体のp-次元に就いて

Ofer Gabberの代数化の方法の応用

Fabrice Orgogozo

東大 数理

数理解析研究所
平成18年12月15日

定義 (ℓ-コホモロジー次元)

1. Xを概型とし、ℓを標数とする。
   X上の任意のℓ-捩れ層$\mathscr{F}$に対し、

   $$\forall i > N \ \mathrm{H}^i(X_{\text{ét}}, \mathscr{F}) = 0$$

   である時、$\mathrm{cd}_\ell(X) \leq N$であると言う。

   Alexandre GROTHENDIECK *et al., SGA 4, exposé* X *(Michael* ARTIN*)*

2. Gを副有限群とする。
   任意のℓ-捩れ離散G-加群Mに対し、

   $$\forall i > N \ \mathrm{H}^i(G, M) = 0$$

   である時、$\mathrm{cd}_\ell(G) \leq N$であると言う。

   Jean-Pierre SERRE*, Cohomologie galoisienne.*

- kが体である時、

$$\mathrm{cd}_p(\operatorname{Spec} k) = \mathrm{cd}_p(G_k := \mathrm{Gal}(k^{\text{分離}}/k))。$$

- Xが標数$p > 0$のアフィン概型である時、

$$\mathrm{cd}_p(X) \leq 1$$

が成り立つ。

例

復習： C_1を満たす体のp-コホモロジー次元は一以下である。

定理

1. 有限体がC_1である。
2. kが代数的閉体の時は、$k(t)$はC_1である（Tsen）。
3. Aを優秀ヘンゼル離散付値環とする。
   その剰余体が代数的閉ならば、
   $\mathrm{Frac}(A)$もC_1である（Lang）。

優秀環：$\mathrm{Frac}(\widehat{A})$は$\mathrm{Frac}(A)$上の分離拡大である。

系 (TSENの定理の系)

Kをk上のN変数代数関数体とし、 pを素数とする。

$$\mathrm{cd}_p(K) \leq N + \mathrm{cd}_p(k)$$

である。
K/kは有限型で、$p \cdot 1 \in K^{\times}$ならば、 等号が成り立つ。

系 (LANGの定理の系)

Kを完備離散付値体とし、pを素数とする。
剰余体kが完全ならば、

$$\mathrm{cd}_p(K) \leq 1 + \mathrm{cd}_p(k)$$

である。
$p \cdot 1 \in K^{\times}$ならば、等号が成り立つ。

定理 (加藤和也（略式）)

Aを優秀ヘンゼル不等標数離散付値環とする。

$$\mathrm{cd}_p(K) = 1 + 次元_p(k)$$

が成り立つ。以上、pはkの標数とし、
$次元_p(k)$は$\dim_k \Omega^1_k$又は$\dim_k \Omega^1_k + 1$である。

$\dim_k \Omega^1_k \big(= \log_p([k : k^p]) \big)$を$k$の$p$-階数と呼ぶ。

定義 (次元$_p$の定義（上）)

κを標数$p>0$の体とし、$n\geq 0$を自然数とする。
$\mathrm{H}^{n+1}_p(\kappa)$を以下の射の余核で定める。

$$\Omega^n_\kappa \xrightarrow{\wp} \Omega^n_\kappa/d\Omega^{n-1}_\kappa \ : \ a\frac{db_1}{b_1}\wedge\cdots\wedge\frac{db_n}{b_n} \mapsto (a-a^p)\frac{db_1}{b_1}\wedge\cdots\wedge\frac{db_n}{b_n}。$$

但し、

$$\Omega^i_\kappa := \bigwedge^i \Omega^1_{\kappa/\mathbf{Z}}$$

と置く。

$\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{Spec}(\kappa)_{ét}, \mu_p^{\otimes n})$の類似物。
$\mathrm{H}^1_p(\kappa) = \kappa/\wp(\kappa)$。$\mathbf{F}_p$の時、零で無い。
$\mathrm{H}^2_p(\kappa) = \mathrm{Br}(\kappa)[p]$。

定義 (次元$_p$の定義（下）)

