Sur les propriétés d'uniformité des images directes en cohomologie étale.

Fabrice Orgogozo

version du 2012-10-24 à 9h41 TU (bb87633)

Table des matières

Introduction . . . 1
1. Préservation d'une propriété par image directe . . . 2
1.1. Stratifications ; faisceaux adaptés . . . 2
1.2. Propriétés de paires : premières notations . . . 3
1.3. Hypothèses élémentaires sur les propriétés considérées . . . 3
1.4. Nodularité, pureté . . . 3
1.5. Extensions ponctuelles . . . 4
1.6. Familles . . . 5
1.7. Théorèmes d'uniformité : énoncés et stratégie . . . 6
1.8. Image directe par un morphisme propre : premières réductions . . . 7
1.9. Morphismes plurinodaux : définitions et réductions . . . 8
1.10. Fin de la démonstration du théorème d'uniformité propre : ultime dévissage, résolution des singularités 9
1.11. Le cas d'un morphisme non nécessairement propre . . . 9
2. Constructibilité, modération et unipotence . . . 10
2.1. Constructibilité . . . 10
2.2. Modération . . . 11
2.3. Constructibilité et modération . . . 12
2.4. Unipotence . . . 14
2.5. Applications . . . 15
3. Compléments . . . 16
3.1. Majorations uniformes des nombres de Betti modulo ℓ de schémas algébriques . . . 16
Références . . . 17

Introduction

0.1. — Soient k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique $p \geq 1$ et X un schéma projectif et lisse sur k. Pour chaque nombre premier ℓ différent de p et chaque entier $i \geq 0$ les $\mathbf{Z}_\ell$-modules $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell) := \lim_n H^i(X, \mathbf{Z}/\ell^n)$ sont de type fini (cf. [SGA 5 VI.2.2]). D'après un théorème d'Ofer GABBER ([**Gabber, 1983**]), ils sont presque tous sans torsion. Si $p = 1$, cela résulte du théorème de comparaison entre cohomologie de Betti et cohomologie étale d'Artin-Grothendieck ; si $p > 1$, un ingrédient clef de sa démonstration est le *théorème du pgcd* de Pierre Deligne. Comme l'expliqua Nick Katz à l'auteur il y a quelques années, on peut également interpréter le théorème d'O. GABBER de la façon suivante. Soient $A = \prod_{\ell \neq p} \mathbf{F}_\ell$, $\mathfrak{L}$ un ultrafiltre non principal sur l'ensemble des nombres premiers différents de p (**Bourbaki**, TG.I.§4), $\mathfrak{m}_\mathfrak{L} = \{a = (a_\ell) | \{\ell : a_\ell = 0\} \in \mathfrak{L}\}$ l'idéal maximal de A associé et $\mathbf{F}_\mathfrak{L} = A/\mathfrak{m}_\mathfrak{L}$ son corps résiduel, de caractéristique nulle. Supposons k algébrique sur un corps fini — c'est le cas crucial — et admettons que les foncteurs $X \mapsto H^i(X, \mathbf{F}_\mathfrak{L}) := (\prod_{\ell \neq p} H^i(X, \mathbf{F}_\ell)) \otimes_A \mathbf{F}_\mathfrak{L}$ définissent une cohomologie de Weil [i]. Fixons i. Comme démontré dans [**Katz & Messing, 1974**], il résulte des travaux de P. Deligne sur la conjecture de Weil — dont le théorème du pgcd susmentionné — que l'on a l'égalité

$$\dim_{\mathbf{F}_\mathfrak{L}} H^i(X, \mathbf{F}_\mathfrak{L}) = b^i(X),$$

où $b^i(X)$ est le i-ème nombre de Betti de X, nombre que l'on lit par exemple sur la fonction zêta d'un « modèle » de X sur un corps fini. Le groupe de cohomologie $H^i(X, \mathbf{F}_\mathfrak{L})$ étant un ultraproduit des $H^i(X, \mathbf{F}_\ell)$ sa dimension est la limite, suivant l'ultrafiltre $\mathfrak{L}$, de la fonction *bornée* (cf. discussion *infra* et **3.1.1**) $\ell \mapsto h^i(X, \mathbf{F}_\ell) := \dim_{\mathbf{F}_\ell} H^i(X, \mathbf{F}_\ell)$. En symboles :

$$\lim_{\ell, \mathfrak{L}} h^i(X, \mathbf{F}_\ell) = b^i(X).$$

Du fait que le résultat précédent soit vrai *pour tout ultrafiltre non principal* $\mathfrak{L}$, on en déduit l'égalité $h^i(X, \mathbf{F}_\ell) = b^i(X)$ pour tous les ℓ sauf au plus un nombre fini d'entre eux. D'autre part, on a l'égalité

$$\dim_{\mathbf{Q}_\ell} H^i(X, \mathbf{Q}_\ell) = b^i(X)$$

pour tout $\ell \neq p$, de sorte que l'on a l'égalité $h^i(X, \mathbf{F}_\ell) = h^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$ pour presque tout ℓ. La suite exacte, dite des « coefficients universels »,

$$0 \to H^i(X, \mathbf{Z}_\ell) \otimes \mathbf{F}_\ell \to H^i(X, \mathbf{F}_\ell) \to H^{i+1}(X, \mathbf{Z}_\ell)[\ell] \to 0,$$

permet alors de conclure. (L'injectivité de la flèche de gauche suffit.) Bien entendu, le fait que la « cohomologie modulo $\mathfrak{L}$ » soit une cohomologie de Weil est non trivial et nécessite une vérification. Celle-ci est faite par Ivan TOMAŠIĆ dans [**Tomašić, 2004**]. Le

i. Finitude, dualité de Poincaré, théorème de Lefschetz faible pour les sections hyperplanes lisses et interprétation cohomologique de la fonction ζ suffisent.

seul fait ne résultant pas immédiatement des énoncés classiques sur la cohomologie modulo ℓ est la finitude des espaces vectoriels $\mathsf{H}^i(X, \mathbf{F}_\mathfrak{L})$ [ii] ; l'auteur le déduit du théorème de O. GABBER susmentionné. L'argument précédent semble donc circulaire.

0.2. — Le lecteur trouvera dans §**3.1** — indépendant du reste de l'article — une démonstration de nature *géométrique* [iii] de la finitude les $\mathbf{F}_\mathfrak{L}$-espaces vectoriels $\mathsf{H}^i_?(X, \mathbf{F}_\mathfrak{L})$, où ? désigne c ou $\emptyset$, lorsque X est un schéma séparé de type fini sur un corps algébriquement clos. Il suffit pour cela de majorer les nombres de Betti modulo ℓ, indépendamment du nombre premier ℓ, supposé inversible sur X. Ce fait est bien connu des spécialistes : on en trouve notamment une démonstration dans [**Illusie, 2010a**] ainsi qu'une variante ℓ-adique — dont nous nous sommes inspirés — dans [**Katz, 2001**].

0.3. — Motivé par les considérations précédentes, nous nous proposons d'établir les bases d'un formalisme des six opérations de Grothendieck généralisant le résultat de finitude précédent : on se place dans un cadre relatif et on considère des familles de faisceaux constructibles, à ramification sauvage contrôlée. La nécessité d'une telle hypothèse apparaît déjà lorsque X est une courbe lisse sur un corps algébriquement clos et les faisceaux de coefficients lisses. Ceci est manifeste à la lecture des théorèmes de Riemann-Roch ℓ-adiques (formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič [SGA `5 X.7.1`], [**Katô & Saitô, 2010**]), ainsi qu'au lien bien connu entre ramification sauvage et (non-)acyclicité ([SGA `7 XIII.2.1.11`], [**Laumon, 1981b**, théorème 5.1.1]).

La possibilité d'un tel formalisme avait été remarquée — il y a plus d'une dizaine d'années — par O. Gabber (cf. p. ex. [**Gabber, 2007**]). Comme nous l'a fait observé Luc Illusie lors la rédaction d'une première version de cet article, des énoncés semblables se trouvent aussi dans [**Katz & Laumon, 1985**, §3] [iv] ainsi que dans la lettre [**Pink, 1995**].

0.4. — Soit Y un schéma s'envoyant par un morphisme de type fini sur un schéma nœthérien régulier de dimension inférieure ou égale à 1. Il est établi dans [**Katz & Laumon, 1985**, 3.1.2] que si $f : X \to Y$ est un morphisme de type fini et $\mathfrak{X}$ une stratification de X, il existe un entier $S \geq 1$, une stratification $\mathfrak{Y}$ de Y et une constante C tels que pour chaque nombre premier ℓ, chaque $\mathscr{K} \in \operatorname{Ob} \mathsf{D}^b_c(X[1/S\ell], \mathbf{Q}_\ell)$ adapté à $\mathfrak{X}[1/S\ell]$ (cf. **1.1.1**, *infra*), le complexe $\mathsf{R}f_!\mathscr{K}$ appartienne à $\mathsf{D}^b_c(Y[1/S\ell], \mathbf{Q}_\ell)$, soit adapté à $\mathfrak{Y}[1/S\ell]$ et satisfasse pour chaque $y \in Y[1/S\ell]$ l'inégalité

$$\|\mathsf{R}f_!\mathscr{K}\|(y) \leq C \cdot \sup_{x \in f^{-1}(y)} \|\mathscr{K}\|(x),$$

où $\|\mathscr{K}\|(x) = \sum_i \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathsf{H}^i(\mathscr{K})_{\overline{x}}$ pour un choix arbitraire de point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de $x \in X$ (de même pour $\mathsf{R}f_!\mathscr{K}$).

0.5. — Ce résultat de N. Katz et Gérard Laumon, rappelé ci-dessus, est « génériques » et s'appuie sur la résolution des singularités ; en particulier, ils supposent la caractéristique générique nulle. Cette hypothèse permet également, grâce au lemme d'Abhyankar relatif (cf. *op. cit.* §3.4.2 et [SGA `I XIII.5.5`]), d'oublier la ramification sauvage.

Nous nous affranchissons de ces restrictions (généricité et caractéristique nulle) en utilisant des théorèmes de résolution des singularités dus à Aise Johan DE JONG et ses successeurs ; les fibrations élémentaires de Michael ARTIN sont remplacées ici par des courbes nodales, dont l'ubiquité a été démontrée par A. J. de Jong ([**de Jong, 1996, de Jong, 1997**]) [v]. Notons enfin que cette méthode, désormais très classique, a également été utilisée récemment par exemple dans [**Vidal, 2005**] et [**Orgogozo, 2006**] pour des problèmes assez semblables. Pour un commentaire sur les limites de cette méthode, cf. **3.1.4**.

0.6. — La structure du présent article est la suivante. On démontre tout d'abord un théorème (**1.7.1**) d'« uniformité propre », c'est-à-dire de permanence par image directe propre de certaines propriétés de faisceaux, relativement à une stratification. L'axiomatisation faite ici des « propriétés » est proche de celle utilisée par exemple dans [ÉGA `IV₂.7.3`]. Le cas des images directes par un morphisme non nécessairement propre est également considéré. On montre ensuite (**2.3.3**) que la propriété de constructibilité-modération est justiciable des théorèmes de permanence précédents. Ce résultat est bien connu des spécialistes. Nous avons pris soin d'énoncer le théorème **2.5.1**, qui découle immédiatement de ces deux faits, sous une forme dont la compréhension ne nécessite pas la lecture du reste de l'article. Ce résultat peut être vu comme une variante (presque) *effective* du théorème usuel de constructibilité des images directes. Une propriété de constructibilité-unipotence est également considérée et on généralise un résultat de P. Deligne ([**Berthelot, 1997**, proposition 6.3.2]), en s'inspirant de [**Pink, 1995**].

0.7. — Ce texte est dans un état provisoire ; l'auteur espère y apporter des améliorations substantielles.

0.8. — L'auteur tient à remercier chaleureusement Luc Illusie des utiles discussions que nous avons eues, de ses encouragements ainsi que d'avoir la gentillesse de lui transmettre le courriel [**Gabber, 2007**] et la lettre [**Pink, 1995**]. Il me faut bien entendu remercier non moins chaleureusement Ofer Gabber ; j'ai tenté de mentionner explicitement dans le texte ses contributions ou tout au moins celles dont je suis conscient.

1. Préservation d'une propriété par image directe

1.1. Stratifications ; faisceaux adaptés. —

ii. Signalons que dans *loc. cit.*, un théorème de Lefschetz vache est également démontré. Sa démonstration repose sur un résultat non publié d'O. GABBER [**Gabber, 2003**], annoncé dans [**Gabber, 1983**]. Rappelons également qu'il est démontré dans [**Katz & Messing, 1974**] que, sur une clôture algébrique d'un corps fini, le théorème de Lefschetz vache découle du théorème de Lefschetz faible.

iii. En particulier, on n'utilise pas les conjectures de Weil.

iv. Voir aussi [**Katz, 1980**, chap. 4].

v. Il est intéressant de constater qu'une partie des résultats de ces deux articles sont implicites dans la lettre de R. Pink à N. Katz.

1.1.1. — Soit $\mathfrak{X}$ une stratification d'un schéma nœthérien X, c'est-à-dire un ensemble fini de sous-schémas réduits localement fermés X_α ($\alpha \in A$) de X tels que l'on ait l'égalité *ensembliste* $X = \sqcup_\alpha X_\alpha$. Suivant [**Katz & Laumon, 1985**, §3.0], on dit qu'un faisceau étale (non nécessairement abélien) $\mathscr{F}$ sur X est constructible **adapté à** $\mathfrak{X}$ si ses restrictions aux X_α sont des faisceaux *lisses*, c'est-à-dire (dans ce texte) localement constants et ensemblistement constructibles. Lorsqu'un tel faisceau $\mathscr{F}$ est abélien, il est naturellement muni d'une structure de $\mathbf{Z}/n$-faisceau (constructible) pour un entier $n > 0$ convenable.

1.1.2. Lemme **([SGA 4 IX.2.5])**. — *Soient X un schéma nœthérien, $\mathfrak{X} = (X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une stratification et $\mathscr{F}$ un faisceau abélien constructible adapté à $\mathfrak{X}$. Il existe une filtration finie sur $\mathscr{F}$ de gradué isomorphe à une somme directe*

$$\bigoplus_{\alpha\in A} i_{\alpha *} j_{\alpha !}(\mathscr{L}_\alpha),$$

où j_α (resp. i_α) est l'immersion ouverte (resp. fermée) de X_α dans son adhérence schématique (resp. de l'adhérence schématique de X_α dans X) et $\mathscr{L}_\alpha$ un faisceau abélien lisse sur X_α.

1.2. Propriétés de paires : premières notations. —

1.2.1. — Plutôt que de nous restreindre à des propriétés particulières des faisceaux (p. ex. leur constructibilité et leur modération), nous considérons dans cette première partie des propriétés P non spécifiées de paires $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ où $\mathscr{F}$ est un faisceau étale abélien sur un schéma X, et $\mathfrak{X}$ est une stratification de X. Toute telle propriété est étendue aux complexes en décrétant que $(\mathscr{K}, \mathfrak{X})$ est P si et seulement si chaque paire $(H^i(\mathscr{K}), \mathfrak{X})$ est P.

1.2.2. Remarque. — Il serait sans doute intéressant d'étendre moins naïvement le formalisme aux complexes de façon à pouvoir traiter de propriétés comme la perfection par exemple.

1.2.3. — L'exemple fondamental est le suivant. Une paire $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ est dite **constructible**, en abrégé Cons, si et seulement si le faisceau $\mathscr{F}$ est constructible adapté à la stratification $\mathfrak{X}$ au sens du **1.1.1** ci-dessus.

1.2.4. — Un *triplet* $(\mathscr{K}, q, \mathfrak{X})$, où $\mathscr{K}$ est un complexe sur un schéma X, q un morphisme $X' \to X$, et $\mathfrak{X}$ une stratification de X' est dit P lorsque la paire $(q^*\mathscr{K}, \mathfrak{X})$ satisfait la condition P. On dit également qu'une paire $(\mathscr{K}, \mathfrak{X})$ est P lorsque le triplet $(\mathscr{K}, \mathrm{Id}, \mathfrak{X})$ l'est. On brise parfois la symétrie faisceau-stratification de cette définition en écrivant qu'un complexe $\mathscr{K}$ est $P_{q,\mathfrak{X}}$ (resp. $P_{\mathfrak{X}}$) lorsque le triplet $(\mathscr{K}, q, \mathfrak{X})$ (resp. la paire $(\mathscr{K}, \mathfrak{X})$) est P.

1.2.5. — Si $f : Y \to X$ est un morphisme entre schémas nœthériens, $\mathfrak{X}$ une stratification de X, et $\mathscr{K}$ un complexe de faisceaux abéliens sur X, on note $f^*\mathfrak{X}$ la stratification de Y dont les strates sont les images inverses réduites des strates de $\mathfrak{X}$ et $f^*(\mathscr{K}, \mathfrak{X})$ la paire $(f^*\mathscr{K}, f^*\mathfrak{X})$. Si $i : Z \to X$ est une immersion fermée (resp. ouverte), $\mathfrak{Z}$ une stratification de Z, et $\mathscr{K}$ un complexe sur Z, on note $i_!\mathfrak{Z}$ la stratification obtenue par ajout à $\mathfrak{Z}$ de la strate ouverte $X - Z$ (resp. la strate fermée $X - Z$) et $i_!(\mathscr{K}, \mathfrak{Z})$ la paire $(i_!\mathscr{K}, i_!\mathfrak{Z})$.

