**Le théorème d'uniformisation de Ofer Gabber et un survol de quelques conséquences : finitude, Lefschetz affine et pureté.**

Fabrice Orgogozo

Exposé oral : 7 avril 2006 ; texte : 24 janvier 2007.

## 1. Le théorème d'uniformisation ([Gab05b] §1)

**1.1.** — Soit $X$ un schéma. Notons $(pf/X)$ la catégorie des schémas localement de présentation finie sur $X$. On munit cette catégorie de la topologie engendrée ([**SGA**$_\mathbf{4}$ II 1.1.6]) par les familles de morphismes suivantes : (i) $Y' \to Y$, propre de présentation finie et surjectif (ii) $(Y_i \to Y)_{i \in I}$, un recouvrement par des ouverts de Zariski. On l'appelle topologie *pspf* (pour « propre, surjectif, de présentation finie »).

***Proposition 1.2***. — *La topologie pspf est plus fine que la topologie étale.*

*Démonstration (esquisse).* — Soit $U \to X$ un morphisme étale surjectif entre schémas affines supposés excellents pour simplifier. On va montrer que le morphisme $U \to X$ est dominé par un recouvrement Zariski d'un schéma fini surjectif au-dessus de $X$. Quitte à remplacer $X$ par un schéma fini surjectif au-dessus, on peut supposer $X$ réduit, irréductible et finalement normal. Soit $K$ le corps des fractions de $X$ et $L$ l'anneau total des fractions de $U$. Si $K'$ est une extension finie séparable de $K$ telle que $L \otimes_K K'$ soit une $K'$-algèbre diagonale, et $X'$ est le normalisé de $X$ dans $K'$, le produit fibré $U \times_X X'$ est étale (surjectif) sur $X'$ et génériquement trivial ; c'est donc un recouvrement par des ouverts de Zariski. □

***Remarque 1.3***. — Le spectre d'un anneau de valuation à corps des fractions algébriquement clos est pspf local (exercice).

***Définition 1.4***. — On dit qu'un recouvrement pspf est *standard* s'il est de la forme $(U_i \to X' \to X)$ où $X' \to X$ est un morphisme propre surjectif de présentation finie et $(U_i \to X')$ est un recouvrement par des ouverts de Zariski.

***Proposition 1.5***. — *Tout recouvrement pspf d'un schéma cohérent est dominé par un recouvrement pspf standard.*

*Démonstration (esquisse).* — Il suffit de montrer que si $\{U_i \to X\}_{i \in I}$ est un recouvrement de $X$ par des ouverts de Zariski et $\{X_i \to U_i\}_{i \in I}$ une collection de morphismes surjectifs, propres de présentation finie, il existe un morphisme surjectif, propre de présentation finie $X' \to X$ et un recouvrement par des ouverts de Zariski $\{U'_i \to X'\}$ tel que chaque morphisme composé $U'_i \to X$ se factorise à travers $X_i \to X$. Sous nos hypothèses, les morphismes (composés) $X_i \to X$ sont compactifiables ; notons, pour chaque $i$, $\overline{X_i} \to X$ une compactification et observons que $\overline{X_i}_{|U_i} = X_i$. Posons $X' = \overline{X_1} \times_X \cdots \times_X \overline{X_r}$, où $I = \{1, \ldots, r\}$, et $U'_1 = X_1 \times_X \overline{X_2} \times_X \cdots \times_X \overline{X_r}$, $U'_2 = \overline{X_1} \times_X X_2 \times_X \overline{X_3} \times_X \cdots \times_X \overline{X_r}$ etc. Les ouverts $U'_i$ recouvrent les schémas $\overline{X}$, surjectif, propre et de présentation finie sur $X$. Par projection sur le $i$-ième facteur, chaque $U'_i$ s'envoit sur $U_i$. □

***Théorème 1.6*** **(Théorème d'uniformisation ; [Gab05b], 1.1)**
*Soient $X$ un schéma noethérien quasi-excellent (*[**Ill06**]*, §1), et $Z$ un fermé rare de $X$. Il existe une famille finie de morphismes $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$, qui est* couvrante pour la topologie pspf, *et telle que pour chaque $i \in I$ :*

- **i.** *le schéma $X_i$ est* régulier *et connexe,*
- **ii.** *le sous-ensemble fermé $Z_i = f_i^{-1}(Z)$ de $X_i$ est soit vide soit le support d'un* diviseur strictement à croisements normaux,

**iii**. *le morphisme $X_i \to X$ est quasi-fini au-dessus d'un ouvert dense de $X$, et envoie le point générique de $X_i$ sur un point maximal de $X$.*

Commençons par un dévissage.

***Proposition 1.7***. — *Pour démontrer **1.6**, on peut supposer $X$ local hensélien.*

*Démonstration.* — Soit $X$ comme dans *loc. cit.* et $x$ un point de $X$. Le localisé $X_{(x)}$ de $X$ en $x$ pour la topologie étale est excellent ([**ÉGA** IV 18.7.6]) de sorte qu'on peut supposer qu'il existe une famille finie $(f_i : X_i \to X_{(x)})_{i \in I}$ comme dans **1.6**. D'après [**ÉGA** IV 8.8.2], les $f_i$ proviennent par image inverse d'un voisinage étale $X' \to X$ de $x$ ; on vérifie également que les propriétés (i)-(iii) sont conservées. La topologie étale étant plus fine que la topologie pspf (**1.2**), cela suffit pour conclure. □

La démonstration se fait en deux temps :

***Théorème 1.8*** **(Théorème d'approximation ; [Mor06a], §2)**
*Soit $d \geq 0$ un entier et supposons le théorème d'uniformisation vrai pour toute paire $(X, Z)$, où $X$ est un schéma noethérien local complet de dimension $\leq d$ et $Z$ est un fermé rare. Alors, le théorème d'uniformisation est également vrai pour toute paire $(X, Z)$ où $X$ est un schéma noethérien local hensélien excellent de dimension $\leq d$.*

***Théorème 1.9*** **([Gab05b] §5 (cf. §2 ci-dessous))**. — *Soit $d \geq 0$ un entier, et supposons le théorème d'uniformisation vrai pour toute paire $(S, T)$, où $S$ est un schéma noethérien quasi-excellent de dimension $\leq d-1$ et $T$ un fermé rare. Alors, le théorème d'uniformisation est vrai pour toute paire $(X, Z)$, où $X$ est un schéma noethérien local complet de dimension $\leq d$.*

Donnons ici quelques idées sur la démonstration du théorème **1.8**. La démonstration complète fait l'objet de [**Mor06a**]. Partant d'une uniformisation du complété d'un schéma hensélien excellent, on descend l'uniformisation par la procédure suivante. La difficulté est de vérifier que les propriétés des schémas (p. ex. la régularité) et des morphismes (p. ex. être génériquement fini) sont conservées.

***Construction 1.10***. — *Soient $A$ un anneau local hensélien excellent, $X = \mathrm{Spec}(A)$ son spectre, et $\widehat{X} = \mathrm{Spec}(\widehat{A})$ le spectre de son complété. Pour tout morphisme de présentation finie $\overline{f} : \overline{Y} \to \widehat{X}$, toute sous-$A$-algèbre $B$ de type fini de $\widehat{A}$ de spectre $X'$ munie d'un morphisme de présentation finie $f' : Y' \to X'$ induisant $\widehat{f}$, et toute section $\sigma : X \to X'$, on note $f_\sigma$*[(i)] *le morphisme $f' \times_{X',\sigma} X : Y_\sigma \to X$. On dira que $\sigma$* approche *$\widehat{X} \to X'$* à l'ordre *$n$ si les composés $X(n) \hookrightarrow X \xrightarrow{\sigma} X'$ et $X(n) \hookrightarrow \widehat{X} \to X'$ coïncident, où l'on a posé $X(n) := \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}^n)$.*

(La notation $\overline{Y}$, sans doute préférable à $\widehat{Y}$, est copiée de [**Art69**].)

La dernière hypothèse entraîne que les deux $\widehat{X}$-schémas $\overline{Y}$ et $Y_\sigma \times_X \widehat{X}$ ont même réduction modulo $\mathfrak{m}^n$. On appellera par la suite $f'$ un *modèle* de $\overline{f}$ sur $X'$ et on notera $\widehat{Y_\sigma}$ le schéma complété $Y_\sigma \times_X \widehat{X}$.

Partant d'un morphisme $\overline{f}$, l'existence de telles données résulte de l'hypothèse de *présentation finie* (=type fini ici), ainsi que du théorème d'approximation d'Artin-Popescu : pour chaque $X'$ comme ci-dessus et chaque entier $n \in \mathbf{N}$, il existe une section $X \to X'$ approchant le morphisme $\widehat{X} \to X'$ à l'ordre $n$.

En d'autres termes, pour chaque $f', n$, on a au moins un diagramme à carrés cartésiens et triangle inférieur commutatif :

[(i)] La notation est quelque peu abusive : on oublie la dépendance en le choix de $f'$.

(1.a)
$$
\begin{tikzcd}
\overline{Y} \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\overline{f}"] & Y' \arrow[d, dotted, "f'"] & Y_\sigma \arrow[l, dotted, bend right] \arrow[d, dotted, "f_\sigma"] \\
\widehat{X} \arrow[r] & X' \arrow[r] & X \arrow[l, dotted, bend right, "\sigma"'] \\
& X(n) = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}^n) \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

***Théorème 1.11*** **(Théorème d'approximation II).** — *Soient $X$ un schéma local hensélien excellent, $Z$ un fermé rare, et $(\overline{f_i} : \overline{Y}_i \to \widehat{X})_{i\in I}$ une uniformisation de la paire $(\widehat{X}, \widehat{Z})$ comme en **1.6**.*

*Il existe un choix de $X'$ et $n$ comme en **1.10** tels que pour toute section $\sigma$ approchant $\widehat{X} \to X'$ à l'ordre $n$, il existe des ouverts $U_{i,\sigma}$ $(i \in I)$ des $Y_{i,\sigma}$ tels que la famille $(U_{i,\sigma} \to X)$ soit un recouvrement pspf de $X$ et satisfasse aux propriétés (i)-(iii) de **1.6** relativement à $Z$.*

Le choix de $X', n$ ne dépend pas seulement de $\overline{f} : \coprod_{i\in I} \overline{Y}_i \to \widehat{X}$ mais aussi des diviseurs définissant $Z$ dans les $\overline{Y}_i$ (cf. **1.14** ci-dessous).