κを体とし、 pを素数とする。

κの標数がpで無ければ、次元$_p(\kappa) := \mathrm{cd}_p(\kappa)$で定める。
κの標数がpの場合は、次の条件は同値である。
（ア）次元$_p(\kappa) \leq N$である。
（イ）κの任意の有限拡大体κ'に対し、
$[\kappa' : \kappa'^p] \leq p^N$及び$\mathrm{H}_p^{N+1}(\kappa') = 0$が成り立つ。

例：次元$_p(\mathbf{F}_p) = 1$。

復習

もしκ'はκ上の有限拡大ならば、p-階数$(\kappa) = p$-階数(κ')である。

定理 (加藤和也　（Langの定理の拡張）)

Aを優秀ヘンゼル離散付値環とすし、 素数pとする。

$$次元_p(K) = 1 + 次元_p(k)$$

が成り立つ。

系 (Tsenの定理の系の拡張)

Kをk上のN変数代数関数体とし、素数pとすると

$$次元_p(K) \leq N + 次元_p(k)$$

である。

系の証明：其々Kとkは標数零の離散付値環の剰余体と実現出来る。

加藤和也。
Galois cohomology of complete discrete valuation rings。
LNM 967、1980年。

加藤氏の予想

Aを優秀ヘンゼル（例えば、ネーター完備）局所整域とする。
環Aの商体をKで表し、標数pの剰余体をkで表す。

$$\text{次元}_p(K) = \dim(A) + \text{次元}_p(k)$$

が成り立つ。
（以上、$\dim(A)$はAのクルル次元である。）

定理 (加藤和也、1986年)

Aを優秀ヘンゼル二次元の局所正規環とする。
その剰余体は代数的閉体であると仮定する。
$K := \mathrm{Frac}(A)$の標数がpで無ければ、

$$\mathrm{cd}_p(K) = 2$$

が成り立つ。

注意

- Merkurjev-Suslin定理と曲面の特異点の解消を使った。
  - 斎藤秀司
    Arithmetic on two dimensional local rings、
    Inventiones mathematicæ 85、1986年。
- 小林（葛巻）孝子はその定理をどんな剰余体にも拡張した。

この話では、加藤氏の予想の証明を解説したい。

定理

Aは優秀ヘンゼル局所整域とする。
その商体をKで表し、標数pの剰余体をkで表す。
次の方式が成り立つ。

$$\text{次元}_p(K) = \dim(A) + \text{次元}_p(k)$$

注意

初めに標数pのKの等式は証明しなければならない。
その後で、標数零のKの等式を証明する事が出来る。

定理 (O. Gabber ; 「Lefschetz affine」)

Aをd次元優秀強ヘンゼル[1]$\mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]$上の代数とし、
Aの元fとする。 任意の$i > d$自然数に対し、

$$\mathrm{H}^{i}_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(A[f^{-1}]), \mathbf{Z}/\ell) = 0$$

が成り立つ。

[1] 仏語で「strictement hensélien」と言う。

下からの評価： 次元$_p(K) \geq \dim(A) +$ 次元$_p(k)$

Aは正規環と仮定しても良い。

Aは日本環(笑)だから、$A \to A^{\text{正規化}}$は有限写像である。
κ'/κは有限次拡大であれば、次元$_p(\kappa) =$ 次元$_p(\kappa')$。
（有限の時）

下からの評価： 次元$_p(K) \geq \dim(A) +$ 次元$_p(k)$

$\mathfrak{p}$をAの高さ一の素イデアルとし、
$L := \mathrm{Frac}\, A_\mathfrak{p}$で、$B = \widehat{A_\mathfrak{p}}$（完備離散付値環）で、
$\widehat{L} := \mathrm{Frac}\, B$と表す。

<u>不等標数の場合</u>
$G_{\widehat{L}} \hookrightarrow G_L$
$\Longrightarrow \mathrm{cd}_p(K = L) \geq \mathrm{cd}_p(\widehat{L})$
$\geq 1 +$ 次元$_p(\mathrm{Frac}\, A/\mathfrak{p})$ [加藤氏の定理]
$\geq 1 + \bigl(\dim(A) - 1 +$ 次元$_p(k)\bigr)$ [帰納法の仮定より]。

下からの評価： 次元$_p(K) \geq \dim(A) +$ 次元$_p(k)$

$\mathfrak{p}$をAの高さ一の素イデアルとし、
$L := \mathrm{Frac}\, A_{\mathfrak{p}}$で、$B = \widehat{A_{\mathfrak{p}}}$（完備離散付値環）で、
$\widehat{L} := \mathrm{Frac}\, B$と表す。