1.3. Hypothèses élémentaires sur les propriétés considérées. —

1.3.1. — Une propriété P de paires $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$, où $\mathscr{F}$ est un faisceau, est dite **dévissable** si elle est :

i. **stable par raffinement** : pour toute paire $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ qui est P et toute sous-stratification[vi] $\mathfrak{X}'$ de $\mathfrak{X}$, la paire $(\mathscr{F}, \mathfrak{X}')$ est également P ;

ii. **stable par sous-quotient** : pour toute paire $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ qui est P et tout faisceau sous-quotient $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$, la paire $(\mathscr{F}', \mathfrak{X})$ est également P ;

iii. **stable par extension** : pour toutes paires $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ et $(\mathscr{G}, \mathfrak{X})$ qui sont P et tout faisceau $\mathscr{H}$ extension de $\mathscr{F}$ par $\mathscr{G}$, la paire $(\mathscr{H}, \mathfrak{X})$ est également P ;

iv. **stable par image inverse** : pour toute paire $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ sur X qui est P, et tout morphisme $f : Y \to X$ entre schémas nœthériens, la paire $f^*(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ est également P ;

v. **close** : pour toute paire $(\mathscr{F}, \mathfrak{F})$ sur F qui est P, et toute immersion fermée $i : F \hookrightarrow X$, la paire $i_!(\mathscr{F}, \mathfrak{F})$ est également P ;

vi. **compressible** : pour tout recouvrement fini d'un schéma X par des sous-schémas fermés F_i ($i \in I$) munis de stratifications $\mathfrak{F}_i$, et tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X tel que chaque paire $(\mathscr{F}_{|F_i}, \mathfrak{X}_i)$ soit P, il existe une stratification $\mathfrak{X}$ de X telle que la paire $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ soit également P ;

vii. plus forte que Cons : toute paire P est également Cons.

1.3.2. — Soit T une topologie sur une catégorie de schémas. Une propriété P est *locale pour la topologie* T (ou simplement T-*locale*) si pour toute famille couvrante $(X_i \to X)$ pour T, une paire $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ sur X est P si et seulement si chaque $(X_i \to X)^*(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ est P .

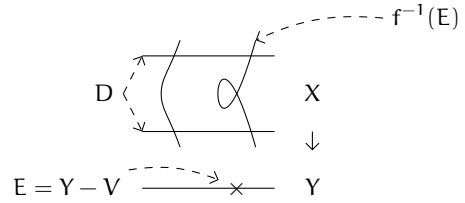
1.4. Nodularité, pureté. —

vi. Pour chaque $X'_j \in \mathfrak{X}'$, il existe $X_i \in \mathfrak{X}$ tel que $X'_j \subseteq X_i$.

***1.4.1**. Courbes nodales.* — Soit Y un schéma nœthérien. Rappelons qu'un Y-schéma X est une courbe **nodale** si le morphisme structural $f : X \to Y$ est projectif, plat, à fibres géométriques des courbes connexes ayant au pire des singularités quadratiques ordinaires. Une courbe nodale $f : X \to Y$ est **adaptée** à une paire (U, V) où U (resp. V) est un ouvert dense de X (resp. Y), lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

– le morphisme f est lisse au-dessus de V ;

– il existe un diviseur D étale sur Y contenu dans le lieu lisse de f tel que $U = f^{-1}(V) \cap (X - D)$.



(Voir §**1.4.4** *infra* pour une brève discussion log-géométrique de cette définition.)

Lorsque le contexte ne semble pas prêter à confusion on note j_U (resp. j_V) l'immersion ouverte de U dans X (resp. de V dans Y).

***1.4.2**.* — Une propriété P de paires $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ est dite **nodulaire** si pour tout schéma nœthérien régulier Y, tout ouvert V complémentaire d'un diviseur à croisements normaux de Y, toute courbe *nodale* $f : X \to Y$, tout ouvert dense U de X tel que f soit adapté à (U, V), et toute stratification $\mathfrak{X}$ de X telle que $U \in \mathfrak{X}$, la condition suivante soit satisfaite :

il existe une stratification $\mathfrak{Y}$ de Y telle que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau lisse $\mathscr{L}$ sur U de $\mathbf{Z}/n$-modules, la paire $\big(Rf_*(j_{U!}\mathscr{L}), \mathfrak{Y}\big)$ est $P^{[1/n]}$ si $(j_{U!}\mathscr{L}, \mathfrak{X})$ l'est.

***1.4.3. Remarques**.* — **i**. Intuitivement, la nodularité d'une propriété P est un résultat de « (log-)acyclicité » au sens de [SGA 4 XV]. Notons que l'on pourrait également considérer une variante « forte » dans laquelle on ne suppose pas Y régulier, ni V complémentaire d'un diviseur à croisements normaux.

ii. Il arrive parfois qu'il soit suffisant de tester la condition ci-dessus dans le cas particulier où $\mathfrak{X}$ est la stratification $j_{U!}\{U\} = U \sqcup (X - U)$. C'est le cas lorsque $P = CM$ (**2.3.1** *infra*) car si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur X qui est $CM_{\mathfrak{X}}$ ($\mathfrak{X}$ étant une stratification contenant l'ouvert U), le faisceau $j_{U!}j_U{}^*\mathscr{F}$ est automatiquement $CM_{j_{U!}\{U\}}$. C'est également le cas lorsque $P = CU$ (**2.4.4** *infra*), car si $\mathscr{L}$ est un faisceau lisse sur U qui est $CU_{\{U\}}$, le faisceau $j_{U!}\mathscr{L}$ est automatiquement $CU_{j_{U!}\{U\}}$. Dans ces deux cas particuliers, la stratification $\mathfrak{Y} = j_{V!}\{V\}$ convient.

***1.4.4**. Schémas log-réguliers, paires toriques.* — Dans ce paragraphe, on rappelle l'interprétation log-géométrique de la définition **1.4.1**, renvoyant à [**Illusie, 2002**] ou [**Gabber & Ramero, 2009**, chap. V] pour plus de détails. Si X est un schéma et $j : U \hookrightarrow X$ est un ouvert dense, la paire (X, U) est dite **torique** ([**Mochizuki, 1999**, 1.2]) ou **log-régulière** ([**Illusie, 2010b**, 1.4]) si le schéma X muni de la log-structure $\mathscr{O}_X \cap j_*\mathscr{O}_X^\times \hookrightarrow \mathscr{O}_X$ est *log-régulier* et U est l'ouvert de trivialité de cette log-structure. Tout log-schéma (X, M_X) log-régulier est de ce type ; cf. p. ex. [**Gabber & Ramero, 2009**, 5.5.63]. L'exemple typique d'une paire torique est constitué d'un schéma régulier X et du complémentaire U du support d'un diviseur à croisements normaux. Une telle paire est dite **régulière**. Réciproquement, toute paire torique (X, U) avec X *régulier* est une paire régulière au sens précédent. Nous commettrons l'abus de notation suivant : si (X, U) est torique, on désignera également par (X, U) le *log-schéma* muni de la log-structure introduite ci-dessus.

***1.4.5. Proposition**.* — *Soit $f : X \to Y$ une courbe nodale adaptée à une paire d'ouverts denses (U, V) telle que (Y, V) soit* torique. *Alors le morphisme $(X, U) \to (Y, V)$ est* log-lisse *et la paire (X, U) est torique.*

Démonstration. — Voir [**Illusie, 2010b**, 1.9], [**Mochizuki, 1999**, 4.2] ou [**Saitô, 2004**, 1.12]. Le dernier point résulte du fait général qu'un log-schéma log-lisse sur un log-schéma log-régulier est également log-régulier. □

***1.4.6**.* — Une propriété P de paires $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ est dite **pure** si pour toute immersion ouverte $j : U \hookrightarrow X$ telle que la paire (X, U) soit *régulière* et toute stratification $\mathfrak{X}$ de X contenant U, la condition suivante soit satisfaite :

il existe une stratification $\mathfrak{X}'$ de X telle que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau lisse $\mathscr{L}$ sur U de $\mathbf{Z}/n$-modules, la paire $(Rj_*\mathscr{L}, \mathfrak{X}')$ est $P^{[1/n]}$ si $(j_!\mathscr{L}, \mathfrak{X})$ l'est.

1.5. Extensions ponctuelles. —

***1.5.1**.* — Soient $f : X \to Y$ un morphisme de topos, $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ des faisceaux abéliens sur X et $N \geq 0$ un entier. On dit qu'un faisceau $\mathscr{G}$ sur Y est N-**extension ponctuelle de sous-quotients des $\mathscr{F}_i$ relativement à** f s'il existe pour chaque point y de $\mathscr{G}$ une filtration à N crans dont les quotients successifs sont des sous-quotients de fibres des $\mathscr{F}_i$ en des points de X au-dessus de y. (Lorsque Y est le topos final, on omet la mention du morphisme f.) On étend comme en **1.2.1** la définition précédente au cas des complexes de faisceaux.

***1.5.2**. Sorites.* — Les faits suivants sont de vérification immédiate.

i. (descente) Soient $f : X \to Y$ un morphisme, $\mathscr{F}$ un faisceau abélien sur X, $\pi : X' \to X$ un morphisme et $f' = f \circ \pi : X' \to Y$. Si un faisceau $\mathscr{G}$ sur Y est N-extension ponctuelle de sous-quotients de $\pi^*\mathscr{F}$ relativement à f', il est également N-extension ponctuelle de sous-quotients de $\mathscr{F}$ relativement à f.

ii. (extension) Soient $f : X \to Y$ un morphisme,

$$0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}_2 \to 0$$

une suite exacte de faisceaux sur X et q un entier. Si chaque $R^q f_*\mathscr{F}_i$, $i \in \{1, 2\}$, est N_i-extension ponctuelle de sous-quotients de $\mathscr{F}$ relativement à f, le faisceau $R^q f_*\mathscr{F}$ est $(N_1 + N_2)$-extension ponctuelle de sous-quotients de $\mathscr{F}$ relativement à f.

iii. (changement de base) Soient $f : X \to Y$ un morphisme *propre* entre schémas nœthériens (munis de la topologie étale), $\mathscr{F}$ un faisceau abélien sur X, $Y' \to Y$ un morphisme surjectif. Notons $f' = f \times_Y Y'$, $\mathscr{F}'$ l'image inverse de $\mathscr{F}$ sur X', et fixons deux entiers q, N. Le faisceau $R^q f_* \mathscr{F}$ est N-extension ponctuelle de sous-quotients de $\mathscr{F}$ relativement à f si et seulement si le faisceau $R^q f'_* \mathscr{F}'$ est N-extension ponctuelle de sous-quotients de $\mathscr{F}'$ relativement à f'.

iv. (immersion) Soient $f : X \to Y$ un morphisme, $k : Z \hookrightarrow X$ une immersion, et $\mathscr{F}$ un faisceau abélien sur F. Posons $g = f \circ k$. Un faisceau $\mathscr{G}$ sur Y est N-extension ponctuelle de $\mathscr{F}$ relativement à g si et seulement si il est N-extension ponctuelle de $k_! \mathscr{F}$ relativement à f.

1.5.3. — Une propriété P de paires $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ est dite **χ-bornée** s'il existe une fonction $\Phi : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ telle que la condition suivante soit satisfaite :

> pour tout ouvert $j : U \hookrightarrow C$ d'une courbe projective et lisse sur un corps algébriquement clos k, tout faisceau abélien lisse $\mathscr{L}$ sur U de torsion inversible sur k et toute stratification $\mathfrak{C}$ de C contenant U tels que $(j_! \mathscr{L}, \mathfrak{C})$ soit P, le complexe $Ra_! \mathscr{L}$ sur $\mathrm{Spec}(k)$ est $\Phi(\chi(U))$-extension ponctuelle de $\mathscr{L}$, où $\chi(U)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de la courbe ouverte U.

1.5.4. — Une propriété P de paire $(\mathscr{F}, \chi)$ est dite **b-bornée** s'il existe une fonction $F : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que la condition suivante soit satisfaite :

> pour tout ouvert $j : U \hookrightarrow X$ complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans un schéma régulier strictement local, tout faisceau abélien lisse $\mathscr{L}$ sur U de torsion inversible sur X et toute stratification $\mathfrak{X}$ de X contenant U tels que $(j_! \mathscr{L}, \mathfrak{X})$ soit P, le complexe $R\Gamma(U, \mathscr{L})$ est $F(b(U))$-extension ponctuelle de $\mathscr{L}$, où $b(U)$ désigne le nombre de branches du complémentaire de U dans X.

1.6. Familles. — Fixons une propriété P.

1.6.1. — Une *famille* $\mathbb{F}$ de faisceaux abéliens (ou complexes) sur un même schéma X est dite P s'il existe une stratification $\mathfrak{X}$ de X telle que la paire $(\mathbb{F}, \mathfrak{X})$ soit P : chaque faisceau (ou complexe) $\mathscr{F} \in \mathbb{F}$ est $P_{\mathfrak{X}}$. (On dira parfois que $\mathbb{F}$ est **uniformément** P pour insister sur le fait qu'il s'agit d'une famille.) Notons que si P est stable par raffinement, toute famille *finie* constituée de faisceaux P est également P. On dit également que $\mathbb{F}$ est (uniformément) **proprement** P (resp. P **par altération**) s'il existe un morphisme propre et surjectif (resp. une altération [vii]) $q : X' \to X$ tel que $q^* \mathbb{F}$ soit (uniformément) P. On pourrait, plus généralement, introduire la condition d'être P *localement pour une topologie* T.

1.6.2. — Pour chaque entier $n \geq 1$, notons $P^{[1/n]}$ la propriété suivante : une paire $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ sur un schéma X est $P^{[1/n]}$ si et seulement si sa restriction à l'ouvert (éventuellement vide) $X[1/n]$ de X est P. Soit $(n_i)_{i \in I}$ une famille d'entiers non nuls et soit $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ une famille de faisceaux de $\mathbf{Z}/n_i$-modules sur un schéma X. (Les entiers $(n_i)_{i \in I}$ font partie de la donnée.) La famille $\mathbb{F}$ est dite P' s'il existe une stratification $\mathfrak{X}$ de X telle que chaque faisceau $\mathscr{F}_i$ soit $P_{\mathfrak{X}}^{[1/n_i]}$.

1.6.3. Proposition. — *Soit* P *une propriété* locale pour la topologie de Zariski, stable par raffinement *et* image inverse. *Une famille de faisceaux sur un schéma nœthérien est* proprement P *si et seulement si elle l'est localement pour la topologie étale.*

Démonstration. — Tout recouvrement étale d'un schéma nœthérien X étant dominé par un recouvrement zariskien d'un X-schéma fini et surjectif (cf. p. ex. [**Orgogozo, 2006**, lemme 10.3]), il suffit de montrer que la condition d'être *proprement* P est locale pour la topologie de Zariski. Ceci résulte aussitôt de [**Orgogozo, 2010**, 3.2.1] (voir aussi [**Goodwillie & Lichtenbaum, 2001**, 3.6]) et du fait que la condition d'être P est supposée locale pour la topologie de Zariski. □

1.6.4. Proposition. — *Soit* P *une propriété* stable par image inverse, compressible *et* close. *Pour toute immersion fermée* $i : F \hookrightarrow Y$ *de schémas nœthériens, l'image directe par le morphisme* i *d'une famille* proprement P *sur* F *est* P *par altération sur* Y. *En particulier, une famille proprement* P *est même* P *par altération.*

Démonstration. — Soit $s : F' \to F$ un morphisme propre et surjectif, et soit $\mathfrak{F}$ une stratification de F'. On souhaite montrer qu'il existe une altération $q : Y' \to Y$ et une stratification $\mathfrak{Y}$ de Y tels que si un faisceau $\mathscr{F}$ est $P_{s,\mathfrak{F}}$, son image directe $i_* \mathscr{F}$ est $P_{q,\mathfrak{Y}}$. D'après le lemme de « quasi-relèvement » (ou quasi-section) ci-dessous, on peut supposer que le morphisme propre et surjectif s admet une section au-dessus de chaque composante irréductible réduite de F. À cette condition, il résulte des deux premières hypothèses faites sur P qu'il existe une stratification $\mathfrak{F}_0$ *de* F telle que tout faisceau $P_{s,\mathfrak{F}}$ soit $P_{\mathfrak{F}_0}$. La propriété P étant close, il existe une stratification $\mathfrak{Y}$ de Y telle que $i_* \mathscr{F}$ soit $P_{\mathfrak{Y}}$ si $\mathscr{F}$ est $P_{\mathfrak{F}_0}$. CQFD.