**1.12.** — Étant donnés des $\widehat{X}$-schémas $\overline{Y}_i$ et un entier $n$, on obtient par **1.10** des $X$-schémas $Y_{i,\sigma}$ tels que les $X(n)$-schémas $\overline{Y}_i \times_{\widehat{X}} X(n)$ et $Y_{i,\sigma} \times_X X(n)$ soient *isomorphes.* On va montrer que l'on peut avoir un résultat bien plus fort. Pour l'énoncer nous utiliserons la définition suivante (qui épaissit un peu la notion d'isomorphisme sur les $\mathrm{Gr}_I$) :

***Définition 1.12.1*** **([Gab05b], §2).** — Soient $A$ un anneau, $I$ un idéal et $n \in \mathbf{N}$. Deux $A$-modules $M, M'$ sont $(I, n)$-*isomorphes* s'il existe un isomorphisme de $\oplus_{k\in\mathbf{Z}} I^k$-modules

$$\oplus_{k\in\mathbf{Z}} I^k M / I^{k+n} M \to \oplus_{k\in\mathbf{Z}} I^k M' / I^{k+n} M'.$$

On convient que $I^{-r} = A$ pour $r \leq 0$. Si $B$ et $B'$ sont deux $A$-*algèbres*, ont dit qu'elles sont $(I, n)$-isomorphes s'il existe un isomorphisme de $\oplus_{k\in\mathbf{Z}} I^k$-algèbres comme ci-dessus.

On a alors :

***Théorème 1.13*** **(Théorème d'approximation des morphismes)**

*Soient $X$ comme en **1.10** et $\overline{f} : \overline{Y} \to \widehat{X}$ un morphisme affine de type fini. Il existe un entier $c \in \mathbf{N}$, une factorisation $X_0 \to X$ de type fini du morphisme $\widehat{X} \to X$ et un modèle de $\overline{f}$ sur $X_0$ tels que pour toute telle factorisation $X' \to X_0 \to X$ comme ci-dessus et toute section $\sigma$ de $X' \to X$ approchant $\widehat{X} \to X'$ à un ordre $n \geq c+1$, les $\widehat{X}$-schémas $\overline{Y}$ et $\widehat{Y_\sigma}$ soient $(\mathfrak{m}_{\widehat{X}}, n-c)$-isomorphes.*

L'hypothèse d'affinité sur $\overline{f}$ n'est là que pour simplifier l'exposition : on peut faisceautiser la définition d'un $(\mathfrak{m}_{\widehat{X}}, n)$-isomorphisme et démontrer un résultat semblable dans le cas général.

L'utilité du théorème précédent provient essentiellement du lemme suivant :

***Lemme 1.13.1.*** — *Soient $A$ un anneau, $I$ un idéal de $A$ et $B, B'$ deux $A$-algèbres noethériennes.*

**i.** La dimension est préservée par $(I, 1)$-isomorphisme *: si $B$ et $B'$ sont $(I, 1)$-proches (comme $A$-algèbres), pour tout $x \in \mathrm{Spec}(B/I) = \mathrm{Spec}(B'/I)$, on a :*

$$\dim(B_x) = \dim(B'_x).$$

**ii.** La régularité est préservé par $(I, 2)$-isomorphisme *: si $B$ et $B'$ sont $(I, 2)$-proches (comme $A$-algèbres), pour tout $x \in \mathrm{Spec}(B/I) = \mathrm{Spec}(B'/I)$, $B_x$ est régulier ssi $B'_x$ est régulier.*

*Démonstration.* — Le premier point résulte du fait que pour tout anneau local noethérien $C$ et tout idéal *strict* $J$ de $C$, on a $\dim(C) = \dim \mathrm{Gr}_J(C)$ ; cf. p. ex. [**Mat89**], 15.7. Pour le second, il suffit de constater que si $B$ est un anneau local et $I$ un idéal strict, le quotient $\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ est isomorphe au quotient $\mathfrak{m}_{\overline{B}}/\mathfrak{m}_{\overline{B}}^2$ où $\overline{B} = B/I^2$ ; en particulier il ne dépend que de la classe de $(I,2)$-isomorphisme.

□

**1.14. Application de 1.13 à 1.11.** — Partant d'un recouvrement pspf $\overline{f} : \overline{Y} = \coprod \overline{Y}_i \to \widehat{X}$ ayant un modèle sur $X'$, la construction **1.10** permet d'obtenir un recouvrement pspf de $X$ : quitte à grossir $X'$, on se ramène au cas où le recouvrement de $\widehat{X}$ est standard, auquel cas il est clair que les propriétés à vérifier (recouvrement Zariski, propreté, surjectivité) sont stables par changement de base. Les propriétés (i)-(iii) sont plus délicates à vérifier.

On applique pour cela le théorème **1.11** ci-dessus pour $n-c \geq 2$. D'après le lemme précédent, les schémas $Y_{i,\sigma}$ sont alors réguliers le long de la fibre spéciale sur $X$. (On utilise le fait que la régularité se teste (sans hypothèse d'excellence) après complétion.)

Comme le lieu régulier d'un schéma excellent est ouvert, on conserve un recouvrement pspf en considérant les ouverts $U_{i,\sigma} = Y_{i,\sigma_{\text{rég}}}$ :

***Lemme 1.14.1*** **([Mor06a], 2.4.6).** — *Soient $X$ un schéma local noethérien et $Y \to X$ un morphisme de type fini pspf-couvrant. Pour tout voisinage $U$ de la fibre spéciale, le morphisme $U \to X$ est encore couvrant.*

La propriété (i) peut donc être satisfaite. Vérifions brièvement (ii). On peut supposer $\overline{Y}$ connexe ; il est également régulier par hypothèse. Par hypothèse, on peut supposer que l'image inverse (topologique) du fermé $Z$ de $X$ dans $\overline{Y}$ est définie par l'équation $t_1 \cdots t_r = 0$. Posons $\overline{D}_j := V(t_j)$ ; pour chaque $J \subset [1,r]$, les schémas $\overline{D}_J := \cap_{j \in J} \overline{D}_j$ sont réguliers, purement de codimension $\#J$. On applique le théorème **1.13** (pour $n-c \geq 2$) au coproduit $\overline{Y} \coprod \left( \coprod_J \overline{D}_J \right) \to \widehat{X}$ ; en particulier on peut supposer les $\overline{D}_j$ définis sur le modèle $Y'$ de $X'$. Le morphisme $\sigma$ étant une *section*, l'image inverse topologique de $Z$ dans $Y_\sigma$ est égale au support du sous-schéma $D_\sigma := \cup_j D_{j,\sigma}$. D'après ce qui précède, quitte à considérer un voisinage ouvert (régulier) de la fibre spéciale du morphisme $Y_\sigma \to X$, on peut supposer que les intersections des $D_{j,\sigma}$ sont régulières, de la codimension attendue.

Pour la propriété (iii) ainsi que les détails sur les points précédents, nous renvoyons le lecteur à [**Mor06a**], §2.

**1.15. Sur la démonstration du théorème 1.13.** — La $\widehat{A}$-algèbre $\overline{B} := \Gamma(\overline{Y}, \mathscr{O}_{\overline{Y}})$ est isomorphe au quotient d'une algèbre de polynômes $\widehat{A}[\underline{T}]$. Elle s'identifie donc au conoyau d'un morphisme $\widehat{A}[\underline{T}]$-linéaire

$$\widehat{A}[\underline{T}]^r \xrightarrow{\overline{\varphi}} \widehat{A}[\underline{T}].$$

En termes géométriques, on plonge $\overline{Y}$ dans un $\widehat{X}$-espace affine.

Il existe un sous-anneau $A_0$ de $\widehat{A}$, de type fini sur $A$, tel que $\overline{\varphi}$ provienne par extension des scalaires d'un morphisme $A_0[\underline{T}]^r \xrightarrow{\varphi_0} A_0[\underline{T}]$, de conoyau noté $B_0$, un modèle de $\overline{B}$ (de type fini) sur $A_0$ (rappelons que le produit tensoriel est exact à droite). De même pour $A'/A_0$ de type fini. Par le procédé **1.10**, on en déduit, pour chaque $\sigma$ comme dans *loc. cit.*, un morphisme $A[\underline{T}]^r \xrightarrow{\varphi_\sigma} A[\underline{T}]$, de conoyau noté $B_\sigma$. Si $\sigma$ est une approximation à l'ordre $n$, après réduction modulo $\mathfrak{m}_{\widehat{A}}^n$, les morphismes $\overline{\varphi}$ et $\widehat{\varphi_\sigma}$ sont isomorphes. Comme il s'agit d'applications linéaires entre modules *libres*, on vérifie aisément qu'elles sont même $(\mathfrak{m}_{\widehat{A}}, n)$*-isomorphes.*

Remarquons que cette construction s'étend immédiatement au cas d'une résolution à trois termes de $\overline{B}$ : $\widehat{A}[\underline{T}]^s \xrightarrow{\widehat{\psi}} \widehat{A}[\underline{T}]^r \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \widehat{A}[\underline{T}] (\to \overline{B})$. Comme ci-dessus, elle se descend à tout $A'$ sur un $A_0$ convenable et produit, par image inverse par une section $n$-approximante, un complexe sur $A$ (non nécessairement exact au milieu). Cela sera utile en **1.15.2**.

On veut montrer que pour $n$ suffisamment grand, $\overline{B}$ et $\widehat{B_\sigma}$ sont $(\mathfrak{m}_{\widehat{A}}, 2)$-isomorphes.

Cela résulte des deux propositions suivantes (appliquées à $C = \widehat{A}[\underline{T}]$). Il s'agit de cas particuliers de résultats bien plus généraux ; cf. [**Gab05b**], §2 (énoncés) et [**Mor06a**], §1 (démonstrations).

***Proposition 1.15.1***. — *Soient $C$ un anneau noethérien, $I$ un idéal, $r, s, c \geq 0$ des entiers naturels et $n \geq c$ un entier. Dans le sous-$C$-module de $\mathsf{Hom}_C(C^r, C^s)$ constitué des applications dont $c$ est une constante d'Artin-Rees*$^{(ii)}$*, deux applications qui coïncident modulo $I^n$ ont des conoyaux $(I, n-c)$-proches.*

(En d'autres termes, si $\varphi, \varphi' : C^r \to C^s$ sont deux morphismes de $C$-modules libres de type fini et $c$ une constante d'Artin-Rees commune, les deux $\oplus I^k$-modules $\oplus I^k \mathrm{Coker}(\varphi)/I^{k+n-c}\mathrm{Coker}(\varphi)$ et $\oplus I^k \mathrm{Coker}(\varphi')/I^{k+n-c}\mathrm{Coker}(\varphi')$ sont isomorphes dès que les deux morphismes $(C/I^n)^r \to (C/I^n)^s$ coïncident.)

