

INTRICATION QUANTIQUE/CLASSIQUE

THIERRY PAUL

RÉSUMÉ. Nous discutons certains liens reliant les paradigmes classique et quantique non pas en tentant d'établir comment l'un se résout à l'autre, mais plutôt en montrant un certain enchevêtrement, une intrication entre ces deux mondes. Après avoir discuté de l'incidence du classique sur le quantique, par exemple dans la construction des objets dynamiques, nous montrons comment des traces quantiques peuvent perdurer à la limite classique. Nous établissons enfin comment les deux notions si "typées" d'imprédictibilité (classique) et d'indéterminisme (quantique) se superpose dans certaines situations.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Du classique dans le quantique	3
3. Du quantique dans le classique	5
4. Intrication prédire/déterminer	7
Références	8

1. INTRODUCTION

"...Non so più cosa son, cosa faccio ..."
Da Ponte

L'intrication est à la mode. Décrite comme source de problèmes incontournables dans les années 30 lors des débats conceptuels sur la nouvelle mécanique, elle est de nos jours activement recherchée comme moteur fondamental de l'informatique quantique.

1. Exposé au Colloque LIGC 2007 "Logique et Interaction : vers une Géométrie de la Cognition", Albano 13-16 dcembre 2007

Quantum computing wants entanglement

Car la Mécanique Quantique sans intrication, c'est comme un baiser sans moustache, comme on disait dans les opérettes de ces mêmes années 30.

La propriété d'intrication de l'état d'un système quantique "formé" de deux particules interdit que l'on puisse parler d'un sous-système formé de l'une d'entre elles. Dans un état intriqué, non seulement les deux particules n'existent pas indépendamment, mais encore chacune contient le reflet de l'autre : 2 particules ne sont pas deux particules.

Mais il est un autre sujet concernant la Mécanique Quantique que l'on peut, il me semble, rapprocher de l'intrication : c'est son rapport à la Mécanique Classique.

Les deux nouvelles mécaniques qui voient le jour à l'aube du XXIème siècle, et qui vont permettre de dépasser les deux écueils de la mécanique classique que sont l'interaction à distance et la structure microscopique de l'espace, sont deux évolutions épistémologiquement fort différentes quant au changement de paradigme qu'elles offrent à leur prédécesseurs. La Relativité ne fait "que" déformer la structure de la cinématique classique mais, en revanche, présente du jamais vu quant aux aspects dynamiques : le tenseur d'énergie-impulsion ne trouve aucune racine dans le monde pré-relativiste.

En ce qui concerne la Mécanique Quantique la situation est en quelque sorte inversée. Le changement paradigmatique lié à la cinématique est immense : on passe d'un espace géométrique inerte à un espace de Hilbert d'états quantiques, du commutatif au non commutatif. En revanche la plupart des hamiltoniens quantiques sont obtenus à partir du modèle classique. L'énergie cinétique devient un laplacien certes, mais c'est toujours le carré de l'impulsion. La Relativité déforme la cinématique et invente la dynamique, la Mécanique Quantique invente une nouvelle cinématique, et déforme les objets acteurs de la dynamique classique vers le paradigme de la nouvelle cinématique. Bien sûr on pourra objecter que la Théorie Quantique des Champs a inventé de nouveaux lagrangiens (le modèle standard par exemple), mais ils ont toujours un correspondant classique, tout comme la physique classique moderne a inventé de nouvelles interactions.

C'est de cette intrication bien particulière entre Quantique et Classique que je voudrais parler dans ce texte. Comme je l'ai dit plus haut l'intrication est symétrique par rapport aux deux parties présentes. J'envisagerai donc tout d'abord l'incidence du classique sur le quantique, puis les traces du quantique après que la limite classique a été atteinte. Enfin je discuterai l'intrication entre deux concepts emblématiques de la Mécanique Classique

moderne telle que la théorie des systèmes dynamiques chaotiques nous la présente, l'imprédictibilité, et de la Mécanique Quantique dans son essence même, l'indéterminisme.

Signalons pour terminer cette introduction qu'il ne sera ici nullement question d'une quelconque tentative d'interprétation de la Mécanique Quantique en termes classiques. La dynamique quantique appartient à un paradigme propre qui ne peut absolument pas se réduire ou s'interpréter au moyen du paradigme classique. Il ne fait que s'en inspirer.

2. DU CLASSIQUE DANS LE QUANTIQUE

"...questa poi ben la conosco ..."