***Lemme* (O. Gabber).** — *Soient* Y *un schéma nœthérien,* F *un fermé de* Y *et* $s : F' \to F$ *un morphisme fini (resp. propre) et surjectif. Il existe un morphisme fini surjectif (resp. une altération)* $Y' \to Y$ *tel que toute composante irréductible de* $F \times_Y Y'$, *munie de la structure réduite, soit la source d'un* F*-morphisme vers* F'.

$$\begin{tikzcd}
F' \arrow[d, "s"'] & F'_{Y'} \arrow[l] \arrow[d] & \\
F \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[ur, phantom, "\square"] & F_{Y'} \arrow[l] \arrow[d, hook] & \coprod_j G_j \arrow[l] \arrow[ul, dashed] \\
Y & Y' \arrow[l] \arrow[ur, phantom, "\square"] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration du lemme. — Le cas où s est propre résultant aussitôt de la variante [**Orgogozo, 2006**, 4.3] (dont l'énoncé est la démonstration sont dus à O. Gabber) et du cas d'un morphisme fini, nous supposons ici le morphisme s fini. Il est loisible de remplacer Y par un Y-schéma fini surjectif, et de même pour F'. Quitte à considérer isolément chaque composante connexe de F

vii. C'est-à-dire un morphisme propre, surjectif, fini au-dessus d'un ouvert dense de X et envoyant tout point maximal sur un point maximal.

puis de F', on peut finalement se ramener au cas particulier où Y, F et F' sont intègres. Par passage à la limite, on peut supposer Y de type fini sur $\mathbf{Z}$ donc excellent et, quitte à le normaliser, normal. Soit enfin Z le normalisé de Y dans une clôture algébrique du corps des fractions K de Y. Toute composante irréductible réduite G du produit fibré $Z \times_Y F$ est un schéma normal à corps des fractions algébriquement clos. Cela résulte de l'observation suivante : *si A est un anneau intègre normal à corps des fractions algébriquement clos et a un quotient intègre de A, tout polynôme unitaire $f \in a[X]$ se relève dans A en un polynôme unitaire $F \in A[X]$ scindé ; en particulier le polynôme f lui-même est scindé*. Le morphisme $F' \times_F G \to G$ étant fini surjectif, il possède une section car tout morphisme fini surjectif de but G et de source un schéma intègre est un isomorphisme. Ceci garantit l'existence d'un F-morphisme φ de G vers F'. Le Y-schéma entier Z étant la limite des Y-schémas intègres finis, et G étant également une limite, il existe un morphisme *fini* $Y' \to Y$, où Y' est intègre de corps des fractions noté K', tel que le morphisme φ se factorise à travers un morphisme ψ d'une composante irréductible G' du produit fibré $Y' \times_Y F$ vers F'. Le groupe des automorphismes Π de l'extension K'/K agit transitivement sur les composantes irréductibles du schéma $Y' \times_Y F$. Chaque composante s'envoie donc par un F-morphisme vers F' : il suffit de considérer les morphismes $\psi \circ \sigma$ pour σ parcourant Π. □

□

1.7. Théorèmes d'uniformité : énoncés et stratégie. —

1.7.0. — Convenons de dire qu'un schéma est **bon**, s'il existe un morphisme de type fini de celui-ci vers un schéma nœthérien excellent de dimension inférieure ou égale à 1.

***1.7.1. Théorème* (Théorème d'uniformité propre)**. — *Soient Y un bon schéma, $f : X \to Y$ un morphisme* propre, *et P une propriété* dévissable *(**1.3.1**) et* nodulaire *(**1.4.2**). Pour toute famille proprement P' de faisceaux étales abéliens sur X, la famille des images directes supérieures sur Y est également proprement P'. En d'autres termes :*

> *pour chaque morphisme* propre et surjectif $q : X' \to X$ *et chaque stratification $\mathfrak{X}$ de X', il existe un morphisme* propre et surjectif $r : Y' \to Y$ *et une stratification $\mathfrak{Y}$ de Y' tels que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Z}/n$-modules sur X satisfaisant $P^{[1/n]}_{q,\mathfrak{X}}$, le complexe $Rf_*\mathscr{F}$ est $P^{[1/n]}_{r,\mathfrak{Y}}$.*

*Si de plus la propriété P est χ-*bornée *(**1.5.3**), il existe un entier N (dépendant de P, $\mathfrak{X}$, q et f) tel que pour chaque faisceau de $\mathbf{Z}/n$-modules $\mathscr{F}$ satisfaisant $P^{[1/n]}_{q,\mathfrak{X}}$, la restriction du complexe $Rf_*\mathscr{F}$ à l'ouvert $Y[1/n]$ est N-extension ponctuelle de $\mathscr{F}$ relativement à f.*

1.7.2. Théorème. — *Soient Y un bon schéma, $f : X \to Y$ un morphisme séparé de type fini, et P une propriété* dévissable nodulaire *et* pure *(**1.4.6**). Pour toute famille $\mathbb{F}$ de faisceaux étales abéliens sur X pour laquelle il existe une Y-compactification $j : X \to \overline{X}$ telle que la famille $j_!\mathbb{F}$ soit proprement P', la famille des images directes $Rf_*\mathbb{F}$ est également proprement P'. En d'autres termes :*

> *pour chaque Y-compactification $j : X \hookrightarrow \overline{X}$, chaque morphisme morphisme* propre et surjectif $\overline{q} : \overline{X}' \to \overline{X}$ *et chaque stratification $\overline{\mathfrak{X}}$ de $\overline{X}'$, il existe un morphisme* propre et surjectif $r : Y' \to Y$ *et une stratification $\mathfrak{Y}$ de Y' tels que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Z}/n$-modules sur X tel que $j_!\mathscr{F}$ soit $P^{[1/n]}_{\overline{q},\overline{\mathfrak{X}}}$, le complexe $Rf_*\mathscr{F}$ est $P^{[1/n]}_{r,\mathfrak{Y}}$.*

*Si de plus la propriété P est χ-*bornée *et b-*bornée *(**1.5.4**), il existe un entier N (dépendant de P, j, $\overline{\mathfrak{X}}$, q et f) tel que pour chaque faisceau de $\mathbf{Z}/n$-modules $\mathscr{F}$ tel que $j_!\mathscr{F}$ soit $P^{[1/n]}_{\overline{q},\overline{\mathfrak{X}}}$, la restriction du complexe $Rf_*\mathscr{F}$ à l'ouvert $Y[1/n]$ soit N-extension ponctuelle de $\mathscr{F}$.*

1.7.3. Remarque. — Il résulte de **1.6.4** que le morphisme propre et surjectif r des deux énoncés précédents peut être *génériquement fini*. Lorsque Y est de type fini sur un corps parfait et que P est locale pour la topologie étale, on peut même supposer cette altération *génériquement étale* (cf. **2.5.8**, démonstration).

1.7.4. *Stratégie*. —

1.7.4.1. — Soit P une propriété dévissable nodulaire. Pour chaque triplet d'entiers relatifs $(\delta \geq 0, \rho \geq -1, d \geq 0)$, considérons le corollaire suivant du théorème d'uniformité propre **1.7.1**.

> $\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho, d)$: *pour tout bon schéma Y* ***de dimension inférieure ou égale à*** *δ, tout schéma X* ***de dimension inférieure ou égale à*** *d, tout morphisme* propre $f : X \to Y$ *et toute stratification $\mathfrak{X}$ de X, il existe un morphisme propre et surjectif $r : Y' \to Y$ et une stratification $\mathfrak{Y}$ de Y' tels que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Z}/n$-modules sur X satisfaisant $P^{[1/n]}_{\mathfrak{X}}$, le complexe* ***tronqué*** *$\tau_{\leq\rho}Rf_*\mathscr{F}$ est $P^{[1/n]}_{r,\mathfrak{Y}}$. Si de plus la propriété P est χ-*bornée*, il existe un entier N (dépendant de P, $\mathfrak{X}$, f et ρ) tel que pour chaque faisceau de $\mathbf{Z}/n$-modules $\mathscr{F}$ satisfaisant $P^{[1/n]}_{\mathfrak{X}}$, la restriction du complexe tronqué $\tau_{\leq\rho}Rf_*\mathscr{F}$ à l'ouvert $Y[1/n]$ est N-extension ponctuelle de $\mathscr{F}$ relativement à f.*

1.7.4.2. — On vérifiera ci-dessous l'implication

$$\underset{\text{cf. } \mathbf{1.9.4.2}}{\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho-1, \infty)} \wedge \underset{\text{cf. } \mathbf{1.9.4.3}}{\mathbf{Perm}_P(\delta-1, \rho, \infty)} \wedge \underset{\text{cf. } \mathbf{1.9.4.4}}{\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho, d-1)} \Rightarrow \mathbf{Perm}_P(\delta, \rho, d),$$

en faisant la convention que si l'un des deux entiers relatif δ ou d est strictement négatif, alors $\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho, d)$ est vrai. D'après le principe de récurrence, appliqué à l'ensemble bien ordonné des triplets (δ, ρ, d) munis de l'ordre *lexicographique*, ceci suffit pour établir l'énoncé $\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho, d)$, qui, à son tour, entraîne le théorème **1.7.1**, cf. **1.8.1**.

1.7.4.3. — Une fois le théorème d'uniformité propre **1.7.1** établi, le théorème **1.7.2** se ramène au cas particulier d'une immersion ouverte, qui sera démontré par récurrence — en supposant P pure — à partir des énoncés suivants, où $\rho \geq -1$.

> **Imm**$_{\mathsf{P}}(\rho)$: *pour tout bon schéma* X, *toute immersion ouverte* $j : U \hookrightarrow X$, *et toute stratification* $\mathfrak{X}_1$ *de* X, *il existe un morphisme propre et surjectif* $r : X' \to X$ *et une stratification* $\mathfrak{X}_2$ *de* X' *tels que pour tout entier* $n \geq 1$ *et tout faisceau* $\mathscr{F}$ *de* $\mathbf{Z}/n$*-modules sur* X *satisfaisant* $\mathsf{P}^{[1/n]}_{\mathfrak{X}_1}$, *le complexe tronqué* $\tau_{\leq\rho}\mathsf{R}j_*j^*\mathscr{F}$ *est* $\mathsf{P}^{[1/n]}_{r,\mathfrak{X}_2}$. *Si de plus la propriété* P *est* χ*-bornée et* b*-bornée, il existe un entier* N *(dépendant de* P, $\mathfrak{X}_1$, j *et* ρ*) tel que pour chaque faisceau de* $\mathbf{Z}/n$*-modules* $\mathscr{F}$ *satisfaisant* $\mathsf{P}^{[1/n]}_{\mathfrak{X}_1}$, *la restriction du complexe tronqué* $\tau_{\leq\rho}\mathsf{R}j_*j^*\mathscr{F}$ *à l'ouvert* $X[1/n]$ *est* N*-extension ponctuelle de* $j^*\mathscr{F}$.

1.8. Image directe par un morphisme propre : premières réductions. —

1.8.1. Réduction au cas d'une famille (uniformément) P. — Vérifions que la conjonction **Perm**$_{\mathsf{P}}$ des énoncés **Perm**$_{\mathsf{P}}(\delta, \rho, d)$ entraîne le théorème d'uniformité propre **1.7.1**. Soient $(\mathfrak{X}, q)$ comme dans l'énoncé de ce théorème. Par finitude de la dimension cohomologique des foncteurs $\mathsf{R}f_*$ et des schémas considérés, il suffit de se ramener au cas particulier où le morphisme $q : X' \to X$ est l'identité. Soit $X_\bullet$ le X-schéma simplicial 0-cosquelette de q. Tout faisceau abélien $\mathscr{F}$ qui est $\mathsf{P}_{q,\mathfrak{X}}$ étant de torsion et $X_\bullet$ étant un *hyperrecouvrement propre* de X ([**Deligne, 1974**, 5.3.8]), on a un isomorphisme canonique de descente cohomologique $\mathsf{R}f_*\mathscr{F} = \mathsf{R}f_{\bullet *}(\mathscr{F}_\bullet)$, où $f_\bullet$ désigne le morphisme simplicial $X_\bullet \to Y$ et $\mathscr{F}_\bullet$ le faisceau simplicial tiré en arrière de $\mathscr{F}$. Observons que les paires images inverses $(X_i \to X)^*(\mathscr{F}, \mathfrak{X}) = (\mathscr{F}_i, \mathfrak{X}_i)$ sont P pour chaque $i \geq 0$: pour $i = 0$ c'est l'hypothèse et pour i quelconque cela résulte de la stabilité de P par image inverse.

Soit M un majorant de la dimension des fibres de f. Supposons le théorème démontré pour chaque f_i et $(\mathfrak{X}_i, q_i = \mathrm{Id}_{X_i})$ lorsque $i \leq 2M + 1$. Notons r_i et $\mathfrak{Y}_i$ les morphismes et stratifications associés. La stabilité de P par changement de base permet de supposer que les morphismes r_i sont tous égaux à un même morphisme $r : Y' \to Y$. (On utilise le fait que l'ensemble des Y-schémas propres et surjectifs est filtrant.) La stabilité de P par raffinement permet de supposer également que les stratifications $\mathfrak{Y}_i$ sont toutes égales à une même stratification $\mathfrak{Y}$ sur Y'. (On utilise le fait que l'ensemble des stratifications du schéma nœthérien Y' est cofiltrant.) Il résulte de la stabilité de P par sous-quotient et extension, de la suite spectrale associée à l'isomorphisme $\mathsf{R}f_*\mathscr{F} = \mathsf{R}f_{\bullet *}(\mathscr{F}_\bullet)$, (*op. cit.*, 5.2.7.1) et du fait que les foncteurs $\mathsf{R}^j f_*$ sont nuls pour $j > 2M$ que si $\mathscr{F}$ est $\mathsf{P}_{q,\mathfrak{X}}$, le complexe $\mathsf{R}f_*\mathscr{F}$ est $\mathsf{P}_{r,\mathfrak{Y}}$.

$$\begin{tikzcd}
X_i, \mathfrak{X}_i \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[ddd, bend right, "f_i"'] & \\
& X', \mathfrak{X}' \arrow[dl, "q"] \\
X \arrow[d, "f"] & \\
Y & Y_i \arrow[l, "r_i"'] & Y' \arrow[l, dashed] \arrow[lll, bend left, "r"] \\
& \mathfrak{Y}_i & \mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

Chaque $\mathsf{R}^n f_*\mathscr{F}$ est, par descente, $(n+1)$-extension ponctuelle des $\mathsf{R}^j f_{i*}\mathscr{F}_i$ relativement aux f_i pour $i + j \leq n$. Lorsque chaque $\mathsf{R}^j f_{i*}\mathscr{F}_i$ est $\mathsf{N}_{i,j}$-extension ponctuelle de $\mathscr{F}_i$ relativement à f_i, il en résulte (**1.5.2**, (i)) que $\mathsf{R}^n f_*\mathscr{F}$ est N_n-extension ponctuelle de $\mathscr{F}$ relativement à f, où $\mathsf{N}_n = (n+1) \times \max_{i,j} \mathsf{N}_{i,j}$.

1.8.2. Récurrence. — Nous allons démontrer les énoncés **Perm**$_{\mathsf{P}}(\delta, \rho, d)$ en vérifiant l'implication **1.7.4.2**. Les ingrédients essentiels de cette démonstration sont le théorème de fibration en courbes plurinodales [**de Jong, 1997**, 5.9] et le théorème de résolutions des singularités [**de Jong, 1996**, 8.2] de A. J. de Jong, qui nous ramènent à la nodularité de P. On amorce la récurrence en observant que l'énoncé **Perm**$_{\mathsf{P}}(0, -1, 0)$ est trivialement vrai. (Il en est plus généralement ainsi de **Perm**$_{\mathsf{P}}(\delta, -1, d)$ pour toute paire (δ, d).) Considérons dorénavant un triplet (δ, ρ, d) et supposons l'énoncé **Perm**$_{\mathsf{P}}$ démontré pour toute valeur lexicographiquement strictement inférieure.

1.8.3. Réduction au cas des prolongements par zéro de faisceaux lisses sur une strate dense. — Soient f et $\mathfrak{X}$ comme dans l'énoncé **Perm**$_{\mathsf{P}}(\delta, \rho, d)$ (**1.7.4**) et soit $\mathscr{F}$ un faisceau $\mathsf{P}_{\mathfrak{X}}$ sur X. Il résulte de l'hypothèse **1.3.1** (ii) (stabilité par sous-quotient) et du lemme **1.1.2** que $\mathscr{F}$ est extension successive de faisceaux $\mathsf{P}_{\mathfrak{X}}$ de la forme $i_*j_!\mathscr{L}$ où :

— j est l'immersion ouverte d'une strate W de $\mathfrak{X}$ dans son adhérence $F = \overline{W}$;
— i est l'immersion fermée de F dans X ;
— $\mathscr{L}$ est un faisceau abélien lisse sur W.

Il résulte de la suite exacte longue de cohomologie associée à une extension et des propriétés de stabilité par extension, **1.3.1** (iii) et **1.5.2** (ii), qu'il suffit de démontrer **Perm**$_{\mathsf{P}}(\delta, \rho, d)$ sous l'hypothèse supplémentaire que $\mathscr{F}$ est un faisceau de la forme $i_*j_!\mathscr{L}$ où i, j et $\mathscr{L}$ sont comme ci-dessus. Posons $\mathfrak{F} = i^*\mathfrak{X}$. Il résulte de **1.3.1** (iv) (stabilité par image inverse) que $j_!\mathscr{L}$ est $\mathsf{P}_{\mathfrak{F}}$. Soit $g : F \to Y$ le morphisme composé $f \circ i$. Il découle de l'isomorphisme canonique $\mathsf{R}g_*(j_!\mathscr{L}) = \mathsf{R}f_*(i_*j_!\mathscr{L})$ et du fait que la dimension F est majorée par celle de X que l'on peut remplacer $(X, \mathfrak{X}, f)$ par $(F, \mathfrak{F}, g)$: on utilise la finitude du nombre de strates de $\mathfrak{X}$ — donc des paires $(F, \mathfrak{F})$ et (i, j) — et l'argument de (co)finalité du paragraphe **1.8.1**. Ainsi, il nous suffit d'établir la propriété de stabilité **Perm**$_{\mathsf{P}}(\delta, \rho, d)$ pour les faisceaux $j_!\mathscr{L}$, où $j : W \hookrightarrow X$ est une strate ouverte de $\mathfrak{X}$, et $\mathscr{L}$ est lisse sur $W \in \mathfrak{X}$.

1.8.4. Réduction au cas où Y *est intègre.* — Pour tout schéma Y comme dans l'énoncé, il existe un morphisme propre et surjectif $Y' \to Y$ satisfaisant les conditions suivantes :

— la dimension de Y' est égale à celle de Y ;
— le schéma Y' est coproduit de schémas intègres Y'_i.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & \\
Y & Y' = \coprod_i Y'_i \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Il résulte de cette observation et de la propriété de compressibilité (**1.3.1** (vi)) de P que l'on peut se contenter de démontrer **Perm**$_{\mathsf{P}}(\delta, \rho, d)$ dans le cas particulier où Y est *intègre* : on utilise ici la commutation des images directes aux changements de base (théorème de changement de base propre, [SGA `4 XII.5.1`]) et **1.5.2**, (iii). Notons que la réduction précédente (**1.8.3**) n'est pas altérée par le changement de base $Y'_i \to Y$.