***Proposition 1.15.2***. — *Soient $C$ un anneau noethérien, $I$ un idéal et $\mathscr{K} = (C^r \xrightarrow{\psi} C^s \xrightarrow{\varphi} C^t)$, $\mathscr{K}' = (C^r \xrightarrow{\psi'} C^s \xrightarrow{\varphi'} C^t)$ deux complexes de $C$-modules libres de type fini, le premier étant exact au milieu. Supposons que l'on ait l'égalité $\mathscr{K}/I^{c+1} = \mathscr{K}'/I^{c+1}$, où $c$ est une constante d'Artin-Rees pour* $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\psi)$. *Alors, $c$ est également une constante d'Artin-Rees pour* $\mathrm{Im}(\varphi')$.

On trouvera également des résultats semblables dans [**CdJ02**] (lemme 3.1, théorème 3.2) et dans [**PS73**] (§6).

*Démonstration de* ***1.15.1***. — Pour chaque $k \in \mathbf{Z}$, il nous faut montrer que les « dénominateurs » du quotient

$$I^k A^s / (I^{k+n-c} A^s + I^k A^s \cap \mathrm{Im}(\varphi))$$

et son analogue pour $\varphi'$ coïncident sous les hypothèses de la proposition (ou plutôt la paraphrase qui la suit). Soit $x \in I^k A^s \cap \mathrm{Im}(\varphi)$. On a supposé que $I^k A^s \cap \varphi(A^r) \subset \varphi(I^{k-c} A^r)$, de sorte que $x = \varphi(v)$ où $v \in I^{k-c} A^r$. Décomposons : $x = (\varphi - \varphi')(v) + \varphi'(v)$. Le premier terme appartient à $I^{n+(k-c)} A^s$ (car $\varphi - \varphi'$ est congru à 0 modulo $I^n$) tandis que le second appartient à $\mathrm{Im}(\varphi')$. Par soustraction, ce dernier terme appartient également à $I^k A^s$ (puisque c'est le cas de $x$). Finalement, $x \in I^{k+n-c} A^s + I^k A^s \cap \mathrm{Im}(\varphi')$. Par symétrie, on a l'égalité $I^{k+n-c} A^s + I^k A^s \cap \mathrm{Im}(\varphi) = I^{k+n-c} A^s + I^k A^s \cap \mathrm{Im}(\varphi')$ désirée.

□

*Démonstration de* ***1.15.2***. — L'entier $c$ étant une constante d'Artin-Rees pour les images des différentielles de $\mathscr{K}$, la suite spectrale $E_\bullet(\mathscr{K}) : \mathrm{H}^{p+q}\mathrm{Gr}^p_F \mathscr{K} \Rightarrow \mathrm{Gr}^p_F \mathrm{H}^{p+q}(\mathscr{K})$ associée à la filtration $I$-adique (notée $F$) du complexe $\mathscr{K}$ (cf. p. ex. [**Ser65**], II-15, théorème) dégénère en $E_{c+1}$. Or, les termes $E_1(\mathscr{K}), \dots, E_{c+1}(\mathscr{K})$ ne dépendent par construction que des $F^p(\mathscr{K})/F^{p+r}(\mathscr{K})$ pour $r \leq c+1$. Puisque que $\mathscr{K}/I^{c+1}$ et $\mathscr{K}'/I^{c+1}$ sont égaux (de sorte que $\mathscr{K}$ et $\mathscr{K}'$, dont les constituants sont *libres*, sont $(I, c+1)$-proches), on en déduit que la diagonale $p + q = 0$ de $E_{c+1}(\mathscr{K}')$ est nulle (cela résulte du fait que $H^0(\mathscr{K}) = 0$). À partir du cran $c+1$, la suite spectrale de $\mathscr{K}'$ est donc concentrée sur les diagonales $p + q \in \{-1, 1\}$ ; avec tous ces zéros, elle ne peut que converger à partir de ce cran. Le théorème de *loc. cit.* étant une équivalence, l'entier $c$ est une constante d'Artin-Rees pour $\varphi'$ (et $\psi'$).

□

---

$^{(ii)}$Pour tout $t \geq c$, on a $I^t C^s \cap \mathrm{Im} \subset I^{t-c}\mathrm{Im}$.

## 2. Fibration dans le cas complet

Les ingrédients essentiels à la démonstration de **1.9** sont le théorème ci-dessous, le théorème de de Jong sur les familles de courbes et le théorème de résolution des singularités des log-schémas log-réguliers dû à K. Katô. Cette partie de la démonstration des théorèmes de Gabber n'est pas discutée ailleurs dans le groupe de travail. Nous espérons donner tous les détails nécessaires.

***Théorème 2.1*** **(Théorème d'algébrisation partielle).** — *Soient* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *un schéma local complet noethérien normal de dimension* $d \geq 2$, *et* $Z$ *un fermé strict. Il existe :*

**i.** *un morphisme fini dominant* $\nu : X' \to X$, *avec* $X' = \mathrm{Spec}(A')$ *local normal,*
**ii.** *un sous-anneau local intègre hensélien excellent* $\widetilde{A}'$ *de* $A'$, *de complété (pour la topologie de l'idéal maximal) isomorphe à* $A'$,
**iii.** *un fermé* $\widetilde{Z}'$ *strict de* $\widetilde{X'} := \mathrm{Spec}(\widetilde{A}')$ *dont l'image inverse sur* $X'$ *contient* $\nu^{-1}(Z)$,
**iv.** *un morphisme essentiellement de type fini* $\mathrm{Spec}(\widetilde{A}') \to S' = \mathrm{Spec}(B')$, *où* $B'$ *est un anneau local complet régulier de dimension* $d-1$.

*En égale caractéristique, on peut supposer que* $\nu$ *est l'identité.*

Notre acception de l'expression « essentiellement de type fini » que est plus générale que celle employée d'habitude : il s'agit ici du composé d'une hensélisation et d'un morphisme de type fini (cf. fin du **2.5**).

***Remarque 2.2.*** — D'après [**Gab05b**], théorème 5.1, on peut s'arranger pour avoir une égalité dans (iii).

Le lecteur qui voudra bien admettre ce résultat peut passer directement à la section 3.
Nous allons maintenant démontrer **2.1**. On encourage le lecteur à ne se référer aux deux sections suivantes qu'au court des besoins et à commencer sa lecture par la section §**2.5**.

### 2.3. Égale caractéristique (préparatifs). —

***Théorème 2.3.1*** **(Théorème de Cohen-Gabber ; Ofer Gabber, [Gab05a], lemme 8.1)**
*Soit* $A$ *un anneau local complet noethérien* réduit, *d'égale caractéristique* $p > 0$, *équidimensionel de dimension* $d$ *et de corps résiduel* $k$. *Il existe un sous-anneau* $A_0$ *de* $A$, *isomorphe à* $k[[t_1, \ldots, t_d]]$, *tel que* $A$ *soit fini sur* $A$, *sans torsion et génériquement étale.*

Ce résultat apparaît explicitement comme hypothèse (dans le cas intègre) dans [**ÉGA** $0_{\text{IV}}$ 21.9.5].
La démonstration du théorème, tirée de [**Gab05a**], occupe les paragraphes **2.3.2** à **2.3.6**.

***2.3.2.*** — Soient $t_1, \ldots, t_d \in A$ un système de paramètres, $\{b_i\}_{i \in I}$ une $p$-base de $k = A/\mathfrak{m}_A$, $\{\beta_i\}_{i \in I}$ des relèvements des $b_i$ dans $A$ (que nous changerons par la suite), et $\kappa \subset A$ le corps de représentants correspondant (cf. [**Bourbaki**, A.C. chapitre IX, §2, N°2]).

Notons $C$ l'ensemble des composantes irréductibles de $A$, $\{\wp_\alpha\}_{\alpha \in C}$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de $\mathrm{Spec}(A)$, et $A_\alpha := A/\wp_\alpha$ l'anneau intègre de dimension $d$ correspondant à la composante irréductible $\alpha$. L'anneau $A$ étant réduit, on a $(0) = \cap_\alpha \wp_\alpha$ ; c'est une décomposition primaire *réduite* : $\forall \alpha, \cap_{\beta \neq \alpha} \wp_\beta \subsetneq \wp_\alpha$.

Pour tout ensemble *fini* $e \subset I$, posons $\kappa_e := \kappa^p(\beta_i,\, i \notin e) \subset \kappa$. Les trois propriétés suivantes sont évidentes :

$$(\star)\ [\kappa : \kappa_e] < +\infty,\ \kappa_{e \cup e'} \subset \kappa_e \cap \kappa_{e'} \text{ et } \cap_{e \subset I} \kappa_e = \kappa^p.$$

*2.3.3.* — Pour simplifier les notations, fixons $\alpha \in C$ et posons $B = A_\alpha$, $L$ son corps des fractions et $\tau_i$ l'image de $t_i \in A$ dans $B$ par la surjection canonique. Considérons les anneaux suivants :

$$\begin{gathered} R_\kappa = \kappa[[\tau_1, \ldots, \tau_d]] \subset B, \\ L_\kappa = \operatorname{Frac} R_\kappa \subset L, \\ R_{\kappa,e} = \kappa_e[[\tau_1^p, \ldots, \tau_d^p]] \subset R_\kappa, \\ L_{\kappa,e} = \operatorname{Frac} R_{\kappa,e} \subset L_\kappa; \end{gathered}$$

les morphismes d'inclusion sont finis (cf. p. ex. [**ÉGA** $0_{\mathrm{IV}}$ 19.8.8], démonstration).

D'après [**Mat89**], §30, lemme 6, et l'analogue de ($\star$) pour les sous-corps $L_{\kappa,e}$ de $L_\kappa$, on a l'égalité

$$\operatorname{rang}_L \Omega^1_{L/L_{\kappa,e}} = \operatorname{rang}_{L_\kappa} \Omega^1_{L_\kappa/L_{\kappa,e}},$$

dès que l'ensemble fini $e$ est suffisamment grand.