Da Ponte

L'une des manières d'introduire économiquement la Mécanique Quantique à partir du formalisme classique consiste à présenter ce dernier sous la forme de l'équation de Liouville. Prenons un système à un degré de liberté pour être plus simple. Il est bien connu que l'espace de phases correspondant à cette situation est \mathbb{R}^2 et que la dynamique classique peut se lire sur les fonctions du temps et de de deux variables (position, impulsion) (q, p) , $f(t, q, p)$, qui satisfait l'équation

$$\partial_t f^t(q, p) = \{f^t(q, p), h(p, q)\},$$

où la fonction $h(p, q)$ est l'énergie du système, habituellement de la forme énergie cinétique + énergie potentielle : $h(p, q) = \frac{p^2}{2} + V(q)$.

Le crochet de Poisson $\{f^t(q, p), h(p, q)\}$ est égal à

$$\{f^t(q, p), h(p, q)\} := \partial_q f^t(q, p) \partial_p h(p, q) - \partial_p f^t(q, p) \partial_q h(p, q).$$

Il est facile de remarquer que la solution $f^t(q, p)$ est donnée à partir de la condition initiale $f^0(q, p)$ par la formule

$$f^t(q, p) = (f^0 \circ \Phi^t)(q, p),$$

où $\Phi^t(q, p) = (q(t), p(t))$ satisfait les équations de Hamilton

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q(t) = \partial_p h(q(t), p(t)), & q(0) = q \\ -\frac{d}{dt} p(t) = \partial_q h(q(t), p(t)), & p(0) = p. \end{cases}$$

La "quantification" de la discussion précédente, pendant quantique de cette dynamique classique, consiste simplement à remplacer les fonctions par des

opérateurs (matrices, possiblement en dimension infinie) et le crochet de Poisson par le commutateur divisé par $i\hbar$

$$\{.,.\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [.,.].$$

Puisque, par définition, $\{q, p\} = 1$, l'opérateur correspondant à la fonction $h(q, p) = \frac{p^2}{2} + V(q)$ sera $H := \frac{P^2}{2} + V(Q)$ où P et Q seront deux opérateurs satisfaisant

$$\frac{1}{i\hbar} [Q, P] = 1.$$

l'équation de la dynamique devient alors

$$\partial_t F^t = \frac{1}{i\hbar} [F^t, H],$$

que l'on résout par $F^t = U(t)F^0U(t)^{-1}$ où l'opérateur unitaire $U(t)$ satisfait

$$\frac{d}{dt}U(t) = HU(t),$$

qui est l'équation de Schrödinger si l'on écrit $U(t)\psi = \psi^t$.

Cette discussion un peu technique montre comment la Mécanique Quantique s'empare des concepts classiques tels que l'énergie, les "quantifie" pour les placer dans SON paradigme. En aucun cas elle ne définit la forme du hamiltonien H , elle l'obtient à partir de la notion classique d'énergies potentielle et cinétique par la règle de quantification satisfaisant en premier lieu l'adage $\{.,.\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [.,.].$

Ainsi vue, la Mécanique Quantique apparaît comme une action, une application, une flèche. La plupart des équations de la physique mathématique (chaleur, ondes par exemple) qui sont des équations portant sur des quantités macroscopiques sont dérivées à partir d'un modèle microscopique par un principe de réduction. Certaines cependant traitent de quantités macroscopiques mais ne sont pas dérivées d'un modèle microscopique, les équations de la turbulence de la mécanique des fluides par exemple. Mais l'équation de Schrödinger, elle, porte sur des quantités microscopiques (fonction d'onde de l'électron) et est dérivée d'un modèle macroscopique. C'est un tour de force épistémologique qu'il faut remarquer, et qui a peut-être été à la source de bien des malentendus quand à l'interprétation de la Mécanique Quantique.

La deuxième occurrence de la présence du classique dans le quantique est fournie par le processus de la mesure. On considère de nos jours que la mesure fait partie de l'évolution quantique, qui se partage ainsi en deux :

- l'équation de Schrödinger
- la mesure.

La mesure rétablit pour nous notre besoin, hérité d'une solide et envahissante culture classique, d'obtenir une seule réponse à toute question posée. Le fait que la dynamique quantique se place dans un espace vectoriel (de Hilbert) crée dans le paradigme de celle-ci l'idée de superposition. L'équation de Schrödinger est linéaire, et on peut toujours considérer à partir de deux conditions initiales leur somme comme nouveau point de départ pour une dynamique qui va être la somme des deux évolutions. Il y a dans la nature quantique des états superposés qui ont une "décomposition spectrale" plutôt qu'une valeur bien définie d'une quantité observable. Mais ces états nous ne les voyons pas. Nous ne les voyons pas justement parce que, lorsque nous observons un système afin de mesurer une observable, nous ne faisons que relever la valeur de celle-ci, comme l'on relève un compteur d'électricité. Nous effectuons une mesure quantique.