1.9. Morphismes plurinodaux : définitions et réductions. —

***1.9.1. Définition* ([de Jong, 1997], 5.8).** — Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre schémas intègres et soit U (resp. V) un ouvert dense de X (resp. Y). On dit que f est **plurinodal adapté à** (U, V) s'il existe :

i. une factorisation
$$f = (f_d : X_d \to X_{d-1}) \circ \cdots \circ (f_1 : X_1 \to X_0),$$
où $X_0 = Y$ et $X_d = X$ ($d \in \mathbf{N}$) ;

ii. des ouverts denses $U_i \subseteq X_i$, où $U_0 = V$ et $U_d = U$,

tels que chaque f_i soit une courbe nodale adaptée à (U_i, U_{i-1}) (cf. **1.4.1**).

Il est parfois commode de dire qu'un morphisme $f : X \to Y$ est *plurinodal adapté* à un ouvert dense U de X (resp. *plurinodal*) s'il existe un ouvert dense V de Y (resp. des ouverts denses U et V de X et Y respectivement) tel que f soit adapté à (U, V).

1.9.2. — Afin de pouvoir considérer des morphismes non dominants, on généralise légèrement la définition précédente de la façon suivante. Un morphisme $f : X \to Y$ est dit **presque plurinodal** (resp. *presque plurinodal adapté à un ouvert dense* U *de* X) s'il est *somme* de morphismes plurinodaux entre schémas intègres et d'un morphisme non dominant (resp. et si pour chaque composante connexe $X^{\smile}$ de X dominant Y, le morphisme composé $X^{\smile} \hookrightarrow X \to Y$ est plurinodal adapté à $U \cap X^{\smile}$). Les définitions précédentes sont motivées par l'ubiquité des morphismes plurinodaux.

***1.9.3. Théorème* (A. J. de Jong).** — *Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre, où Y est un schéma intègre excellent quasi-compact. Pour tout ouvert dense W de X il existe une altération $Y' \to Y$ et un hyperrecouvrement propre $X'_\bullet \to X \times_Y Y'$ tel que $X'_0 \to Y'$ soit* presque plurinodal *adapté à un ouvert de X'_0 contenu dans $W \times_X X'_0$.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de [**de Jong, 1997**, théorème 5.9] (cf. [**Orgogozo, 2006**, §4.3]). □

1.9.4. *Réduction au cas d'un morphisme plurinodal adapté à la strate dense.* —

1.9.4.1. — Rappelons que l'on souhaite démontrer l'énoncé $\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho, d)$. On a vu précédemment que l'on peut supposer :
— les faisceaux-test $\mathscr{F}$ de la forme $j_{W!}\mathscr{L}$ où $j_W : W \hookrightarrow X$ est une strate ouverte et $\mathscr{L}$ est *lisse* ;
— Y *intègre*.

1.9.4.2. — Il résulte du théorème de A. J. de Jong (**1.9.3**), du fait qu'une altération d'un schéma n'augmente pas sa dimension et enfin du théorème de changement de base propre que l'on peut supposer l'existence d'un hyperrecouvrement propre $X_\bullet \to X$ tel que $X_0 \to Y$ soit presque plurinodal adapté à un ouvert contenu dans W.

D'après l'hypothèse de récurrence $\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho - 1, \infty)$ — conjonction des énoncés $\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho - 1, d')$ pour $d' \in \mathbf{N}$ — on peut également supposer l'existence d'une stratification $\mathfrak{Y}$ de Y telle que les faisceaux $R^\beta f_{\alpha *}\mathscr{F}_\alpha$ soient $P_{\mathfrak{Y}}$ pour $0 < \alpha \leq \rho$ et $0 \leq \beta < \rho$ dès que $\mathscr{F}$ est $P_{\mathfrak{X}}$, et qu'ils soient uniformément extension ponctuelle de $\mathscr{F}$ relativement à f si P est χ-bornée. La suite spectrale $E_1^{\alpha,\beta} = R^\beta f_{\alpha *}\mathscr{F}_\alpha \Rightarrow R^{\alpha+\beta} f_*\mathscr{F}$, la bonté de P et, le cas échéant le fait qu'elle soit χ-bornée, nous permettent comme en **1.8.1** de supposer $f = f_0$, c'est-à-dire f *presque* plurinodal adapté à un ouvert contenu dans W.

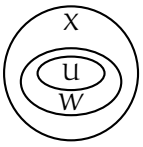
$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_\alpha & X_\alpha \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f_\alpha"] \\ \mathscr{F} & X \arrow[d, "f"'] \\ & Y \quad \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

1.9.4.3. — Le morphisme f étant *presque* plurinodal, écrivons $f = f' \coprod f''$ où $f' : X' \to Y$ est somme de Y-morphismes plurinodaux et $f'' : X'' \to Y$ est propre non surjectif. Notons $\mathfrak{X}'$ (resp. $\mathfrak{X}''$) la stratification de X' (resp. X'') déduite de $\mathfrak{X}$. Il résulte de la stabilité par image inverse (**1.3.1** (iv)) qu'un faisceau $P_{\mathfrak{X}}$ sur X est somme directe du prolongement par image directe fermée d'un faisceau $P_{\mathfrak{X}'}$ sur X' et du prolongement par image directe fermée d'un faisceau $P_{\mathfrak{X}''}$ sur X''. Ceci nous permet, par **1.3.1** (iii), d'étudier séparément $(f', \mathfrak{X}')$ et $(f'', \mathfrak{X}'')$. (Si P est χ-bornée, on utilise également **1.5.2** (ii) et (iv).) Tout faisceau sur X' étant extension successive de faisceaux à supports dans ses composantes connexes (en nombre fini), on peut pour la même raison supposer le schéma X' *intègre*. Vérifions l'énoncé $\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho, d)$ pour $(f'', \mathfrak{X}'')$.

Par hypothèse, le morphisme f'' se factorise en $(g : X'' \to F) \circ (i : F \hookrightarrow Y)$, où i est une immersion fermée stricte et g un morphisme propre et surjectif. D'après l'hypothèse de récurrence $\mathbf{Perm}_P(\delta - 1, \rho, \infty)$, le foncteur $\tau_{\leq \rho} R g_*$ envoie la famille des faisceaux $P_{\mathfrak{X}''}$ sur une famille proprement P du fermé F. D'après **1.6.4**, ceci suffit pour conclure.

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f''"] & \\ F \arrow[r, hook, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

1.9.4.4. — Soient $\mathscr{L}$ et W comme en **1.9.4.1**. On a vu qu'il est suffisant de démontrer le résultat de permanence $\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho, d)$ pour chaque morphisme f plurinodal adapté à un ouvert dense U contenu dans l'ouvert $W \in \mathfrak{X}$ et les faisceaux-test $j_{W!}\mathscr{L}$, supposés $P_{\mathfrak{X}}$. Notons j_U l'immersion ouverte de U dans le schéma intègre X et considérons la suite exacte courte
$$0 \to j_{U!}(\mathscr{L}_{|U}) \to j_{W!}\mathscr{L} \to \mathscr{L}_{W/U} \to 0,$$
où $\mathscr{L}_{W/U}$ est défini par ce diagramme. Par stabilité par sous-quotient P (**1.3.1** (ii)) les faisceaux $j_{U!}(\mathscr{L}_{|U})$ et $\mathscr{L}_{W/U}$ sont également $P_{\mathfrak{X}}$. (Notons qu'ils sont trivialement 1-extension ponctuelle de $j_{W!}\mathscr{L}$ relativement à l'identité.)



Admettons un instant l'existence d'une paire $(r, \mathfrak{Y})$ telle que chacun des complexes $\tau_{\leq \rho} R f_* \mathscr{L}_{W/U}$ soit $P_{r,\mathfrak{Y}}$, où $\mathscr{L}$ est un faisceau lisse variable comme ci-dessus, et que ces complexes sont uniformément extension ponctuelle de $\mathscr{L}$ relativement à f si P est χ-bornée. La stabilité de P par extension ainsi que la suite exacte longue de cohomologie nous permettent alors de supposer (pour établir $\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho, d)$) les faisceaux-test de la forme $j_{U!}\mathscr{M}$, où $\mathscr{M}$ est lisse sur U. Enfin, quitte à ajouter à $\mathfrak{X}$ la strate $W - U$,

c'est-à-dire remplacer $\{W\}$ par $\{U\}, \{W - U\}$, la stabilité de P par raffinement nous ramène au cas où U est une strate ouverte dense de $\mathfrak{X}$ telle que f soit un morphisme plurinodal adapté à U.

Vérifions maintenant le fait admis. Pour chaque $\mathscr{L}$ comme ci-dessus, il existe un faisceau $\mathscr{L}_F$ sur $F = X - U$ tel que $\mathscr{L}_{W/U}$ soit isomorphe à $i_*\mathscr{L}_F$, où i est l'immersion fermée de F dans X. Par stabilité par image inverse (**1.3.1** (iv)), le faisceau $\mathscr{L}_F$ est $P_{i^*\mathfrak{X}}$. La dimension de F étant strictement inférieure à celle de X (elle-même majorée par d), la conclusion résulte de $\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho, d-1)$ et de la formule de transitivité : $Rf_* \circ i_* = R(F \to Y)_*$.

1.10. Fin de la démonstration du théorème d'uniformité propre : ultime dévissage, résolution des singularités. —

Sous les hypothèses en vigueur, il existe une factorisation de f en $(X, U) \xrightarrow{h} (Z, W) \xrightarrow{g} (Y, V)$, où h est une courbe nodale adaptée à (U, W) et g est un morphisme plurinodal adapté à (W, V). Les ouverts U, V et W sont respectivement des ouverts denses de X, Y et Z. Il résulte de [**de Jong, 1996**, 8.2] que quitte à remplacer Y par un Y-schéma propre de même dimension on peut supposer la paire (Y, V) *régulière*. Les paires (X, U) et (Z, W) sont alors *toriques* (**1.4.5**).

$$\begin{tikzcd}
(X,U) \arrow[d, "h"] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] \\
(Z,W) \arrow[d, "g"] \\
(Y,V)
\end{tikzcd}$$

D'après le théorème de résolution des singularités toriques de Katô Kazuya (cf. p. ex. [**Mochizuki, 1999**, 2.1] ou [**Gabber & Ramero, 2009**, 5.6.32]), il existe un morphisme propre birationnel $Z_0 \to Z$ tel que la paire (Z_0, W_0) soit régulière, où W_0 désigne l'image inverse de W dans Z_0. Considérons le 0-cosquelette $Z_\bullet$ du morphisme $Z_0 \to Z$ et complétons le diagramme de fibration en formant le produit fibré $h_\bullet$.

$$\begin{tikzcd}
(X,U) \arrow[d, "h"] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] & & (X_\bullet, U_\bullet) \arrow[ll] \arrow[d, "h_\bullet"] & & \\
(Z,W) \arrow[d, "g"] & (Z_\bullet, W_\bullet) \arrow[l] \arrow[dl, bend left, "g_\bullet"] = [(Z_0, W_0) & \leftleftarrows & (Z_1, W_1) \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift left] & \leftleftarrows \cdots] \\
(Y,V) & & & &
\end{tikzcd}$$

Il résulte de la formule de transitivité des images directes et de la suite spectrale de descente (**1.8.1**) que les faisceaux $R^j f_*(j_!\mathscr{L})$ pour $j \leq \rho$ sont extensions successives d'au plus $\rho + 1$ sous-quotients des faisceaux $R^\alpha g_{\beta *}\big(R^\gamma h_{\beta *}(j_!\mathscr{L})\big)$ où $\alpha + \beta + \gamma \leq \rho$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}$, où h_β désigne le morphisme $X_\beta = X \times_Z Z_\beta \to Z_\beta$ déduit de h par changement de base et où l'on a abusivement noté $j_!\mathscr{L}$ l'image inverse de ce faisceau sur X_β. La propriété P étant *nodulaire*, le complexe $Rh_{0*}(j_!\mathscr{L})$ est $P_{\mathfrak{Z}_0}$, où $\mathfrak{Z}_0$ est une stratification de Z_0 ne dépendant pas de $\mathscr{L}$ mais seulement de P, h et U. De plus, il est uniformément extension de $j_!\mathscr{L}$ relativement à h_0 si P est χ-bornée. (On utilise ici l'existence d'une borne sur le genre des fibres d'une famille de courbes à base nœthérienne.) Pour chaque β, l'isomorphisme de changement de base propre $(Z_\beta \to Z)^* Rh_*(j_!\mathscr{L}) = Rh_{\beta *}(j_!\mathscr{L})$ se « factorisant » à travers Z_0, ce complexe sur Z_β est également $P_{\mathfrak{Z}_\beta}$, où $\mathfrak{Z}_\beta = h_\beta^*\mathfrak{Z}_0$; cela résulte de la stabilité de P par image inverse, **1.3.1** (iv). (Si P est χ-bornée, on utilise également **1.5.2**, (iii).) Il nous reste donc à vérifier le théorème d'uniformité propre pour les morphismes g_β ($\beta \leq \rho$), en degré cohomologique inférieur ou égal à $\rho - \beta$, les stratifications $\mathfrak{Z}_\beta$ et les morphismes $q_\beta = \mathrm{Id}_{Z_\beta}$. Lorsque $\beta = 0$, cela résulte aussitôt de l'hypothèse de récurrence $\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho, d-1)$ car on a l'inégalité : $\dim(Z_0) = \dim(X) - 1 \leq d - 1$. Lorsque $\beta > 0$, cela résulte aussitôt de l'hypothèse de récurrence $\mathbf{Perm}_P(\delta, \rho - 1, \infty)$. Ceci conclut la démonstration de **1.7.4.2** et, par conséquent, la démonstration du théorème d'uniformité propre **1.7.1**.

1.11. Le cas d'un morphisme non nécessairement propre. —

1.11.1. — L'objectif de ce paragraphe est d'achever la démonstration du théorème d'uniformité **1.7.2**. Commençons par vérifier qu'il suffit de démontrer la proposition suivante.

1.11.2. Proposition. — *Soient X un bon schéma, $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouvert, et P une propriété* dévissable, nodulaire *et* pure. *Pour toute famille proprement P' de faisceaux étales abéliens sur X, la famille sur X obtenue par application du foncteur Rj_*j^* est également proprement P'. En d'autres termes :*

> *pour chaque morphisme* propre *et* surjectif $q : X'_1 \to X$ *et chaque stratification $\mathfrak{X}_1$ de X'_1, il existe un morphisme propre et surjectif $r : X'_2 \to X$ et une stratification $\mathfrak{X}_2$ de X'_2 tels que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Z}/n$-modules sur X satisfaisant $P^{[1/n]}_{q,\mathfrak{X}_1}$, le complexe $Rj_*j^*\mathscr{F}$ est $P^{[1/n]}_{r,\mathfrak{X}_2}$.*

*Si de plus la propriété P est χ-*bornée *et* b-bornée (***1.5.4***), *il existe un entier N (dépendant de P, $\mathfrak{X}_1$, q et j) tel que pour chaque faisceau de $\mathbf{Z}/n$-modules $\mathscr{F}$ satisfaisant $P^{[1/n]}_{q,\mathfrak{X}_1}$, la restriction du complexe $Rj_*j^*\mathscr{F}$ à $X[1/n]$ est N-extension ponctuelle de $j^*\mathscr{F}$.*

1.11.3. — Montrons que la proposition précédente **1.11.2** et le théorème d'uniformité propre **1.7.1** entraînent le théorème d'uniformité **1.7.2**.

Soient f et j comme dans *loc. cit.*, et notons $\overline{f} : \overline{X} \to Y$ la compactification de f. Si $\mathbb{F}$ est une famille sur X telle que $j_!\mathbb{F}$ soit proprement P' sur $\overline{X}$, il résulte de la proposition précédente que la famille $Rj_*\mathbb{F} = Rj_*j^*j_!\mathbb{F}$ est également proprement P'. Pour montrer que $Rf_*\mathbb{F} = R\overline{f}_*Rj_*\mathbb{F}$ est proprement P' sur Y, il suffit d'appliquer le théorème d'uniformité propre à $\overline{f}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} & X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f"'] & \overline{X} \arrow[dl, "\overline{f}"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Si P est χ et b-bornée, on montre de même que $Rf_*\mathbb{F}$ est — en un sens évident — uniformément extension ponctuelle de $\mathbb{F}$, en utilisant également l'existence d'une constante C ne dépendant que de j telle que la restriction des faisceaux $R^r j_*\mathscr{F}$ à $\overline{X}[1/n]$ soit

nulle pour chaque entier $r > C$ et chaque faisceau de $\mathbf{Z}/n$-modules $\mathscr{F}$ sur X. (La constante $C = 2\dim(\overline{X}) - 1$ convient ; cf. p. ex. [GTG, XVIII.1.1].)

1.11.4. — Vérifions maintenant que la proposition **1.11.2** résulte de la conjonction des énoncés $\mathbf{Imm}_P(\rho)$ (**1.7.4.3**). Compte tenu de l'existence sus-mentionnée d'une borne à la dimension cohomologique du foncteur Rj_*, il s'agit de ramener la proposition au cas particulier où $q = \mathrm{Id}_X$.