En particulier, on peut supposer cette égalité valable pour chaque composante irréductible $\alpha$.

Le terme de gauche est le rang (générique) du $B$-module $\Omega^1_{B/R_{\kappa,e}}$ ; remarquons que d'après [**ÉGA** $0_{\mathrm{IV}}$ 21.9.4], $\Omega^1_{B/R_{\kappa,e}}$ s'identifie au module $\widehat{\Omega}^1_{B/\kappa_e}$ des formes différentielles *continues*. Le terme de droite est le rang du $R_{\kappa,e}$-module libre $\Omega^1_{R_{\kappa,e}/R_\kappa}$. Ce dernier est égal à $d + \operatorname{rang}_\kappa \Omega^1_{\kappa,\kappa_e} = d + |e|$ de sorte que l'on a :

$$\operatorname{rang}_B \widehat{\Omega}^1_{B/\kappa_e} = d + |e| \tag{2.a}$$

***Lemme 2.3.4.*** — *Pour tout idéal non nul $I$ de $B$, l'ensemble des $d(i) \otimes_B L$, pour $i \in I$, est une famille génératrice du $L$-espace vectoriel $\widehat{\Omega}^1_{B/\kappa_e} \otimes_B L$.*

*Démonstration.* — En effet, si $i_0 \in I$ est non nul et si l'on pose $v_0 = d(i_0)$, l'ensemble $d(Bi) = \{bv_0 + i_0 db,\, b \in B\}$ contient $v_0$ et est générateur puisque l'ensemble des $db$ l'est. □

*2.3.5.* — Supposons $e$ choisi comme ci-dessus. Identifions l'ensemble $C$ des composantes irréductibles de $\operatorname{Spec}(A)$ à l'ensemble $\{1, \ldots, c\}$, et notons pour tous $i \in e$ et $j \in \{1, \ldots, c\}$, $\beta_{i,j}$ l'image dans $A_j = A/\wp_j$ de $\beta_i \in A$. (Rappelons que les $\beta_i$ font partie d'une $p$-base de $\kappa \subset A$.) Fixons $0 \leq j \leq c-1$ et supposons qu'il existe des éléments $\{m_i\}_{i \in e}$ dans $\mathfrak{m}_A$ tels que les images des éléments $\beta_i + m_i$ dans chacun des anneaux $A_1, \ldots, A_j$ ait des différentielles linéairement indépendantes (dans $\Omega^1_{A_1/R_{\kappa,e}} \otimes_{A_1} \operatorname{Frac} A_1$, …, $\Omega^1_{A_j/R_{\kappa,e}} \otimes_{A_j} \operatorname{Frac} A_j$,). (Pour $j = 0$, cette condition est vide.) Vérifions qu'il en est de même pour $j+1$. On peut supposer que les $m_i$ ($i \in e$) sont nuls ; nous le ferons pour simplifier les notations. Afin de ne pas altérer les choix précédents sur les composantes $A_1, \ldots, A_j$, on considère l'idéal $\wp_1 \cap \cdots \cap \wp_j = \operatorname{Ker}(A \to A_1 \times \cdots \times A_j)$. Comme rappelé plus haut, l'idéal $\wp_1 \cap \cdots \cap \wp_j$ n'est pas contenu dans $\wp_{j+1}$ de sorte que son image dans $B := A/\wp_{j+1}$ est un idéal non nul ; nous le noterons $I$. D'après les résultats du paragraphe précédent, $\operatorname{rang}_B \widehat{\Omega}^1_{B/\kappa_e} = d + |e| \geq |e|$ et la famille $d(I)$ est génératrice dans $\widehat{\Omega}^1_{B/\kappa_e} \otimes_B L$ (où $L = \operatorname{Frac} B$). Il existe donc des éléments $m'_i \in I$, $i \in e$, tels que les différentielles des éléments $d(\beta_{i,j+1})$, $i \in e$, soient linéairement indépendantes. Il suffit alors de relever les $m'_i$ dans $\wp_1 \cap \cdots \cap \wp_j \subset \mathfrak{m}_A$ pour obtenir les éléments souhaités.

*2.3.6.* — D'après les résultats des deux paragraphes précédents, il existe un ensemble fini $e$ tel que *pour chaque composante irréductible* $B$ de $A$ on ait $\operatorname{rang}_B \widehat{\Omega}^1_{B/\kappa_e} = d + |e|$ et d'autre part des éléments $\beta'_i$, $i \in e$, relevant les $b_i$, dont les différentielles sont linéairement indépendantes dans ces groupes. Si l'on considère le corps $\kappa' := \kappa^p(\beta_i, i \notin e; \beta'_i, i \in e) = \kappa_e(\beta_i, i \in e) \subset A$, celui-ci s'envoie isomorphiquement sur $k$ par la surjection canonique $A \to k = A/\mathfrak{m}_A$ et l'on a

$$\operatorname{rang}_B \widehat{\Omega}^1_{B/\kappa'} = d$$

pour toute composante connexe $B$ de $A$. Pour simplifier les notations nous noterons ce nouveau corps de représentants $\kappa$.

Le $A$-module $\widehat{\Omega}^1_{A/\kappa}$ étant de rang (générique) $d$ sur chaque composante irréductible, on montre en procédant comme précédemment, qu'il existe des éléments $f_1, \ldots, f_d$ de $A$ tels que les $d(f_i \bmod \wp_\alpha) \otimes_{A_\alpha} \operatorname{Frac} A_\alpha$ forment une base de $\widehat{\Omega}^1_{A_\alpha/\kappa} \otimes_{A_\alpha} \operatorname{Frac} A_\alpha$ pour chaque composante irréductible $A_\alpha$. Quitte à les multiplier par une puissance $p$-ième d'un élément non nul appartenant à $\mathfrak{m}_A$, on voit que l'on peut les supposer dans $\mathfrak{m}_A$. Rappelons que l'on a choisi un système de paramètres $t_1, \ldots, t_d$ dans $A$, de sorte qu'en particulier, comme rappelé plus haut, le morphisme $A/k[[t_1, \ldots, t_d]]$ est fini.

Posons, pour $i \in [1, d]$,

$$t'_i := t_i^p(1 + f_i).$$

Soit $A_0$ le sous-anneau $\kappa[[t'_1, \ldots, t'_d]]$ de $A$. Le morphisme $A/A_0$ est fini : cela résulte du fait que les éléments $1 + f_i$ sont des unités de $A$. Il est génériquement étale sur chaque composante irréductible compte tenu de l'hypothèse sur les éléments $f_i$ et de la formule

$$d(t'_i) = t_i^p df_i.$$

**2.4. Caractéristique mixte (préparatifs).** — Commençons par quelques rappels.

***Théorème 2.4.1* (Helmut Epp, [Epp73], théorème 1.9).** — *Soit $T \to S$ un morphisme dominant de traits complets, de caractéristique résiduelle $p > 0$. Notons $\kappa_S$ et $\kappa_T$ leurs corps résiduels respectifs. Supposons $\kappa_S$* parfait *et le sous-corps parfait maximal de $\kappa_T$ algébrique sur $\kappa_S$. Il existe une extension finie de traits $S' \to S$ telle que le produit fibré réduit normalisé*

$$T' := (T \times_S S')^\nu_{\text{réd}}$$

*ait une fibre spéciale* réduite *au-dessus de $S'$.*

Nous n'utiliserons ce théorème qu'en caractéristique mixte ; dans ce cas, le produit fibré $T \times_S S'$ est réduit.

*2.4.2.* — Commençons par vérifier que l'hypothèse sur les corps résiduels est satisfaite dans de nombreux cas. Nous dirons qu'une extension de corps $K/k$ de caractéristique $p > 0$ a la *propriété de Epp* si le sous-corps $K^{p^\infty} := \cap_{i \geq 0} K^{p^n}$ de $K$ est étale sur $k$, où, de façon équivalente, contenu dans une clôture séparable $k^{\text{sép}}$ de $k$.

***Lemme 2.4.2.a.*** — *Pour tout corps $K$, on a, dans une clôture séparable $K^{\text{sép}}$ de $K$,*

$$(K^{p^\infty})^{\text{sép}} = (K^{\text{sép}})^{p^\infty}.$$

*Démonstration.* — L'inclusion $(K^{p^\infty})^{\text{sép}} \subset (K^{\text{sép}})^{p^\infty}$ est évidente : $K^{p^\infty}$ est parfait donc toute extension algébrique, en particulier sa clôture séparable $(K^{p^\infty})^{\text{sép}}$, l'est également. Comme cette dernière est contenue dans $K^{\text{sép}}$, elle est également contenue dans son plus grand sous-corps parfait $(K^{\text{sép}})^{p^\infty}$.

Réciproquement, considérons $x \in (K^{\text{sép}})^{p^\infty}$, et notons, pour chaque entier $n \geq 0$, $x_n$ sa racine $p^n$-ième dans $K^{\text{sép}}$ et $f_n$ son polynôme minimal (unitaire). En élevant l'égalité $f_n(x_n)$ à la puissance $p$, on obtient $f_n^{(p)}(x_n^p) = 0$, où $f_n^{(p)}$ est le polynôme tel que $f_n^{(p)}(X^p) = \big(f_n(X)\big)^p$. Comme $x_n^p = x_{n-1}$, on a $f_n^{(p)}(x_{n-1}) = 0$ et, par irréductibilité de $f_{n-1}$, $f_{n-1} | f_n^{(p)}$. Écrivons $f_n^{(p)} = f_{n-1} \cdot h$ dans $K[X]$ ; en l'évaluant en $X^p$, on en déduit : $f_n^p = f_{n-1}(X^p)h(X^p)$. Comme $f_n$ est irréductible, on a $f_{n-1}(X^p) = f_n^r$ pour un $r \in [1, p]$. En dérivant cette égalité, on obtient l'égalité $0 = r f_n f'_n$. Le polynôme $f_n$ étant séparable, on a $f'_n \neq 0$ de sorte que $r = p$ et finalement $f_{n-1}(X^p) = f_n^p = f_n^{(p)}(X^p)$. En conclusion, $f_{n-1} = f_n^{(p)}$ et, par récurrence, $f_0 = f_n^{(p^n)}$, de sorte que les coefficients du polynôme minimal $f_0$ de $x$, appartiennent à $K^{p^\infty}$. □

***Proposition 2.4.2.b* (Cf. [Epp73], §0.4).** —

**i.** *Soient $L/K$ et $K/k$ ayant la propriété de Epp. Alors, $L/k$ a la propriété de Epp.*
**ii.** *Toute extension finie a la propriété de Epp.*
**iii.** *Pour tout entier $n$, et tout corps $k$, l'extension $\big(\mathrm{Frac}\, k[[x_1,\ldots,x_d]]\big)/k$ a la propriété de Epp.*
**iv.** *Soit $A$ un anneau local complet noethérien intègre de corps résiduel $k$. Alors, l'extension $(\mathrm{Frac}\, A)/k$ a la propriété de Epp.*

*Démonstration.* — (i) Par hypothèse, $L^{p^\infty} \subset K^{\text{sép}}$. Comme le corps $L^{p^\infty}$ est *parfait*, on en déduit que $L^{p^\infty} \subset (K^{\text{sép}})^{p^\infty} = (K^{p^\infty})^{\text{sép}} \subset k^{\text{sép}}$, où l'égalité résulte du lemme précédent.

