  $H_0$  est vraie. Ce risque s'appelle aussi le *risque de première espèce*.

La règle de décision du test comporte également un deuxième risque, à savoir de celui de ne pas rejeter l'hypothèse nulle  $H_0$  alors que c'est l'hypothèse  $H_1$  qui est vraie. C'est le *risque de deuxième espèce*.

Les deux risques peuvent se définir ainsi :

$$\alpha = P(\text{rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}) = \text{probabilité de commettre une erreur de première espèce.}$$

$$\beta = P(\text{ne pas rejeter } H_0 \mid H_1 \text{ vraie}) = \text{probabilité de commettre une erreur de deuxième espèce.}$$

Le risque de première espèce  $\alpha$  est choisi à priori. Toutefois le risque de deuxième espèce  $\beta$  dépend de l'hypothèse alternative  $H_1$  et on ne peut le calculer que si on spécifie des valeurs particulières du paramètre dans l'hypothèse  $H_1$  que l'on suppose vraie.

Les risques liés aux tests d'hypothèses peuvent se résumer ainsi :

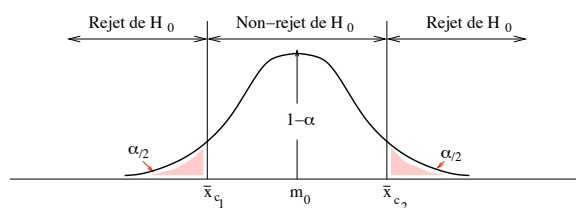
		Conclusion du test	
		Accepter $H_0$	Rejeter $H_0$
$H_0$ est vraie	La décision est	Bonne	Fausse
	probabilité de prendre cette décision avant l'expérience	$1 - \alpha$	$\alpha$
$H_1$ est vraie	La décision est	Fausse	Bonne
	probabilité de prendre cette décision avant l'expérience	$\beta$	$1 - \beta$

**Remarque 113** La probabilité complémentaire du risque de deuxième espèce  $(1 - \beta)$  définit la puissance du test à l'égard de la valeur du paramètre dans l'hypothèse alternative  $H_1$ . La puissance du test représente la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle  $H_0$  lorsque l'hypothèse vraie est  $H_1$ . Plus  $\beta$  est petit, plus le test est puissant.

### 6.3.2 Schématisation des deux risques d'erreur sur la distribution d'échantillonnage

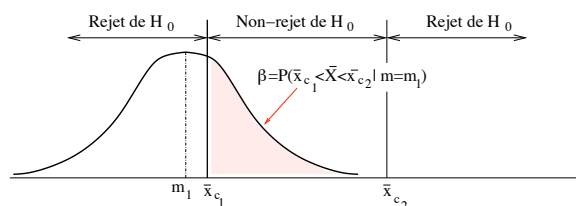
A titre d'exemple, regardons ce qu'il se passe à propos d'un test sur la moyenne. On peut visualiser sur la distribution d'échantillonnage de la moyenne comment sont reliés les deux risques d'erreur associés aux tests d'hypothèses.

Les zones d'acceptation de  $H_0$  ( $m = m_0$ ) et de rejet de  $H_0$  se visualisent ainsi :

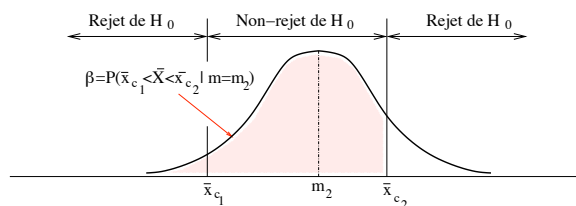


Donnons diverses valeurs à  $m$  (autres que  $m_0$ ) que l'on suppose vraie et schématisons le risque de deuxième espèce  $\beta$ .

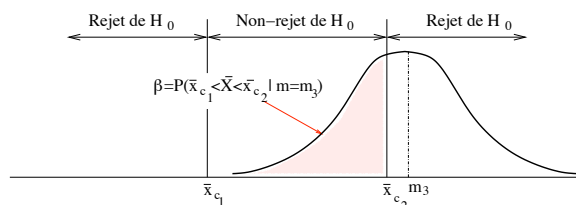
**Hypothèse vraie :  $m = m_1$  ( $m_1 < m_0$ )** La distribution d'échantillonnage de  $\bar{X}$  en supposant vraie  $m = m_1$  est illustrée en pointillé et l'aire hachurée sur cette figure correspond à la région de non-rejet de  $H_0$ . Cette aire représente  $\beta$  par rapport à la valeur  $m_1$ .



**Hypothèse vraie :  $m = m_2$  ( $m_2 > m_0$ )**



**Hypothèse vraie :  $m = m_3$  ( $m_3 > m_0$ )**



Cette schématisation permet d'énoncer quelques propriétés importantes concernant les deux risques d'erreur.

1. Pour un même risque  $\alpha$  et une même taille d'échantillon, on constate que, si l'écart entre la valeur du paramètre posée en  $H_0$  et celle supposée dans l'hypothèse vraie  $H_1$  augmente, le risque  $\beta$  diminue.
2. Une réduction du risque de première espèce (de  $\alpha = 0.05$  à  $\alpha = 0.01$  par exemple) élargit la zone d'acceptation de  $H_0$ . Toutefois, le test est accompagné d'une augmentation du risque de deuxième espèce  $\beta$ . On ne peut donc diminuer l'un des risques qu'en consentant à augmenter l'autre.
3. Pour une valeur fixe de  $\alpha$  et un  $\sigma$  déterminé, l'augmentation de la taille d'échantillon aura pour effet de donner une meilleure précision puisque  $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  diminue. La zone d'acceptation de  $H_0$  sera alors plus restreinte, conduisant à une diminution du risque  $\beta$ . Le test est alors plus puissant.

## 6.4 Tests permettant de déterminer si deux échantillons appartiennent à la même population

### 6.4.1 Introduction

Il existe de nombreuses applications qui consistent, par exemple, à comparer deux groupes d'individus en regard d'un caractère quantitatif particulier (poids, taille, rendement scolaire, quotient intellectuel,...) ou à comparer deux procédés de fabrication selon une caractéristique quantitative particulière (résistance à la rupture, poids, diamètre, longueur,...) ou encore de comparer les proportions d'apparition d'un caractère qualitatif de deux populations (proportion de défectueux, proportion de gens favorisant un parti politique,...). Les variables aléatoires qui sont alors utilisées pour effectuer des tests d'hypothèses (ou aussi calculer des intervalles de confiance) sont la *différence des moyennes* d'échantillon, le *quotient des variances* d'échantillon ou la *différence des proportions* d'échantillon.

### 6.4.2 Comparaison de deux moyennes d'échantillon : “test T”

Nous nous proposons de tester si la moyenne de la première population ( $m_1$ ) peut être ou non considérée comme égale à la moyenne de la deuxième population ( $m_2$ ). Nous allons alors comparer les deux moyennes d'échantillon  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$ . Il est évident que si  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  diffèrent beaucoup, les deux échantillons n'appartiennent pas la même population. Mais si  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  diffèrent peu, il se pose la question de savoir si l'écart  $d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$  peut être attribué aux hasards de l'échantillonnage. Afin de donner une réponse rigoureuse à cette question, nous procéderons encore en quatre étapes.

**1ère étape :** Formulation des hypothèses.

Le premier échantillon dont nous disposons provient d'une population dont la moyenne est  $m_1$ . Le deuxième échantillon dont nous disposons provient d'une population dont la moyenne est  $m_2$ .

Nous voulons savoir si il s'agit de la même population en ce qui concerne les moyennes, c'est-à-dire si  $m_1 = m_2$ . On va donc tester l'hypothèse  $H_0$  contre l'hypothèse  $H_1$  : 
$$\begin{cases} H_0 & m_1 = m_2 \\ H_1 & m_1 \neq m_2. \end{cases}$$

**2ème étape :** Détermination de la fonction discriminante du test et de sa distribution de probabilité.

On détermine la statistique qui convient pour ce test. Ici, la différence  $D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$  des deux moyennes d'échantillon, semble tout indiquée.

On détermine la loi de probabilité de  $D$  en se plaçant sous l'hypothèse  $H_0$ . On suppose que l'on dispose de grands échantillons ( $n_1 \geq 30$  et  $n_2 \geq 30$ ).  $\bar{X}_1$  suit alors une loi normale de moyenne  $m_1$  et d'écart-type  $\frac{\sigma_{pop1}}{\sqrt{n_1}}$  que l'on peut sans problème estimer par  $\frac{\sigma_{ech1}}{\sqrt{n_1-1}}$  (car  $n_1 \geq 30$ ). I.e.  $\bar{X}_1 \rightarrow \mathcal{N}(m_1, \frac{\sigma_{ech1}}{\sqrt{n_1-1}})$ .

De même  $\bar{X}_2$  suit alors une loi normale de moyenne  $m_2$  et d'écart-type  $\frac{\sigma_{pop2}}{\sqrt{n_2}}$  que l'on peut sans problème estimer par  $\frac{\sigma_{ech2}}{\sqrt{n_2-1}}$  (car  $n_2 \geq 30$ ). I.e.  $\bar{X}_2 \rightarrow \mathcal{N}(m_2, \frac{\sigma_{ech2}}{\sqrt{n_2-1}})$ .

On en déduit, puisque  $\bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$  sont indépendantes que  $D$  suit également une loi normale.

$E(D) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = m_1 - m_2 = 0$  puisqu'on se place sous  $H_0$ .

$E(D) = V(\bar{X}_1) + V(\bar{X}_2) = \frac{\sigma_{ech1}^2}{n_1-1} + \frac{\sigma_{ech2}^2}{n_2-1}$  puisque les variables sont indépendantes.

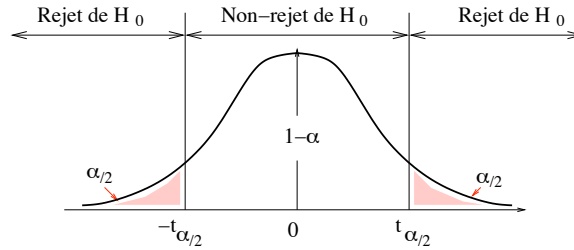
On pose

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_{ech1}^2}{n_1-1} + \frac{\sigma_{ech2}^2}{n_2-1}}}.$$

$T$  mesure un écart réduit.  $T$  est la fonction discriminante du test.  $T \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

**3ème étape :** Détermination des valeurs critiques de  $T$  délimitant les zones d'acceptation et de rejet.

On impose toujours à la zone d'acceptation de  $H_0$  concernant l'écart réduit d'être centrée autour de 0.



Il nous faut donc déterminer dans la table la valeur maximale  $t_{\alpha/2}$  de l'écart réduit imputable aux variations d'échantillonnage au seuil de signification  $\alpha$ , c'est-à-dire vérifiant  $P(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ .

**4ème étape :** Calcul de la valeur de  $T$  prise dans l'échantillon et conclusion du test.

On calcule la valeur  $t_0$  prise par  $T$  dans l'échantillon.

- Si la valeur  $t_0$  se trouve dans la zone de rejet, on dira que l'écart-réduit observé est *statistiquement significatif* au seuil  $\alpha$ . Cet écart est anormalement élevé et ne permet pas d'accepter  $H_0$ . On rejette  $H_0$ .
- Si la valeur  $t_0$  se trouve dans la zone d'acceptation, on dira que l'écart-réduit observé *n'est pas significatif* au seuil  $\alpha$ . Cet écart est imputable aux fluctuations d'échantillonnage. On accepte  $H_0$ .

**Remarque 114** Si on travaille sur de petits échantillons, si la loi suivie par la grandeur est une loi normale et si on ignore les écarts-type des populations, on doit utiliser la loi de Student.

### 6.4.3 Comparaison de deux variances d'échantillon : "test F"

**1ère étape :** Formulation des hypothèses.

Le premier échantillon dont nous disposons provient d'une population dont l'écart-type est  $\sigma_{pop1}$ . Le deuxième échantillon dont nous disposons provient d'une population dont l'écart-type est  $\sigma_{pop2}$ . Nous voulons savoir si il s'agit de la même population en ce qui concerne les écarts-type, c'est-à-dire si  $\sigma_{pop1} = \sigma_{pop2}$ . On va donc tester l'hypothèse  $H_0$  contre l'hypothèse  $H_1$  :

$$\begin{cases} H_0 & \sigma_{pop1} = \sigma_{pop2} \\ H_1 & \sigma_{pop1} \neq \sigma_{pop2} \end{cases}$$

**2ème étape :** Détermination de la fonction discriminante du test et de sa distribution de probabilité.

On détermine la statistique qui convient pour ce test. Ici, la variable aléatoire dont on connaît la loi est le rapport  $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$  où  $S_1^2$  et  $S_2^2$  sont les variables aléatoires variances d'échantillon.

On détermine la loi de probabilité de  $F$  en se plaçant sous l'hypothèse  $H_0$ .

On suppose ici que les deux populations dont nous avons tiré les échantillons sont normales. Il en découle que

-  $\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_{pop1}^2}$  suit la loi du khi-deux à  $n_1 - 1$  degrés de liberté.

- De même,  $\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_{pop2}^2}$  suit la loi du khi-deux à  $n_2 - 1$  degrés de liberté.

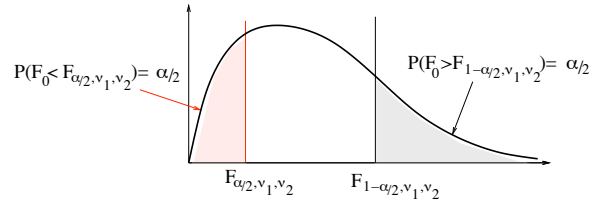
On considère alors le quotient

$$F_0 = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_{pop1}^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_{pop2}^2}}$$

qui est distribué suivant la loi de Fisher avec  $\nu_1 = n_1 - 1$  et  $\nu_2 = n_2 - 1$  degrés de liberté. Lorsqu'on se place sous l'hypothèse  $H_0$ , c'est le rapport  $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$  qui suit la loi de Fisher avec  $\nu_1$  et  $\nu_2$  degrés de liberté puisque  $\sigma_{pop1} = \sigma_{pop2}$ . Ici la fonction discriminante du test est  $F_0$ .

**3ème étape :** Détermination des valeurs critiques de  $F_0$  délimitant les zones d'acceptation et de rejet.

On impose maintenant à la zone d'acceptation de  $H_0$  concernant le quotient des deux variances d'échantillon d'être centrée autour de 1.



On détermine dans les tables les deux valeurs  $F_{\alpha/2, \nu_1, \nu_2}$  et  $F_{1-\alpha/2, \nu_1, \nu_2}$  telles que  $P(F_{\alpha/2, \nu_1, \nu_2} < F_0 < F_{1-\alpha/2, \nu_1, \nu_2}) = 1 - \alpha$ .