Le processus de mesure quantique a cette propriété de tout d'abord projeter l'état superposé sur un de ces termes, et ensuite de "relever" la valeur (unique cette fois) associée à ce vecteur. Cette projection est aléatoire, le résultat n'est pas prédictible. Nous avons satisfait notre besoin d'unicité de la réponse (par exemple nous avons supprimé l'idée d'ubiquité), mais nous avons perdu notre cher (et contestable, nous le verrons plus bas) déterminisme.

La mesure quantique est donc une incidence partielle et très particulière du classique dans le quantique, mais nous verrons dans la dernière section comment l'indéterminisme quantique se confond parfois avec l'imprédictibilité des systèmes chaotiques, un phénomène tout à fait classique lui-même, rendant par là même cette incidence classique dans le quantique moins partielle que l'on pourrait penser.

3. DU QUANTIQUE DANS LE CLASSIQUE

"...a cenar tecco m'invitasti, e son venuto...."

Da Ponte

La première incidence de la présence du quantique dans le classique se trouve tout simplement dans la perception de la matière qui nous entoure. Sans la Mécanique Quantique la matière n'est pas stable, et tout corps est formé essentiellement de vide : "passe-murailles" devient banal. La physique classique est donc déjà une théorie "en attente", utilisant des propriétés d'une théorie à venir. On pourrait mentionner aussi toute une série

de phénoménologies de la structure atomique qui raisonnent presque exclusivement en termes classiques et ne gardent que quelques irisations quantiques, par exemple le principe d'exclusion de Pauli. Irisations certes, mais absolument nécessaires à l'obtention de résultats aussi "visibles" que la stabilité de la matière.

Mais il est une autre situation où le quantique s'invite à la table du classique, et cela de façon plus conceptuelle et plus drastique, c'est le cas où des traces de quantiques survivent à la limite semiclassique. Qu'entendons-nous par là ?

Nous avons vu dans la section précédente la correspondance $\{.,.\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[,.]$, que l'on doit en fait écrire

$$\{.,.\} \leftrightarrow \frac{1}{i\hbar}[,.]$$

En effet cette flèche définit à la fois une façon de quantifier et une façon de retrouver la dynamique classique par passage à la limite $\hbar \rightarrow 0$ (voir [2] pour plus de détails).

Le curseur \hbar permet donc de passer de chacune des théories à l'autre. Mais dès que l'on parle de dynamique deux questions "naturelles" viennent troubler un ciel pourtant a priori sans nuage : existence et asymptotisme. Sous quelles conditions les deux dynamiques existent-elles, et surtout ces conditions sont-elles les mêmes pour les deux ? Et si l'on regarde la dynamique à temps divergent vers l'infini, la limite classique avant et après ce passage à l'infini temporel est-elle la même ? Retrouve-t-on le paradigme classique, ce cher espace absolu si cher à Newton (et à Kant) à tous les coups ?

Ces questions pourraient paraître techniques, et seulement techniques, si elles ne révélaient pas, lors des réponse correspondantes, une nouvelle phénoménologie classique où la solution prime sur l'équation. Nous traiterons dans la section suivante du lien entre le processus de mesure, ou plutôt les résultats qui lui sont associés, et la théorie du chaos classique. Mentionnons ici la possibilité, dans cette situation, du phénomène d'ubiquité.

Nous avons mentionné précédemment le fait que l'équation de Liouville était résolue par la composition de la condition initiale par un flot. Ce résultat est valable sous certaines hypothèses de régularité du potentiel V entrant dans l'énergie. Si le potentiel est trop peu régulier la dynamique n'existe pas, au sens que les équations n'ont pas de solution. Ou plutôt elles en ont trop la plupart du temps. Un des exemples est bien sûr le potentiel newtonien, avec sa singularité à l'origine, qui interdit à la mécanique newtonienne de dire quelque chose en cas de choc.

Le paradigme classique n'aime pas les équations possédant plusieurs solutions. Car dans ce cas un flot, trajectoire d'une particule représentée par

un point matériel, peut se scinder en plusieurs branches, et nous avons tendance à ainsi associer plusieurs positions à une même particule. Nous faisons ainsi, au fond, pour des raisons transcendantales : la particule vit dans un espace absolu, et elle ne peut occuper qu'une position et une seule. Mais la Mécanique Quantique, elle, a battu en brèche cette restriction, d'ailleurs de la façon la plus élégante qui soit : lorsque nous posons la question "Où es-tu?" la particule choisit aléatoirement sa position parmi un certain jeu des possibles.