(ii) Toute extension étale a tautologiquement la propriété de Epp. D'après (i), il reste à considérer le cas d'une extension radicielle $K/k$. Si elle est de hauteur $\leq r$, on a $K^{p^r} \subset k$ et en particulier $K^{p^\infty} \subset k \subset k^{\text{sép}}$.

(iii) Soit $A = k[[x_1,\ldots,x_d]]$ et $K$ son corps des fractions. Montrons que $K^{p^\infty} = k^{p^\infty}$. Comme $K$ est contenu dans $k((x_1,\ldots,x_{d-1}))((x_d))$, on se ramène par récurrence au cas où $d = 1$. Tout élément de $k((x))^{p^\infty}$ a une valuation infiniment $p$-divisible donc nulle, de sorte que $k((x))^{p^\infty}$ est contenu dans $k[[x]]^\times$ et finalement dans $k^{p^\infty}$ par un calcul immédiat.

(iv) Cela résulte des observations précédentes et du théorème de structure de Cohen.

□

**2.5. Démonstration du théorème 2.1 en égale caractéristique.** — Soit $(X = \mathrm{Spec}(A), Z)$ comme dans *loc. cit.* et supposons le schéma $X$ d'égale caractéristique. Puisque l'on s'autorise à agrandir le fermé $Z$, on peut supposer ce dernier égal à $V(f)$[(iii)] où $f \in A$ est non nul. D'après **2.3.1**, si $k$ est le corps résiduel de $A$, il existe un sous-anneau $A_0$ de $A$, isomorphe à $k[[t_1,\ldots,t_d]]$ tel que le morphisme $X \to X_0 := \mathrm{Spec}(A_0)$ soit fini, *génériquement étale*. Soit $g \in A_0$ une équation du lieu de ramification. Quitte à agrandir $Z$, on peut supposer que $f$ appartient à $A_0$ : on peut prendre sa norme (rappelons que l'anneau $A_0$ est normal).

Rappelons l'énoncé du théorème de préparation de Weierstraß sous la forme qui nous sera utile (ici ainsi qu'en caractéristique mixte).

***Théorème 2.5.1* (Karl Weierstraß).** — *Soient $\kappa$ un anneau local séparé complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et $d$ un entier.*

**i.** *Pour tout élément $s \in \kappa[[t_1,\ldots,t_d]]$ non nul modulo $(\mathfrak{m}, t_1,\ldots,t_{d-1})$, il existe une* unité *$u \in \kappa[[t_1,\ldots,t_d]]^\times$ et un* polynôme *$P$,* unitaire *en $t_d$, $P \in \kappa[[t_1,\ldots,t_{d-1}]][t_d]$, tel que*

$$s = u \cdot P.$$

**ii.** *Pour tout élément $s \in \kappa[[t_1,\ldots,t_d]]$ non nul modulo $\mathfrak{m}$, il existe un automorphisme $\kappa$-linéaire $c$ de $\kappa[[t_1,\ldots,t_d]]$, tel que $c(t_d) = t_d$ et $c(s)$ soit non nul modulo $(\mathfrak{m}, t_1,\ldots,t_{d-1})$.*
**iii.** *Soit $s \in \kappa[[t_1,\ldots,t_d]]$ congru modulo $(\mathfrak{m}, t_1,\ldots,t_{d-1})$ à $ut_d^N + \lambda_{d+1}t_d^{N+1} + \cdots$ où $u$ est une unité de $\kappa$ et les $\lambda_i$, pour $i \geq N+1$, appartiennent à $\kappa$. Pour tout $h \in \kappa[[t_1,\ldots,t_d]]$, il existe un unique couple $(q,r) \in \kappa[[t_1,\ldots,t_d]] \times \kappa[[t_1,\ldots,t_{d-1}]][t_d]$ tel que $h = qs + r$ et $\deg_{t_d}(r) < N$.*

Il résulte immédiatement de (i-ii) (où l'on pose $\kappa = k$ et $\mathfrak{m} = 0$) que quitte à changer les variables, il est loisible de supposer $f$ et $g$ unitaires en la variable $t_d$ (et à coefficients dans $k[[t_1,\ldots,t_{d-1}]]$). Ils appartiennent donc tautologiquement au sous-anneau (hensélien) $\widetilde{A_0}$ de $A_0$ isomorphe à $k[[t_1,\ldots,t_{d-1}]]\{t_d\}$ (séries entières henséliennes). Enfin, on déduit du (iii) que la paire $(\widetilde{X_0} = \mathrm{Spec}(\widetilde{A_0}), V(g))$ est *hensélienne* (au sens de [**Elk73**], §0.1). On peut donc

[(iii)] Plus précisément au support du schéma $V(f)$.

appliquer le théorème d'algébrisation de Elkik (*op. cit.*, théorème 5) qui assure l'existence d'un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X_0 & \longrightarrow & \widetilde{X_0} \end{array}$$

où $\widetilde{X} \to \widetilde{X_0}$ est fini, étale au-dessus du complémentaire de $V(g)$ et où $X \to \widetilde{X_0}$ est le morphisme de complétion (qui coïncide avec la complétion $(g)$-adique). Par construction, le fermé $V(f)$ de $X$ (qui contient le fermé $Z$ d'origine) provient bien d'un fermé de $\widetilde{X}$ (et même de $\widetilde{X_0}$). Remarquons enfin que $\widetilde{A_0}$ est l'hensélisation en l'origine de l'anneau $k[[t_1, \ldots, t_{d-1}]][t_d]$, de type fini sur $B' = k[[t_1, \ldots, t_{d-1}]]$.

**2.6. Démonstration du théorème 2.1 en caractéristique mixte.** — On cherche à imiter la démonstration précédente. L'analogue du théorème **2.3.1** est ici bien connu : génériquement on est en caractéristique nulle de sorte que le théorème de structure de Cohen fait l'affaire. Cependant, afin de pouvoir appliquer les théorèmes de Weierstraß et de Elkik, il faut plus ; le lieu de ramification ne doit pas être trop vertical (sur $\mathbf{Z}_p$). Cela est possible grâce au théorème de Epp. Précisons.

***2.6.1.*** — Soit $k_0 = k^{p^\infty}$ le sous-corps parfait maximal du corps résiduel $k$ de $A$ (supposé maintenant d'inégale caractéristique) et notons $W_0 = W(k_0)$ l'anneau des vecteurs de Witt correspondant. Il résulte d'un théorème de I.S. Cohen que l'on a un morphisme $X := \mathrm{Spec}(A) \to S_0 := \mathrm{Spec}(W_0)$ relevant l'inclusion $k_0 \hookrightarrow k$ ([**ÉGA** $0_{\text{IV}}$ 19.8.6]).

Pour tout point maximal $\mathfrak{p}$ de la fibre spéciale $X_p$, l'anneau de valuation discrète $A_\mathfrak{p}$ a pour corps résiduel $\mathrm{Frac}\, A/\mathfrak{p}$, où $A/\mathfrak{p}$ est un anneau complet intègre noethérien de corps résiduel $k$. D'après **2.4.2.b** (i) & (iv), l'extension $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})/k_0$ satisfait donc l'hypothèse du théorème de Epp. Les idéaux $\mathfrak{p}$ étant en nombre fini et la conclusion du théorème de Epp étant stable par changement de base (c'est un résultat de lissité formelle), il existe donc une extension finie $S'_0 = \mathrm{Spec}(W'_0) \to S_0$ telle que la fibre spéciale du produit fibré normalisé $X' := (X \times_{S_0} S'_0)^\nu = \mathrm{Spec}(A')$ soit réduite en ses points maximaux.

D'après le lemme suivant, la fibre spéciale est alors réduite.

***Lemme 2.6.1.a.*** — *Soit $X$ un schéma noethérien normal. Tout diviseur de Cartier génériquement réduit est réduit.*

***2.6.2.*** — Procédons comme dans [**Gab05b**], §5.3 et notons $k'_0$ le corps résiduel de $W'_0$, fini sur $k_0$, $\varpi'$ une uniformisante de $W'_0$, et remplaçons si nécessaire $X'$ par une composante connexe dominante sur $X$. Soit $k'$ son corps résiduel, fini sur $k$. L'inclusion $k'_0 \hookrightarrow k'$ déduite du morphisme $X' \to S'$ est formellement lisse, car $k'_0$ est parfait, donc se relève d'après [**ÉGA** $0_{\text{IV}}$ 19.7. 1 et 2] en un morphisme *formellement lisse* $W'_0 \to I'$ où $I'$ est un anneau local complet noethérien. Cet anneau est un anneau de valuation discrète. L'anneau $A'/\varpi'$ étant réduit (et équidimensionel de corps résiduel $k''$), il existe d'après le théorème de Cohen-Gabber (**2.3.1**), un morphisme ($k'_0$-linéaire) $k' \hookrightarrow A'/\varpi'$ et des éléments $t_1, \ldots, t_{d-1} \in A'/\varpi'$ tels que le morphisme induit $k'[[t_1, \ldots, t_{d-1}]] \to A'/\varpi'$ soit fini, *génériquement étale* en haut et en bas.

Par lissité formelle de $W'_0 \to I'$, le morphisme composé $I' \to k' \to A'/\varpi'$ se relève en un $W'_0$-morphisme $I' \to A'$. En relevant les $x_i$ dans $A'$, cela nous permet de construire un morphisme $A'_0 := I'[[t_1, \ldots, t_{d-1}]] \to A'$, fini (cf. p. ex. [**ÉGA** $0_{\text{IV}}$ 19.8.8 (démonstration)]), *étale* au-dessus du point générique de la fibre spéciale.