<u>等標数の場合</u>
（$[L : L^p] < +\infty$ならば）
$[L : L^p] \geq [\widehat{L} : \widehat{L}^p]$と$\mathrm{H}_p^{r+1}(L) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_p^{r+1}(\widehat{L})$が成り立つ。

補助定理

Bを標数$p > 0$の完備局所環とし、
その極大イデアルを$\mathfrak{m}_B$で表す。

$$\wp(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_B$$

が成り立つ。
証明：$b = \wp(b) + b^p = \wp(b + b^p + b^{p^2} + \cdots)$である。

上からの評価：次元$_p(K) \leq \dim(A) +$ 次元$_p(k)$ Ofer GABBERの代数化の方法

- （優秀の仮定：）ARTIN-POPESCU $\rightsquigarrow$
  一般性を失う事無く、
  環Aは冪級数環上の有限代数と仮定出来る。
- 永田のヤコビ判定法の証明$\Longrightarrow$
  生成的エタールと仮定しても良い。
  不等標数：EPP氏の定理を使う。
- ワイエルシュトラスの予備定理と
  ELKIK氏の代数化定理を使う。

$\Longrightarrow$ 相対次元一の場合に導く。
この場合には、加藤氏の定理を使う事が可能である。

上からの評価：次元$_p(K) \leq \dim(A) +$ 次元$_p(k)$
Ofer GABBERの代数化の方法

- Ofer GABBER。
  A finiteness theorem for non abelian H^1 *of excellent schemes*。
  Luc ILLUSIEの研究集会、Orsay, 2005年6月27日。
- Ofer GABBER。
  Finiteness theorem for étale cohomology of excellent schemes。
  Pierre DELIGNEの研究集会、Princeton、2005年10月17日。
- Michael ARTIN。
  Cohomologie des préschémas excellents d'égales caractéristiques、SGA 4のexposé XIX。

上界： 次元$_p(K) \leq \dim(A) +$ 次元$_p(k)$
整閉且つ完備の場合の簡約

局所環Aは優秀且つ整閉整域の時、$\widehat{A}$も整閉整域である。
更に$\widehat{K} \otimes_K \Omega^1_K \hookrightarrow \Omega^1_{\widehat{K}}$が成り立つ。

問題：$\mathrm{H}^\star_p(K) \overset{?}{\hookrightarrow} \mathrm{H}^\star_p(\widehat{K})$。

補助定理

Aを準優秀ヘンゼル局所整域とし、$\widehat{A}$をその完備化とする。
K上の多元環$\widehat{K}$は左逆写像があるK上の有限型代数の直極限である。

定義

以下の条件を満たす時ネーター環Aは準優秀と言う。

- 各$X=\mathrm{Spec}(A)$の点xで、
  概型の射$\mathrm{Spec}(\widehat{\mathscr{O}_{X,x}}) \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$の任意の幾何的ファイバーは正則である。
- 任意のA上の有限整域A'に対し、
  正則$(\mathrm{Spec}(A'))$は空で無い開集合である。

その様な環は普遍的日本環である。

ヘンゼル局所環の時、「優秀」と「準優秀」は同値である。

上からの評価： 次元$_p(K) \leq \dim(A) +$ 次元$_p(k)$

完備の場合の簡約：$\mathrm{H}^\star_p(K) \hookrightarrow \mathrm{H}^\star_p(\widehat{K})$。

補助定理

Aを準優秀ヘンゼル局所整域とし、$\widehat{A}$をその完備化とする。K上の多元環$\widehat{K}$は左逆写像があるK上の有限型代数の直極限である。

定理 (Dorin Popescu ； Artinの近似的性質)

