

1. Rappels : représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Rappelons que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}.$$

dont une base est donnée par les éléments :

$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifiant les relations de commutation

$$[h, e] = 2e \quad [h, f] = -2f \quad [e, f] = h$$

Théorème 1.1. — *Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, il existe à équivalence près une seule représentation irréductible (V_n, π_n) de dimension $n+1$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Il existe une base*

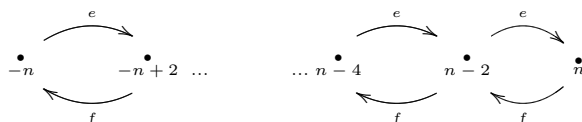
$$\{v_k\}_{k=-n, -n+2, \dots, n-2, n}$$

de V_n telle que l'action de h est diagonale dans cette base,

$$\pi_n(h) \cdot v_k = kv_k$$

L'opérateur $\pi_n(e)$ envoie v_k sur un multiple de v_{k+2} (sur 0 si $k = n$)

L'opérateur $\pi_n(f)$ envoie v_k sur v_{k-2} (sur 0 si $k = -n$)



En particulier, on voit que

- V_n est déterminée par son espace de plus haut poids $\mathbb{C} \cdot v_n$.

- Ce sous-espace poids $\mathbb{C} \cdot v_n$ est le noyau de $\pi_n(e)$. C'est une représentation de l'algèbre de Lie (abélienne) $\mathfrak{h} := \mathbb{C} \cdot h$.

Soit (π, V) une représentation \mathbb{C} -linéaire de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Appelons poids de V une valeur propre de $\pi(h)$ dans V . Il résulte de la complète réductibilité de V et de la structure des représentations irréductibles rappelée ci-dessus que

Corollaire 1.2. — - *Tous les poids de (π, V) sont entiers. La multiplicité d'un poids $k \in \mathbb{Z}$ est aussi celle de $-k$.*

- *Le nombre d'irréductibles dans la décomposition de V est donnée par la dimension de $\ker \pi(e)$.*

2. Représentations de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

Rappelons que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Lie des matrices carrées de taille n à coefficients complexes et de trace nulle. Dans la suite, nous noterons \mathfrak{g} cette algèbre de Lie, et considérons la sous-algèbre de Lie \mathfrak{h} de \mathfrak{g} constituée des matrices diagonales. Notons

$$\Delta(a_1, \dots, a_n), \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad \sum_i a_i = 0$$

l'élément de \mathfrak{h} dont les coefficients diagonaux sont a_1, \dots, a_n .

Pour tout $i = 1, \dots, n$, notons ϵ_i la forme linéaire sur \mathfrak{h} donnée par

$$\epsilon_i(\Delta(a_1, \dots, a_n)) = a_i.$$

Proposition 2.1. — \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Lie abélienne de \mathfrak{g} , maximale pour l'inclusion.

Notons $E_{i,j}$ la matrice élémentaire, dont tous les coefficients sont nuls, excepté celui de la i -ième ligne et j -ième colonne, qui vaut 1. Posons $H_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$. Il est clair que les \mathfrak{h}_i , $i = 1, \dots, n-1$, forment une base de \mathfrak{h} .

D'autre part, on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} [H, E_{i,j}] &= (\epsilon_i - \epsilon_j)(H)E_{i,j} \\ [E_{i,j}, E_{k,l}] &= \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj} \end{aligned}$$

où δ_{ab} est le symbole de Krönecker.

Les éléments $\epsilon_i - \epsilon_j$, $1 \leq i \neq j \leq n$ sont appelés les **racines** de l'algèbre \mathfrak{g} relativement à la sous-algèbre \mathfrak{h} . Les **racines simples** sont les racines de la forme $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$. Toute racine est une combinaison linéaire de racines simples avec des coefficients entiers, tous positifs (auquel cas la racine est dite **positive**, ou tous négatifs (auquel cas la racine est dite **négative**). Posons $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$.