***2.6.3.*** — Pour simplifier les notations supposons que $X$ est fini au-dessus de $X_0 := \mathrm{Spec}(I[[t_1, \ldots, t_{d-1}]])$, où $S = \mathrm{Spec}(I)$ est un trait de Cohen, et étale au-dessus du point générique de la fibre spéciale. Décomposons $Z$ en $Z' \cup Z''$ où $Z'$ est une union de composantes irréductibles contenues dans la fibre spéciale (sur $S$) et $Z''$ ne contient pas de composante irréductible de la fibre spéciale. D'après le théorème de Weierstraß **2.5.1** (appliqué à $\kappa = I$ et $\mathfrak{m} = (p)$) on peut supposer $Z''$ et le lieu de ramification du morphisme $X \to X_0$ définis par des polynômes unitaires en $t_{d-1}$. Le schéma $X$ (resp. $Z''$) se descend donc par le théorème d'Elkik (resp. tautologiquement) en un schéma $\widetilde{X}$, fini génériquement étale sur $\widetilde{X_0} := \mathrm{Spec}(I[[t_1, \ldots, t_{d-2}]]\{t_{d-1}\})$ (resp. en un fermé de $\widetilde{X}$). Le fermé $Z'$ se descend à $\widetilde{X}$ car les composantes irréductibles de la fibre spéciale de $X/S$ s'obtiennent par complétion à partir des composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\widetilde{X}/S$. Cela résulte du fait que cette fibre spéciale est un schéma excellent (cf. [**ÉGA** IV 18.9.2]). (Plus grossièrement, on pourrait agrandir un peu plus $Z'$ et considérer toute la fibre spéciale.)

## 3. Fibration en courbes : résolution des singularités de la paire $(X, Z)$

Dans cette section, on utilise le théorème d'algébrisation partielle (**2.1**) pour démontrer le théorème d'uniformisation dans le cas complet (**1.9**). Soit $d, X, Z$ comme dans *loc. cit.*; on procède par récurrence sur l'entier $d$. Quitte à éclater $Z$, localiser, normaliser puis compléter (rappelons que cette opération commute ici à la normalisation) on peut supposer que $Z$ est un *diviseur* dans un schéma $X$ (local noethérien complet) *normal*. On peut supposer $d \geq 2$, sans quoi le résultat est bien connu.

D'après **2.1**, on peut supposer de plus que $X$ (resp. $Z$) est la complétion d'un schéma hensélien normal $\widetilde{X}$ (resp. l'image inverse d'un fermé $\widetilde{Z}$ de $\widetilde{X}$), essentiellement de type fini sur un schéma $S$ local complet régulier de dimension $d-1$. Si $\widetilde{f} : \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ est un morphisme pspf couvrant satisfaisant les conditions (i)-(iii) de **1.6** relativement à $\widetilde{Z}$, il en sera de même de son image inverse sur $X$ relativement à $Z$. Cela résulte de la régularité du morphisme $X \to \widetilde{X}$ ([**Ill06**], 1.1 (i)) et du fait que cette propriété est stable par changement de base ([**ÉGA** IV 6.8.2]). Notre problème se ramène donc au cas de la paire $(\widetilde{X}, \widetilde{Z})$, que l'on peut supposer affine. Par passage à la limite ([**ÉGA** IV 8.6 et 8.8]), on peut supposer que $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Z}$ sont affines, de type fini sur $S$. Pour simplifier les notations, nous noterons dorénavant $(X, Z)$ cette paire. Quitte à remplacer $S$ et $X$ par leurs normalisés dans une extension radicielle leurs corps des fractions, on peut donc finalement supposer que :

- $X$ est une $S$-courbe affine, à fibre générique lisse, géométriquement connexe, avec $X$ normal, connexe,
- les composantes irréductibles du diviseur $Z$ qui dominent $S$ sont génériquement étales.

Il résulte du théorème de de Jong sur les familles de courbes ([**dJ97**], 2.4, étendu au cas d'un morphisme affine) que quitte à altérer $S$ (qui n'est donc plus local mais malgré tout justiciable de l'hypothèse de récurrence), on peut supposer que $f$ est une *courbe nodale*, et que les composantes irréductibles dominantes de $Z$ sont dans le lieu de lissité de $f$, et étales sur $S$.

Soit $Z_{\mathrm{vert}}$ la partie verticale de $Z$ (c'est-à-dire l'union de ses composantes irréductibles non dominantes). Soit $T$ le fermé strict $\overline{f(Z_{\mathrm{vert}})} \cup \mathrm{Sing}_S(f)$. Par hypothèse de récurrence, on peut supposer que $S$ est régulier et que $T$ est un diviseur à croisements normaux. Le morphisme $f$ est donc une courbe nodale, lisse sur $S - T$, $Z_{\mathrm{hor}}$ est contenu dans le lieu de lissité de $f$ et est étale sur $S$. D'après le théorème de structure locale des courbes nodales (cf. [**dJ96**], 2.23 & 3.3), on en déduit que la paire $(X, Z_{\mathrm{hor}} \cup f^{-1}(T) = Z')$ est *log-régulière*.

**3.1. Rappels ([Mor06b]).** — La log-régularité (*loc. cit.* 1.1.8(2) et 1.4.1) est locale pour la topologie étale ; rappelons que si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est strictement local noethérien intègre et $Z = V(f)$, on dit que la paire $(X, Z)$ est log-régulière si et seulement si on a :

$$B := A/\big((A \cap A[f^{-1}]^\times) \setminus A^\times\big) \text{ est régulier et } \dim(A) = \dim(B) + \mathrm{rg}_{\mathbf{Z}}(A \cap A[f^{-1}]^\times / A^\times)^{\mathrm{gp}}.$$

(Exemple : $A = k[[x^2, y^2, xy]]$, $f = xy$.) Le schéma $X$ est de plus *régulier* si le monoïde

$$(A \cap A[f^{-1}]^\times)/A^\times \text{ est isomorphe à un } \mathbf{N}^r.$$

(Dans l'exemple précédent, ce monoïde est isomorphe au quotient non libre $\mathbf{N}^3/\{e_1+e_2 = 2e_3\}$.) Dans ce cas, $Z$ est le support d'un diviseur à croisements normaux (*loc. cit.*, 1.4.8 et 1.4.3).

De plus, on a la généralisation suivante d'un théorème de K. Katô (cf. *loc. cit.* §2) :

***Théorème 3.2* ([Niz06], §5).** — *Soient $(X, Z)$ log-régulier et $U = Z - X$. Il existe un schéma noethérien régulier $X'$, un diviseur $D' \subset X'$ à croisements normaux et un morphisme projectif surjectif $f : X' \to X$ tel que $f^{-1}(Z) = D'$ et que le morphisme induit $X' - D' \to U$ soit un isomorphisme*[(iv)].

**3.3.** — L'image inverse du *diviseur* $Z$ peut donc être supposée contenue dans un diviseur à croisements normaux. C'est donc un diviseur à croisements normaux et, quitte à localiser (pour la topologie étale) on peut le supposer strict.

## 4. Le théorème de finitude

Dans cette section, on donne les grandes lignes de la démonstration du théorème suivant (plus faible que [**Ill06**], 3.1) :

***Théorème 4.1.*** — *Soient $S$ un schéma noethérien quasi-excellent, $f : X \to S$ un morphisme de type fini, $n$ un entier inversible sur $S$ et $\mathscr{F}$ un $\mathbf{Z}/n$-faisceau constructible sur $X$. Alors, pour tout entier $i \in \mathbf{N}$, le faisceau $\mathrm{R}^i f_* \mathscr{F}$ est constructible.*

Remarquons que l'on ne dit rien sur l'annulation en grand degré. Cela nécessite des résultats plus fins, qui seront discutés ailleurs (notes du printemps 2007) et reposent les résultats de [**Mor06b**].

Des dévissages standards nous ramènent au cas où $f$ est une immersion ouverte et $\mathscr{F}$ le faisceau constant $\mathbf{Z}/n$.

### 4.2. Rappels. —

***Théorème 4.2.1* (Pureté absolue, Ofer Gabber ([Fuj02], §8))**

*Soient $S$ un schéma régulier noethérien, $D = \sum_{i \in I} D_i$ un diviseur strictement à croisements normaux, $f : X = S - D \to S$ l'immersion ouverte et $n$ un entier inversible sur $S$. Alors on a $\mathrm{R}^0 f_* \mathbf{Z}/n = \mathbf{Z}/n$, $\mathrm{R}^1 f_* \mathbf{Z}/n = \oplus_{i \in I} \mathbf{Z}/n_{D_i}$ et $\mathrm{R}^q f_* \mathbf{Z}/n = \wedge^q \mathrm{R}^1 f_* \mathbf{Z}/n$. En particulier, $\mathrm{R} f_* \mathbf{Z}/n \in \mathsf{D}^b_c(S, \mathbf{Z}/n)$.*

Nous renvoyons à [**Ill06**], §2 pour une discussion ainsi que la définition des flèches. Le choix (peu orthodoxe) des notations est motivé par un soucis de cohérence avec celles de [**Org06**].

***Théorème 4.2.2* (Constructibilité générique, Pierre Deligne ([SGA$_{4\frac{1}{2}}$ Th. finitude 1.9]))**

*Soit $f : X \to S$ un morphisme de type fini où $S$ est un schéma noethérien sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$. Pour tout $\mathbf{Z}/n$-faisceau constructible $\mathscr{F}$ sur $X$ il existe un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ tel que $\mathrm{R} f_* \mathscr{F}_{|U} \in \mathsf{D}^b_c(U, \mathbf{Z}/n)$.*

L'énoncé est en fait plus précis ; cf. [**Ill06**], 3.2.

---

(iv) On peut également supposer que $(X', D') \to (X, Z)$ soit *log-étale*.