Cette réduction est semblable à celle faite en **1.8.1**. Soit $q : X'_1 \to X$ comme dans l'énoncé à démontrer (**1.11.2**), $\varepsilon : X_\bullet \to X$ le 0-cosquelette de q, et $\varepsilon_U, j_\bullet$, etc. comme dans le diagramme cartésien ci-contre. Par descente cohomologique propre et transitivité des images directes, on a la formule $Rj_*j^*\mathscr{F} = R\varepsilon_* Rj_{\bullet *} j_\bullet{}^*\mathscr{F}_\bullet$. Il résulte du théorème d'uniformité propre, appliqué aux morphismes *propres* $\varepsilon_\alpha : X_\alpha \to X$ et les stratifications déduites de $\mathfrak{X}_1$ par image inverse, et du résultat d'annulation rappelé ci-dessus qu'il suffit de démontrer le résultat de permanence pour les immersions ouvertes j_α et les stratifications induites.

$$\begin{tikzcd} U_\bullet \arrow[r, hook, "j_\bullet"] \arrow[d, "\varepsilon_U"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\bullet \arrow[d, "\varepsilon"] & \mathscr{F}_\bullet = \varepsilon^*\mathscr{F} \\ U \arrow[r, hook, "j"] & X & \mathscr{F} \end{tikzcd}$$

1.11.5. *Démonstration par récurrence de* $\mathbf{Imm}_P$ *(1.7.4.3)*. — On initialise la récurrence en constatant que $\mathbf{Imm}_P(-1)$ est trivialement vrai. Fixons donc $\rho \geq 0$ et supposons l'énoncé $\mathbf{Imm}_P(\rho - 1)$ démontré. On souhaite démontrer l'énoncé $\mathbf{Imm}_P(\rho)$, dont on reprend les notations : j est une immersion ouverte $U \hookrightarrow X$ et $\mathfrak{X}_1$ est une stratification de X. Comme en **1.8.3**, on constate qu'il suffit de considérer des faisceaux de la forme $i_*k_!\mathscr{L}$ où :

— k est l'immersion ouverte d'une strate V de $\mathfrak{X}_1$ dans son adhérence $F = \overline{V}$;
— i est l'immersion fermée de F dans X ;
— $\mathscr{L}$ est un faisceau abélien lisse sur V.

$$\begin{tikzcd} & X & & U \arrow[ll, hook', "j"'] \\ V \arrow[r, hook, "k"] & F \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, phantom, "\square"] & F_U \arrow[ll, hook', "j_F"'] \arrow[u, hook, "i_U"'] \end{tikzcd}$$

Avec les notations du diagramme ci-dessus, le complexe image directe $Rj_*\big(j^*(i_*k_!\mathscr{L})\big)$ est isomorphe, par transitivité des images directes, au complexe $i_*\big(Rj_{F*}j_F^*(k_!\mathscr{L})\big)$. Le faisceau $k_!\mathscr{L} = i^*\mathscr{F}$ est $P'_{i^*\mathfrak{X}_1}$ par stabilité de P par image inverse (**1.3.1**, (iv)). On a vu en **1.6.4** que si les $Rj_{F*}j_F^*(k_!\mathscr{L})$ sont uniformément proprement P', il en est de même des images directes $i_*\big(Rj_{F*}j_F^*(k_!\mathscr{L})\big)$. Il en est de même pour les tronqués $\tau_{\leq\rho}$. On peut donc supposer que V est un ouvert dense, c'est-à-dire que les faisceaux-test sont de la forme $k_!\mathscr{L}$, où $k : V \hookrightarrow X$ est l'immersion ouverte d'une strate dense $V \in \mathfrak{X}_1$.

Nous allons nous ramener au cas particulier où V est inclus dans U. Considérons pour cela l'ouvert $W := V \cap U$ et notons l l'immersion ouverte de W dans U. Pour chaque $\mathscr{L}$, le complexe $Rj_*j^*(k_!\mathscr{L})$ qui nous intéresse est isomorphe à l'image directe $Rj_*\big(l_!(\mathscr{L}_{|W})\big)$. Comme ce complexe se réécrit $Rj_*j^*\big(j_!k_!\mathscr{L}_{|W}\big)$ et que le faisceau $j_!l_!(\mathscr{L}_{|W})$ est $P'_{\mathfrak{X}_1}$ car il s'injecte dans $k_!\mathscr{L}$, on peut supposer V contenu dans U.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L} & V \arrow[r, hook, "k"] & X \\ \mathscr{L}_{|W} & W \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "l"] \arrow[ur, phantom, "\square"] & U \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd}$$

Ainsi, le morphisme k se factorise à travers j selon le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L} & l_!\mathscr{L} = j^*\mathscr{F} & \mathscr{F} = k_!\mathscr{L} \\ V \arrow[r, hook, "l"] \arrow[rr, hook, bend right, "k"'] & U \arrow[r, hook, "j"] & X \end{tikzcd}$$

On veut montrer que les tronqués $\tau_{\leq\rho}Rj_*(l_!\mathscr{L})$ sont proprement P' si les $k_!\mathscr{L}$ le sont, et en sont uniformément extension ponctuelle (sur les ouverts $X[1/n]$) lorsque P est χ et b-bornée. Pour cela, nous nous ramenons au cas où la paire (X, V) est régulière. Soit $\varepsilon : X_\bullet \to X$ un hyperrecouvrement propre de X tel que, pour chaque $\alpha \geq 0$, la paire (X_α, V_α) soit régulière, où V_α désigne la préimage de V dans X_α. L'existence d'un tel hyperrecouvrement résulte de [**de Jong, 1996**, 8.2]. L'isomorphisme de descente cohomologique $Rj_*(l_!\mathscr{L}) = R\varepsilon_*\big(Rj_{\bullet *}l_{\bullet !}\mathscr{L}_\bullet\big)$ (avec des notations évidentes) et le théorème d'uniformité propre **1.7.1** pour les morphismes ε_α, nous ramènent au cas particulier où la paire (X, V) est régulière.

Notons maintenant l'immersion fermée i de $F = U - V$ dans U et considérons le triangle distingué $l_!\mathscr{L} \to Rl_*\mathscr{L} \to i_*i^*\mathscr{L} \xrightarrow{+1}$ sur U. Par application du foncteur Rj_*, on obtient le triangle distingué $Rj_*\big(l_!\mathscr{L}\big) \to Rk_*\mathscr{L} \to Rj_*\big(i_*i^*Rl_*\mathscr{L}\big) \xrightarrow{+1}$ sur X, où — par pureté de P (**1.4.6**) — les complexes $Rk_*\mathscr{L}$ et $Rl_*\mathscr{L}$ sont uniformément P', lorsque $\mathscr{L}$ parcourt les faisceaux lisses sur U tels que $k_!\mathscr{L}$ soit $P'_{\mathfrak{X}_1}$. (On utilise le fait que la paire (U, V) est également régulière.)

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook, "l"] & U & F \arrow[l, hook', "i"'] \end{tikzcd}$$

La propriété P étant stable par image inverse et close (**1.3.1**. (iv-v)), les complexes $i_*i^*Rl_*\mathscr{L}$ sont également uniformément P'. Si P est χ et b-bornée, on utilise **1.5.2**, (iv). La suite exacte

$$\cdots \to R^{\rho-1}j_*\big(i_*i^*Rl_*\mathscr{L}\big) \to R^\rho j_*\big(l_!\mathscr{L}\big) \to R^\rho k_*\mathscr{L} \to \cdots,$$

la stabilité de P par extension (**1.3.1** (iii)), la stabilité **1.5.2** (ii), et l'hypothèse de récurrence nous permettent de conclure.

2. Constructibilité, modération et unipotence

2.1. Constructibilité. — On étudie dans ce paragraphe la propriété Cons (**1.1.1**) ainsi que sa variante Cons′ (**1.6.2**).

2.1.1. Proposition. — *La propriété* Cons *est* dévissable *(**1.3.1**) et locale pour la topologie de Zariski (**1.3.2**.*

2.1.2. Mise en garde. — Si Cons est stable par sous-quotient, il n'en est pas de même de la notion de *famille* (uniformément) Cons.

Démonstration de la proposition **2.1.1**. — La stabilité par raffinement est triviale. La stabilité par sous-quotient et image inverse (resp. extension) résulte du fait qu'un sous-quotient et une image inverse d'un faisceau constant constructible (resp. une extension de faisceaux constants constructibles) est un faisceau constant constructible (resp. un faisceau lisse) ; cf. [SGA 4 IX.2.1.3, 2.4]. Enfin, le fait que Cons soit close et Zariski-locale est une variante des énoncés 2.14 et 2.4.ii de *op. cit.* □

2.1.3. — Le caractère Zariski-local de la constructibilité est un cas particulier d'un fait général : si $q : X' \to X$ est un morphisme *surjectif* de présentation finie, un faisceau $\mathscr{F}$ sur X est constructible si et seulement si $q^*\mathscr{F}$ l'est ([SGA 4 IX.2.8] ; voir aussi [**Orgogozo, 2006**], §9.1 et 10.5).

2.1.4. Proposition. — *Soit* $q : X' \to X$ *un morphisme surjectif de type fini entre schémas nœthériens. Une famille* $\mathbb{F}$ *de faisceaux sur* X *est* Cons *si et seulement si la famille image inverse* $q^*\mathbb{F}$ *sur* X' *l'est.*

En particulier, une famille qui est proprement Cons est aussi Cons. (Cette proposition ne sera pas utilisée dans la suite de cet article.)

Démonstration. — Soit $\mathbb{F}$ une famille sur X telle que $q^*\mathbb{F}$ soit (uniformément) Cons. On veut montrer que $\mathbb{F}$ est Cons. Par récurrence nœthérienne, il suffit de vérifier l'existence d'un ouvert dense de X au-dessus duquel la famille $\mathbb{F}$ considérée est lisse. Soit V une partie localement fermée de X' telle que la famille $\mathbb{F}_{|V}$ soit lisse et telle que $f(V)$ contienne un ouvert dense U de X. Quitte à restreindre V, on peut supposer $f(V) = U$. Quitte à restreindre U, on peut supposer que le faisceau $(V \to U)_*\underline{2}$ est lisse et commute aux changements de base où $\underline{2}$ désigne le faisceau d'ensembles constant de valeur $\{0, 1\}$. L'existence d'un tel U est bien connue si X est bon ; sous la seule hypothèse de nœthérianité, c'est un résultat de O. Gabber, cf. [**Orgogozo, 2003**, 2.2.a]. Nous allons montrer que la famille $\mathbb{F}$ est lisse sur U. Le schéma U étant nœthérien donc localement connexe par arcs ([SGA 4 IX.2.12]), il suffit d'après *op. cit.* 2.13 de vérifier que pour chaque $\mathscr{F} \in \mathbb{F}$, les flèches de spécialisations $\mathscr{F}_{\overline{y}} \to \mathscr{F}_{\overline{x}}$ associées à des morphismes de points géométriques $\overline{y} \to \overline{x}$ de U sont des bijections. On peut supposer U strictement hensélien et $\overline{x}$ localisé en le point fermé. Sous notre hypothèse sur l'image directe $(V \to U)_*\underline{2}$, les morphismes $\pi_0(V_{\overline{y}}) \to \pi_0(V) \leftarrow \pi_0(V_{\overline{x}})$ sont des bijections. Soit V' une composante connexe de V ; c'est un schéma nœthérien donc localement connexe par arcs. D'après ce qui précède, les fibres de V' au-dessus de $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont non vides. Il en résulte que l'on peut relever ces deux points géométriques en deux points géométriques de V' liés par une chaîne de générisations-spécialisations. On utilise alors la lissité de la famille image inverse sur V'. □

2.2. Modération. —

2.2.1. — Un faisceau sur un schéma nœthérien X est dit **modéré** si pour tout X-schéma strictement hensélien T de point fermé t et tout point géométrique $\overline{u}$ de T localisé en u, l'action de $\pi_1(u, \overline{u})$ sur la fibre en $\overline{u}$ se factorise à travers un quotient d'ordre premier à l'exposant caractéristique de $\kappa(t)$. (On peut supposer que les schémas-test T ci-dessous sont des hensélisés stricts de X.)

2.2.2. — Cette définition est due à O. Gabber (cf. p. ex. [**Gabber, 2010**]), qui considère également la variante où les schémas-test T sont (strictement locaux) valuatifs. On trouvera dans [**Katô & Saitô, 2010**, §2.6] et [**Kerz & Schmidt, 2010**, §5] (« modération numérique ») des conditions de modération semblables.

2.2.3. — Il résulte immédiatement de la définition qu'un faisceau lisse est modéré et qu'un faisceau sur un trait est modéré si et seulement si sa restriction au point générique est modérée au sens usuel.

2.2.4. — La propriété Mod est définie de la façon suivante : une paire $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ est Mod si et seulement si le faisceau $\mathscr{F}$ est modéré au sens précédent. La propriété Mod′ est définie conformément à la définition générale **1.6.2** (restriction à l'ouvert sur lequel les coefficients sont inversibles).

2.2.5. *Exemple d'une famille proprement* Mod *qui n'est pas finiment* Mod. — Contrairement au cas de Cons (cf. **2.1.4** *supra*), une famille proprement Mod n'est pas nécessairement Mod, ni même Mod après changement de base par un morphisme *fini surjectif* (« finiment Mod »). (On a cependant équivalence entre proprement Mod et finiment Mod pour une famille sur un *trait*.) Voici un exemple, dû à O. Gabber, illustrant cette différence. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et soit E une courbe elliptique sur $k(t)$ d'invariant j non constant. Le groupe de monodromie, image du groupe de Galois absolu de $k(t)$ dans $\prod_{\ell \neq p} \mathrm{Aut}(E[\ell])$, est alors isomorphe à un sous-groupe *ouvert* du produit $\prod_{\ell \neq p} \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_\ell)$ ([**Igusa, 1959**, §5]). Soit $\mathscr{E}_\eta$ la courbe elliptique sur le point générique η de la surface $S = \mathrm{Spec}(k[x, y])$, tirée en arrière de E par l'application rationnelle $(x, y) \mapsto x/y$ de S vers la droite $D = \mathrm{Spec}(k[t])$. C'est un revêtement double $\mathscr{E}_\eta \to \mathbf{P}^1_\eta$ de la droite projective sur η. On étend $\mathscr{E}_\eta/\eta$ en un morphisme propre sur S en normalisant la droite projective $\mathbf{P}^1_S$ dans le revêtement précédent. Pour chaque $\ell \neq p$, la monodromie locale en l'origine de S, image de $\pi_1(S_{(0)} \times_S \eta, \overline{\eta})$ dans $\mathrm{Aut}(\mathscr{E}_{\overline{\eta}}[\ell])$, s'envoie *surjectivement* sur la monodromie globale de la courbe initiale E [viii] Pour une infinité de ℓ, le cardinal $\ell(\ell^2 - 1)$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_\ell)$ est divisible par p si bien que la monodromie locale a un p-Sylow non trivial et qu'il en est de même après passage à n'importe quel sous-groupe d'indice fini. La famille n'est donc pas finiment Mod ; elle est pourtant proprement Mod d'après le théorème d'uniformité propre appliqué à la constructibilité-modération (**2.5.1**).

2.2.6. Proposition. — *La propriété* Mod′ *satisfait les conditions (i) à (vi) de* ***1.3.1*** *et est locale pour la topologie de Zariski (****1.3.2****.*

Démonstration. — Considérons tout d'abord la propriété Mod. Sa stabilité par raffinement et image inverse est tautologique. Par sous-quotient, cela résulte de l'exactitude du foncteur fibre et du fait qu'un sous-quotient d'une représentation triviale est triviale. Qu'elle soit close et compressible est conséquence immédiate du fait qu'un fermé d'un schéma strictement local est strictement local ou vide. Enfin elle est locale pour la topologie étale (donc, *a fortiori*, pour la topologie de Zariski) car tout ouvert d'un schéma

viii. Plus précisément : *si* $\{t_1, \ldots, t_r\} \subseteq D$ *est un ensemble fini de points fermés, le morphisme* $\pi_1(S_{(0)} \times_S V) \to \pi_1(U)$, *où* $U = D - \{t_1, \ldots, t_r\}$ *et* $V = \mathbf{A}^2_k[y^{-1}] - \{(x, y) : x/y \in t_i\}$ *est* surjectif. Ce fait, également utilisé dans [**Katô & Saitô, 2010**, exemple 2.6.3.1], est à son tour conséquence du résultat suivant : *si* $X \to Y$ *est un morphisme lisse à fibres géométriques connexes, la connexité de* Y *entraîne la connexité de* X. On applique ceci à Y un revêtement étale connexe U' de U et X le produit fibré $U' \times_U W$, où W est un ouvert étale connexe de V induit par un voisinage étale de l'origine dans S.

strictement local T contenant le point fermé est T tout entier. Il résulte de ce qui précède que la propriété Mod' satisfait les conditions (i)-(vii) sauf peut-être la stabilité par extension (iii). Or, lorsque les coefficients des faisceaux sont de torsion inversible sur les schémas considérés, l'action continue des groupes de Sylow locaux est semi-simple de sorte que toute extension de représentations triviales est triviale. □

2.2.7. — Contrairement à Cons (**2.1.2**), la notion de *famille* Mod' est stable par sous-quotient (et extension). Elles sont par contre toutes locales pour la topologie étale. (Pour Cons, on dispose d'un énoncé plus fort : voir **2.1.4**.) Ainsi, d'après la proposition **1.6.3**, une famille est proprement Mod (ou proprement Mod') si et seulement si il en est ainsi localement pour la topologie étale.