On rejettera  $H_0$  si la valeur  $f_0$  prise par  $F_0$  dans l'échantillon se trouve à l'extérieur de l'intervalle  $[F_{\alpha/2, \nu_1, \nu_2}, F_{1-\alpha/2, \nu_1, \nu_2}]$ .

**Remarque 115** On notera que pour obtenir la valeur critique inférieure de  $F_0$ , on doit utiliser la relation

$$F_{1-\alpha/2, \nu_1, \nu_2} = \frac{1}{F_{\alpha/2, \nu_2, \nu_1}}$$

**4ème étape :** Calcul de la valeur de  $F_0$  prise dans l'échantillon et conclusion du test.

On calcule la valeur  $f_0$  prise par  $F_0$  dans l'échantillon.

- Si la valeur  $F_0$  se trouve dans la zone de rejet, on dira que la valeur observée pour  $F$  est *statistiquement significative* au seuil  $\alpha$ . Ce quotient est éloigné de 1 et ne permet pas d'accepter  $H_0$ . On rejette  $H_0$ .
- Si la valeur  $F_0$  se trouve dans la zone d'acceptation, on dira que la valeur observée pour  $F$  n'est pas *significative* au seuil  $\alpha$ . L'écart constaté par rapport à la valeur 1 attendue est imputable aux fluctuations d'échantillonnage. On accepte  $H_0$ .

#### 6.4.4 Comparaison de deux proportions d'échantillon

Il y a de nombreuses applications (échances électorales, expérimentations médicales...) où nous devons décider si l'écart observé entre deux proportions échantillonnales est significatif ou s'il est attribuable au hasard de l'échantillonnage. Pour répondre à cette question, nous procéderons comme d'habitude en quatre étapes.

**1ère étape :** Formulation des hypothèses.

Le premier échantillon dont nous disposons provient d'une population 1 dont les éléments possèdent un caractère qualitatif dans une proportion inconnue  $p_1$ . Le deuxième échantillon dont nous disposons provient d'une population 2 dont les éléments possèdent le même caractère qualitatif dans une proportion inconnue  $p_2$ .

Nous voulons savoir si il s'agit de la même population en ce qui concerne les proportions, c'est-à-dire si  $p_1 = p_2$ . On va donc tester l'hypothèse  $H_0$  contre l'hypothèse  $H_1$  :  $\begin{cases} H_0 & p_1 = p_2 \\ H_1 & p_1 \neq p_2 \end{cases}$ .

**2ème étape :** Détermination de la fonction discriminante du test et de sa distribution de probabilité.

Nous traiterons uniquement le cas où nous sommes en présence de grands échantillons.

On détermine la statistique qui convient pour ce test. Ici, la différence  $D = F_1 - F_2$  des deux proportions d'échantillon, semble tout indiquée, puisque  $F_1$  est un estimateur sans biais de  $p_1$  et  $F_2$  un estimateur sans biais de  $p_2$ .

On détermine la loi de probabilité de  $D$  en se plaçant sous l'hypothèse  $H_0$ .  $F_1$  suit alors une loi normale de moyenne  $p_1$  et d'écart-type  $\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}}$ .

De même,  $F_2$  suit alors une loi normale de moyenne  $p_2$  et d'écart-type  $\sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$ .

On en déduit, puisque  $F_1$  et  $F_2$  sont indépendantes que  $D$  suit également une loi normale.

$E(D) = E(F_1) - E(F_2) = p_1 - p_2 = 0$  puisqu'on se place sous  $H_0$ .

$V(D) = V(F_1) + V(F_2) = \frac{p(1-p)}{n_1} + \frac{p(1-p)}{n_2}$  puisque les variables sont indépendantes. Ici, on a posé  $p_1 = p_2 = p$  puisque l'on se place sous  $H_0$ .

Mais comment trouver  $p$  puisque c'est justement sur  $p$  que porte le test ? Puisque nous raisonnons en supposant l'hypothèse  $H_0$  vraie, on peut considérer que les valeurs de  $F_1$  et  $F_2$  obtenues sur nos échantillons sont des approximations de  $p$ . De plus, plus la taille de l'échantillon est grande, meilleure est l'approximation (revoir le chapitre sur les intervalles de confiance). Nous allons donc pondérer les valeurs observées dans nos échantillons par la taille respective de ces échantillons. On approchera  $p$  dans notre calcul par  $\hat{p} = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$ .

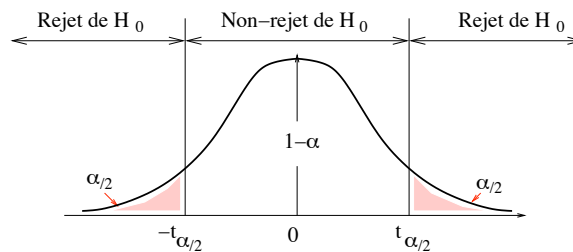
On pose

$$T = \frac{D}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$T$  mesure un écart réduit.  $T$  est la *fonction discriminante du test*.  $T \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

**3ème étape :** Détermination des valeurs critiques de  $T$  délimitant les zones d'acceptation et de rejet

On impose toujours à la zone d'acceptation de  $H_0$  concernant l'écart réduit d'être centrée autour de 0.



Il nous faut donc déterminer dans la table la valeur maximale  $t_{\alpha/2}$  de l'écart réduit imputable aux variations d'échantillonnage au seuil de signification  $\alpha$ , c'est-à-dire vérifiant  $P(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ .

**4ème étape :** Calcul de la valeur de  $T$  prise dans l'échantillon et conclusion du test

On calcule la valeur  $t_0$  prise par  $T$  dans l'échantillon.

- Si la valeur  $t_0$  se trouve dans la zone de rejet, on dira que l'écart-réduit observé est *statistiquement significatif* au seuil  $\alpha$ . Cet écart est anormalement élevé et ne permet pas d'accepter  $H_0$ . On rejette  $H_0$ .
- Si la valeur  $t_0$  se trouve dans la zone d'acceptation, on dira que l'écart-réduit observé *n'est pas significatif* au seuil  $\alpha$ . Cet écart est imputable aux fluctuations d'échantillonnage. On accepte  $H_0$ .

## 6.5 Test d'ajustement de deux distributions : “test du khi-deux”

### 6.5.1 Introduction

Lorsque nous avons accumulé suffisamment de données sur une variable statistique, on peut alors examiner si la distribution des observations semble s'apparenter à une distribution théorique connue (comme une loi binomiale, de Poisson, normale...). Un outil statistique qui permet de vérifier la concordance entre une distribution expérimentale et une distribution théorique est le *test de Pearson*, appelé aussi le *test du khi-deux*.

On cherche donc à déterminer si un modèle théorique est susceptible de représenter adéquatement le comportement probabiliste de la variable observée, comportement fondé sur les fréquences des résultats obtenus sur l'échantillon.

Comment procéder ?

#### Répartitions expérimentales

On répartit les observations suivant  $k$  classes (si le caractère est continu) ou  $k$  valeurs (si le caractère est discret). On dispose alors des effectifs des  $k$  classes :  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . On a bien sûr la relation

$$\sum_{i=1}^k n_i = N,$$

où  $N$  est le nombre total d'observations effectuées.

**Remarque 116** *Dans la pratique, on se placera dans le cas où  $N \geq 50$  et où chaque  $n_i$  est supérieur ou égal à 5. Si cette condition n'est pas satisfaite, il y a lieu de regrouper deux ou plusieurs classes adjacentes. Il arrive fréquemment que ce regroupement s'effectue sur les classes aux extrémités de la distribution.  $k$  représente donc le nombre de classes après regroupement.*

#### Répartitions théoriques

En admettant comme plausible une distribution théorique particulière, on peut construire une répartition idéale des observations de l'échantillon de taille  $N$  en ayant recours aux probabilités tabulées (ou calculées) du modèle théorique :  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . On obtient alors les effectifs théoriques

$n_{t,i}$  en écrivant  $n_{t,i} = Np_i$ . On dispose automatiquement de la relation  $\sum_{i=1}^k n_{t,i} = N$ .

#### Définition de l'écart entre les deux distributions

Pour évaluer l'écart entre les effectifs observés  $n_i$  et les effectifs théoriques  $n_{t,i}$ , on utilise la somme des écarts normalisés entre les deux distributions, à savoir

$$\chi^2 = \frac{(n_1 - n_{t,1})^2}{n_{t,1}} + \frac{(n_2 - n_{t,2})^2}{n_{t,2}} + \dots + \frac{(n_k - n_{t,k})^2}{n_{t,k}}.$$

Plus le nombre  $\chi^2$  ainsi calculé est grand, plus la distribution étudiée diffère de la distribution théorique.

#### Quelques considérations théoriques à propos de cet écart

Le nombre d'observations  $n_i$  parmi l'échantillon de taille  $N$  susceptible d'appartenir à la classe  $i$  est la réalisation d'une variable binomiale  $N_i$  de paramètres  $N$  et  $p_i$  (chacune des  $N$  observations appartient ou n'appartient pas à la classe  $i$  avec une probabilité  $p_i$ ). Si  $N$  est suffisamment grand (on se place dans le cas d'échantillons de taille 50 minimum) et  $p_i$  pas trop petit (on a effectué des regroupements de classes pour qu'il en soit ainsi), on peut approcher la loi binomiale par la loi normale, c'est-à-dire  $\mathcal{B}(N, p_i)$  par  $\mathcal{N}(Np_i, \sqrt{Np_i(1-p_i)})$ . Pour simplifier, on approxime  $Np_i(1-p_i)$  par  $Np_i$ . Donc  $\frac{N_i - Np_i}{\sqrt{Np_i}}$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Lorsqu'on élève au carré toutes ces quantités et qu'on en fait la somme, on obtient une somme de  $k$  lois normales centrées réduites (presque) indépendantes. Nous avons vu au chapitre 3 que cette somme suivait une loi du khi-deux.

**Mais quel est le nombre de degrés de liberté de cette variable du khi-deux ?**

Il y a  $k$  carrés, donc à priori  $k$  degrés de liberté. Mais on perd toujours un degré de liberté car on a fixé l'effectif total de l'échantillon,

$$\sum_{i=1}^k N_i = N.$$

On peut perdre d'autres degrés de liberté si certains paramètres de la loi théorique doivent être estimés à partir de l'échantillon.

1. Si la distribution théorique est entièrement spécifiée, c'est-à-dire si on cherche à déterminer si la distribution observée suit une loi dont les paramètres sont connus avant même de choisir l'échantillon, on a  $k - 1$  degrés de liberté ( $k$  carrés indépendants moins une relation entre les variables).
2. S'il faut d'abord estimer  $r$  paramètres de la loi à partir des observations de l'échantillon (par exemple on cherche si la distribution est normale mais on ne connaît d'avance ni sa moyenne ni son écart-type), il n'y a plus que  $k - 1 - r$  degrés de liberté.

Dans le cas général, on dira que la loi du khi-deux suivie par l'écart entre les deux distributions a  $k - 1 - r$  degrés de liberté lorsqu'on a estimé  $r$  paramètres de la loi théorique à partir des observations de l'échantillon (avec la possibilité pour  $r$  de valoir 0).

### 6.5.2 Le test d'ajustement de Pearson

Il nous faut maintenant décider, à l'aide de cet indicateur qu'est le  $\chi^2$ , si les écarts entre les effectifs théoriques et ceux qui résultent des observations sont significatifs d'une différence de distribution ou si ils sont dus aux fluctuations d'échantillonnage. Nous procéderons comme d'habitude en quatre étapes.

**1ère étape :** Formulation des hypothèses.

On va donc tester l'hypothèse  $H_0$  contre l'hypothèse  $H_1$  :

$$\begin{cases} H_0 & \text{Les observations suivent la distribution théorique spécifiée,} \\ H_1 & \text{Les observations ne suivent pas la distribution théorique spécifiée.} \end{cases}$$

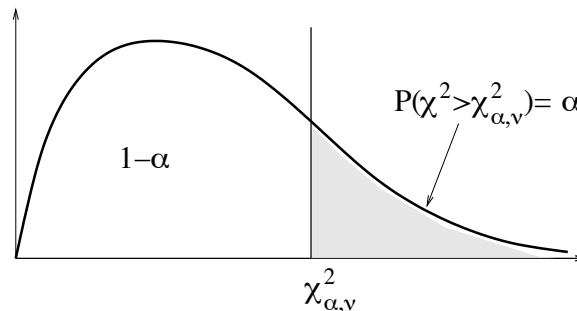
**2ème étape :** Détermination de la fonction discriminante du test et de sa distribution de probabilité.

On utilise la variable aléatoire

$$\chi^2 = \frac{(N_1 - n_{t,1})^2}{n_{t,1}} + \frac{(N_2 - n_{t,2})^2}{n_{t,2}} + \dots + \frac{(N_k - n_{t,k})^2}{n_{t,k}}.$$

**3ème étape :** Détermination des valeurs critiques de  $\chi^2$  délimitant les zones d'acceptation et de rejet.

On impose à la zone d'acceptation de  $H_0$  concernant la valeur du  $\chi^2$  d'être un intervalle dont 0 est la borne inférieure (car un  $\chi^2$  est toujours positif).



Il nous faut donc déterminer dans la table la valeur maximale  $\chi_{\alpha,\nu}^2$  de l'écart entre les deux distributions imputable aux variations d'échantillonnage au seuil de signification  $\alpha$ , c'est-à-dire vérifiant  $P(\chi^2 > \chi_{\alpha,\nu}^2) = \alpha$ .  $\chi_{\alpha,\nu}^2$  représente donc la valeur critique pour un test sur la concordance entre deux distributions et le test sera toujours unilatéral à droite.

**4ème étape :** Calcul de la valeur de  $\chi^2$  prise dans l'échantillon et conclusion du test.

On calcule la valeur  $\chi_0^2$  prise par  $\chi^2$  dans l'échantillon.

- Si la valeur  $\chi_0^2$  se trouve dans la zone de rejet, on dira que l'écart observé entre les deux distributions est *statistiquement significatif* au seuil  $\alpha$ . Cet écart est anormalement élevé et ne permet pas d'accepter  $H_0$ . On rejette  $H_0$ .
- Si la valeur  $\chi_0^2$  se trouve dans la zone d'acceptation, on dira que l'écart-réduit observé *n'est pas significatif* au seuil  $\alpha$ . Cet écart est imputable aux fluctuations d'échantillonnage. On accepte  $H_0$ .