*4.2.3.* — Rappelons ([**Las06**], 1.5.1) qu'un morphisme $f : S' \to S$ est de *descente cohomologique* (pour une catégorie de faisceaux donnée) si l'unité $\mathrm{Id} \to \mathrm{R}\varepsilon_{f*}\varepsilon_f{}^*$ est un isomorphisme (évalué en les faisceaux de la catégorie), où $\varepsilon_f$ désigne le morphisme d'augmentation $\mathrm{cosq}_0^S(S') \to S$ induit par $f$. Il est dit de *descente cohomologique universelle* s'il est de descente cohomologique après tout changement de base. Les exemples classiques sont : les morphismes avec section, les morphismes propres (pour la catégorie des faisceaux de torsions : on utilise le théorème de changement de base propre pour se ramener au cas précédent) et, plus simplement, les recouvrements par des ouverts de Zariski. D'après un théorème de P. Deligne (*loc. cit.* 3.0.1), cette classe de morphisme forme une topologie ; elle est (en vertu des exemples ci-dessus) plus fine que la topologie pspf. Cette dernière remarque rend plausible l'énoncé (iii) du théorème ci-dessous.

**4.3.** —

***Théorème 4.3.1.*** — *Soient $S$ un schéma noethérien quasi-excellent, $Z$ un fermé rare, $f : S-Z \hookrightarrow S$ l'immersion ouverte et $N$ un entier fixé. Il existe un $S$-schéma simplicial $\varepsilon_\bullet : S_\bullet \to S$ satisfaisant les conditions suivantes :*

**i.** *pour chaque $i \leq N+1$, le schéma $S_i$ est régulier connexe,*
**ii.** *pour chaque $i \leq N+1$, l'image inverse (topologique) $Z_i$ de $Z$ dans $S_i$ est soit vide soit le support d'un diviseur strictement à croisements normaux,*
**iii.** *pour tout $g : Y \to S$, le complexe $g^*(\mathrm{R}f_*\mathbf{Z}/n)$ est quasi-isomorphe au complexe $\mathrm{R}\varepsilon_{Y_\bullet *}(g_\bullet^*\mathrm{R}f_{\bullet *}\mathbf{Z}/n)$, où $f_\bullet$ est $S_\bullet - Z_\bullet \to S_\bullet$, $g_\bullet : Y_\bullet \to S_\bullet$ et $\varepsilon_{Y_\bullet}$ est $Y_\bullet \to S$.*

*4.3.2. Démonstration du théorème de finitude **4.1**.* — Soit $(S, Z)$ comme dans le théorème précédent. On souhaite montrer que pour tout $i$, le faisceau $\mathrm{R}^i f_*\mathbf{Z}/n$ est constructible. Il suffit de montrer ([$\mathbf{SGA_4}$ IX 2.4.(v)]) que pour tout fermé $g : Y \hookrightarrow S$, le faisceau $g^*\mathrm{R}^i f_*\mathbf{Z}/n$ est constructible sur un ouvert dense. Soit $N \geq i$ et $S_\bullet$ comme ci-dessus. D'après le théorème de pureté **4.2.1**, le complexe $g_\bullet^*\mathrm{R}f_{\bullet *}\mathbf{Z}/n$ est à cohomologie constructible en degré $\leq N+1$. Par ailleurs, il résulte du théorème de constructibilité générique (**4.2.2**) (et de la suite spectrale calculant une image directe simpliciale) qu'il existe un ouvert de $Y$ au-dessus duquel $\tau_{\leq N}\mathrm{R}\varepsilon_{Y_\bullet *}g_\bullet^*\mathrm{R}f_{\bullet *}\mathbf{Z}/n$ est constructible. D'après (iii) cela donne le résultat escompté.

Discutons maintenant brièvement la démonstration du théorème **4.3.1** Les principaux détails font l'objet de [**Org06**].

*4.3.3. Hyperrecouvrements pspf et changement de base.* — Rappelons qu'un morphisme $S_\bullet \to S$ est un *hyperrecouvrement pspf* si pour tout entier $n \geq 0$ le morphisme d'adjonction $S_n \to (\mathrm{cosq}_{n-1}^S S_\bullet)_n$ est couvrant pour la topologie pspf.

Partant du théorème d'uniformisation **1.6**, l'existence d'un tel hyperrecouvrement satisfaisant aux propriétés (i) et (ii) est classique : on utilise la construction [**Del74**], §6.2. Il résulte des théorèmes généraux de descente cohomologique que la propriété (iii) est valide pour $Y = S$ ([**Las06**]). Le point clef est que la propriété (iii) est vraie pour tout hyperrecouvrement pspf :

***Théorème 4.3.4.*** — *Soient $X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$ un diagramme de schémas avec $f$* cohérent *et $\varepsilon : S_\bullet \to S$ un hyperrecouvrement pspf. Notons $f_\bullet : X_\bullet = X \times_S S_\bullet \to S_\bullet$, de même pour $g$, et enfin $\varepsilon_Y : Y_\bullet = Y \times_S S_\bullet \to Y$. Pour tout faisceau $\mathscr{F}$ de torsion sur $X$, le morphisme*

$$g^*\mathrm{R}f_*\mathscr{F} \to \mathrm{R}\varepsilon_{Y*}\big(g_\bullet{}^*\mathrm{R}f_{\bullet *}\mathscr{F}_{|X_\bullet}\big)$$

*est un isomorphisme.*

## 5. Lefschetz affine

Dans cette section, on donne quelques idées sur la démonstration du théorème suivant. Une démonstration détaillée se trouve dans [**PS06**].

***Théorème 5.1.*** — *Soient $S = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine strictement hensélien noethérien excellent de dimension $d$, $a \in A$ et $n$ un entier inversible sur $S$. Alors, pour tout $i > d$, on a*

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{Spec}(A[a^{-1}]), \mathbf{Z}/n) = 0.$$

C'est un cas particulier d'un théorème de Lefschetz affine ([**Ill06**] 4.2, [**PS06**]), généralisant [$\mathbf{SGA_{iv}}$ XIV 3.1].

**5.2.** — Il résulte du théorème d'approximation d'Artin-Popescu que l'on peut supposer $A$ *complet.* (Cela n'utilise pas l'hypothèse faite sur $n$.) La méthode consiste alors à se ramener, par des techniques semblables à celle de la section §1, au cas particulier où $A$ est de type fini sur un corps ou un trait. Dans ce dernier cas, le théorème est déjà connu (et également dû à O. Gabber), cf. [**Ill03**], 2.4.

Puisque l'on suppose $S$ complet, notons le plutôt $\overline{S}$ (sic) ; de même on notera $\overline{a}$ la fonction définissant l'ouvert affine dont on veut estimer la dimension cohomologique. Il résulte du théorème de structure de Cohen, que l'on a une immersion fermée $\overline{S} \hookrightarrow \widehat{T} = \widehat{\mathbf{A}^r_W}$, où $r$ est un entier et $W$ un trait de Cohen ou bien un corps. La complétion est relative à l'origine de l'espace affine. Remarquons que le corps résiduel de $W$ est par hypothèse séparablement clos. Soit $T$ l'hensélisé (strict) en l'origine du schéma $\mathbf{A}^r_W$. D'après le théorème de Popescu, le $T$-schéma $\widehat{T}$ est une limite de schémas réguliers locaux strictement henséliens avec sections (notées $\sigma$), et morphismes de transitions locaux. Soit $N > d$ et $\overline{S}_\bullet \to \overline{S}$ comme dans le théorème **4.3.1** relativement au fermé $V(\overline{a})$ et à l'entier $N$. Le procédé **1.10** fournit, pour chaque $\sigma : T \to T_\alpha$, un $T$-schéma que nous notons $S_\sigma$. Il s'agit de vérifier les deux propriétés suivantes :

**i.** $\dim(\overline{S}) = \dim(S_\sigma)$ (facile, mais faux pour les $S'$ intermédiaires ; cf. 1.**a**),

**ii.** $\mathrm{H}^i(\overline{S}[\overline{a}^{-1}], \mathbf{Z}/n) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^i(S_\alpha[a_\alpha^{-1}], \mathbf{Z}/n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(S_\sigma[a_\alpha^{-1}], \mathbf{Z}/n)$ pour $\sigma$ suffisamment grand (de sorte qu'en particulier $\overline{a} \in \mathscr{O}_{S_\alpha}$).

Cette dernière propriété repose d'une part sur le théorème de pureté (qui rend combinatoire le calcul de la cohomologie) et d'autre part sur **4.3.1**(iii) qui permet de concentrer notre attention sur les fibres spéciales (seul lieu où l'on puisse dire quoi que ce soit ; cf. p. ex. **1.13.1**).

**5.3. Combinatorisation.** —

***Proposition 5.3.1.*** — *Soient $i_s$ l'immersion canonique du point fermé $s$ d'un schéma strictement local $S$, $j : U \hookrightarrow S$ une immersion ouverte et $\varepsilon : S_\bullet \to S$ un hyperrecouvrement pspf (4.3.3). Pour tout entier non nul $n$, le morphisme d'adjonction*

$$\mathrm{R}\Gamma(U, \mathbf{Z}/n) \to \mathrm{R}\varepsilon_{s*}\big({i_{s\bullet}}^*\mathrm{R}j_{s\bullet *}\mathbf{Z}/n\big)$$

*est un isomorphisme.*

C'est un corollaire immédiat du théorème **4.3.4**. La propriété d'être un hyperrecouvrement pspf étant stable par changement de base, on a également :

***Corollaire 5.3.2.*** — *Soit $S' \to S$ un morphisme local de schémas strictement locaux de points fermés $s$ et $s'$. Soient $S_\bullet \to S$ un hyperrecouvrement pspf, $n > 0$, $N \geq 0$ deux entiers, $U$ un ouvert de $S$ et $U'$ son image inverse sur $S'$. Supposons que pour tout $k \leq N+1$, le morphisme d'adjonction $\big({i_{s\,k}}^*\mathrm{R}j_{k*}\mathbf{Z}/n\big)_{|S'_{s'\,k}} \to {i'_{s'\,k}}^*\mathrm{R}j'_{k*}\mathbf{Z}/n$ soit un isomorphisme. Alors, le morphisme*

$$\mathrm{R}\Gamma(U, \mathbf{Z}/n) \to \mathrm{R}\Gamma(U', \mathbf{Z}/n)$$

*induit un isomorphisme en degré $\leq N$.*

***Définition 5.3.3.*** — Soient $S$ un schéma strictement local de point fermé $s$, $U$ un ouvert strict et $R' \to R$ un morphisme de $S$-schémas induisant un isomorphisme sur la fibre spéciale, notée $F$. Soit $Z = R - R_U$ (resp. $Z' = R' - R'_U$) le fermé de $R$ (resp. $R'$), contenant $F$. Supposons que pour tout point géométrique $f \to F$, on ait les propriétés suivantes :

**i**. $R_{(f)}$ (resp. $R'_{(f)}$) est régulier,
**ii**. $Z_{(f)}$ (resp. $Z'_{(f)}$) en est un diviseur à croisements strictement normaux,
**iii**. le morphisme $Z'_{(f)} \to Z_{(f)}$ induit un isomorphisme sur les branches (c'est-à-dire sur l'ensemble des composantes irréductibles).