***2.2.8. Lemme* (Lemme d'Abhyankar).** — *Soient X un schéma régulier connexe, D un diviseur à croisements normaux et $U = X - D$. Pour tout faisceau $\mathscr{L}$ lisse sur $U = X - D$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. *le prolongement par zéro $j_!\mathscr{L}$ est Mod ;*

ii. *$\mathscr{L}$ est* modéré le long de D *: pour tout point maximal d de D, l'inertie sauvage du corps discrètement valué $\mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{X,d})$ agit trivialement.*

Ce résultat est bien connu. Pour la commodité du lecteur, nous en rappelons brièvement la démonstration.

Esquisse. — Si $j_!\mathscr{L}$ est Mod, le faisceau $\mathscr{L}$ est modéré le long de D : cela résulte de la stabilité par image inverse de Mod et l'observation **2.2.3**. Considérons l'autre implication. Supposant X strictement hensélien, comme il est loisible de le faire, il nous faut vérifier que pour tout point géométrique $\overline{u}$ de X localisé en $u \in X - D$, l'action de $\pi_1(u, \overline{u})$ sur $\mathscr{L}_{\overline{u}}$ se factorise à travers un quotient d'ordre premier à l'exposant caractéristique résiduel $p \geq 1$ de X. Observons qu'il n'est pas nécessairement vrai que le fermé D soit d'égal exposant caractéristique p de sorte que la condition de modération le long de D peut être tautologiquement satisfaite. On dispose cependant du lemme d'Abhyankar usuel selon lequel le faisceau $\mathscr{L}$ est trivialisé par un morphisme fini $X' = X[t_1^{n_1} - f_1, \ldots, t_r^{n_r} - f_r] \to X$ où les f_i sont des équations des composantes irréductibles de D et les n_i sont *premiers à* p. Ceci entraîne aussitôt le résultat attendu. En plus du théorème de pureté de Zariski-Nagata, un point clef dans la démonstration de ce fait est le résultat de descente suivant.

> Soient $X_0 = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma régulier strictement hensélien de caractéristique résiduelle $p > 0$, $D = V(f)$ un diviseur régulier qui n'est pas d'égale caractéristique p et $U_0 = X_0 - D$. Considérons le schéma strictement hensélien régulier $X_1 = X_0[t]/(t^p - f)$. Soit $V_0 \to U_0$ un revêtement étale connexe modérément ramifié le long de D tel que le revêtement $V_1 = V_0 \times_{X_0} X_1$ de $U_1 = U_0 \times_{X_0} X_1$ soit non ramifié sur X_1, c'est-à-dire s'étende en un revêtement étale de X_1. Alors, $V_0 \to U_0$ est non ramifié.

Rappelons l'argument, tiré de [SGA `1 XIII.5.2`]; pour une variante logarithmique, voir p. ex. [**Mochizuki, 1999**, 3.2]. Soit $Y_1 \to X_1$ un revêtement étale prolongeant $V_1 \to U_1$. (Un tel revêtement est unique à un isomorphisme unique près.) Considérons $X_2 = X_1 \times_{X_0} X_1$ muni des deux projections pr et pr′ sur X_1. Notons $u : (\mathrm{pr}^* Y_1)_{|U_2} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{pr}'^* Y_1)_{|U_2}$ la donnée de descente canonique associée au morphisme $V_0 \to U_0$, où U_2 est l'image inverse de U_0 dans X_2. D'après la théorie de la descente, il nous suffit de montrer que cet isomorphisme s'étend à X_2, la condition de cocycle étant alors automatique. Considérons le sous-schéma fermé non vide $P = V(p)$ de X_0, ainsi que ses tirés en arrière, P_1 et P_2. Le morphisme $P_1 \to P_0$ étant *radiciel*, le revêtement $Y_{1|P_1}$ est muni d'une unique donnée de descente v, qui prolonge donc nécessairement la restriction de u au fermé $P_{U_2} = U_2 \times_{X_2} P_2$ de U_2. Le schéma X_2 étant hensélien, l'application de restriction de X_2 à P_2 des morphismes entres deux revêtements étales est une bijection. Ainsi v se relève en un morphisme $w : \mathrm{pr}^* Y_1 \to \mathrm{pr}'^* Y_1$. Le sous-schéma ouvert-fermé de U_2 au-dessus duquel u et $w_{|U_2}$ coïncident contient le fermé P_{U_2}, non vide par hypothèse d'inégale caractéristique. Il est donc égal à U_2, car X_2 est local donc connexe, de sorte que le morphisme w est un isomorphisme qui étend u.

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, hook] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & X_2 \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & \\
P_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & X_1 \arrow[d] & Y_1 \arrow[l, hook'] \\
P_0 \arrow[r, hook] & X_0 &
\end{tikzcd}$$

□

2.2.9. — Considérons maintenant une variante logarithmique du critère de modération précédent s'appuyant sur un théorème de pureté logarithmique (Katô K., cf. [**Mochizuki, 1999**, 3.3]). On ne suppose plus la paire (X, U) régulière mais seulement *torique*. La condition (ii) de modération en les points maximaux du diviseur D garde un sens, car X est normal ([**Katô, 1994**, 4.1] ou [**Gabber & Ramero, 2012**, 7.5.29]). Si un faisceau $\mathscr{L}$ lisse sur U satisfait cette condition, il existe un revêtement étale $U' \to U$, modéré le long de D trivialisant $\mathscr{L}$. Soit X' le normalisé de X dans U' ; le morphisme $X' \to X$ est fini et surjectif. D'après la variante logarithmique du lemme d'Abhyankar (*op. cit.*, 8.3.44), la paire (X', U') est torique et le morphisme de log-schémas $(X', U') \to (X, U)$ est un revêtement log-étale, au sens de *op. cit.*, 8.3.14. Lorsque X est strictement local d'exposant caractéristique résiduel p, le groupe de Galois logarithmique de la paire (X, U) est abélien d'ordre profini premier à p (*op. cit.*, 8.3.42). Il en résulte formellement que le faisceau $j_!\mathscr{L}$ est Mod. Résumons ces observations sous la forme d'un lemme.

***2.2.10. Lemme* (lemme d'Abhyankar logarithmique).** — *Soient (X, U) une paire* torique, *$j : U \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte et $\mathscr{L}$ un faisceau lisse sur U. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. *le prolongement par zéro $j_!\mathscr{L}$ est Mod ;*

ii. *$\mathscr{L}$ est* modéré le long de D.

iii. *il existe un revêtement log-étale $(X', U') \to (X, U)$ tel que $\mathscr{L}_{|U'}$ soit trivial.*

2.3. Constructibilité et modération. —

2.3.1. — Une paire $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$, où $\mathscr{F}$ est un faisceau étale de $\mathbf{Z}/n$-modules sur un schéma nœthérien X dont $\mathfrak{X}$ est une stratification, est dite **constructible-modérée**, en abrégé CM, si elle est constructible (Cons, **1.2.3**) et modérée sur $X[1/n]$ (Mod′, **2.2.4**). Il résulte des propositions **2.1.1** et **2.2.6** que la propriété CM est dévissable et locale pour la topologie de Zariski.

2.3.2. Proposition. — *Tout faisceau abélien constructible sur un schéma nœthérien excellent est finiment* CM *et*, a fortiori, *proprement* CM.

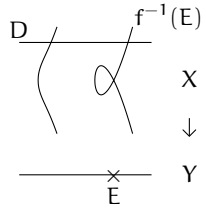
Démonstration. — Il suffit de considérer les faisceaux de la forme $i_* j_! \mathscr{L}$, où $\mathscr{L}$ est lisse, j est une immersion ouverte d'image dense et i une immersion fermée. La proposition **1.6.2** nous ramène au cas où i est l'identité. Notons U (resp. X) la source (resp. le but) de j, et choisissons un revêtement étale $U' \to U$ trivialisant le faisceau $\mathscr{L}$. Le normalisé X' de X dans U' est fini sur X et le faisceau $(j_! \mathscr{L})_{|X'}$ est modéré. □

2.3.3. Théorème. — *La propriété* CM *est* nodulaire, χ-bornée, pure *et* b-bornée.

La démonstration de ce théorème, bien connu des spécialistes, occupe les quatre prochains paragraphes.

2.3.4. Nodularité. — Vérifions que la propriété CM est nodulaire (cf. §**1.4.2**, dont on reprend les notations).

On fixe un schéma régulier Y, un diviseur à croisements normaux E de Y de complémentaire V, et une courbe nodale $f : X \to Y$ adaptée à une paire d'ouverts (U, V) où $j : U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte dense. Nous allons montrer que pour tout entier $n \geq 1$ inversible sur X et tout faisceau lisse de $\mathbf{Z}/n$-modules $\mathscr{L}$ sur U tel que $j_! \mathscr{L}$ soit modéré, le complexe $\mathsf{R}f_*(j_! \mathscr{L})$ est :



i. constructible et adapté à la stratification $V \sqcup E$ de Y ;

ii. modéré.

Vérifions (i). La constructibilité est connue : le morphisme f est propre. D'autre part, il résulte du théorème de changement de base propre que ce complexe est nul au-dessus de E : l'ouvert U ne rencontre pas $f^{-1}(E)$. On peut donc dorénavant supposer que V est égal à Y tout entier ; le morphisme f est alors propre et lisse et $U = X - D$. La paire $(f, j_! \mathscr{L})$ est localement acyclique hors du fermé D de X. Ce diviseur étant fini sur Y, la cohomologie des fibres de Milnor — qui est l'obstruction à la lissité de ces faisceaux image directe — commute aux changements de base (P. Deligne, cf. p. ex. [**Orgogozo, 2006**, 6.3]). On peut donc supposer également que Y est un trait hensélien, auquel cas la conclusion résulte du résultat d'acyclicité [SGA `7 XIII.2.1.11`]. (On trouve le même argument dans [**Katz, 1980**, 4.7.1.ii]. Voir aussi [**Laumon, 1981b**, théorème 5.1.1] pour le lien (numérique) entre le défaut d'acyclicité et la ramification sauvage.)

Vérifions (ii). Soit $\pi : U' \to U$ comme en **2.2.10** (iii) et soit $\mathscr{G}$ le faisceau conoyau de l'injection $\mathscr{L} \hookrightarrow \pi_* \pi^* \mathscr{L}$. Le faisceau $j_! \mathscr{G}$ est modéré car il satisfait le critère que nous venons d'appliquer à $\mathscr{L}$. La formule de transitivité des images directes et un dévissage classique ([SGA `4½ finitude.A.4`]) nous ramènent à démontrer la modération du complexe $\mathsf{R}f_*(j_! \mathbf{Z}/n)$, où n est un entier inversible sur Y et où f est le morphisme sous-jacent à un morphisme log-lisse $(X, U) \to (Y, V)$. Rappelons que ce complexe est nul au-dessus de E et lisse sur V. La paire (Y, V) étant régulière, il résulte du lemme d'Abhyankar usuel **2.2.8** que l'on peut supposer Y être un trait strictement hensélien. Notons η son point générique, de sorte que $V = \{\eta\}$. On veut montrer que l'action de $\pi_1(\eta, \overline{\eta})$ sur le $\mathbf{Z}/n$-module $H^*_c(U_{\overline{\eta}}, \mathbf{Z}/n)$ est modérée. Par lissité de U sur η et par dualité de Poincaré, il suffit de démontrer la modération de la cohomologie sans support. Ce dernier résultat est connu : si, plus généralement, (X, M_X) un log-schéma fin et saturé, propre et log-lisse sur (Y, η), et l'ouvert de trivialité $U = (X, M_X)_{tr}$ est contenu dans X_η, alors l'action $\pi_1(\eta, \overline{\eta})$ sur les $H^i(U_{\overline{\eta}}, \mathbf{Z}/n)$ est modérée, cf. [**Illusie, 2002**, 8.4.3]. Le point clef de la démonstration est un théorème d'acyclicité logarithmique [**Nakayama, 1998**, 3.2], qui étend le résultat de modération [**Rapoport & Zink, 1982**, 2.23]. (Pour un résultat semblable, voir aussi [**Katô & Saitô, 2010**, 1.1.6].)

2.3.5. — Vérifions que la propriété CM est χ-bornée (**1.5.3**). Le résultat à démontrer étant clair en degré cohomologique 0 et, par dualité, en degré 2. On peut donc utiliser la formule (virtuelle) de Grothendieck-Ogg-Šafarevič ([SGA `5 X.7.1`]) dans le cas modéré (voir aussi [**Šafarevič, 1961**, théorème 3, p. 337] et [**Ogg, 1962**, prop. 6, p. 199]).

2.3.6. Pureté. — Vérifions que la propriété CM est pure (cf. §**1.4.6**, dont on reprend les notations). Fixons une paire régulière (X, U) et notons $\mathfrak{D}$ la stratification de X définie par la fonction semi-continue supérieurement associant à un point de X le nombre de branches de $D = X - U$ y passant. Nous allons montrer que pour tout entier $n \geq 1$ inversible sur X et tout faisceau lisse de $\mathbf{Z}/n$-modules $\mathscr{L}$ sur U tel que $j_! \mathscr{L}$ soit modéré, le complexe $\mathsf{R}j_* \mathscr{L}$ est :

i. constructible et adapté à la stratification $\mathfrak{D}$;

ii. modéré.

On peut supposer X strictement local, de sorte que le diviseur D est réunion transverse de diviseurs lisses $D_i = \mathrm{div}(t_i)$, où les $t_1, \ldots, t_b$ sont des éléments de $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$. Pour chaque entier $r \geq 1$, posons $X_r = X[t_i^{1/r}]_{1 \leq i \leq b}$; cf. [**Deligne, 1980**, §1.7.8]. Chaque X_r est régulier ([SGA `1 XIII.4.1`]) et l'image inverse U_r de U en est le complémentaire d'un diviseur (strictement) à croisements normaux D_r.

Notons a_r le morphisme fini $X_r \to X$, b_r le morphisme fini étale $U_r \to U$ qui s'en déduit par restriction à U et j_r l'immersion ouverte de U_r dans X_r. Par hypothèse (**2.2.8**, démonstration, ou [**Deligne, 1980**, §1.7.8]), il existe un entier r premier à la caractéristique résiduelle de X tel que l'image inverse $\mathscr{L}_r = {b_r}^* \mathscr{L}$ soit un faisceau constant, de fibre M. Le morphisme d'adjonction $\mathscr{L} \hookrightarrow b_{r*} \mathscr{L}_r$ étant injectif de conoyau lisse et modéré le long de D, il suffit d'établir (i) et (ii) pour le faisceau $b_{r*} \mathscr{L}_r$. Par transitivité des images directes, on a donc l'égalité $\mathsf{R}j_*(b_{r*} \mathscr{L}_r) = a_{r*}\big(\mathsf{R}j_{r*} \mathbf{Z}/n \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbf{Z}/n} M\big)$.

$$\begin{tikzcd} \underline{M} = \mathscr{L}_r \arrow[d, dash] & U_r \arrow[r, hook, "j_r"] \arrow[d, "b_r"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_r \arrow[d, "a_r"] \\ \mathscr{L} & U \arrow[r, hook, "j"] & X \end{tikzcd}$$

Par pureté cohomologique absolue (O. Gabber ; cf. p. ex. [**Riou, 2009**, corollaire 3.1.3]), le complexe $\mathsf{R}j_{r*} \mathbf{Z}/n$ est constructible adapté à $\mathfrak{D}_r$ et modéré. Mieux : il est constant sur chaque strate. Observons que la restriction du morphisme a_r à chaque strate de $\mathfrak{D}$ étant composée d'un morphisme fini étale (galoisien de groupe d'ordre premier à la caractéristique résiduelle de X) et

d'un homéomorphisme universel. Il en résulte que l'image directe par a_r d'un faisceau $\mathsf{Cons}_{\mathfrak{D}_r}$ (resp. modéré) est $\mathsf{Cons}_{\mathfrak{D}}$ (resp. modérée). (Voir aussi [**Gabber & Loeser, 1996**, lemme 4.3.2].)

2.3.7. — Vérifions que la propriété CM est b-bornée (cf. §**1.5.4**, dont on reprend les notations). Soient X un schéma régulier strictement local, U le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux $D = \bigcup_{i=1}^{b} D_i$ et $\mathscr{L}$ un faisceau lisse de $\mathbf{Z}/n$-modules sur U, où $n \geq 1$ est inversible sur X. On suppose $\mathscr{L}$ modéré le long de D. Comme rappelé ci-dessus, il existe un entier $r \geq 1$ tel que l'image inverse $\mathscr{L}_r = b_r^*\mathscr{L}$ soit un faisceau constant, de fibre M. Le revêtement $U_r \to U$ étant galoisien de groupe $G_r = \mu_{r,X}^b$, où $\mu_{r,X}$ est le groupe cyclique d'ordre r des racines r-ièmes de unité dans $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, le complexe $R\Gamma(U, \mathscr{L})$ est isomorphe à $R\Gamma(G_r, R\Gamma(U_r, \mathscr{L}_r))$. La description explicite[ix] de la cohomologie du groupe $(\mathbf{Z}/r)^b$ nous ramène au cas où $\mathscr{L}$ est constant. Par pureté, $R\Gamma(U, \mathscr{L}) = \left(\Lambda^\star \bigoplus_{i=1}^{b} \mathbf{Z}/n_{|D_i}(-1)\right) \otimes^L M$, et la conclusion en résulte.

*2.3.8. **Remarque**.* — Au cours de la démonstration de **2.3.4**, nous avons vu que la nodularité d'une propriété P se ramène au cas particulier où la base Y est un *trait* strictement local lorsque P est **abhyankarienne**, c'est-à-dire si :

> pour tout schéma nœthérien régulier X, tout diviseur à croisements normaux D et tout faisceau abélien $\mathscr{L}$ lisse sur U, la paire $j_{U!}(\mathscr{L}, \{U\})$ est P dès lors que ses images inverses par les morphismes $X_{(d)} \to X$ le sont pour chaque point géométrique d de X localisé en un point maximal de D.