## 6.6 Test d'homogénéité de plusieurs populations

### 6.6.1 Introduction

On prélève au hasard  $k$  échantillons de tailles  $n_1, n_2, \dots, n_k$  de  $k$  populations. Les résultats du caractère observé dans chaque population sont ensuite classés selon  $r$  modalités. Dans ce cas, les totaux marginaux (les  $n_i$ ) associés aux  $k$  échantillons sont fixés et ne dépendent pas du sondage. Il s'agit de savoir comparer les  $k$  populations entre elles et de savoir si elles ont un comportement semblable en regard du caractère étudié (qualitatif ou quantitatif). On rassemble les données dans un tableau à double entrée appelé *tableau de contingence*.

		Populations échantillonnées					
		$j = 1$	$j = 2$	...	$j$	...	$j = k$
Caractère observé selon $r$ modalités	$i = 1$	$n_{11}$	$n_{12}$		$n_{1j}$		$n_{1k}$
	$i = 2$	$n_{21}$	$n_{22}$		$n_{2j}$		$n_{2k}$
	...						
	$i$	$n_{i1}$	$n_{i2}$		$n_{ij}$		$n_{ik}$
	...						
	$i = r$	$n_{r1}$	$n_{r2}$		$n_{rj}$		$n_{rk}$
		$n_1 = \sum_{i=1}^r n_{i1}$	$n_2 = \sum_{i=1}^r n_{i2}$		$n_j = \sum_{i=1}^r n_{ij}$		$n_k = \sum_{i=1}^r n_{ik}$

### 6.6.2 Test d'homogénéité

Il s'agit de comparer les effectifs observés pour chaque modalité du caractère avec les effectifs théoriques sous l'hypothèse d'une répartition équivalente entre les  $k$  populations et ceci pour chaque modalité du caractère. Si nous notons  $p_{ij}$  la probabilité théorique pour qu'une unité statistique choisie au hasard dans la population  $j$  présente la modalité  $i$  du caractère étudié, on peut alors préciser les hypothèses de la façon suivante :

**1ère étape :** Formulation des hypothèses.

$H_0$  :  $p_{i1} = p_{i2} = \dots = p_{ik}$  pour  $i = 1, 2, \dots, r$ . Soit encore : les proportions d'individus présentant chaque modalité du caractère sont les mêmes dans les  $k$  populations.

$H_1$  :  $p_{ij_1} \neq p_{ij_2}$  pour au moins un  $i$  parmi  $1, 2, \dots, r$  et pour au moins deux  $j_1$  et  $j_2$  différents choisis parmi  $1, 2, \dots, k$ . Soit encore : les proportions d'individus présentant chaque modalité du caractère ne sont pas identiques pour toutes les populations pour au moins une modalité du caractère.

**2ème étape :** Détermination de la fonction discriminante du test et de sa distribution de probabilité.

Sous l'hypothèse d'homogénéité des populations, on doit comparer les effectifs observés aux effectifs théoriques. Pour calculer les effectifs théoriques, il nous faut déterminer  $p_i$ , la proportion d'individus associée à la modalité  $i$  et que l'on suppose identique dans les  $k$  populations. On obtiendra une estimation de cette proportion en utilisant l'ensemble des données collectées. On choisit donc

$$p_i = \frac{\sum_{j=1}^k n_{ij}}{\sum_{j=1}^k n_j}.$$

On en déduit les effectifs théoriques de chaque classe grâce à la relation

$$n_{t,ij} = p_i n_j.$$

Pour comparer les écarts entre ce qu'on observe et ce qui se passe sous l'hypothèse  $H_0$ , on considère la somme des écarts réduits de chaque classe, à savoir la quantité

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k \frac{(N_{ij} - n_{t,ij})^2}{n_{t,ij}}.$$

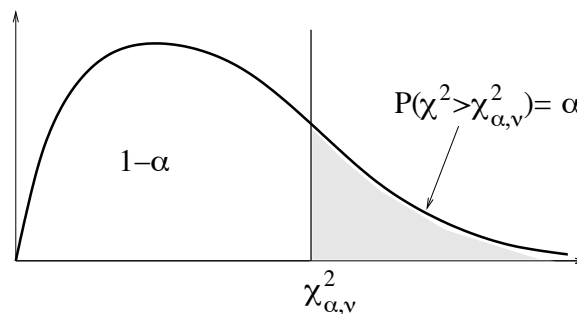
Cette variable aléatoire suit une loi du khi-deux (voir paragraphe précédent), mais quel est donc son nombre de degrés de liberté?

*Calcul du nombre de degrés de liberté du khi-deux.*

- A priori, on a  $kr$  cases dans notre tableau donc  $kr$  degrés de liberté. Mais il faut retirer à cette valeur, le nombre de paramètres estimés ainsi que le nombre de relations entre les différents éléments des cases.
- On a estimé  $r$  probabilités théoriques à l'aide des valeurs du tableau  $(p_1, p_2, \dots, p_r)$ , mais seulement  $r - 1$  sont indépendantes, puisqu'on impose la restriction  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ . Par ces estimations, on a donc supprimé  $r - 1$  degrés de liberté.
- Les effectifs de chaque colonne sont toujours liés par les relations  $\sum_{i=1}^r N_{ij} = n_j$  (puisque les  $n_j$  sont imposés par l'expérience) et ces relations sont au nombre de  $k$ .
- Finalement, le nombre de degrés de liberté du khi-deux est  $kr - (r - 1) - k = (k - 1)(r - 1)$ .

**3ème étape :** Détermination des valeurs critiques de délimitant les zones d'acceptation et de rejet.

On impose à la zone d'acceptation de  $H_0$  concernant la valeur du  $\chi^2$  d'être un intervalle dont 0 est la borne inférieure (car un  $\chi^2$  est toujours positif).



Il nous faut donc déterminer dans la table la valeur maximale  $\chi^2_{\alpha, \nu}$  de l'écart entre les deux distributions imputable aux variations d'échantillonnage au seuil de signification  $\alpha$ , c'est-à-dire vérifiant  $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha, \nu}) = \alpha$ .

**4ème étape :** Calcul de la valeur de  $\chi^2$  prise dans l'échantillon et conclusion du test.

On calcule la valeur  $\chi_0^2$  prise par  $\chi^2$  dans l'échantillon.

- Si la valeur  $\chi_0^2$  se trouve dans la zone de rejet, on dira que l'écart observé entre les deux distributions est *statistiquement significatif* au seuil  $\alpha$ . Cet écart est anormalement élevé et ne permet pas d'accepter  $H_0$ . On rejette  $H_0$ .

- Si la valeur  $\chi_0^2$  se trouve dans la zone d'acceptation, on dira que l'écart-réduit observé *n'est pas significatif* au seuil  $\alpha$ . Cet écart est imputable aux fluctuations d'échantillonnage. On accepte  $H_0$ .

CONCLUSION : Nous avons appris à effectuer un certain nombre de tests. Il en existe d'autres. Tous fonctionnent sur le même principe. Si vous avez compris ce qui précède, vous serez capables de les appréhender correctement lorsque vous les rencontrerez : suivez le modèle.

# Chapitre 7

## Ajustement analytique, régression, corrélation

### 7.1 Introduction

Il est fréquent de s'interroger sur la relation qui peut exister entre deux grandeurs en particulier dans les problèmes de prévision et d'estimation.

Trois types de problèmes peuvent apparaître.

- 1. On dispose d'un certain nombre de points expérimentaux  $(x_i, y_i)$ , où  $x_i$  et  $y_i$  sont les valeurs prises par les grandeurs  $x$  et  $y$  et on essaye de déterminer une relation fonctionnelle entre ces deux grandeurs  $x$  et  $y$ . Cette relation, pour des raisons théoriques ou pratiques s'écrira  $y = f(x, a, b, c, \dots)$  et le problème sera d'ajuster au mieux les paramètres  $a, b, c, \dots$  pour que la courbe représentative de  $f$  passe au plus près des points  $(x_i, y_i)$ . Il s'agit d'un problème d'ajustement analytique.

**Exemple 117** *Le nombre de particules émises par un élément radioactif varie en fonction du temps. On sait que la loi est de la forme  $n = n_0 e^{-\lambda t}$ . Les mesures expérimentales permettront d'estimer au mieux  $n_0$  et  $\lambda$ .*

- 2. On essaye de déterminer la relation statistique qui existe entre les deux grandeurs  $X$  et  $Y$ . Ce type d'analyse s'appelle analyse de régression. On considère que la variation de l'une des deux variables (par exemple  $X$ ) explique celle de l'autre (par exemple  $Y$ ). Chaque domaine d'application a baptisé de noms différents ces deux variables : On trouve ainsi :

$X$	$Y$
Variable explicative	Variable expliquée
Variable contrôlée	Réponse
Variable indépendante	Variable dépendante
Régresseur ....	

Dans ce type d'analyse, on fixe a priori les valeurs de  $X$ .  $X$  n'est donc pas une variable aléatoire. Mais la deuxième grandeur  $Y$ , elle, est une variable aléatoire et sa distribution est influencée par la valeur de  $X$ . On a alors du point de vue statistique une relation de cause à effet. Le problème sera d'identifier cette relation.

**Exemple 118** *On veut déterminer si un produit est toxique. Pour cela on le fait absorber en quantités variables par des souris et on mesure leur temps de survie. On partage la population des souris en quatre lots qui absorberont respectivement 0, 1, 2, 3 doses de produit.*

*$X$  = nombre de doses de produit est une variable contrôlée prenant les valeurs (0, 1, 2, 3).*

*$Y$  = temps de survie d'une souris est une variable aléatoire (réponse à la variable contrôlée  $X$ ).*

*Si  $Y$  est fonction de  $X$ , le produit est toxique. Connaître la relation entre  $X$  et  $Y$  nous permettra d'évaluer ses effets toxiques.*

- 3. Les deux grandeurs  $X$  et  $Y$  sont aléatoires et on cherche à savoir si leurs variations sont liées. Il n'y a pas ici de variable explicative ni de variable expliquée. Les variables peuvent avoir des causes communes de variation, parmi d'autres, qui expliquent leur relation d'un point de vue statistique : on est en présence d'un problème de corrélation. On cherche alors à mesurer le degré d'association entre les variables.

**Exemple 119** Poids et taille d'un individu, résultats obtenus à deux examens par des étudiants...

## 7.2 Ajustement analytique

### 7.2.1 Principe de l'ajustement

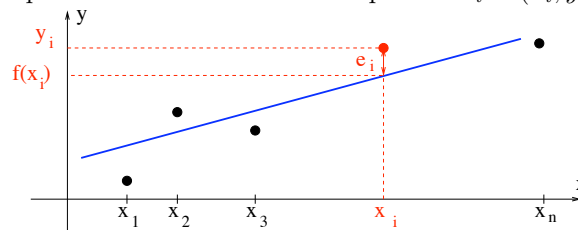
On dispose d'un certain nombre de points  $(x_i, y_i)$ , formant un nuage statistique, et on cherche à traduire la dépendance entre  $x$  et  $y$  par une relation de la forme  $y = f(x)$  ou  $x = g(y)$  selon ce qui a un sens, ou selon ce qui nous intéresse.

- Si une relation théorique s'impose à nous comme dans l'exemple des particules radioactives, on ajuste au mieux les paramètres de la loi théorique.
- S'il nous faut déterminer empiriquement  $f$  ou  $g$ , on privilégiera les modèles linéaires. Précisons que la linéarité du modèle ne doit pas prêter à confusion : le terme linéaire ne se réfère qu'aux paramètres du modèle :  $y = a + bx$  ou  $y = a + bx + cx^2$  sont des modèles linéaires alors que dans le deuxième exemple la relation entre  $x$  et  $y$  est quadratique. En revanche,  $y = \beta_0 \beta_1^x$  n'est pas un modèle linéaire. Pour déterminer cette relation empirique la forme du nuage statistique peut guider notre choix.

Mais quelle méthode utiliser pour déterminer au mieux les paramètres du modèle ?

### 7.2.2 Méthode des moindres carrés

- Soit  $y = f(x, a, b, c, \dots)$  l'équation de la courbe que l'on cherche à ajuster au nuage statistique. Nous voudrions que les erreurs entre la valeur observée  $y_i$  et la valeur ajustée  $f(x_i)$  soit minimales. Appelons  $e_i$  la différence  $e_i = y_i - f(x_i)$ .  $e_i$  est le résidu de la  $i$ -ème observation et sa valeur absolue représente la distance entre les points  $M_i = (x_i, y_i)$  et  $P_i = (x_i, f(x_i))$ .



- Les résidus étant positifs ou négatifs, leur somme peut être de faible valeur pour une courbe mal ajustée. On évite cette difficulté en considérant la somme des carrés des résidus (la somme de valeurs absolues n'étant pas pratique pour des développements mathématiques).
- Cette somme  $S(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n e_i^2$  dépend des paramètres  $a, b, c, \dots$  à ajuster. On choisira ces paramètres de manière qu'elle soit minimale.  $\sum_{i=1}^n e_i^2$  est appelé *variation résiduelle* et nous donne une mesure de l'ampleur de l'éparpillement des observations  $y_i$  autour de la courbe d'ajustement.

### 7.2.3 Cas du modèle linéaire d'ordre 1

Dans ce cas la courbe d'ajustement sera une droite d'équation  $y = a + bx$ . Il nous faut déterminer les deux paramètres  $a$  et  $b$ .

La variation résiduelle s'écrit  $S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$ .  $S(a, b)$  sera minimum lorsque  $\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0$ . On calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i), \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)x_i. \end{aligned}$$

En distribuant l'opérateur  $\sum$ , il vient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i - na - b \sum_{i=1}^n x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - b \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0, \end{aligned}$$

ce qui conduit à deux équations dites *normales*

$$\begin{aligned} na + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned}$$

Interprétation géométrique. Notons  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $\vec{1} = (1, \dots, 1)$ . Alors  $S(a, b)$  est le carré de la distance de  $\vec{y}$  au point  $a\vec{1} + b\vec{x}$ . Par conséquent,  $a\vec{1} + b\vec{x}$  est la projection orthogonale de  $\vec{y}$  sur le plan passant par  $\vec{x}$ ,  $\vec{1}$  et l'origine.

**Remarque 120** *Ce système se généralise facilement aux modèles linéaires d'ordre  $m$  (courbes d'ajustement polynômiales à  $m$  paramètres). On obtient un système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues. L'utilisation des techniques matricielles facilite considérablement sa résolution.*

En résolvant ce système, on obtient

$$\begin{aligned} \text{la pente de la droite } b &= \frac{n(\sum_{i=1}^n x_i y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \\ \text{l'ordonnée à l'origine } a &= \frac{n(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}. \end{aligned}$$

Autres expressions pour  $a$  et  $b$  :

On introduit  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ . Si on utilise le fait que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)$$

et que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2,$$

l'écriture de  $b$  simplifie,

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

et la première équation normale permet de déterminer  $a$ ,

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

**Remarque 121** 1.  $\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0$  ne sont que des conditions nécessaires de minimalité pour  $S$ . L'étude des dérivées secondes montre effectivement que les valeurs trouvées minimisent  $S(a, b)$ .