On dit alors que $R'$ et $R$ ont *même combinatoire* (sur $S$, relativement à $U$).

Il résulte immédiatement du théorème de pureté qu'avec cette terminologie, le corollaire précédent entraîne :

***Corollaire 5.3.4***. — *Soient $S' \to S$, $S_\bullet \to S$, $U, U'$ et $n, N$ comme en **5.3.2**. Supposons $n$ inversible sur $S$, et que $S'_k$ et $S_k$ ont même combinatoire sur $S$, relativement à $U$ pour tout $k \leq N+1$. Alors, le morphisme $\mathrm{H}^i(U, \mathbf{Z}/n) \to \mathrm{H}^i(U', \mathbf{Z}/n)$ est un isomorphisme pour tout entier $i \leq N$.*

Insistons sur le fait que l'on ne suppose pas que $U$ et $U'$ ont la même dimension. Le cas des schémas de type fini sur un trait étant déjà établi, le théorème de Lefschetz affine de Gabber **5.1** est conséquence du théorème suivant.

***Théorème 5.4***. — *Soient $\overline{S}, \overline{a}$ etc. comme en **5.2**. Pour tout $S_\bullet \to S$ comme en **4.3.1** relativement au fermé $V(\overline{a})$ et à l'entier $N$, il existe un indice $\alpha$ tel que $\overline{a}$ et $S_{\bullet \leq N+1} \to S$ soient définis sur $\alpha$ et un entier $r$ tel que si pour chaque $i \leq N+1$, et toute section $r$-approximante $\alpha : T \to T_\alpha$, on considère le diagramme à carrés cartésiens :*

$$\begin{tikzcd}
\overline{S}_i \arrow[r] \arrow[d] & S_{i\alpha} \arrow[d] & S_{i\sigma} \arrow[l] \arrow[d] \\
\overline{S} \arrow[r] \arrow[d] & S_\alpha \arrow[d] & S_\sigma \arrow[l] \arrow[d] \\
\widehat{T} \arrow[r] & T_\alpha \arrow[r, shift right] & T \arrow[l, shift right, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

*les deux morphismes diagonaux*

$$\begin{tikzcd}
\overline{S}_i \arrow[dr] & & S_{i\sigma} \arrow[dl] \\
& S_{i\alpha} \arrow[d] & \\
& S_\alpha &
\end{tikzcd}$$

*ont même combinatoire sur $S_\alpha$ relativement à l'ouvert $S_\alpha[a_\alpha^{-1}]$.*

(Rappelons que $T_\alpha$, et donc $S_\alpha$, est supposé strictement local.)
Nous renvoyons le lecteur à [**PS06**] pour sa démonstration.

## 6. Pureté

Dans cette section, on fait quelques remarques sur la démonstration du théorème suivant. Une démonstration détaillée se trouve dans [**Rio06**] ; on renvoie également à ([**Ill06**], §2) pour une discussion du théorème et de ses précurseurs.

***Théorème 6.1.*** — *Soient $X$ un schéma régulier, $Y$ un sous-schéma fermé régulier, $i : Y \hookrightarrow X$ l'immersion (régulière) correspondante, supposée de codimension $c$. Pour tout nombre premier $\ell$ inversible sur $X$, le morphisme de Gysin (*[**Rio06**]*, §2.3)*

$$\mathrm{Cl}_i : \mathbf{Z}/\ell \to \mathrm{R}i^!\mathbf{Z}/\ell(c)[2c]$$

*est un isomorphisme.*

Pour une large classe de morphismes $f$ d'intersection complète, on peut définir un foncteur $f^!$ muni d'un morphisme de Gysin satisfaisant une (difficile) propriété de composition (*loc. cit.*, théorème 41). (Cette nouvelle construction et la vérification de la fonctorialité est le cœur de *loc. cit.*) Ceci ramène la démonstration du théorème de pureté à la vérification d'un énoncé de *pureté ponctuelle* : les schémas strictement locaux épointés ont la cohomologie attendue. Le théorème de comparaison formel-hensélien de Fujiwara-Gabber, joint au théorème de Popescu, ramène cette question au cas particulier où $X$ est plat de type fini sur un trait $S$ ([**Fuj02**], §6). Le théorème de pureté relative entraîne la pureté ponctuelle de l'espace affine sur $S$ ; les schémas $S[\underline{X}]/(\prod X_i^{e_i} - \pi)$ ($e_i$ premiers à la caractéristique résiduelle) en sont un autre exemple crucial (théorème de Rapoport-Zink). On souhaite se ramener à ce cas. À cette fin, on utilise un théorème de A.J. de Jong, d'après lequel il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\text{altération}"'] \arrow[d, "\text{semi-stable}"'] & X \arrow[d] \\ T \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

où $T \to S$ est un morphisme dominant fini de traits et $X'/X$ génériquement étale de groupe de Galois $G$. En particulier $X'/T$ est log-lisse.

Soit $S_\ell$ un $\ell$-Sylow de $G$, de sorte que son action est modérée sur $X'$. Elle est de plus génériquement libre. Le point clef de la démonstration du théorème de pureté est le théorème suivant, donc la démonstration, difficile, occupe une bonne part de [**Mor06b**].

***Théorème 6.1.1.*** — *Sous les hypothèses précédentes, il existe un morphisme $X'' \to X'$ projectif, birationnel, $S_\ell$-équivariant tel que :*

**i**. *$X''$ soit log-lisse sur $T$ (et donc sur $T/S_\ell$),*
**ii**. *l'action de $S_\ell$ sur $X''$ soit* très modérée *(cf.* loc. cit.*, §3.2) (et en particulier modérée).*

La dernière hypothèse fait du quotient du log-schéma $X''$ (muni d'une log-structure définie par un fermé contenant la fibre spéciale) par $S_\ell$ un log-schéma *log-lisse* sur $T/S_\ell$. La résolution des log-singularités de K. Katô nous permet le supposer *régulier*. Il est alors ponctuellement pur (cela résulte du second exemple ci-dessus). Le morphisme $X''/S_\ell \to X$ étant génériquement étale de degré *premier à $\ell$*, il n'est pas difficile de déduire la pureté ponctuelle du schéma $X$ ([**Rio06**], proposition 67).

## Références

[Art69] M. Artin – « Algebraic approximation of structures over complete local rings », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 36, 23-58.* (1969).

[CdJ02] B. Conrad & A. de Jong – « Approximation of formal deformations », (2002).

[Del74] P. Deligne – « Théorie de Hodge. III », *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* (1974), no. 44, p. 5–77.

[dJ96] A. J. de Jong – « Smoothness, semi-stability and alterations », *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* (1996), no. 83, p. 51–93.

[dJ97] A. J. de Jong – « Families of curves and alterations », *Ann. Inst. Fourier* **47** (1997), no. 2, p. 599–621.

[Elk73] R. Elkik – « Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien », *Ann. sci. École norm. sup. (4)* **6** (1973), p. 553–603.

[Epp73] H. Epp – « Eliminating wild ramification », *Invent. Math.* **19** (1973), p. 235–249.

[Fuj02] K. Fujiwara – « A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber) », Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka), Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, Tôkyô, 2002, p. ?– ?

[Gab05a] O. Gabber – « A finiteness theorem for non abelian $\mathrm{H}^1$ of excellent schemes », Notes de l'exposé à la conférence en l'honneur de Luc Illusie, Orsay, juin 2005. Disponibles par exemple depuis la page internet de F. Orgogozo, 2005.

[Gab05b] O. Gabber – « Finiteness theorems for étale cohomology of excellent schemes », Notes de l'exposé à la conférence en l'honneur de Pierre Deligne, Princeton, octobre 2005. Disponibles par exemple depuis la page internet de F. Orgogozo, 2005.

[Ill03] L. Illusie – « Perversité et variation », *Manuscripta Math.* **112** (2003), no. 3, p. 271–295.

[Ill06] L. Illusie – « Les travaux de Gabber », Groupe de travail sur les travaux de Gabber en cohomologie étale, École polytechnique, 2006.

[Las06] Y. Laszlo – « Descente cohomologique », Groupe de travail sur les travaux de Gabber, École polytechnique, printemps 2006.

[Mat89] H. Matsumura – *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Mor06a] A. Moreau – « Approximation d'Artin et uniformisation locale des schémas, d'après Ofer Gabber », Groupe de travail sur les travaux de Gabber, École polytechnique, 2006.

[Mor06b] S. Morel – « Schémas log-réguliers, désingularisations canoniques et actions très modérées, d'après O. Gabber », Groupe de travail sur les travaux de Gabber en cohomologie étale, École polytechnique, 2006.

[Niz06] NiziołWiesława – « Toric singularities : log-blow-ups and global resolutions », *J. Algebraic Geom.* **15** (2006), no. 1, p. 1–29.

[Org06] F. Orgogozo – « Descente fléchée, d'après Ofer Gabber », Groupe de travail sur les travaux de Gabber, École polytechnique, printemps 2006.

[PS73] C. Peskine & L. Szpiro – « Dimension projective finie et cohomologie locale. Applications à la démonstration de conjectures de M. Auslander, H. Bass et A. Grothendieck », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1973), no. 42, p. 47–119.

[PS06] V. Pilloni & B. Stroh – « Le théorème de lefschetz affine, d'après Gabber », Groupe de travail sur les travaux de Gabber, École polytechnique, 2006.

[Rio06] J. Riou – « Classes de Chern, morphismes de Gysin, pureté (d'après Ofer Gabber) », Groupe de travail sur les travaux de Gabber, École polytechnique, 2006.

[Ser65] J.-P. Serre – *Algèbre locale. Multiplicités*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

---

Fabrice Orgogozo, École polytechnique, centre de mathématiques Laurent Schwartz, UMR 7640, 91128 Palaiseau Cedex, France • *Courriel :* `Fabrice.Orgogozo@math.polytechnique.fr`
*Adresse réticulaire :* `http://www.math.polytechnique.fr/~orgogozo/`