2.4. Unipotence. —

2.4.1. — Soient X un schéma nœthérien, $\mathscr{F}$ un faisceau étale sur X et $\mathfrak{X} = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une stratification de X. On dit que la paire $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$ est **localement unipotente**, en abrégé Unip, si pour chaque X-schéma strictement hensélien T, et pour chaque strate T_α de $\mathfrak{T} = \mathfrak{X}_{|T}$, le faisceau $\mathscr{F}_{|T_\alpha}$ est extension de faisceaux *constants*. (Cette définition est tirée de [**Pink, 1995**] ; voir aussi [**Lê, 1982**, 3.1.2] pour une variante quasi-unipotente en caractéristique nulle.)

2.4.2. — Si un faisceau lisse de torsion $\mathscr{L}$ sur un schéma nœthérien connexe U est extension de faisceaux constants, il existe un entier N tel que pour chaque $g \in \pi_1(U, \overline{u})$ — où $\overline{u}$ est un point géométrique de U — l'endomorphisme $(g-1)^N$ de $\mathscr{L}_{\overline{u}}$ est *nul*. La réciproque est vraie et résulte immédiatement du théorème de Kolchin (cf. p. ex. [**Serre, 1965**, V.§3]) : un groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps constitué d'éléments unipotents est trigonalisable.

*2.4.3. **Proposition**.* — *La propriété* Unip *satisfait les conditions (i) à (vi) de **1.3.1** et est locale pour la topologie de Zariski (**1.3.2**.*

Démonstration. — Vérifions la compressibilité, les autres propriétés étant de vérification immédiate. Si X est la réunion de fermés $F_1, \ldots, F_n$ munis de stratifications $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ et $\mathscr{F}$ est un faisceau tel que $\mathscr{F}_{|F_i}$ soit $\mathsf{Unip}_{\mathfrak{F}_i}$ pour chaque i, le faisceau $\mathscr{F}$ est $\mathsf{Unip}_{\mathfrak{X}}$ pour toute stratification $\mathfrak{X}$ dont les strates sont entièrement contenues dans une strate de l'un des F_i. Une telle stratification existe. □

2.4.4. — Une paire $(\mathscr{F}, \mathfrak{X})$, où $\mathscr{F}$ est un faisceau étale de $\mathbf{Z}/n$-modules sur un schéma nœthérien X dont $\mathfrak{X}$ est une stratification, est dite **constructible-unipotente**, en abrégé CU, si cette paire est constructible (Cons, **1.2.3**) et localement unipotente sur $X[1/n]$ (Unip', **2.4.1**). La propriété CU est dévissable et locale pour la topologie de Zariski.

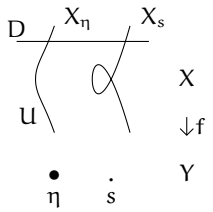
2.4.5. Lemme d'Abhyankar unipotent. — Vérifions que l'unipotence (locale) satisfait un lemme d'Abhyankar : un faisceau lisse $\mathscr{L}$ sur le complémentaire U d'un diviseur à croisements normaux D dans un schéma nœthérien régulier strictement local sur lequel les groupes d'inertie en les points maximaux de D agissent à travers un quotient unipotent est un faisceau unipotent. Or, un tel faisceau étant nécessairement modéré le long de D, le groupe de monodromie (l'image de $\pi_1(U)$) est abélien et engendré par les groupes de monodromie locaux en les points maximaux. Un groupe abélien engendré par des éléments unipotents est unipotent. CQFD.

(Voir aussi [**Kashiwara, 1981**, 3.1] pour un énoncé de pureté beaucoup plus fort dans le cas analytique.)

*2.4.6. **Proposition**.* — *La propriété* CU *est* nodulaire *(**1.4.2**).*

Démonstration. — L'énoncé de constructitibilité étant acquis (par modération), on s'intéresse uniquement à l'unipotence. Comme observé en **2.3.8**, il suffit de vérifier l'énoncé **1.4.2**, dont nous reprenons les notations, dans le cas particulier où Y est un *trait* strictement hensélien.

On fixe donc un schéma trait strictement hensélien Y, de points s et η, une courbe nodale $f : X \to Y$ adaptée à (U, η), où $j : U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte dense. Nous allons montrer que pour tout entier $n \geq 1$ inversible sur X, tout faisceau lisse *localement unipotent* de $\mathbf{Z}/n$-modules $\mathscr{L}$ sur U, et chaque $\alpha \in \{0, 1, 2\}$, l'action de $\pi_1(\eta, \overline{\eta})$ sur la fibre $H^\alpha(X_{\overline{\eta}}, j_{\eta!}\mathscr{L})$ de $R^\alpha f_*(j_!\mathscr{L})$ en un point générique géométrique $\overline{\eta}$ est unipotente, où l'on note j_η l'immersion ouverte de U dans X_η. Le morphisme f étant propre, on a un isomorphisme Galois-équivariant $H^\alpha(X_{\overline{\eta}}, j_{\eta!}\mathscr{L}) = H^\alpha(X_s, \Psi_f(j_{\eta!}\mathscr{L}))$. Il suffit donc de montrer que l'action de l'inertie sur le complexe $\Psi_f(j_{\eta!}\mathscr{L})$ est unipotente.



Le problème étant maintenant local et le faisceau $\mathscr{L}$ étant localement unipotent, il résulte de la t-exactitude du foncteur $\Psi_f \circ j_{\eta!}$ que l'on peut supposer $\mathscr{L} = \mathbf{Z}/n$, où n est inversible sur Y. Le triangle distingué

$$j_{\eta!}\mathbf{Z}/n \to \mathbf{Z}/n \to i_{\eta *}\mathbf{Z}/n \xrightarrow{+1}$$

ix. On rappelle que si $G = \langle \sigma \rangle$ est un groupe cyclique et V un G-module, la cohomologie de G à valeurs dans V est représentée par le complexe

$$0 \to V \xrightarrow{\sigma - 1} V \xrightarrow{t} V \xrightarrow{\sigma - 1} V \xrightarrow{t} \cdots,$$

où $t = \sum_{g \in G} g$, et le premier V est placé en degré 0. Voir par exemple [**Serre, 1968**, VIII.§4].

de faisceaux sur X_η, où i_η est l'immersion fermée de D_η dans X_η, nous ramène à l'étude des complexes $\Psi_f(\mathbf{Z}/n)$ et $\Psi_f(i_{\eta *}\mathbf{Z}/n)$. Ce dernier est isomorphe à $i_{s*}\mathbf{Z}/n$, où i est l'immersion fermée de D dans X, car D est étale sur Y et $\Psi_f \circ i_{\eta *} \xrightarrow{\sim} i_{s*}\Psi_{f\circ i}$ ([SGA 7 XIII.1.3.6.1]). Enfin, il est bien connu que l'action de l'inertie sur $\Psi_f(\mathbf{Z}/n)$ est unipotente d'échelon 2 (cf. p. ex. [**Illusie, 2004**, §3.3]). □

2.4.7. Proposition. — *La propriété* CU *est* pure *(**1.4.6**).*

Démonstration. — Soient $j : U \hookrightarrow X$ comme dans *loc. cit.* et $\mathfrak{D}$ la stratification définie en **2.3.6** par le nombre de branches de $D = X - U$. Vérifions que pour chaque entier $n \geq 1$ inversible sur X et chaque faisceau lisse *unipotent* $\mathscr{L}$ de $\mathbf{Z}/n$-modules sur U, le complexe $\mathsf{R}j_*\mathscr{L}$ est $\mathsf{CU}_{\mathfrak{D}}$. Par t-exactitude du foncteur $\mathsf{R}j_*$, on peut supposer $\mathscr{L} = \mathbf{Z}/n$ (quitte à remplacer n par un diviseur). Il résulte du théorème de pureté cohomologique (cf. *loc. cit.*) que les faisceaux $\mathsf{R}^\alpha j_*\mathbf{Z}/n$ sont $\mathsf{CU}_{\mathfrak{D}}$. □

2.5. Applications. — Commençons par énoncer le théorème d'uniformité **1.7.2** pour la modération ou l'unipotence, dans le cas particulier où le morphisme q est l'identité, l'énoncé du cas général étant laissé au lecteur. Comme signalé dans l'introduction, le théorème ci-dessous est connu d'O. Gabber de longue date ([**Gabber, 2007**]).

2.5.1. Théorème. — *Soient Y un bon schéma, $\bar{f} : X \to Y$ un morphisme propre, $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte et $\mathfrak{U}$ une stratification de U. Notons f le morphisme composé $\bar{f} \circ j$. Il existe une* altération $r : Y' \to Y$ *et une stratification $\mathfrak{Y}$ (resp. $\mathfrak{Y}'$) de Y (resp. Y') tels que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Z}/n$-modules sur $U[1/n]$ supposé :*
*— constructible adapté à $\mathfrak{U}[1/n]$ (au sens de **1.1.1**), et*
*— de prolongement par zéro à $X[1/n]$ modéré au sens de **2.2.1** (resp. localement unipotent relativement à $\mathfrak{U}[1/n]$, **2.4.1**), alors le complexe image directe de $\mathscr{F}$ par $f[1/n]$ est constructible adapté à $\mathfrak{Y}[1/n]$ et son image inverse par $r[1/n]$ est modérée (resp. localement unipotente relativement à $\mathfrak{Y}'[1/n]$).*
De plus, il existe une constante C ne dépendant que de $\bar{f}$ et j telle que les fibres des faisceaux $\mathsf{R}^\alpha f[1/n]_*\mathscr{F}$ soient extensions itérées au plus C fois de sous-quotients de fibres de $\mathscr{F}$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "\bar{f}"] & \\ \mathfrak{U} & Y \arrow[r, dashed, "r"] & Y' \\ & \mathfrak{Y} & \mathfrak{Y}' \end{tikzcd}$$

2.5.2. — On retrouve en particulier des théorèmes de lissité générique uniforme pour les images directes (comparer avec [**Katz & Laumon, 1985**, 3.3.2]) et [**Illusie, 2010a**, §2]).

2.5.3. Remarque. — On aurait pu envisager d'autres conditions de constructibilité et modération uniformes, en demandant par exemple l'existence d'une stratification $\mathfrak{Y} = (Y_\alpha)$ et de revêtements communs $Y'_\alpha \to Y_\alpha$ trivialisant les faisceaux. Cette condition est mal adaptée à l'étude de la cohomologie, ne serait-ce parce que la famille des tordus à la Tate $(\mu_\ell)_{\ell \neq p}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p)$ ne satisfait pas ce critère, l'ensemble des ordres de p modulo ℓ n'étant pas borné. Ce phénomène de torsion n'est d'ailleurs pas le seul expliquant la non stabilité de cette notion de constructibilité uniforme par image directe propre. On peut par exemple construire (modulo HRG, via une variante de la conjecture d'Artin, cf. [**Roskam, 2002**]) une courbe elliptique E sur $\mathbf{F}_2$ telle que le groupe de Galois absolu de $\mathbf{F}_2$ agisse sur $\mathsf{H}^1(E_{\overline{\mathbf{F}_2}}, \mathbf{F}_\ell)$ à travers un quotient d'ordre exactement $\ell^2 - 1 = (\ell + 1) \cdot \#\mu_\ell(\overline{\mathbf{F}_2})$ pour une infinité de $\ell \neq 2$. Voir aussi l'exemple de O. Gabber ci-dessus (**2.2.5**).

2.5.4. — Soient X un schéma propre et lisse sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p \geq 0$, D un diviseur à croisements normaux et U l'ouvert complémentaire. Il résulte du théorème précédent qu'il existe une constante $C_{X,D}$ telle que pour tout $\ell \neq p$ et tout $\mathbf{F}_\ell$-faisceau lisse $\mathscr{L}$ sur U, modéré le long de D, on ait $h^i_c(U, \mathscr{L}) \leq C_{X,D} \cdot \mathrm{rang}(\mathscr{L})$. Comme l'a expliqué Claude Sabbah à l'auteur, on peut en donner la démonstration suivante lorsque k est le corps $\mathbf{C}$ de nombres complexes. Soit T un voisinage tubulaire *ouvert* de $D(\mathbf{C})$ tel que l'inclusion du *compact* $K = X(\mathbf{C}) - T$ dans $U(\mathbf{C})$ soit une équivalence d'homotopie ; le groupe de cohomologie $\mathsf{H}^i_{\mathrm{Betti},c}(U(\mathbf{C}), \mathscr{L})$ est donc isomorphe à $\mathsf{H}^i_{\mathrm{Betti},c}(K, \mathscr{L})$. Par compacité, il existe un recouvrement *fini* V_i de K par des ouverts simplement connexes. Il en résulte que la cohomologie de $U(\mathbf{C})$ à valeurs dans $\mathscr{L}$ est l'aboutissement d'une suite spectrale dont les objets de la première « page » ne dépendent que des V_i et du rang de $\mathscr{L}$. On conclut par le théorème de comparaison Betti-étale d'Artin-Grothendieck. Il serait sans doute intéressant d'adapter cet argument au cas d'un corps quelconque à l'aide d'un voisinage tubulaire adéquat.

2.5.5. — Les théorèmes de constructibilité uniforme peuvent entraîner des résultats d'indépendance. Citons le résultat suivant, qui résulte de [**Katz & Laumon, 1985**]. (Voir aussi la prépublication de Lars Brünjes et Christian Serpé, « Étale and motivic cohomology and ultraproducts of schemes », théorème 3.4.)

2.5.6. Théorème. — *Soient n et d des entiers. Il existe une constante $C_{n,d}$ telle que pour tout corps algébriquement clos k de caractéristique $p > C_{n,d}$ et toute hypersurface H de degré d de $\mathbf{P}^n_k$, on ait l'égalité des nombres de Betti $b_i(H, \mathbf{Q}_\ell) = b_i(H, \mathbf{Q}_{\ell'})$ pour tout entier i et toute paire de nombres premiers ℓ et ℓ' distincts de p.*

Il serait intéressant de savoir si l'on peut, ne serait-ce qu'en principe, déterminer explicitement $C_{n,d}$.

Démonstration. — Soient Y le $\mathbf{Z}$-schéma de type fini paramétrant les hypersurfaces de degré d de $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Z}}$ et $f : X \to Y$ l'hypersurface universelle. D'après **2.5.1**), il existe une stratification $\mathfrak{Y} = (Y_\alpha)$ de Y telle que pour chaque indice i et chaque nombre premier ℓ, les faisceaux $\mathscr{B}^i_\ell = \mathsf{R}^i f_*\mathbf{Q}_\ell$ soient lisses sur les $Y_\alpha[1/\ell]$. (L'énoncé [**Katz & Laumon, 1985**, 3.3.2], d'après lequel on a ce résultat quitte à se retreindre à un ouvert dense de $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, suffirait.) Quitte à raffiner la stratification, on peut supposer les Y_α *irréductibles*. Quitte à se restreindre à un ouvert dense de $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ — ce qui revient à exclure un nombre fini de caractéristiques résiduelles — et rétrécir Y en conséquent, on peut supposer que chaque Y_α a un point de caractéristique nulle. Soit maintenant h_p un point géométrique de Y, correspondant à une hypersurface H_p sur un corps d'exposant caractéristique p. Soient ℓ et ℓ' deux nombres premiers distincts de p. Par hypothèse, il existe un α tel que h_p soit localisé en Y_α et un point géométrique h_0 de Y_α de caractéristique nulle

(correspondant à une hypersurface H_0). Les faisceaux $\mathscr{B}^i_\ell$ et $\mathscr{B}^i_{\ell'}$ étant lisses sur le schéma (nœthérien) *connexe* $Y_\alpha[1/\ell]$, le choix d'un chemin $h_0 \rightsquigarrow h_p$ induit des isomorphismes

$$\mathscr{B}^i_{\ell\, h_p} \simeq \mathscr{B}^i_{\ell\, h_0} \text{ et } \mathscr{B}^i_{\ell'\, h_p} \simeq \mathscr{B}^i_{\ell'\, h_0}$$

entre les fibres. En prenant le rang, on en déduit les égalités $b_i(H_p, \mathbf{Q}_\ell) = b_i(H_0, \mathbf{Q}_\ell)$ et $b_i(H_p, \mathbf{Q}_{\ell'}) = b_i(H_0, \mathbf{Q}_{\ell'})$. Comme d'autre part on a $b_i(H_0, \mathbf{Q}_\ell) = b_i(H_0, \mathbf{Q}_{\ell'})$, par comparaison avec la cohomologie de Betti, on a bien le résultat attendu. □

2.5.7. — Pour référence ultérieure, signalons le corollaire suivant du théorème **2.5.1**. Cet énoncé est conjecturé dans un courriel de Sebastian Petersen à Luc Illusie du 2012-7-31, et démontré (non publié) par Gebhard Böckle, Wojciech Gajda et S. Petersen lorsque k est un corps fini en utilisant les travaux de Laurent Lafforgue (conjecture de Langlands).

2.5.8. Proposition. — *Soit k un corps parfait, K/k une extension de type finie et X_K un K-schéma algébrique. Il existe une extension finie étale K'/K, un k-schéma propre et lisse Y' de corps des fractions K' et un diviseur à croisements normaux D' dans Y' tels que pour chaque nombre premier ℓ inversible sur k,*

i. *l'action du groupe de Galois $G_{K'}$ sur $H^*(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_\ell)$ se factorise à travers le groupe fondamental* modéré $\pi_1^{\mathrm{mod}}(Y', D')$ *;*

ii. *pour chaque point maximal d' de D', l'action sur $H^*(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_\ell)$ du groupe d'inertie correspondant soit* unipotente.