En général ce jeu des possibles est large, à la puissance du continu. C'est le sens des inégalités de Heisenberg : la position peut prendre toutes les valeurs dans une espèce de petite boule de rayon $\dots \hbar$ justement. Et il n'est pas difficile d'imaginer que, lorsque $\hbar \rightarrow 0$ cette boule n'a aucune raison, a priori, de tendre bêtement vers un point. Elle peut tendre vers une variété étendue (comme un chewing-gum), nous le verrons dans la section suivante, ou elle peut se vaporiser en plusieurs points, ceux-là même que la mauvaise équation classique créait au travers de ses solutions multiples.

4. INTRICATION PRÉDIRE/DÉTERMINER

"...così fan tutt..."

Da Ponte

L'indéterminisme est certainement le trait qui a le plus choqué toute personne découvrant la Mécanique Quantique. Fort de sa culture classique prédictive, l'explorateur du quantique a du mal à imaginer que le résultat d'une mesure soit aléatoire, imbibé qu'il est de l'idée de trajectoire telle que nous l'avons décrite à la section précédente.

De hasard il n'y en aurait donc pas.

On fait donc en général (de moins en moins il est vrai, mais il y en a toujours qui exagèrent) le reproche à la Mécanique Quantique de n'être pas déterministe, alors que, de plus en plus là aussi, la complexité, le statistique et l'aléatoire nous envahissent culturellement. Si la température aujourd'hui n'est jamais égale à la moyenne saisonnière, c'est parce que la probabilité que cela soit le cas est (presque) nulle.

Pourtant la Mécanique Classique a remis depuis bien longtemps ses prétentions *pratiques* à prédire exactement l'évolution lointaine dans le temps de la dynamique. Depuis plus d'un siècle maintenant, on sait que les équations parfaitement déterministes de la mécanique de Newton ont des solutions qui,

lorsqu'on laisse le temps filer, gardent de moins en moins en mémoire le point dont elles sont issues. Cette sensibilité aux conditions initiales, cet effet papillon, a pour effet que, dans les bons systèmes chaotiques, une petite boule de points initiaux, que l'incertitude d'une mesure "classique" ne permettrait pas de différencier entre eux, va, cette boule, évoluer dans le temps et se transformer certes en conservant son volume (ça c'est toujours vrai, in éternam) mais en s'aplatissant et se dilatant dans des directions transverses. Cet effet "pâtissier" montre comment la dynamique chaotique est un rouleau à pâtisserie justement, et comment, même issus d'une toute petite boule, tous ces points initiaux (il y en a beaucoup, bien sûr) vont former une feuille, une variété plate, tout comme l'on forme chaque feuille d'une pâte feuilletée.

Bien sûr, "en principe", un point donne un point et cela est réversible, mais à la condition de la possibilité d'un accès à une précision infinie, autant dire un leurre. Imaginer que cela est possible, c'est faire une pâtisserie tout au leurre.

Le même phénomène se produit en Mécanique Quantique, mais sans besoin de leurre, puisque l'ambiguïté du résultat de la mesure est déjà dans la théorie. La fonction d'onde de la particule se délocalise le long, précisément, de la région classique où la petite boule classique s'était délocalisée tout à l'heure. Effectuons maintenant une mesure et tout naturellement le résultat indiquera une valeur précise, ponctuelle, et contenue dans cette région. Tout comme était ponctuelle la position du point après évolution sous la condition d'une précision infinie lors de la mesure classique initiale de la position. Le résultat quantique est aléatoire en raison de l'indéterminisme quantique, tout comme est aléatoire la position classique finale en raison de l'imprédictibilité classique (voir [3],[2] pour plus de détails).

Ainsi donc, dans la limite $\hbar \rightarrow 0$ de systèmes quantiques à contrepartie classique chaotique,

***L'indéterminisme quantique et l'imprédictibilité classique
se rencontrent.***

RÉFÉRENCES

- [1] G. Longo et T. Paul, The Mathematics of Computing between Logic and Physics, article invité, dans "Computability in Context : Computation and Logic in the Real World", S.B. Cooper and A. Sorbi, eds, Imperial College Press, (2010).
- [2] T. Paul, A propos du formalisme mathématique de la Mécanique Quantique, "Logique & Interaction : Géométrie de la cognition" Actes du colloque et école thématique du CNRS "Logique, Sciences, Philosophie" à Cerisy, Hermann, (2009).

- [3] T. Paul, Semiclassical Analysis and Sensitivity to Initial Conditions, "Information and Computation", **207**, p. 660-669 (2009).
- [4] T . Paul, Indéterminisme quantique et imprédictibilité classique, "Noesis", (2011).
- [5] T. Paul et S. Poinat, "Are quantum systems emergent?", preprint.

CNRS ET CMLS, ÉCOLE POLYTECHNIQUE
E-mail address: `paul@math.polytechnique.fr`