Décomposition de $L^2(\omega)$, séries d'Eisenstein

I Notations et rappels

$\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ adèles

$G = GL_2$ $\qquad Z$ = centre de G

$M = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad P = MN$

$K = \prod_v K_v$

$K_p = G(\mathbb{Z}_p)$

$K_\infty = O(2)$

$\overline{G} = G/Z$ $\qquad \overline{M} = M/Z \simeq \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$GL_2(\mathbb{A})$ groupe topologique localement compact, muni d'une mesure de Haar dg

On fixe un caractère $\omega : Z(\mathbb{A}) \longrightarrow U(1)$ trivial sur $Z(\mathbb{Q})$

$$L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}), \omega) = \left\{ f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \text{ mesurables tq } \begin{array}{l} (i)\ f(z\gamma g) = \omega(z) f(g) \quad (z \in Z), \ (\gamma \in G(\mathbb{Q}), g \in G(\mathbb{A})) \\ (ii) \displaystyle\int_{G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} |f|^2 \, dg < +\infty \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

$$\quad \| \qquad\qquad$$

$$L^2(\omega)$$

espace de Hilbert sur lequel $G(\mathbb{A})$ agit par translation à droite de la variable

$(L^2(\omega), R_\omega)$

Fonctions tests $\mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})$

espace des combinaisons linéaires de fonctions :

$f = \prod_v f_v$ où $f_\infty \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{R}))$

f_p : localement constante à support compact sur $G(\mathbb{Q}_p)$

$f(zg) = \omega^{-1}(z) f(g) \quad (\forall z \in Z(\mathbb{A}))$

Pour presque tout p :

$f_p(g) = \omega^{-1}(z)$ si $\quad g = zk \quad z \in Z(\mathbb{Q}_p), \ k \in G(\mathbb{Z}_p)$

$\qquad = 0$ sinon

$$(R_\omega(\phi)\circ f)(y) = \int_{Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \phi(x)\, f(yx)\, dx$$

$\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}), \omega^{-1})$

$f \in L^2(\omega)$

$$L_0^2(\omega) = \left\{ f \in L^2(\omega),\ \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} f(ng)\, dn = 0 \right.$$
pour p.t $g \in G(\mathbb{A})$ $\Big\}$

Sous-représentation de $(L^2(\omega), R_\omega)$: R_ω^0

On a vu (exposé de C. Demarche)

Thm $\forall \phi$ fonction test

(i) $R_\omega^0(\phi) : L_0^2(\omega) \longrightarrow L_0^2(\omega)$
est un opérateur à trace (de Hilbert-Schmidt, compact)

(ii) $L_0^2(\omega)$ se décompose en somme directe de représentations irréductibles unitaires de $G(\mathbb{A})$ avec multiplicités finies.

But final : obtenir une formule pour $\mathrm{tr}\, R_\omega^0(\phi)$

But de cet exposé : expliciter une décomposition :

$$L^2(\omega) = L_0^2(\omega) \overset{\perp}{\oplus} L^2_{cont}(\omega) \overset{\perp}{\oplus} L^2_{res}(\omega)$$

La présence des facteurs $L^2_{cont}(\omega)$ et $L^2_{res}(\omega)$ est due à l'existence du sous-groupe parabolique

$P = MN = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de G, défini sur $\mathbb{Q}$

$\Longleftrightarrow$ non compacité du quotient $Z(\mathbb{A})G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$. (2)

II Termes constants et P-séries

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset G \qquad N(\mathbb{A}) = \left\{ n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{A} \right\}$$
$$\simeq \mathbb{A}.$$

$\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ est un groupe abélien compact

Fixons un caractère unitaire ψ de $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$, non trivial

Tous les autres caractères unitaires de $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ sont de la forme
$$\psi_\gamma : x \mapsto \psi(\gamma x) \qquad \gamma \in \mathbb{Q}$$

Ainsi $\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$ (avec la topologie discrète)
(dual de Pontryagin)

<u>Théorie de Fourier sur $N(\mathbb{A})/N(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{A}/\mathbb{Q}$</u> :

$$f(n) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}} c_\gamma \, \psi_\gamma(n)$$

$$c_\gamma = \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} f(n') \, \psi_\gamma(-n') \, dn'$$

Soit $f : G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ mesurable, vérifiant
- pour p.t $g \in G(\mathbb{A})$, $n \mapsto f(ng)$ est intégrable sur $N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})$

On pose alors $f_N(g) = \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} f(ng)\, dn$

Ceci est défini pour p.t $g \in G(\mathbb{A})$

On dit que f est <u>cuspidale</u> si $f_N(g) = 0$ p.p.

<u>rmq</u> Pour g fixé, $f_N(g)$ est le coefficient de Fourier c_0 de la fonction

$N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, $n \mapsto f(ng)$

d'où la terminologie : f_N = <u>terme constant</u> de f.

Posons $\bar{G} = G/Z$ $\quad \bar{M} = M/Z \simeq \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \simeq \mathbb{G}_m$

Si $f \in L^2(\omega)$, comme $G(\mathbb{Q})$ est discret dans $G(\mathbb{A})$, f est localement de carré intégrable sur $\bar{G}(\mathbb{A})$

Comme $\bar{G}(\mathbb{A}) = N(\mathbb{A})\bar{M}(\mathbb{A})K$, d'après Fubini, $n \mapsto f(ng)$ est localement de carré intégrable sur $N(\mathbb{A})$ pour p.t g, et comme $N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})$ est compact, pour ~~p.t.~~ g, $n \mapsto f(ng)$ est dans $L^2(N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A}))$ $\subset L^1(N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A}))$

$$L^2_0(\omega) = \{ f \in L^2(\omega),\ f \text{ cuspidale, i.e } f_N \equiv 0 \}.$$