2. La seconde équation signifie que la droite d'ajustement passe par le point  $(\bar{x}, \bar{y})$  appelé point moyen du nuage.

3. Cette droite des moindres carrés est appelée droite de régression de  $y$  en  $x$ . Elle est unique.

4. Si on avait cherché à exprimer la relation entre  $x$  et  $y$  par  $x = a' + b'y$ , on aurait obtenu la droite de régression de  $x$  en  $y$  qui minimise la somme des carrés des distances entre les points  $M_i = (x_i, y_i)$  et  $Q_i = (a' + b'y_i, y_i)$ .

Historiquement, c'est sir Francis GALTON (1822-1911), cousin de Charles DARWIN, qui a introduit la notion de régression : Il a comparé la taille des enfants adultes à la taille moyenne de leurs parents (en multipliant celle des femmes par 1.08). En regroupant les données en classes et en représentant chaque classe par son centre, il a obtenu une relation presque linéaire dont la pente est une estimation de l'héritabilité et est d'environ 2/3. Ceci signifie que des parents très grands ont des enfants plus petits qu'eux, et que des parents très petits ont des enfants plus grands qu'eux. D'où une régression vers la moyenne.

## 7.2.4 Transformations simples permettant d'étendre l'usage de l'ajustement linéaire

### Schéma exponentiel

$y$  et  $x$  sont liés par une relation du type  $y = y_0\alpha^x$  (1). On en déduit  $\ln y = \ln y_0 + x \ln \alpha$ .

En posant  $Y = \ln y$ ,  $a = \ln y_0$ ,  $b = \ln \alpha$ , on est ramené à la recherche des paramètres de la droite  $Y = a + bx$  qui représente (1) sur un graphique semi-logarithmique.

### Schéma à élasticité constante

$Q$  et  $P$  sont liés par une relation du type  $Q = AP^E$  (2), où  $Q$  est la quantité offerte d'un produit,  $P$  le prix demandé,  $E$  l'élasticité,  $A$  une constante de normalisation. Ce schéma est courant en économie. On tire de (2) la relation  $\ln Q = \ln A + E \ln P$ .

En posant  $Y = \ln Q$ ,  $X = \ln P$ ,  $a = \ln A$ , on est ramené à la recherche des paramètres de la droite  $Y = a + EX$  qui représente la relation (2) sur un graphique à doubles coordonnées logarithmiques.

### Schéma gaussien

Nous avons vu qu'il existe entre la valeur  $x$  d'une variable statistique distribuée normalement et sa fréquence cumulée  $y$  la relation  $y = \Pi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$  (3), où  $\Pi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Cette relation peut s'écrire  $\Pi^{-1}(y) = \frac{x-m}{\sigma}$ , et si l'on pose  $t = \Pi^{-1}(y)$ , elle devient  $t = \frac{x-m}{\sigma}$ . La relation (3) est donc représentée par une droite, la droite de Henry, sur un papier gauss-arithmétique.  $m$  et  $\sigma$ , caractéristiques de la distribution normale peuvent alors être estimés par la méthode des moindres carrés.

**Conclusion**

Cette méthode d’ajustement analytique est une méthode d’analyse numérique. Nous allons à présent la traiter sous l’angle statistique, en considérant d’abord, pour tout  $i$  entre 1 et  $n$ ,  $y_i$  comme la réalisation d’une variable aléatoire  $Y_i$ , les  $x_i$  n’étant pas aléatoires (analyse de régression), puis en considérant, pour tout  $i$  entre 1 et  $n$ ,  $x_i$  et  $y_i$  comme les réalisations de deux variables aléatoires  $X_i$  et  $Y_i$  (problème de corrélation).

**7.3 Le modèle de régression linéaire simple**

**7.3.1 Introduction**

Commençons par un exemple. Le directeur du personnel d’une compagnie de jouets, a découvert qu’il existe une relation logique et étroite entre le rendement fourni par les employés et le résultat obtenu à un test d’aptitudes qu’il a élaboré. Sur huit employés, il a obtenu les résultats suivants

Employés	A	B	C	D	E	F	G	H
Production (Y) (en douzaine d’unités)	30	49	18	42	39	25	41	52
Résultats au test d’aptitude (X)	6	9	3	8	7	5	8	10

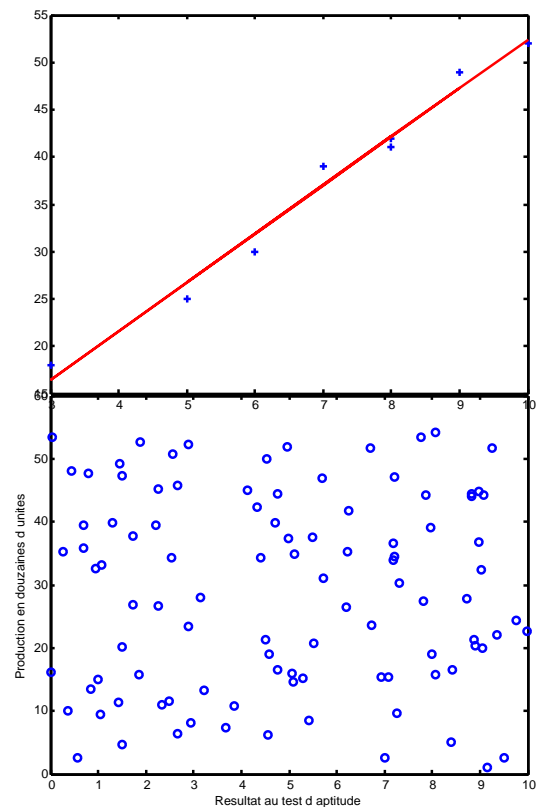
Supposons de plus que ce directeur ait calculé, par la technique du paragraphe précédent, une équation d’estimation (l’équation de la droite de régression) pour prédire le rendement futur du candidat (la variable dépendante) en se fondant sur les résultats du test (la variable indépendante).

$$Y = 1.0277 + 5.1389X.$$

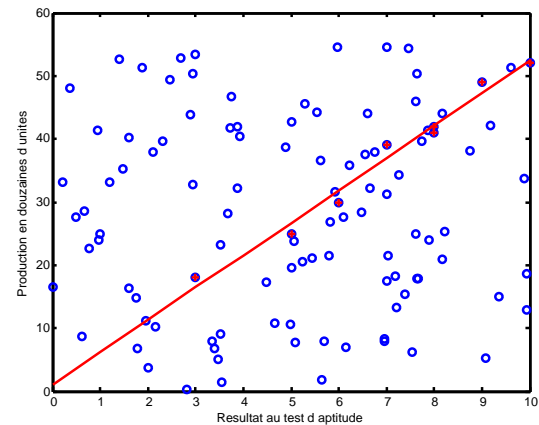
On représente sur la figure ci-contre le nuage de points et la droite de régression ainsi obtenus.

L’analyse de régression peut nous permettre de déterminer le degré de fiabilité des prédictions obtenues à l’aide de cette équation.

Au vu des résultats observés, il semble qu’il y ait une relation assez étroite entre les résultats au test et la productivité des employés. Mais les apparences sont parfois trompeuses. Qu’en serait-il si la population totale de l’ensemble des employés était répartie comme l’indique la figure (a) ci-contre ?

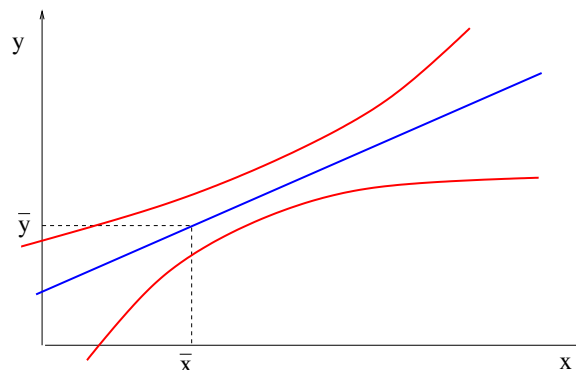


Serait-il possible que, malgré l'échantillon obtenu, un tel diagramme représente l'ensemble des employés de la compagnie ? Si tel était le cas, il nous faudrait conclure qu'il n'existe pas de relation entre  $X$  et  $Y$  car dans une telle situation, la pente de la droite de régression pour la population (paramètre que nous représenterons par le symbole  $\beta$ ) serait égale à 0. En somme, il est possible que le directeur ait eu un coup de malchance et que l'échantillon qu'il a prélevé l'ait fortement induit en erreur. Un tel cas n'est pas impossible. En effet, on pourrait représenter l'échantillon, perdu dans la population, sur la figure (b) ci-contre.



La pente positive de la droite de régression échantillonnale nous indique une relation. On constate qu'alors le résultat obtenu grâce à l'échantillon est en contradiction avec la réalité de la population.

Comment conclure ? Il nous faut effectuer un calcul statistique pour constater qu'un tel cas n'est certes pas impossible mais fortement improbable. On pourra juger correctement grâce au calcul d'un intervalle de confiance, ou en effectuant un test d'hypothèses. On constatera que la vraie droite de régression (calculée à partir de la population toute entière) peut être, selon les données et la taille de l'échantillon, assez différente de la droite de régression obtenue à partir de l'échantillon mais que, statistiquement, elle se situe dans une région voisine, comme le montre la figure suivante.



Or pour pouvoir utiliser les techniques de l'analyse de régression linéaire simple en inférence statistique (intervalles de confiance, tests), il faut que certaines hypothèses soient vérifiées. Nous allons les préciser dans les deux paragraphes suivants.

### 7.3.2 Définition du modèle

Étant donné  $n$  couples d'observations  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , si l'on suppose que la relation plausible entre les deux grandeurs  $X$  et  $Y$  est linéaire et d'ordre un, alors le modèle de régression linéaire simple s'écrit

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

où

- $Y_i$  est la variable dépendante (ou expliquée) ayant un caractère aléatoire et dont les valeurs sont conditionnées par la valeur  $x_i$  de la variable explicative (ou contrôlée)  $X$  et par celles de la composante aléatoire  $\epsilon_i$ .  $y_i$  représente la réalisation de la  $i$ -ème variable aléatoire  $Y_i$ .

- $x_i$  est la valeur de la variable explicative (ou régresseur)  $X$  mesurée sans erreur ou dont les valeurs sont fixées avant expérience à des valeurs arbitraires. Elle n'est pas susceptible de variations aléatoires et on la considère comme une grandeur certaine.
- $\epsilon_i$  dénote la fluctuation aléatoire non observable, attribuable à un ensemble de facteurs ou de variables non pris en considération dans le modèle. Cette fluctuation aléatoire n'est pas expliquée par le modèle et se reflète sur la variable dépendante  $Y_i$ .

**Conclusion.** Pour chaque valeur particulière  $x_i$  prise par le régresseur  $X$ , la variable dépendante  $Y_i$  est une variable aléatoire caractérisée par

- Une certaine distribution de probabilité.
- Des paramètres descriptifs : sa moyenne et sa variance.

### 7.3.3 Conditions d'application du modèle

Pour pouvoir étudier le modèle de régression linéaire simple, il faut préciser certaines hypothèses fondamentales qui assurent le fondement théorique des méthodes d'analyse que nous allons employer.

**Hypothèses fondamentales du modèle linéaire simple**  $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$ .

- La courbe joignant les moyennes des distributions des  $Y_i$  pour les différentes valeurs  $x_i$  est une droite. Dans ce cas l'équation de régression est de la forme  $E(Y_i) = \alpha + \beta x_i$ . Comme nous savons que  $E(Y_i) = \alpha + \beta x_i + E(\epsilon_i)$ , on en tire que  $E(\epsilon_i) = 0$ . Les erreurs aléatoires sont de moyenne nulle.
- La variance  $\sigma^2$  de chaque distribution des  $Y_i$  est la même quelle que soit la valeur  $x_i$  prise par la variable explicative  $X$ . Pour tout  $i$  entre 0 et  $n$ ,  $Var(Y_i) = \sigma^2$ . Ceci est équivalent à dire que la variance des  $\epsilon_i$  (c'est-à-dire des erreurs aléatoires) demeure constante et égale à  $\sigma^2$  pour toutes les valeurs de  $X$ .

$$Var(Y_i) = Var(\alpha + \beta x_i) + Var(\epsilon_i) = 0 + \sigma^2.$$

On suppose donc que l'ampleur de la dispersion de chaque distribution des  $Y_i$  est identique, quelle que soient les valeurs prises par la variable explicative  $X$ .

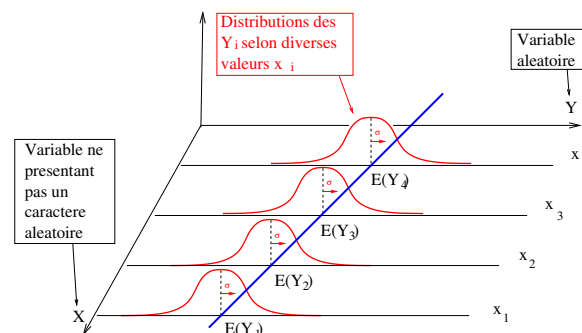
- Les  $Y_i$  sont des variables aléatoires indépendantes, c'est-à-dire que les observations de la variable expliquée ne dépendent pas des observations précédentes et n'influent pas sur les suivantes.
- La distribution des  $Y_i$  est une distribution normale. Ceci revient également à dire que les erreurs  $\epsilon_i$  sont distribuées normalement.

Ces hypothèses fondamentales peuvent se résumer ainsi :

$$Y_i \rightarrow N(\alpha + \beta x_i, \sigma), \quad \epsilon_i \rightarrow N(0, \sigma),$$

les variables  $Y_i$  étant indépendantes.

On peut schématiser ces hypothèses par la figure ci-dessous :



### 7.3.4 Inférence sur les paramètres du modèle : estimations et tests d'hypothèse

- Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont appelés paramètres de régression. Ce sont des constantes, ordonnée à l'origine et pente de la droite de régression, que l'on pourrait calculer si le nuage de points englobait la population toute entière.
- Les valeurs  $a$  et  $b$  déterminées par l'ajustement analytique au paragraphe 7.2 permettent d'en donner une estimation.  $a$  et  $b$  sont même les meilleurs estimateurs possibles de  $\alpha$  et  $\beta$  (en anglais, on utilise le terme BLUE (pour Best Linear Unbiased Estimators).
- On considère que  $a$  et  $b$  sont les valeurs observées dans notre  $n$ -échantillon des variables aléatoires d'échantillon, notées  $A$  et  $B$ , et définies par

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad A = \bar{Y} - B\bar{x},$$

où  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ .

Pour pouvoir effectuer des calculs statistiques, établir un intervalle de confiance ou exécuter un test statistique sur l'un ou l'autre des paramètres de régression  $\alpha$  et  $\beta$ , il nous faut connaître la distribution d'échantillonnage des deux variables  $A$  et  $B$ . Il faut donc en connaître la forme, la moyenne et la variance. C'est l'objet des deux paragraphes suivants.

#### Distribution d'échantillonnage de la variable $B$

**Proposition 122**  $B$  suit une loi normale,

$$E(B) = \beta, \quad \text{Var}(B) = \frac{\sigma^2}{n\sigma_x^2}.$$

**Preuve.**  $B$  est une combinaison linéaire de variables normales indépendantes. Elle est donc distribuée suivant une loi normale. On calcule

$$\begin{aligned} E(B) &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(E(Y_i) - E(\bar{Y}))}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\alpha + \beta x_i - \alpha - \beta \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \beta, \end{aligned}$$

donc  $B$  est un estimateur sans biais de  $\beta$ .

$$\begin{aligned} \text{Var}(B) &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{Var}(Y_i)}{(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2)^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \blacksquare \end{aligned}$$

#### Distribution d'échantillonnage de la variable $A$

Il est moins fréquent d'effectuer de l'inférence statistique concernant le paramètre  $\alpha$ . Plusieurs situations ne comportent aucune valeur dans le voisinage de  $X = 0$ . De plus, dans certains cas, l'interprétation du paramètre  $\alpha$  est dénuée de sens, dans d'autres, elle présente un certain intérêt. Donnons rapidement les résultats concernant la distribution d'échantillonnage de la variable  $A$ .

**Proposition 123**  $A$  suit une loi normale,

$$E(A) = \alpha, \quad \text{Var}(A) = \sigma^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n\sigma_x^2} \right).$$

**Preuve.**  $A$  est une combinaison linéaire de variables normales indépendantes. Elle est donc distribuée suivant une loi normale. On calcule

$$\begin{aligned} E(A) &= E(\bar{Y}) - E(B)\bar{x} = \bar{y} - \beta\bar{x} \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

donc  $A$  est un estimateur sans biais de  $\alpha$ . On développe

$$A = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - \bar{x} \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) Y_i,$$

d'où

$$\begin{aligned} V(A) &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - \bar{x} \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^2 \sigma^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n^2} + \bar{x}^2 \frac{(x_i - \bar{x})^2}{(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2)^2} \right) \sigma^2 \\ &= \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) \sigma^2. \blacksquare \end{aligned}$$

### Recherche d'un estimateur de $\sigma^2$

Comme  $\sigma^2$  est la variance des variables centrées indépendantes  $\epsilon_i$ , il est naturel de chercher à estimer  $\sigma^2$  au moyen de la moyenne des carrés des  $\epsilon_i$ .

**Définition 124** On introduit la variable aléatoire

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - A - Bx_i)^2.$$

### Proposition 125

$$E(S^2) = \sigma^2.$$

Autrement dit,  $S$  est un estimateur sans biais de  $\sigma^2$ .

**Preuve.** On repart de

$$E((B - \beta)(Y_j - \alpha - \beta x_j)) = \frac{x_j - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sigma^2.$$

On poursuit avec

$$\begin{aligned} E((A - \alpha)(Y_j - \alpha - \beta x_j)) &= E((\bar{Y} - \alpha - \beta\bar{x} - (B - \beta)\bar{x})(Y_j - \alpha - \beta x_j)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E((Y_i - \alpha - \beta x_i)(Y_j - \alpha - \beta x_j)) - E((B - \beta)\bar{x}(Y_j - \alpha - \beta x_j)) \\ &= \frac{1}{n} E((Y_i - \alpha - \beta x_i)^2) - \bar{x} E((B - \beta)(Y_j - \alpha - \beta x_j)) \\ &= \left( \frac{1}{n} - \bar{x} \frac{x_j - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) \sigma^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E((A - \alpha)(B - \beta)) &= E(\bar{Y} - \alpha - \beta\bar{x} - (B - \beta)\bar{x})(B - \beta) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E((Y_j - \alpha - \beta x_j)(B - \beta)) - \bar{x}E((B - \beta)^2) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{x_j - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sigma^2 - \bar{x} \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\
 &= -\frac{\bar{x}\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}
 \end{aligned}$$

On écrit  $Y_j - A - Bx_j = Y_j - \alpha - \beta\bar{x} - (A - \alpha) - (B - \beta)x_j$ ,

$$\begin{aligned}
 E((Y_j - A - Bx_j)^2) &= E((Y_j - \alpha - \beta\bar{x})^2 + E((A - \alpha)^2) + x_j^2 E((B - \beta)^2) \\
 &\quad - 2E((A - \alpha)(Y_j - \alpha - \beta\bar{x})) - 2x_j E((B - \beta)(Y_j - \alpha - \beta\bar{x})) \\
 &\quad + 2x_j E((A - \alpha)(B - \beta)) \\
 &= \sigma^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} + \frac{x_j^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right. \\
 &\quad \left. - 2\left(\frac{1}{n} - \bar{x} \frac{x_j - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\right) - 2x_j \frac{x_j - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} - 2x_j \frac{\bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) \\
 &= \sigma^2 \left( 1 - \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2 - 2\bar{x}x_j + x_j^2 - 2(x_j - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right),
 \end{aligned}$$

d'où, en sommant,

$$E((n-2)S^2) = \sigma^2 \left( n \left( 1 - \frac{1}{n} \right) - 1 \right). \blacksquare$$

Interprétation géométrique. Notons  $\vec{Y}$  le vecteur aléatoire dont les composantes sont les  $Y_i$ ,  $\vec{\mathbf{1}}$  celui dont toutes les composantes sont égales à 1 et  $\vec{x}$  celui dont les composantes sont les  $x_i$ . Alors  $A + B\vec{x}$  est la projection orthogonale de  $\vec{Y}$  sur le plan vectoriel engendré par  $\vec{\mathbf{1}}$  et  $\vec{x}$ . Par conséquent,  $\vec{Z} = \vec{Y} - A\vec{\mathbf{1}} - B\vec{x}$  évolue dans un espace vectoriel de dimension  $n - 2$ . C'est pourquoi, pour trouver sa variance, il faut diviser la somme des carrés de ses composantes par  $n - 2$ . Plus précisément, soit  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base orthonormée telle que  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-2})$  soit une base du plan vectoriel orthogonal à  $\vec{\mathbf{1}}$  et  $\vec{x}$ . Alors

$$\|\vec{Z}\|^2 = \sum_{i=1}^{n-2} (\vec{e}_i \cdot \vec{Z})^2$$

est une somme de variables indépendantes qui suivent une loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma)$ . Il vient

$$\begin{aligned}
 E((n-2)S^2) &= E(\|\vec{Z}\|^2) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-2} V(\vec{e}_i \cdot \vec{Z}) \\
 &= (n-2)\sigma^2.
 \end{aligned}$$

### Distribution d'échantillonnage de la variable $S^2$

**Proposition 126**  $(n-2)S^2/\sigma^2$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $n-2$  degrés de liberté,

$$E(S^2) = \sigma^2, \quad \text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-2}.$$

**Preuve.** On montre que les vecteurs aléatoires  $\vec{Y} - A\vec{\mathbf{1}} - B\vec{x}$  et  $A\vec{\mathbf{1}} - B\vec{x}$  sont indépendants. Par conséquent,  $\vec{Y} - A\vec{\mathbf{1}} - B\vec{x}$  peut s'écrire comme la somme de  $n - 2$  vecteurs indépendants, centrés, de même variance. Il en résulte que le carré de la norme de  $\vec{Y} - A\vec{\mathbf{1}} - B\vec{x}$  est la somme de  $n - 2$  carrés de variables indépendantes, normales, centrées, de variance  $\sigma^2$ .  $\blacksquare$

**Standardisation : a. cas des grands échantillons ( $n \geq 30$ )**

Si  $n \geq 30$ , on peut estimer  $\sigma^2$  par  $s^2$  qui est la valeur prise dans l'échantillon de  $S^2$  estimateur non biaisé de  $\sigma^2$ . Alors

$$T = \frac{B - \beta}{s / \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Standardisation : b. cas des petits échantillons ( $n < 30$ )**

Si  $n < 30$ ,

$$T = \frac{B - \beta}{S / \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

suit une loi de Student à  $n - 2$  degrés de liberté.

**Remarque 127** On n'a que  $n - 2$  degrés de liberté car dans  $S$  on a estimé les deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  par  $A$  et  $B$ . On peut trouver le même résultat en considérant qu'il y a deux relations entre  $A$ ,  $B$  et les  $Y_i$ .

**Utilisation de ces lois**

Grâce à la connaissance de ces lois, on pourra selon les cas :

- obtenir des intervalles de confiance pour  $\alpha$  et  $\beta$ , ce qui nous permet de préciser la marge d'erreur de leurs estimations  $a$  et  $b$ .
- effectuer un test d'hypothèse sur  $\beta$ , pente de la droite de régression.

Si par exemple, on veut déterminer si la dépendance linéaire entre  $X$  et  $Y$  est significative (en admettant que le modèle linéaire d'ordre 1 est plausible), il nous faudra savoir si la pente de la droite de régression est significativement différente de 0. Dans ce cas on dira que la composante linéaire permet d'expliquer d'une façon significative les fluctuations dans les observations de  $Y_i$ .

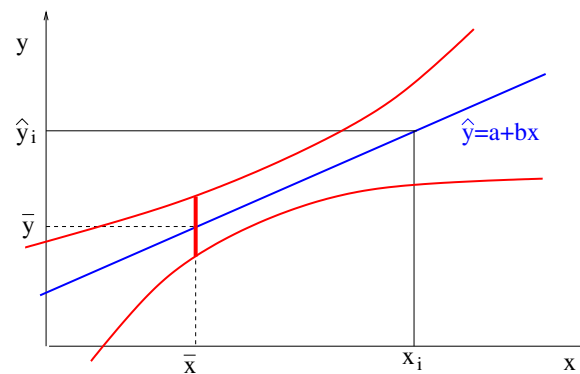
On testera alors l'hypothèse  $H_0 : \beta = 0$   
contre  $H_1 : \beta \neq 0$ .

**7.3.5 Quelques considérations pratiques dans l'application des méthodes de régression****Extrapolation avec une équation de régression**

Il faut être très prudent dans l'utilisation d'une équation de régression en dehors des limites du domaine étudié de la variable explicative. La droite de régression empirique est basée sur un ensemble particulier d'observations. Lorsque nous effectuons une prévision au delà des valeurs de  $X$  utilisées dans l'analyse de régression, nous effectuons une extrapolation.

Du point de vue purement statistique, toute extrapolation avec une équation de régression n'est pas justifiée puisqu'il n'est absolument pas évident que le phénomène étudié se comporte de la même façon en dehors du domaine observé. En effet la vraie fonction de régression peut être linéaire pour un certain intervalle de la variable explicative et présenter un tout autre comportement (du type curviligne par exemple) en dehors du champ observé.

Même si des considérations théoriques ou pratiques permettent de penser que l'équation de régression peut s'appliquer dans tout domaine, un autre inconvénient apparaît : la précision de nos estimations et de nos prévisions diminue à mesure que l'on s'éloigne de la valeur moyenne de la variable explicative, c'est-à-dire que la marge d'erreur augmente comme le montre la figure ci-après.



### Relation de cause à effet

Le fait qu'une liaison statistique existe entre deux variables n'implique pas nécessairement une relation de cause à effet. Il faut s'interroger sur la pertinence de la variable explicative utilisée comme élément prédictif de la variable dépendante et examiner s'il n'existe pas certains facteurs ou variables non incluses dans l'analyse et dont les variations provoquent sur les variables initiales de l'étude un comportement de régression illusoire.

### Étude de la pertinence du modèle

Une manière simple de détecter les défaillances du modèle consiste à calculer les résidus donnés par la formule :  $e_i = y_i - (a + bx_i)$  et surtout les résidus réduits  $er_i = e_i/s$  où  $s$  est l'estimateur non biaisé de l'écart-type  $\sigma$  de la distribution des erreurs. Ces résidus réduits estiment les erreurs réduites qui sont distribuées normalement suivant une loi gaussienne centrée réduite.

Une étude systématique des résidus est un élément essentiel de toute analyse de régression. Un graphique de ces résidus révèle les gros écarts au modèle. On doit représenter le graphique des résidus en fonction de toute caractéristique qui peut avoir une action sur eux. Voici trois graphiques possibles qui paraissent naturels et qui permettent d'éviter bien des erreurs.

- Graphique des résidus  $er_i$  en fonction des valeurs ajustées .
- Graphique des résidus  $er_i$  en fonction des valeurs  $x_i$  du régresseur.
- Graphique des résidus  $er_i$  dans leur ordre d'acquisition ; en effet le temps peut être la caractéristique essentielle dans de nombreuses études.

Si le modèle est correct, les résidus  $er_i$  doivent se trouver approximativement entre -2 et +2, étant entendu que leur moyenne est nulle. Ils ne doivent présenter aucune structure particulière. Si jamais ils en présentent une, c'est que le modèle n'est pas complètement pertinent.

### 7.3.6 Mesure de l'ajustement : l'analyse de variance

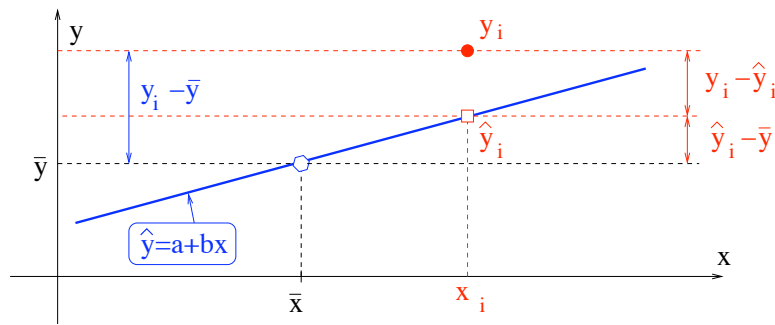
Un autre objectif d'une étude de régression est de déterminer dans quelle mesure la droite de régression est utile à expliquer la variation existante dans les observations des  $Y_i$ . On veut donc évaluer la qualité de l'ajustement du modèle linéaire simple.