任意のA上の有限多項式系に対し、
$\widehat{A}$有理点が存在する時、A有理点も存在する。

系

Fを（A上の多元環）から（集合圏）へ 有限表示関手とする。射$\mathrm{F}(K) \to \mathrm{F}(\widehat{K})$は単射である。

$\mathrm{H}^i(-, \mathbf{Z}/p)$ 「$\mathrm{H}^{r+1}_p(-)$」

注意：今から、Aは（ネーター）完備であると仮定する。

易しい（不）等式：

$$p\text{-階数}(K) = \dim(A) + p\text{-階数}(k)$$

が成り立つ。
（コーエン定理を使う。）

復習：次元$_p$ = p-階数 + {0又は1}。

$$1 \overset{疑}{\leq} 0。$$

等標数の上界：$次元_p(K) \leq \dim(A) + 次元_p(k)$

$次元_p(k)$をrで表し、$N = d + r$とすると、

$\mathrm{H}_p^{d+r+1}(K) = 0$が成り立っている事を検算しなければならない。

各$f \in A - \{0\}$と$\omega \in \left(\Omega_A^N/捩\right)$に対し、$\frac{\omega}{f} \in \Omega_K^N$を考える。

方略：Aを条件（ア）と（イ）を満たすヘンゼル$\widetilde{A}$に替える。
（ア）$\widetilde{A}$のf進完備化はAである。
（イ）有限射$\mathrm{Spec}(\widetilde{A}) \to \mathrm{Spec}(k[[t_1, \ldots, t_{d-1}]]\{t_d\})$が存在する。

等標数の上界：次元$_p(K) \leq \dim(A) +$ 次元$_p(k)$

永田のヤコビ判定法の周りに

定理

(O. Gabber。L. Illusieの研究集会の原稿の系8.1)

Aをd次元等標数完備局所ネーター整域とし、
その剰余体をkで表す。
有限且つ生成的エタール射$\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k[[t_1, \ldots, t_d]])$が
存在する。

注意

標数零の時、以上の定理はコーエンの定理である。
然しながら、不等標数の方式を証明する為に役に立つ。

等標数の上界：次元$_p(K) \leq \dim(A) +$ 次元$_p(k)$

代数化

上の様に射$X = \mathrm{Spec}(A) \to X_0 = \mathrm{Spec}(A_0 = k[[t_1, \ldots, t_d]])$を選ぶ。
分岐因子を$R \subset X_0$で表す。
$[\frac{\omega}{f}] \in \mathrm{H}_p^{N+1}(K)$が零になる事を明らかにしよう。

$f \in A_0$と仮定しても良い。
$R \subset V(f)$と仮定しても良い。

ワイエルシュトラスの予備定理より座標変換すれば
fは$k[[t_1, \ldots, t_{d-1}]][t_d]$の単多項式としても良い。

予備定理の復習

定理 (ワイエルシュトラス、1880年頃)

1. κを分離完備局所環（例えば体）で、
   $\mathfrak{m}$をその極大イデアルとし、
   $\kappa[[t_1, \ldots, t_d]]$の元$f$が$(\mathfrak{m}, t_1, \ldots, t_{d-1})$に属さ無いとすると、

   $$（ア）f = 単位 \cdot (単多項式 P \in \kappa[[t_1, \ldots, t_{d-1}]][t_d])$$

   が成り立つ。
2. $\mathfrak{m}$を法として零で無い$\kappa[[t_1, \ldots, t_d]]$の元$f$とすると、
   ある$\alpha \in \mathrm{Aut}_{k[[t_d]]}(k[[t_1, \ldots, t_d]])$が存在して、$\alpha(f)$は
   （ア）の条件を満たすになる。

等標数の上界：次元$_p(K) \leq \dim(A) +$ 次元$_p(k)$

代数化

$X = \mathrm{Spec}(A) \to X_0 = \mathrm{Spec}(A_0 = k[[t_1, \ldots, t_d]])$

$[\frac{\omega}{f}] \stackrel{?}{=} 0 \in \mathrm{H}_p^{N+1}(K)$。

分岐因子$R \subset V\big($単多項式$f \in k[[t_1, \ldots, t_{d-1}]][t_d]\big) \subset A_0$。

（勿論、$f(0) = 0$がある。）

特に、

- $V(f)$は$\widetilde{X_0} := \mathrm{Spec}(k[[t_1, \ldots, t_{d-1}]]\{t_d\})$ から来る。
- $\widetilde{X_0}$の(f)進完備化はX_0である。
- 組$(\widetilde{X_0}, V(f))$はヘンゼル組であるので、
  分岐被覆$X \to X_0$は$\widetilde{X_0}$上で定義可能である。

$$\begin{tikzcd}
X = \mathrm{Spec}(A) \arrow[r, "f\text{進完備化}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{X} = \mathrm{Spec}(\widetilde{A}) \arrow[d, "\text{有限且つ生成的エタール}"] \\
X_0 = \mathrm{Spec}(A_0) \arrow[r] & \widetilde{X_0} = \mathrm{Spec}(\widetilde{A_0})
\end{tikzcd}$$