Démonstration. — Par déploiement, il existe un k-schéma de type fini U de corps des fractions K, et un morphisme de type fini $X \to V$ de fibré générique X_K. Soit Y une k-compactification de V et notons $f : X \to Y$ le morphisme composé. Il résulte du théorème **2.5.1** qu'il existe une altération $r : Y' \to Y$ et une stratification $\mathfrak{Y}'$ de Y' telle que les faisceaux $r^* R^i f_* \mathbf{Q}_\ell$, pour $\ell \neq \mathrm{car.}(k)$ et $i \in \mathbf{N}$, soient constructibles, modérés et localement unipotents relativement à $\mathfrak{Y}'$. Quitte à rétrécir V, on peut supposer ces faisceaux lisses sur cet ouvert et que $V' = r^{-1}(V)$ est la strate ouverte (dense) de Y'. Admettons momentanément que l'on peut supposer l'altération r génériquement étale. D'après [**de Jong, 1996**, 4.1], on peut également supposer le morphisme $Y' \to \mathrm{Spec}(k)$ lisse et l'ouvert V' être le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux D'. CQFD. Vérifions maintenant le fait admis : toute famille uniformément modérée (resp. rendue localement unipotente, relativement à une stratification) par une altération, l'est aussi par une altération *génériquement étale*. En effet, toute altération $Y' \to Y$ se décompose en $Y' \to Y'' \to Y$, où $Y'' \to Y$ est une altération génériquement étale et $Y' \to Y''$ est un morphisme fini radiciel[x] Or, toute famille modérée par Y' (resp. localement unipotente relativement à une stratification) est modérée par Y'' (resp. localement unipotente) : le morphisme de Frobenius induit une équivalence entre les sites étales. □

3. Compléments

3.1. Majorations uniformes des nombres de Betti modulo ℓ de schémas algébriques. — Dans ce paragraphe, indépendant des précédents, on considère des schémas de type fini sur un corps algébriquement clos k d'exposant caractéristique $p \geq 1$. Les résultats suivants étant conséquence immédiate du théorème **2.5.1**, nous nous contentons d'esquisser les démonstrations.

3.1.1. Lemme. — *Soit X un k-schéma propre. Il existe une constante C_X telle que pour tout nombre premier $\ell \neq p$ et tout $\mathbf{F}_\ell$-faisceau lisse $\mathscr{L}$ sur X, on ait*

$$\dim_{\mathbf{F}_\ell} H^i(X, \mathscr{L}) \leq C_X \cdot \mathrm{rang}(\mathscr{L}).$$

Démonstration. — D'après [**de Jong, 1996**], il existe un hyperrecouvrement propre de X par des k-schémas projectifs et lisses. La suite spectrale de descente montre que l'on peut donc supposer X projectif et lisse sur k. On procède alors par récurrence. Le cas de la dimension 1 est connu. Si X est de dimension d, il résulte de la dualité de Poincaré et du théorème de section hyperplane, c'est-à-dire la bijectivité (resp. injectivité) de $H^i(X, \mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} H^i(X \cap H, \mathscr{L})$ si $i < d-1$ (resp. $i = d-1$), où $X \cap H$ est une section hyperplane lisse, que seul le cas $i = d$ ne résulte pas immédiatement de l'hypothèse de récurrence. On utilise alors le lemme ci-dessous (cas de χ). □

3.1.2. Lemme. — *Soit X un k-schéma propre et lisse. Il existe un constante C_X telle que $|\chi(X, \mathscr{L})| \leq C_X \cdot \mathrm{rang}(\mathscr{L})$ pour tout nombre premier $\ell \neq p$ et tout $\mathbf{F}_\ell$-faisceau lisse $\mathscr{L}$.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur $\dim(X)$. Pour une courbe, c'est un corollaire de l'égalité $\chi(X, \mathscr{L}) = \mathrm{rang}(\mathscr{L}) \cdot \chi(X)$. En général, considérons un diagramme $\mathbf{P}^1_k \leftarrow X' \to X$ où $X' \to X$ est birationnel et $X' \to \mathbf{P}^1_k$ est un pinceau de Lefschetz. Par récurrence, il suffit de démontrer le résultat pour X' car si F est un fermé de X, on a $\chi(X, \mathscr{L}) = \chi_c(U, \mathscr{L}) + \chi(F, \mathscr{L})$ et de même pour X'. On peut donc supposer $X = X'$. D'après la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič sur $\mathbf{P}^1_k$ et l'égalité $\chi(X, \mathscr{L}) = \chi(\mathbf{P}^1, Rf_*\mathscr{L})$, il suffit de démontrer les faits suivants.

- Les $R^i f_* \mathscr{L}$ sont modérés. Cela résulte de Picard-Lefschetz.
- Les rangs génériques des $R^i f_* \mathscr{L}$ sont bornés, linéairement, indépendamment de $\mathscr{L}$. Cela résulte de l'hypothèse de récurrence.
- Pour tout i et tout point géométrique singulier t, l'entier $h^i(X_t, \mathscr{L})$ — rang de la fibre de $R^i f_* \mathscr{L}$ en t — est borné, linéairement, indépendamment de $\mathscr{L}$. Cela résulte du fait que l'écart entre $h^i(X_t, \mathscr{L})$ et $h^i(X_\eta, \mathscr{L})$ est contrôlé par un objet local, les cycles évanescents, qui ne dépend que du rang : $H^i(\Psi(\mathscr{L})_{x_t}) \simeq H^i(\Psi(\mathbf{F}^r_\ell)_{x_t})$ où $h^i(\Psi(\mathbf{F}_\ell)_{x_t}) \leq 1$.

□

x. Si, localement, $Y' \to Y$ est donné par $A \hookrightarrow B$, considérer la factorisation $A \hookrightarrow A[B^{p^n}] \hookrightarrow B$. Cette construction se recolle et, pour n grand, l'extension de $\mathrm{Frac}(A)$ ainsi obtenue est étale (cf. p. ex. **Bourbaki**, A.V.§7.n°7, cor. 2).

3.1.3. Proposition. — *Soit* X *un* k*-schéma séparé de type fini. Il existe une constante* C_X *telle que pour tout nombre premier* $\ell \neq p$ *et tout entier* i *on ait*

$$\dim_{\mathbf{F}_\ell} H^i_?(X, \mathbf{F}_\ell) \leq C_X,$$

où $? \in \{\emptyset, c\}$.

Ce résultat est également démontré dans **[Illusie, 2010a**, § 1] par une méthode semblable (utilisation d'altérations) mais faisant, comme dans **[Tomašić, 2004]**, appel au théorème susmentionné d'O. Gabber. (La méthode présentée ici est géométrique au sens où elle ne repose pas sur l'hypothèse de Riemann sur les corps finis ; il est donc plus aisé d'envisager sa transposition dans d'autres théories cohomologiques.)

Démonstration. — Par le théorème des altérations et descente cohomologique, on peut supposer que X est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans un schéma lisse. Le cas lisse et $? = c$ se ramène, par récurrence sur la dimension (par la suite exacte usuelle), au cas propre et lisse, déjà traité. Le cas lisse et $? = \emptyset$ se ramène au cas $? = c$ par dualité de Poincaré. □

3.1.4. Remarque. — Qu'il soit possible de démontrer un énoncé comme **3.1.3**, « motivique » en un sens faible, est conséquence du fait qu'à des fins de *majorations* uniformes en ℓ, il n'est pas nécessaire de contrôler les différentielles apparaissant dans les suites spectrales de descente généralisant le calcul « à la Čech » de la cohomologie. Le caractère motivique des différentielles spectrales semble par contre crucial pour résoudre le problème plus fin de l'*indépendance* de ℓ ; voir par exemple **[de Jong, 1996**, introduction]. On sait cependant que la caractéristique d'Euler-Poincaré ℓ-adique d'un schéma algébrique X sur un corps algébriquement clos k est indépendante du nombre premier ℓ, supposé distinct de la caractéristique de k. Si $k = \overline{\mathbf{F}_q}$ et $X = X_0 \otimes_{\mathbf{F}_q} k$, cela résulte des égalités $\deg Z(X_0/\mathbf{F}_q) = -\chi_c(X, \mathbf{Q}_\ell)$ — conséquence de la formule des traces de Grothendieck — et $\chi_c(X, \mathbf{Q}_\ell) = \chi(X, \mathbf{Q}_\ell)$ **[Laumon, 1981a]** ; cf. **[Illusie, 2006**, §1] pour une discussion plus approfondie. Comme expliqué en [SGA $4\frac{1}{2}$ `[Rapport, §4.11]`], il existe un complexe borné de $\mathbf{Z}_\ell$-modules libres de type fini K tel que $K \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}/\ell^n$ soit quasi-isomorphe à $R\Gamma_c(X, \mathbf{Z}/\ell^n)$ pour chaque entier $n \geq 1$. (Cela résulte de la perfection de ces complexes, cf. *op. cit.*, §4.9.) Il en résulte que $\chi_c(X, \mathbf{Q}_\ell) = \chi_c(X, \mathbf{F}_\ell)$ pour chaque ℓ inversible sur k[xi]. En conséquence, les entiers relatifs $\chi_c(X, \mathbf{F}_\ell)$ sont également indépendants de ℓ.

3.1.5. Remarque. — Comme l'a remarqué O. Gabber, il résulte également du théorème des altérations que pour X *propre* et lisse sur k, mais non nécessairement projectif, les $\mathbf{Z}_\ell$-modules $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)$ sont presque tous sans torsion. La lissité de X permet de construire et utiliser un morphisme *trace*.

Références

[Berthelot, 1997] Berthelot, P. (1997). Altérations de variétés algébriques (d'après A. J. de Jong). *Astérisque*, (241), Exp. No. 815, 5, 273–311. Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96. ↑2

[de Jong, 1996] de Jong, A. J. (1996). Smoothness, semi-stability and alterations. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, (83), 51–93. ↑2, 7, 9, 10, 16, 17

[de Jong, 1997] de Jong, A. J. (1997). Families of curves and alterations. *Ann. Inst. Fourier*, 47(2), 599–621. ↑2, 7, 8

[Deligne, 1974] Deligne, P. (1974). Théorie de Hodge. III. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, (44), 5–77. ↑7

[Deligne, 1980] Deligne, P. (1980). La conjecture de Weil II. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, (52), 137–252. ↑13

[Gabber, 1983] Gabber, O. (1983). Sur la torsion dans la cohomologie ℓ-adique d'une variété. *C. R. Acad. sci. Paris Sér. I Math.*, 297(3), 179–182. ↑1, 2

[Gabber, 2003] Gabber, O. (2003). Lettre à K. Buzzard (1er février). ↑2

[Gabber, 2007] Gabber, O. (2007). Courriel à L. Illusie (3 avril). ↑2, 15

[Gabber, 2010] Gabber, O. (2010). Courriel à F. Orgogozo (21 mars). ↑11

[Gabber & Loeser, 1996] Gabber, O. & Loeser, F. (1996). Faisceaux pervers ℓ-adiques sur un tore. *Duke Math. J.*, 83(3), 501–606. ↑14

[Gabber & Ramero, 2009] Gabber, O. & Ramero, L. (2009). Foundations of p-adic Hodge theory. Version du 3 décembre 2009, disponible sur Arxiv. ↑4, 9

[Gabber & Ramero, 2012] Gabber, O. & Ramero, L. (2012). Foundations for almost ring theory. Version du 2012-2-8, disponible sur Arxiv. ↑12

[Goodwillie & Lichtenbaum, 2001] Goodwillie, T. G. & Lichtenbaum, S. (2001). A cohomological bound for the h-topology. *Amer. J. Math.*, 123(3), 425–443. ↑5

[Grothendieck, 1977] Grothendieck, A. (1977). *Cohomologie ℓ-adique et fonctions* L. Springer-Verlag. Séminaire de géometrie algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589. ↑

[Igusa, 1959] Igusa, J. (1959). Fibre systems of Jacobian varieties. III. Fibre systems of elliptic curves. *Amer. J. Math.*, 81, 453–476. ↑11

[Illusie, 2002] Illusie, L. (2002). *An overview of the work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on logarithmic étale cohomology*. Paris : Astérisque. ↑4, 13

[Illusie, 2004] Illusie, L. (2004). On semistable reduction and the calculation of nearby cycles. In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. II* (pp. 785–803). Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin. ↑15

[Illusie, 2006] Illusie, L. (2006). Miscellany on traces in ℓ-adic cohomology : a survey. *Jpn. J. Math.*, 1(1), 107–136. ↑17

[Illusie, 2010a] Illusie, L. (2010a). Constructibilité générique et uniformité en ℓ. Prépublication. ↑2, 15, 17

[Illusie, 2010b] Illusie, L. (2010b). *Log régularité, actions très modérées*. Exposé VI dans **[Illusie et al., 2010]**. ↑4

[Illusie et al., 2010] Illusie, L., Laszlo, Y., & Orgogozo, F., éditeurs (2010). *Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents*. ↑17, 18

[Kashiwara, 1981] Kashiwara, M. (1981). Quasi-unipotent constructible sheaves. *J. Fac. Sci. Univ. Tôkyô Sect. IA Math.*, 28(3), 757–773 (1982). ↑14

xi. Je dois cette observation à O. Gabber.

[Katz, 1980] Katz, N. M. (1980). *Sommes exponentielles*, volume 79 des *Astérisque*. Paris : Société mathématique de France. Cours à Orsay. ↑2, 13

[Katz, 2001] Katz, N. M. (2001). Sums of Betti numbers in arbitrary characteristic. *Finite Fields and Their Applications*, 7(1), 29–44. ↑2

[Katz & Laumon, 1985] Katz, N. M. & Laumon, G. (1985). Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, (62), 361–418. ↑2, 3, 15

[Katz & Messing, 1974] Katz, N. M. & Messing, W. (1974). Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields. *Invent. math.*, 23, 73–77. ↑1, 2

[Katô, 1994] Katô, K. (1994). Toric singularities. *Amer. J. Math.*, 116(5), 1073–1099. ↑12

[Katô & Saitô, 2010] Katô, K. & Saitô, T. (2010). Ramification theory for varieties over a local field. Version 1, Arxiv. ↑2, 11, 13

[Kerz & Schmidt, 2010] Kerz, M. & Schmidt, A. (2010). On different notions of tameness in arithmetic geometry. *Math. Ann.*, 346(3), 641–668. ↑11

[Laumon, 1981a] Laumon, G. (1981a). Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie ℓ-adique. *C. R. Acad. sci. Paris Sér. I math.*, 292(3), 209–212. ↑17

[Laumon, 1981b] Laumon, G. (1981b). Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P. Deligne). volume 83 des *Astérisque* (pp. 173–219). Paris : Soc. math. France. ↑2, 13

[Lê, 1982] Lê, D. T. (1982). Faisceaux constructibles quasi-unipotents. In *Séminaire Bourbaki, vol. 1981/1982*, volume 92 des *Astérisque* (pp. 45–57). Paris : Soc. math. France. ↑14

[Mochizuki, 1999] Mochizuki, S. (1999). Extending families of curves over log regular schemes. *J. reine angew. Math.*, 511, 43–71. ↑4, 9, 12

[Nakayama, 1998] Nakayama, C. (1998). Nearby cycles for log smooth families. *Compositio Math.*, 112(1), 45–75. ↑13

[Ogg, 1962] Ogg, A. P. (1962). Cohomology of abelian varieties over function fields. *Ann. of Math. (2)*, 76, 185–212. ↑13

[Orgogozo, 2003] Orgogozo, F. (2003). Altérations et groupe fondamental premier à p. *Bull. Soc. math. France*, 131, 123–147. ↑11

[Orgogozo, 2006] Orgogozo, F. (2006). Modifications et cycles proches sur une base générale. *Int. Math. Res. Not.*, 25315, 1–38. ↑2, 5, 8, 11, 13

[Orgogozo, 2010] Orgogozo, F. (2010). *Topologies adaptées à l'uniformisation locale*. Exposé II dans **[Illusie et al., 2010]**. ↑5

[Pink, 1995] Pink, R. (1995). Lettre à N. Katz (26 mai). ↑2, 14

[Rapoport & Zink, 1982] Rapoport, M. & Zink, T. (1982). Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik. *Invent. math.*, 68(1), 21–101. ↑13

[Riou, 2009] Riou, J. (2009). *Classes de Chern, morphismes de Gysin, pureté absolue*. Exposé XVI dans **[Illusie et al., 2010]**. ↑13

[Roskam, 2002] Roskam, H. (2002). Artin's primitive root conjecture for quadratic fields. *J. théor. nombres Bordeaux*, 14(1), 287–324. ↑15

[Šafarevič, 1961] Šafarevič, I. R. (1961). Espaces principaux homogènes définis sur un corps de fonctions (en russe). *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 64, 316–346. ↑13

[Saitô, 2004] Saitô, T. (2004). Log smooth extension of a family of curves and semi-stable reduction. *J. Algebraic Geom.*, 13(2), 287–321. ↑4

[Serre, 1965] Serre, J.-P. (1965). *Lie algebras and Lie groups*, volume 1964. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam. ↑14

[Serre, 1968] Serre, J.-P. (1968). *Corps locaux*. Paris : Hermann. deuxième édition, publications de l'Université de Nancago, No. VIII. ↑14

[Tomašić, 2004] Tomašić, I. (2004). A new Weil cohomology theory. *Bull. London Math. Soc.*, 36(5), 663–670. ↑1, 17

[Vidal, 2005] Vidal, I. (2005). Courbes nodales et ramification sauvage virtuelle. *manuscripta math.*, 118(1), 43–70. ↑2

FABRICE ORGOGOZO, CNRS et Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France
Courriel : `Fabrice.Orgogozo@math.polytechnique.fr` • *Adresse réticulaire :* `http://www.math.polytechnique.fr/~orgogozo`