#### Analyse de la variance

On rappelle que l'on note  $\hat{y}_i$  la valeur estimée de  $Y_i$  à l'aide de la droite de régression :  $\hat{y}_i = a + bx_i$ . Pour chaque valeur  $y_i$ , l'écart total  $y_i - \bar{y}$  peut être décomposé en somme de deux écarts :

$y_i - \bar{y}$	=	$\hat{y}_i - \bar{y}$	=	$y_i - \hat{y}_i$
<b>écart total</b>		<b>écart expliqué</b> par la droite de régression lorsque $X = x_i$	<b>+</b>	<b>écart inexpliqué</b> par la droite de régression lorsque $X = x_i$ : <b>résidu</b>

Cette décomposition peut être visualisée sur la figure ci-après.



On peut donc exprimer la variation totale dans les observations de  $y_i$  comme la somme d'une variation expliquée (attribuable à la droite de régression) et d'une variation inexpliquée (attribuable aux résidus). On démontre le résultat suivant :

$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ <p style="text-align: center;"> <b>variation totale</b> = <b>variation expliquée</b> + <b>variation résiduelle</b>                      par la régression                 </p>
---

### Le coefficient de détermination

Pour mieux apprécier la contribution de la variable explicative pour expliquer les fluctuations dans la variable dépendante on définit le coefficient de détermination, appelé aussi coefficient d'explication. Ce nombre, noté  $r^2$ , est la proportion de la variation totale qui est expliquée par la droite de régression.

$$r^2 = \frac{\text{variation expliquée}}{\text{variation totale}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

- C'est un indice de la qualité de l'ajustement de la droite aux points expérimentaux.
- Ce coefficient varie toujours entre 0 et 1. Cette propriété découle immédiatement de la définition.
- $100r^2$  a une interprétation concrète : c'est le pourcentage de la variation de  $Y$  qui est expliquée par la variation de  $X$ .
- On peut déduire de  $r^2$  le coefficient de corrélation linéaire simple par  $r = \pm\sqrt{r^2}$ , le signe de  $r$  étant le même que celui de  $b$ , pente de la droite de régression.

On démontre algébriquement que

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}}$$

Nous définirons un coefficient analogue dans le paragraphe suivant qui concerne justement la corrélation pour mesurer l'intensité de la liaison linéaire entre deux variables.

## 7.4 Corrélation linéaire

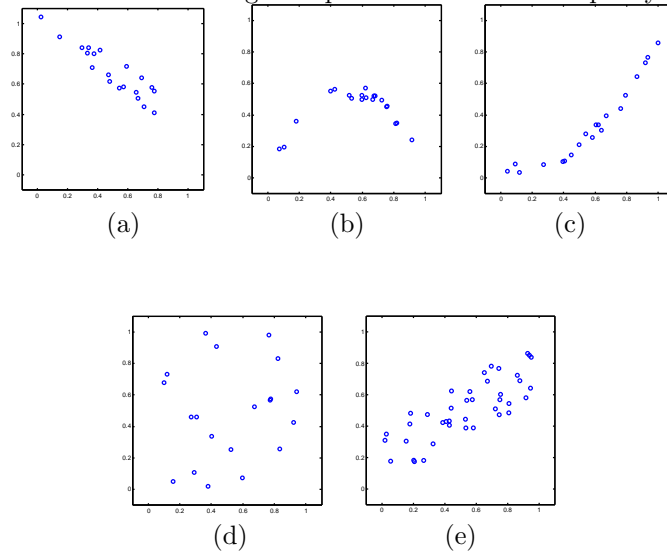
### 7.4.1 Introduction et vocabulaire

Nous prélevons d'une population un échantillon aléatoire de taille  $n$  et nous observons, sur chaque unité de l'échantillon les valeurs de deux variables statistiques que nous notons conventionnellement  $X$  et  $Y$ . On dispose donc de  $n$  couples d'observations  $(x_i, y_i)$ . On veut déterminer par la suite si les variations des deux variables sont liées entre elles, c'est à dire s'il y a corrélation entre ces deux variables.

L'existence de cette corrélation peut être déterminée graphiquement en traçant le nuage des points  $M_i = (x_i, y_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , appelé *diagramme de dispersion*. La forme de ce nuage nous permettra de déceler le cas échéant, la nature de la liaison entre  $X$  et  $Y$ . Il nous renseignera sur la forme de la liaison statistique entre les deux variables observées ainsi que sur l'intensité de cette liaison.

- Dans ce cours, nous ne traiterons que de la forme linéaire. les points auront alors tendance à s'aligner selon une droite. On dit qu'il y a *corrélation linéaire*.
- Si  $Y$  croît en même temps que  $X$ , la corrélation est dite *directe* ou *positive*. Si  $Y$  décroît lorsque  $X$  croît, la corrélation est dite *inverse* ou *négative*.

Essayons d'associer aux différents nuages de points les conclusions qui s'y rattachent.



Conclusions :

- (a) Forte corrélation négative
- (b) Absence de corrélation linéaire mais présence d'une liaison de forme parabolique.
- (c) Faible corrélation linéaire mais présence d'une liaison de forme parabolique.
- (d) Absence de corrélation et aucune liaison apparente. Indépendance entre ces deux variables.
- (e) Corrélation positive marquée.

#### 7.4.2 Définition du coefficient de corrélation linéaire

**Définition 128** *Le coefficient de corrélation linéaire, noté  $r$ , est un nombre sans dimension qui mesure l'intensité de la liaison linéaire entre deux variables observées dans un échantillon de taille  $n$ . Il est donné par la formule*

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

De même que le coefficient de détermination,  $r^2$  représente le pourcentage de la variation de  $y$  expliquée par la variation de  $x$ .

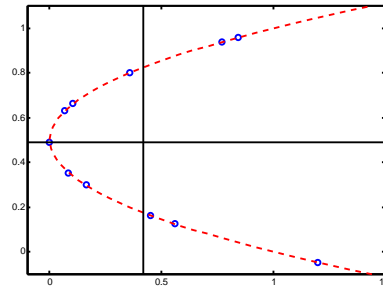
**Remarque 129** *En raison de sa symétrie,  $r$  mesure aussi bien l'intensité de la liaison linéaire entre  $x$  et  $y$  qu'entre  $y$  et  $x$ .*

#### 7.4.3 Propriétés du coefficient de corrélation linéaire

**Propriété 130** *On a toujours  $-1 \leq r \leq 1$ .*

- La corrélation parfaite, correspondant au cas  $|r| = 1$ , se rencontre très peu en pratique, mais sert de point de comparaison. Plus  $|r|$  est proche de 1, plus les variables  $x$  et  $y$  seront étroitement liées.
- Si  $x$  et  $y$  sont indépendantes, on a bien sûr  $r = 0$ . Mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie. Si  $r = 0$ , on peut affirmer qu'il n'existe pas de liaison linéaire entre  $x$  et  $y$ . Mais il peut exister une liaison d'un autre type.

Droite d'ajustement de  $x$  en  $y$



Droite d'ajustement de  $y$  en  $x$

**Propriété 131** La droite d'ajustement linéaire de  $y$  en fonction de  $x$  dans notre échantillon a pour équation  $y = a + bx$  avec

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \text{donc} \quad b = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y},$$

où  $\sigma_x^2$  et  $\sigma_y^2$  représentent respectivement les variances de  $X$  et de  $Y$  dans l'échantillon des  $n$  points.

**Propriété 132** Le signe du coefficient de corrélation permet de savoir si la corrélation est positive ou négative puisque  $r$  et  $b$  sont de même signe.

**Propriété 133** Si la droite d'ajustement linéaire de  $y$  en fonction de  $x$  a pour équation  $y = a + bx$  et celle de  $x$  en  $y$  a pour équation  $x = a' + b'y$ , alors on a  $b = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$  et aussi par symétrie  $b' = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ . D'où  $bb' = r^2$ .

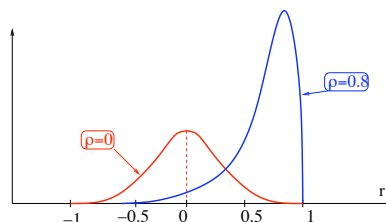
On retrouve ainsi que si la liaison entre  $x$  et  $y$  est forte, les pentes  $b$  et  $b'$  sont telles que  $b'$  est voisine de  $1/b$ , et les droites sont presque confondues.

#### 7.4.4 Comment tester l'indépendance linéaire de $X$ et de $Y$ ?

La question est de savoir si la valeur trouvée pour  $r$  est significativement différente de 0 ou pas. Le coefficient de corrélation  $r$  calculé à partir d'un échantillon de taille  $n$  donne une estimation ponctuelle du coefficient de corrélation de la population noté  $\rho$ .  $\rho$  est défini par

$$\rho = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \frac{Y - E(Y)}{\sigma(Y)}\right) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Appelons  $R$  la variable aléatoire "coefficient de corrélation d'un échantillon de taille  $n$  prélevé au hasard dans une même population,  $R = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \frac{Y - E(Y)}{\sigma(Y)}$ . Bien sûr on a  $E(R) = \rho$ . On suppose que  $X$  et  $Y$  sont distribuées suivant une loi normale conjointe (loi binormale). Il s'avère que la distribution de  $R$  ne dépend que de  $n$  et de  $\rho$ . On représente la fonction la fonction de densité de  $R$  sur la figure suivante pour  $n = 9$ ,  $\rho = 0$  et  $\rho = 0.8$ . On constate que la densité de  $R$  est symétrique pour  $\rho = 0$  et c'est le seul cas où cette propriété est vérifiée.



Distribution de  $R$  pour  $\rho = 0$  et  $\rho = 0.8$ , lorsque  $n = 9$

On pourra tester l'indépendance de  $X$  et  $Y$  en exécutant le test statistique suivant.

1. On choisit un seuil de signification  $\alpha$ .
2. On teste l'hypothèse  $H_0$  contre l'hypothèse  $H_1$  suivante,
  - $H_0$  :  $X$  et  $Y$  ne sont pas corrélés linéairement, c'est-à-dire  $\rho = 0$ .
  - $H_1$  :  $X$  et  $Y$  sont corrélés linéairement, c'est-à-dire  $\rho \neq 0$ .
3. On se place sous l'hypothèse  $H_0$ , c'est-à-dire que l'on suppose que  $\rho = 0$ . La fonction discriminante du test est

$$T = \frac{R - E(R)}{\sigma(R)} = \frac{R - \rho}{\sigma(R)} = \frac{R}{\sigma(R)}.$$

On montre qu'elle peut s'écrire  $T = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$ .  $T$  est distribuée suivant une loi de Student à  $n - 2$  degrés de liberté.

4. La table de cette loi donne une valeur critique  $t_{\alpha/2}$  telle que  $P(|T| > t_{\alpha/2}) = \alpha$ , d'où une zone de rejet  $Z = ]-\infty, -t_{\alpha/2}[ \cup ]t_{\alpha/2}, +\infty[$ .
5. On calcule la valeur réduite  $t_0 = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ ,  $r$  étant la valeur du coefficient de corrélation de notre échantillon.
  - Si  $t_0 \in Z$ , on rejette  $H_0$  :  $X$  et  $Y$  sont linéairement dépendants.
  - Si  $t_0 \notin Z$ , on accepte  $H_0$  :  $X$  et  $Y$  sont linéairement indépendants.

**Remarque 134** 1. *Bien sûr, on constate que plus la taille de l'échantillon est petite, plus le coefficient de corrélation de l'échantillon doit être élevé pour être significativement différent de 0. Ordre de grandeur au seuil de 5% :* On accepte  $H_0$  pour  $r < 0.378$  si  $n = 20$   
On accepte  $H_0$  pour  $r < 0.549$  si  $n = 10$ .

2. *Si on veut tester d'autres valeurs de  $\rho$ , il faut employer une autre méthode et passer par ce qu'on appelle la transformation de FISHER.*

### 7.4.5 Mise en garde à propos de la corrélation

Il existe plusieurs explications du fait que deux séries varient en même temps, et dans certaines situations, l'analyste est en droit d'interpréter les mesures de corrélation dans le sens d'une relation de cause à effet. Cependant le seul fait que deux variables soient reliées entre elles, au sens statistique du terme, n'est pas suffisant pour conclure à l'existence d'une relation de cause à effet. En d'autres termes, la seule existence d'une relation statistique n'est pas une preuve de causalité.

Il existe une relation de cause à effet si la variation d'une variable est attribuable à la variation de l'autre variable. Par exemple la variation de température dans une réaction chimique peut causer une variation du résultat de cette réaction.

Par ailleurs, deux variables peuvent être conjointement influencées par un facteur de cause commune. Il est probable qu'il existe une relation étroite entre les ventes de bijoux et les ventes d'appareils stéréophoniques ; toutefois, il serait farfelu d'imputer à l'une de ces variables les variations observées de l'autre variable. Ici, les variations des deux variables sont probablement le résultat d'une variation des revenus des consommateurs.

Certaines relations sont accidentelles. Même s'il existe une relation entre le nombre de voitures vendues au Canada et le nombre d'éléphants en Afrique, il serait absurde d'analyser le marché de l'automobile au Canada en se basant sur cette relation. Les relations de ce genre sont appelées fausses corrélations.