ELKIK氏の定理の復習

定義

組$(X = \mathrm{Spec}(A), Y = V(I))$が**ヘンゼル組**とは、
任意の$f \in A[T]$と、各fの法I単根に対し、
その根の持ち上げが存在する物を言う。

定理 (Renée Elkik、1973年)

Aをネーター環とし、
組$(X = \mathrm{Spec}(A), Y = V(I))$をヘンゼル組とする。
簡単の為、$U = X - Y$は連結であると仮定する。
概型$\widehat{U} := U \times_X (X_{/\widehat{Y}})$も連結で、

$$\pi_1(U) \to \pi_1(\widehat{U})$$

が同型である。

Renée ELKIK
Solutions d'équations à coefficients dans un anneau

等標数の上界：次元$_p(K) \leq \dim(A) +$ 次元$_p(k)$

$$\begin{tikzcd}
X = \mathrm{Spec}(A) \arrow[r, "f\text{進完備化}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{X} = \mathrm{Spec}(\widetilde{A}) \arrow[d, "\text{有限且つ生成的エタール}"] \\
X_0 = \mathrm{Spec}(A_0) \arrow[r] & \widetilde{X_0} = \mathrm{Spec}(\widetilde{A_0})
\end{tikzcd}$$

$$\frac{\omega}{f} = \left(\frac{\tilde{\omega} \in (\Omega^N_{\tilde{A}}/\text{捩})}{f}\right) + \left(\text{何か} \in \mathfrak{m}_A(\Omega^N_A/\text{捩})\right)$$

が成り立つ。

$\wp : \Omega^N_K \to \Omega^N_K / d\Omega^{N-1}_K$ は全射であるか。

- 第二の項の事は易しい。（$a = \wp(a + a^p + a^{p^2} + \cdots)$）
- 初項を考える。
  体$\mathrm{Frac}\,\widetilde{A}$の $\mathrm{Frac}\,k[[t_1, \ldots, t_{d-1}]]$上の超越次数は一つであるから、加藤氏の定理と帰納法を使える。

不等標数の上界：$\mathrm{cd}_p(K) \leq \dim(A) +$ 次元$_p(k)$

困難：もし$V(p) \subset R$ならば、ワイエルシュトラスの定理を使え無いから、 代数化が出来ない。

答： Xが$V(p)$の生成点の上でエタールになる為に、EPP氏の定理を使う。

Epp氏の定理の復習

定理 (Helmut Epp、1973年)

TとSを完備離散付値環とし、$T \to S$を全射とする。
標数pの剰余体κ_Sが完全と仮定し、
$\kappa_T^{p^\infty} := \cap_r \kappa_T^{p^r}$は$\kappa_S$上の代数拡大であると仮定する。
この時、ある有限拡大$S' \to S$で、

$$T' := (T \times_S S')^{\text{正規化}}_{\text{被約}} \to S'$$

の特殊ファイバーが被約となる物が存在する。

Helmut Epp
Eliminating wild ramification.
Inventiones mathematicæ、 1973年.

不等標数の上界：$\mathrm{cd}_p(K) \leq \dim(A) + 次元_p(k)$

困難：もし$V(p) \subset R$ならば、ワイエルシュトラスの定理を使え無いから、 代数化が出来ない。

答： Xが$V(p)$の生成点の上でエタールになる為に、Epp氏の定理を使う。

コホモロジー類を代数化する為に、帰納法の仮定と藤原-Gabberのヘンゼルと形式比較定理を使う。

困難：EPP氏の定理を使うから、$\mathrm{H}^\star(K)$を$\mathrm{H}^\star(K \otimes_{K_0} K_0')$に替えなければならない。

答：

$$\dim_p G_{K_0=\mathrm{Witt}(\text{完全体})} \leq 2$$

が成り立つ。

注意：

$$\mathrm{cd}_p(\mathrm{Spec}(A[\frac{1}{p}])_{\text{ét}}) \leq \dim(A) + \text{次元}_p(k)$$

も成り立つ。

終り