# Chapitre 8

## Tables

### LOI DE POISSON ( $0.1 \leq \lambda \leq 1$ )

La table donne, pour  $k$  entier et  $\lambda$  réel,  $p_k = P(X = k)$  et  $\sum p_k = P(X \leq k)$ .

k	$\lambda = 0.1$	$\sum p_k$	$\lambda = 0.2$	$\sum p_k$	$\lambda = 0.3$	$\sum p_k$	$\lambda = 0.4$	$\sum p_k$	$\lambda = 0.5$	$\sum p_k$
	$p_k$		$p_k$		$p_k$		$p_k$		$p_k$	
0	0.9048	0.9048	0.8187	0.8187	0.7408	0.7408	0.6703	0.6703	0.6065	0.6065
1	0.0905	0.9953	0.1637	0.9825	0.2222	0.9631	0.2681	0.9384	0.3033	0.9098
2	0.0045	0.9998	0.0164	0.9989	0.0333	0.9964	0.0536	0.9921	0.0758	0.9856
3	0.0002	1	0.0011	0.9999	0.0033	0.9997	0.0072	0.9992	0.0126	0.9982
4	0	1	0.0001	1	0.0003	1	0.0007	0.9999	0.0016	0.9998
5			0	1	0	1	0.0001	1	0.0002	1
k	$\lambda = 0.6$	$\sum p_k$	$\lambda = 0.7$	$\sum p_k$	$\lambda = 0.8$	$\sum p_k$	$\lambda = 0.9$	$\sum p_k$	$\lambda = 1$	$\sum p_k$
	$p_k$		$p_k$		$p_k$		$p_k$		$p_k$	
0	0.5488	0.5488	0.4966	0.4966	0.4493	0.4493	0.4066	0.4066	0.3679	0.3679
1	0.3293	0.8781	0.3476	0.8442	0.3595	0.8088	0.3659	0.7725	0.3679	0.7358
2	0.0988	0.9769	0.1217	0.9659	0.1438	0.9526	0.1647	0.9371	0.1839	0.9197
3	0.0198	0.9966	0.0284	0.9942	0.0383	0.9909	0.0494	0.9865	0.0613	0.9810
4	0.0030	0.9996	0.0050	0.9992	0.0077	0.9986	0.0111	0.9977	0.0153	0.9963
5	0.0004	1	0.0007	0.9999	0.0012	0.9998	0.0020	0.9997	0.0031	0.9994
6	0	1	0.0001	1	0.0002	1	0.0003	1	0.0005	0.9999
7	0	1	0	1	0	1	0	1	0.0001	1

LOI DE POISSON ( $2 \leq \lambda \leq 6$ )

La table donne, pour  $k$  entier et  $\lambda$  réel,  $p_k = P(X = k)$  et  $\sum p_k = P(X \leq k)$ .

k	$\lambda = 2$		$\lambda = 3$		$\lambda = 4$		$\lambda = 5$		$\lambda = 6$	
	$p_k$	$\sum p_k$	$p_k$	$\sum p_k$	$p_k$	$\sum p_k$	$p_k$	$\sum p_k$	$p_k$	$\sum p_k$
0	0.1353	0.1353	0.0498	0.0498	0.0183	0.0183	0.0067	0.0067	0.0025	0.0025
1	0.2707	0.4060	0.1494	0.1991	0.0733	0.0916	0.0337	0.0404	0.0149	0.0174
2	0.2707	0.6767	0.2240	0.4232	0.1465	0.2381	0.0842	0.1247	0.0446	0.0620
3	0.1804	0.8571	0.2240	0.6472	0.1954	0.4335	0.1404	0.2650	0.0892	0.1512
4	0.0902	0.9473	0.1680	0.8153	0.1954	0.6288	0.1755	0.4405	0.1339	0.2851
5	0.0361	0.9834	0.1008	0.9161	0.1563	0.7851	0.1755	0.6160	0.1606	0.4457
6	0.0120	0.9955	0.0504	0.9665	0.1042	0.8893	0.1462	0.7622	0.1606	0.6063
7	0.0034	0.9989	0.0216	0.9881	0.0595	0.9489	0.1044	0.8666	0.1377	0.7440
8	0.0009	0.9998	0.0081	0.9962	0.0298	0.9786	0.0653	0.9319	0.1033	0.8472
9	0.0002	1	0.0027	0.9989	0.0132	0.9919	0.0363	0.9682	0.0688	0.9161
10	0	1	0.0008	0.9997	0.0053	0.9972	0.0181	0.9863	0.0413	0.9574
11	0	1	0.0002	0.9999	0.0019	0.9991	0.0082	0.9945	0.0225	0.9799
12	0	1	0.0001	1	0.0006	0.9997	0.0034	0.9980	0.0113	0.9912
13	0	0	0	1	0.0002	0.9999	0.0013	0.9993	0.0052	0.9964
14	0	0	0	1	0.0001	1	0.0005	0.9998	0.0022	0.9986
15	0	0	0	0	0	1	0.0002	0.9999	0.0009	0.9995
16	0	0	0	0	0	1	0	1	0.0003	0.9998
17	0	0	0	0	0	1	0	1	0.0001	0.9999
18	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

LOI DE POISSON ( $7 \leq \lambda \leq 11$ )

La table donne, pour  $k$  entier et  $\lambda$  réel,  $p_k = P(X = k)$  et  $\sum p_k = P(X \leq k)$ .

k	$\lambda = 7$		$\lambda = 8$		$\lambda = 9$		$\lambda = 10$		$\lambda = 11$	
	$p_k$	$\sum p_k$	$p_k$	$\sum p_k$	$p_k$	$\sum p_k$	$p_k$	$\sum p_k$	$p_k$	$\sum p_k$
0	0.0009	0.0009	0.0003	0.0003	0.0001	0.0001	0	0	0	0
1	0.0064	0.0073	0.0027	0.0030	0.0011	0.0012	0.0005	0.0005	0.0002	0.0002
2	0.0223	0.0296	0.0107	0.0138	0.0050	0.0062	0.0023	0.0028	0.0010	0.0012
3	0.0521	0.0818	0.0286	0.0424	0.0150	0.0212	0.0076	0.0103	0.0037	0.0049
4	0.0912	0.1730	0.0573	0.0996	0.0337	0.0550	0.0189	0.0293	0.0102	0.0151
5	0.1277	0.3007	0.0916	0.1912	0.0607	0.1157	0.0378	0.0671	0.0224	0.0375
6	0.1490	0.4497	0.1221	0.3134	0.0911	0.2068	0.0631	0.1301	0.0411	0.0786
7	0.1490	0.5987	0.1396	0.4530	0.1171	0.3239	0.0901	0.2202	0.0646	0.1432
8	0.1304	0.7291	0.1396	0.5925	0.1318	0.4557	0.1126	0.3328	0.0888	0.2320
9	0.1014	0.8305	0.1241	0.7166	0.1318	0.5874	0.1251	0.4579	0.1085	0.3405
10	0.0710	0.9015	0.0993	0.8159	0.1186	0.7060	0.1251	0.5830	0.1194	0.4599
11	0.0452	0.9467	0.0722	0.8881	0.0970	0.8030	0.1137	0.6968	0.1194	0.5793
12	0.0263	0.9730	0.0481	0.9362	0.0728	0.8758	0.0948	0.7916	0.1094	0.6887
13	0.0142	0.9872	0.0296	0.9658	0.0504	0.9261	0.0729	0.8645	0.0926	0.7813
14	0.0071	0.9943	0.0169	0.9827	0.0324	0.9585	0.0521	0.9165	0.0728	0.8540
15	0.0033	0.9976	0.0090	0.9918	0.0194	0.9780	0.0347	0.9513	0.0534	0.9074
16	0.0014	0.9990	0.0045	0.9963	0.0109	0.9889	0.0217	0.9730	0.0367	0.9441
17	0.0006	0.9996	0.0021	0.9984	0.0058	0.9947	0.0128	0.9857	0.0237	0.9678
18	0.0002	0.9999	0.0009	0.9993	0.0029	0.9976	0.0071	0.9928	0.0145	0.9823
19	0.0001	1	0.0004	0.9997	0.0014	0.9989	0.0037	0.9965	0.0084	0.9907
20	0	1	0.0002	0.9999	0.0006	0.9996	0.0019	0.9984	0.0046	0.9953
21	0	1	0.0001	1	0.0003	0.9998	0.0009	0.9993	0.0024	0.9977
22	0	1	0	1	0.0001	0.9999	0.0004	0.9997	0.0012	0.9990
23	0	1	0	1	0	1	0.0002	0.9999	0.0006	0.9995
24	0	1	0	1	0	1	0.0001	1	0.0003	0.9998
25	0	1	0	1	0	1	0	1	0.0001	0.9999
26	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

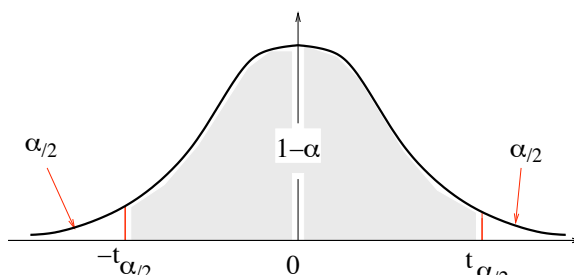
LOI DE POISSON ( $12 \leq \lambda \leq 16$ )

La table donne, pour  $k$  entier et  $\lambda$  réel,  $p_k = P(X = k)$  et  $\sum p_k = P(X \leq k)$ .

k	$\lambda = 12$		$\lambda = 13$		$\lambda = 14$		$\lambda = 15$		$\lambda = 16$	
	$p_k$	$\sum p_k$	$p_k$	$\sum p_k$	$p_k$	$\sum p_k$	$p_k$	$\sum p_k$	$p_k$	$\sum p_k$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.0001	0.0001	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.0004	0.0005	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0	0	0	0
3	0.0018	0.0023	0.0008	0.0011	0.0004	0.0005	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
4	0.0053	0.0076	0.0027	0.0037	0.0013	0.0018	0.0006	0.0009	0.0003	0.0004
5	0.0127	0.0203	0.0070	0.0107	0.0037	0.0055	0.0019	0.0028	0.0010	0.0014
6	0.0255	0.0458	0.0152	0.0259	0.0087	0.0142	0.0048	0.0076	0.0026	0.0040
7	0.0437	0.0895	0.0281	0.0540	0.0174	0.0316	0.0104	0.0180	0.0060	0.0100
8	0.0655	0.1550	0.0457	0.0998	0.0304	0.0621	0.0194	0.0374	0.0120	0.0220
9	0.0874	0.2424	0.0661	0.1658	0.0473	0.1094	0.0324	0.0699	0.0213	0.0433
10	0.1048	0.3472	0.0859	0.2517	0.0663	0.1757	0.0486	0.1185	0.0341	0.0774
11	0.1144	0.4616	0.1015	0.3532	0.0844	0.2600	0.0663	0.1848	0.0496	0.1270
12	0.1144	0.5760	0.1099	0.4631	0.0984	0.3585	0.0829	0.2676	0.0661	0.1931
13	0.1056	0.6815	0.1099	0.5730	0.1060	0.4644	0.0956	0.3632	0.0814	0.2745
14	0.0905	0.7720	0.1021	0.6751	0.1060	0.5704	0.1024	0.4657	0.0930	0.3675
15	0.0724	0.8444	0.0885	0.7636	0.0989	0.6694	0.1024	0.5681	0.0992	0.4667
16	0.0543	0.8987	0.0719	0.8355	0.0866	0.7559	0.0960	0.6641	0.0992	0.5660
17	0.0383	0.9370	0.0550	0.8905	0.0713	0.8272	0.0847	0.7489	0.0934	0.6593
18	0.0255	0.9626	0.0397	0.9302	0.0554	0.8826	0.0706	0.8195	0.0830	0.7423
19	0.0161	0.9787	0.0272	0.9573	0.0409	0.9235	0.0557	0.8752	0.0699	0.8122
20	0.0097	0.9884	0.0177	0.9750	0.0286	0.9521	0.0418	0.9170	0.0559	0.8682
21	0.0055	0.9939	0.0109	0.9859	0.0191	0.9712	0.0299	0.9469	0.0426	0.9108
22	0.0030	0.9970	0.0065	0.9924	0.0121	0.9833	0.0204	0.9673	0.0310	0.9418
23	0.0016	0.9985	0.0037	0.9960	0.0074	0.9907	0.0133	0.9805	0.0216	0.9633
24	0.0008	0.9993	0.0020	0.9980	0.0043	0.9950	0.0083	0.9888	0.0144	0.9777
25	0.0004	0.9997	0.0010	0.9990	0.0024	0.9974	0.0050	0.9938	0.0092	0.9869
26	0.0002	0.9999	0.0005	0.9995	0.0013	0.9987	0.0029	0.9967	0.0057	0.9925
27	0.0001	0.9999	0.0002	0.9998	0.0007	0.9994	0.0016	0.9983	0.0034	0.9959
28	0	1	0.0001	0.9999	0.0003	0.9997	0.0009	0.9991	0.0019	0.9978
29	0	1	0.0001	1	0.0002	0.9999	0.0004	0.9996	0.0011	0.9989
30	0	1	0	1	0.0001	0.9999	0.0002	0.9998	0.0006	0.9994
31	0	1	0	1	0	1	0.0001	0.9999	0.0003	0.9997
32	0	1	0	1	0	1	0	1	0.0001	0.9999
33	0	1	0	1	0	1	0	1	0.0001	0.9999



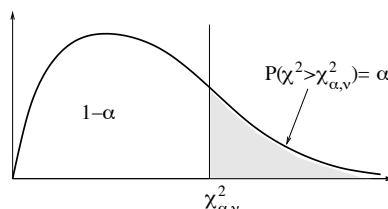
LOI DE STUDENT



La table donne  $t_{\alpha/2}$  tel que  $P(|T_\nu| > t_{\alpha/2}) = \alpha$ .

$\nu \setminus \alpha$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.82	63.65	636.6
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.59
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.92
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
$\infty$	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

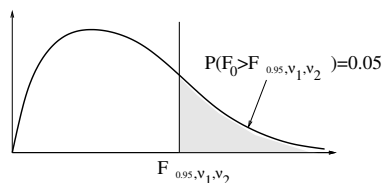
LOI DE PEARSON



La table donne  $\chi^2_{\alpha, \nu}$  tel que  $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha, \nu}) = \alpha$ .

$\nu \setminus \alpha$	0.99	0.98	0.95	0.9	0.8	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
1	0.000	0.001	0.004	0.016	0.064	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.446	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

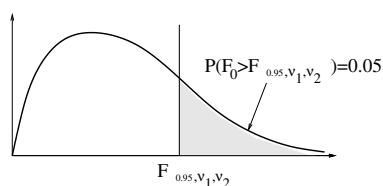
LOI DE FISHER, point 5%,  $\nu_2 \leq 13$



La table donne  $F_{0.95, \nu_1, \nu_2}$  tel que  $P(F > F_{0.95, \nu_1, \nu_2}) = 0.05$ .

$\nu_1 \backslash \nu_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	161	199	215	224	230	234	237	239	240	242	243	244	244
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.22
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.20
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.24	2.20	2.18
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.14
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.12
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.17	2.13	2.10
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.08
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05	2.02
39	4.09	3.24	2.85	2.61	2.46	2.34	2.26	2.19	2.13	2.08	2.04	2.01	1.98
59	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.26	2.17	2.10	2.04	2.00	1.96	1.92	1.89
119	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83	1.80
$\infty$	3.84	3.00	2.61	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.72

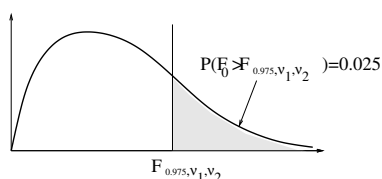
LOI DE FISHER, point 5%,  $\nu_2 \geq 14$



La table donne  $F_{0.95, \nu_1, \nu_2}$  tel que  $P(F > F_{0.95, \nu_1, \nu_2}) = 0.05$ .

$\nu_1 \backslash \nu_2$	14	15	19	20	24	25	29	30	39	59	119	$\infty$
1	245	246	247	248	249	249	250	250	251	252	253	254
2	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.71	8.70	8.67	8.66	8.64	8.63	8.62	8.62	8.60	8.57	8.55	8.53
4	5.87	5.86	5.81	5.80	5.77	5.77	5.75	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.64	4.62	4.57	4.56	4.53	4.52	4.50	4.50	4.47	4.43	4.40	4.37
6	3.96	3.94	3.88	3.87	3.84	3.83	3.81	3.81	3.78	3.74	3.70	3.67
7	3.53	3.51	3.46	3.44	3.41	3.40	3.38	3.38	3.34	3.31	3.27	3.23
8	3.24	3.22	3.16	3.15	3.12	3.11	3.08	3.08	3.05	3.01	2.97	2.93
9	3.03	3.01	2.95	2.94	2.90	2.89	2.87	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.86	2.85	2.79	2.77	2.74	2.73	2.70	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.74	2.72	2.66	2.65	2.61	2.60	2.58	2.57	2.53	2.49	2.45	2.41
12	2.64	2.62	2.56	2.54	2.51	2.50	2.47	2.47	2.43	2.39	2.34	2.30
13	2.55	2.53	2.47	2.46	2.42	2.41	2.39	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.48	2.46	2.40	2.39	2.35	2.34	2.31	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.42	2.40	2.34	2.33	2.29	2.28	2.25	2.25	2.21	2.16	2.11	2.07
16	2.37	2.35	2.29	2.28	2.24	2.23	2.20	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.33	2.31	2.24	2.23	2.19	2.18	2.15	2.15	2.11	2.06	2.01	1.96
18	2.29	2.27	2.20	2.19	2.15	2.14	2.11	2.11	2.07	2.02	1.97	1.92
19	2.26	2.23	2.17	2.16	2.11	2.11	2.08	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.22	2.20	2.14	2.12	2.08	2.07	2.05	2.04	2.00	1.95	1.90	1.84
21	2.20	2.18	2.11	2.10	2.05	2.05	2.02	2.01	1.97	1.92	1.87	1.81
22	2.17	2.15	2.08	2.07	2.03	2.02	1.99	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.15	2.13	2.06	2.05	2.01	2.00	1.97	1.96	1.92	1.87	1.81	1.76
24	2.13	2.11	2.04	2.03	1.98	1.97	1.95	1.94	1.90	1.84	1.79	1.73
25	2.11	2.09	2.02	2.01	1.96	1.96	1.93	1.92	1.88	1.82	1.77	1.71
26	2.09	2.07	2.00	1.99	1.95	1.94	1.91	1.90	1.86	1.80	1.75	1.69
27	2.08	2.06	1.99	1.97	1.93	1.92	1.89	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	2.06	2.04	1.97	1.96	1.91	1.91	1.88	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	2.05	2.03	1.96	1.94	1.90	1.89	1.86	1.85	1.81	1.76	1.70	1.64
30	2.04	2.01	1.95	1.93	1.89	1.88	1.85	1.84	1.80	1.74	1.68	1.62
34	1.99	1.97	1.90	1.89	1.84	1.83	1.80	1.80	1.75	1.69	1.63	1.57
39	1.95	1.93	1.86	1.85	1.80	1.79	1.76	1.75	1.70	1.65	1.59	1.52
59	1.86	1.84	1.77	1.75	1.70	1.69	1.66	1.65	1.60	1.54	1.47	1.39
119	1.78	1.75	1.67	1.66	1.61	1.60	1.56	1.56	1.50	1.43	1.35	1.26
$\infty$	1.69	1.67	1.59	1.57	1.52	1.51	1.47	1.46	1.40	1.32	1.22	1.03

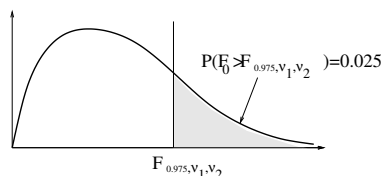
LOI DE FISHER, point 2.5%,  $\nu_2 \leq 13$



La table donne  $F_{0.975, \nu_1, \nu_2}$  tel que  $P(F > F_{0.975, \nu_1, \nu_2}) = 0.025$ .

$\nu_1 \backslash \nu_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	973.0	976.7	979.8
2	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.37	14.34	14.30
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75	8.71
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52	6.49
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	5.33
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	4.63
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	4.16
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	3.83
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	3.58
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	3.39
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	3.24
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15	3.12
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05	3.01
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	2.92
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.93	2.89	2.85
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.87	2.82	2.79
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.76	2.72	2.68
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	2.64
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.68	2.64	2.60
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.65	2.60	2.56
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.62	2.57	2.53
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	2.50
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51	2.48
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.54	2.49	2.45
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.51	2.47	2.43
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.48	2.43	2.39
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41	2.37
34	5.50	4.12	3.53	3.19	2.97	2.81	2.69	2.59	2.52	2.45	2.40	2.35	2.31
39	5.43	4.06	3.47	3.14	2.91	2.75	2.63	2.54	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26
59	5.29	3.93	3.35	3.01	2.79	2.63	2.51	2.42	2.34	2.27	2.22	2.17	2.13
119	5.15	3.81	3.23	2.90	2.67	2.52	2.40	2.30	2.22	2.16	2.10	2.06	2.01
$\infty$	5.03	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.99	1.95	1.90

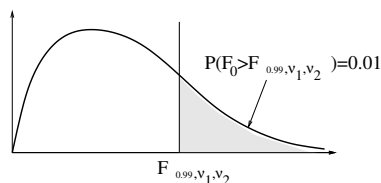
**LOI DE FISHER, point 2.5%,  $\nu_2 \geq 14$**



La table donne  $F_{0.975, \nu_1, \nu_2}$  tel que  $P(F > F_{0.975, \nu_1, \nu_2}) = 0.025$ .

$\nu_1 \backslash \nu_2$	14	15	19	20	24	25	29	30	39	59	119	$\infty$
1	982	985	992	993	997	998	1000	1001	1005	1009	1014	1018
2	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5
3	14.3	14.2	14.2	14.2	14.1	14.1	14.1	14.1	14.0	14.0	13.9	13.9
4	8.68	8.66	8.58	8.56	8.51	8.50	8.47	8.46	8.42	8.36	8.31	8.26
5	6.46	6.43	6.34	6.33	6.28	6.27	6.23	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.30	5.27	5.18	5.17	5.12	5.11	5.07	5.07	5.02	4.96	4.90	4.85
7	4.60	4.57	4.48	4.47	4.41	4.40	4.37	4.36	4.31	4.26	4.20	4.14
8	4.13	4.10	4.02	4.00	3.95	3.94	3.90	3.89	3.84	3.79	3.73	3.67
9	3.80	3.77	3.68	3.67	3.61	3.60	3.57	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.55	3.52	3.44	3.42	3.37	3.35	3.32	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	3.36	3.33	3.24	3.23	3.17	3.16	3.13	3.12	3.07	3.01	2.94	2.88
12	3.21	3.18	3.09	3.07	3.02	3.01	2.97	2.96	2.91	2.85	2.79	2.73
13	3.08	3.05	2.96	2.95	2.89	2.88	2.85	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	2.98	2.95	2.86	2.84	2.79	2.78	2.74	2.73	2.68	2.62	2.55	2.49
15	2.89	2.86	2.77	2.76	2.70	2.69	2.65	2.64	2.59	2.53	2.46	2.40
16	2.82	2.79	2.70	2.68	2.63	2.61	2.58	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.75	2.72	2.63	2.62	2.56	2.55	2.51	2.50	2.45	2.38	2.32	2.25
18	2.70	2.67	2.58	2.56	2.50	2.49	2.45	2.44	2.39	2.32	2.26	2.19
19	2.65	2.62	2.53	2.51	2.45	2.44	2.40	2.39	2.34	2.27	2.20	2.13
20	2.60	2.57	2.48	2.46	2.41	2.40	2.36	2.35	2.29	2.23	2.16	2.09
21	2.56	2.53	2.44	2.42	2.37	2.36	2.32	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.53	2.50	2.41	2.39	2.33	2.32	2.28	2.27	2.21	2.15	2.08	2.00
23	2.50	2.47	2.37	2.36	2.30	2.29	2.25	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.47	2.44	2.35	2.33	2.27	2.26	2.22	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.44	2.41	2.32	2.30	2.24	2.23	2.19	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.42	2.39	2.29	2.28	2.22	2.21	2.17	2.16	2.10	2.03	1.96	1.88
27	2.39	2.36	2.27	2.25	2.19	2.18	2.14	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	2.37	2.34	2.25	2.23	2.17	2.16	2.12	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.36	2.32	2.23	2.21	2.15	2.14	2.10	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.34	2.31	2.21	2.20	2.14	2.12	2.08	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
34	2.28	2.25	2.15	2.13	2.07	2.06	2.02	2.01	1.95	1.88	1.80	1.72
39	2.22	2.19	2.10	2.08	2.02	2.00	1.96	1.95	1.89	1.82	1.74	1.65
59	2.10	2.07	1.97	1.95	1.89	1.87	1.83	1.82	1.75	1.67	1.59	1.49
119	1.98	1.95	1.85	1.83	1.76	1.75	1.70	1.69	1.62	1.53	1.43	1.31
10000	1.87	1.83	1.73	1.71	1.64	1.63	1.58	1.57	1.49	1.39	1.27	1.04

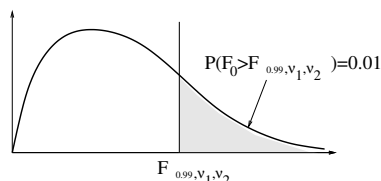
LOI DE FISHER, point 1%,  $\nu_2 \leq 13$



La table donne  $F_{0.99, \nu_1, \nu_2}$  tel que  $P(F > F_{0.99, \nu_1, \nu_2}) = 0.01$ .

$\nu_1 \backslash \nu_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	4052	4999	5403	5624	5763	5859	5928	5981	6022	6055	6083	6106	6125
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	27.1	27.0
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.5	14.4	14.3
5	16.2	13.2	12.0	11.4	11.0	10.6	10.4	10.3	10.1	10.0	9.96	9.89	9.82
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.66
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.41
8	11.2	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.61
9	10.5	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.05
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.65
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.34
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.10
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.91
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.75
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.61
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.50
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.40
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37	3.32
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.24
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.18
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.12
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.07
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	3.02
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.98
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	3.06	2.99	2.94
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96	2.90
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.99	2.93	2.87
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90	2.84
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.93	2.87	2.81
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.79
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98	2.89	2.82	2.76	2.70
39	7.33	5.19	4.33	3.84	3.53	3.30	3.14	3.01	2.90	2.81	2.74	2.68	2.62
59	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.96	2.83	2.72	2.64	2.56	2.50	2.45
119	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.40	2.34	2.28
$\infty$	6.64	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.19	2.13

LOI DE FISHER, point 1%,  $\nu_2 \geq 14$



La table donne  $F_{0.99, \nu_1, \nu_2}$  tel que  $P(F > F_{0.99, \nu_1, \nu_2}) = 0.01$ .

$\nu_1 \backslash \nu_2$	14	15	19	20	24	25	29	30	39	59	119	$\infty$
1	6142	6157	6200	6208	6234	6240	6257	6260	6285	6312	6339	6365
2	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	26.9	26.9	26.7	26.7	26.6	26.6	26.5	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	14.2	14.2	14.0	14.0	13.9	13.9	13.9	13.8	13.8	13.7	13.6	13.5
5	9.77	9.72	9.58	9.55	9.47	9.45	9.39	9.38	9.30	9.21	9.11	9.02
6	7.60	7.56	7.42	7.40	7.31	7.30	7.24	7.23	7.15	7.06	6.97	6.88
7	6.36	6.31	6.18	6.16	6.07	6.06	6.00	5.99	5.91	5.83	5.74	5.65
8	5.56	5.52	5.38	5.36	5.28	5.26	5.21	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	5.01	4.96	4.83	4.81	4.73	4.71	4.66	4.65	4.57	4.49	4.40	4.31
10	4.60	4.56	4.43	4.41	4.33	4.31	4.26	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	4.29	4.25	4.12	4.10	4.02	4.01	3.95	3.94	3.87	3.78	3.69	3.60
12	4.05	4.01	3.88	3.86	3.78	3.76	3.71	3.70	3.63	3.54	3.45	3.36
13	3.86	3.82	3.69	3.66	3.59	3.57	3.52	3.51	3.43	3.34	3.26	3.17
14	3.70	3.66	3.53	3.51	3.43	3.41	3.36	3.35	3.27	3.18	3.09	3.01
15	3.56	3.52	3.40	3.37	3.29	3.28	3.23	3.21	3.14	3.05	2.96	2.87
16	3.45	3.41	3.28	3.26	3.18	3.16	3.11	3.10	3.02	2.94	2.85	2.75
17	3.35	3.31	3.19	3.16	3.08	3.07	3.01	3.00	2.93	2.84	2.75	2.65
18	3.27	3.23	3.10	3.08	3.00	2.98	2.93	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3.19	3.15	3.03	3.00	2.92	2.91	2.86	2.84	2.77	2.68	2.58	2.49
20	3.13	3.09	2.96	2.94	2.86	2.84	2.79	2.78	2.70	2.61	2.52	2.42
21	3.07	3.03	2.90	2.88	2.80	2.79	2.73	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	3.02	2.98	2.85	2.83	2.75	2.73	2.68	2.67	2.59	2.50	2.40	2.31
23	2.97	2.93	2.80	2.78	2.70	2.69	2.63	2.62	2.54	2.45	2.36	2.26
24	2.93	2.89	2.76	2.74	2.66	2.64	2.59	2.58	2.50	2.41	2.31	2.21
25	2.89	2.85	2.72	2.70	2.62	2.60	2.55	2.54	2.46	2.37	2.27	2.17
26	2.86	2.81	2.69	2.66	2.58	2.57	2.51	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	2.82	2.78	2.66	2.63	2.55	2.54	2.48	2.47	2.39	2.30	2.20	2.10
28	2.79	2.75	2.63	2.60	2.52	2.51	2.45	2.44	2.36	2.27	2.17	2.07
29	2.77	2.73	2.60	2.57	2.49	2.48	2.42	2.41	2.33	2.24	2.14	2.04
30	2.74	2.70	2.57	2.55	2.47	2.45	2.40	2.39	2.31	2.21	2.11	2.01
34	2.66	2.61	2.49	2.46	2.38	2.37	2.31	2.30	2.22	2.12	2.02	1.91
39	2.58	2.54	2.41	2.38	2.30	2.29	2.23	2.22	2.14	2.04	1.93	1.82
59	2.40	2.36	2.23	2.20	2.12	2.10	2.05	2.03	1.95	1.85	1.73	1.61
119	2.24	2.19	2.06	2.04	1.95	1.93	1.87	1.86	1.77	1.66	1.54	1.38
$\infty$	2.08	2.04	1.91	1.88	1.79	1.77	1.71	1.70	1.60	1.48	1.33	1.05