On a :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C}E_{i,j}$$

Remarque 2.2. — Posons $E_i = E_{i,i+1}$, $F_i = E_{i+1,i}$, pour $i = 1, \dots, n-1$. Alors $\mathfrak{s}_i = \text{Vect}(H_i, E_i, F_i)$ est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} , isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Proposition 2.3. — Soit (π, V) une représentation \mathbb{C} -linéaire de dimension finie de \mathfrak{g} . Alors pour tout $H \in \mathfrak{h}$, $\pi(H)$ est diagonalisable.

Démonstration. H est combinaison linéaire des H_i qui commutent, donc il suffit de montrer que $\pi(H_i)$ est diagonalisable. On restreint la représentations π à \mathfrak{s}_i . D'après la théorie des représentations de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\pi(H_i)$ est diagonalisable. \square

Corollaire 2.4. — Les $\pi(H)$ sont simultanément diagonalisables :

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$$

où $V_\lambda = \{v \in V \mid \pi(H) \cdot v = \lambda(H)v, \forall H \in \mathfrak{h}\}$.

Si $V_\lambda \neq \{0\}$, on dit que λ est un **poids** de (π, V) .

Remarque 2.5. — Les racines de \mathfrak{g} relativement à la sous-algèbre \mathfrak{h} sont exactement les poids non nuls de \mathfrak{g} vue comme représentation pour l'action adjointe.

Proposition 2.6. — Les poids de (π, V) sont **entiers**, c'est-à-dire qu'ils vérifient

$$\lambda(H_i) \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

D'autre part, $\pi(E_i)(V_\lambda) \subset V_{\lambda+\alpha_i}$, $\pi(F_i)(V_\lambda) \subset V_{\lambda-\alpha_i}$.

Démonstration. On restreint à \mathfrak{s}_i et les résultats sont conséquences de la théorie pour \mathfrak{sl}_2 . \square

Notons \mathfrak{h}_0^* le sous-espace vectoriel réel engendré par les α_i , $i = 1, \dots, n-1$.

Lemme 2.7. — Si λ est un poids de (π, V) , alors $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$.

Démonstration. On écrit $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \alpha_i$, et le lemme précédent nous donne $\lambda(H_j) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \alpha_i(H_j) \in \mathbb{Z}$, pour tout $j = 1, \dots, n-1$. C'est un système de Cramer en les c_i , ils sont donc dans \mathbb{R} (en fait dans \mathbb{Q}).

On munit alors \mathfrak{h}_0^* de l'ordre lexicographique, c'est-à-dire, si

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \alpha_i, \quad \mu = \sum_{i=1}^{n-1} d_i \alpha_i$$

On a $\lambda < \mu$ si et seulement si $c_1 < d_1$, ou $c_1 = d_1$ et $c_2 < d_2$, ou $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$ et $c_3 < d_3$, ou etc.

Comme V est de dimension finie, V admet un poids maximal pour cet ordre.

Définition 2.8. — Un élément $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ est dit dominant si $\lambda(H_i) \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

Théorème 2.9. — 1- Une représentation irréductible \mathbb{C} -linéaire de dimension finie (π, V) de \mathfrak{g} admet un unique poids maximal λ . On dit que λ est le **plus haut poids** de (π, V) .

2- Les classes d'équivalence de représentations \mathbb{C} -linéaire irréductibles de dimension finie de \mathfrak{g} sont en bijection avec l'ensemble des poids entiers dominants de \mathfrak{h}_0^* , la correspondance étant donnée par

$$(\pi, V) \mapsto \lambda \text{ poids maximal de } V.$$

3- Si λ est le poids maximal de (π, V) , alors $\dim V_\lambda = 1$,

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \pi(E_i) \cdot v = 0, i = 1, \dots, n-1\},$$

les autres poids étant de la forme

$$\lambda - n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2 - \dots - n_{n-1}\alpha_{n-1}, \quad n_i \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. Soit (π, V) une représentation irréductible \mathbb{C} -linéaire de dimension finie de \mathfrak{g} et λ un poids maximal de \mathfrak{g} . Comme $\lambda + \alpha_i > \lambda$, par maximalité de λ , et donc $V_{\lambda + \alpha_i} = \{0\}$. Ceci montre l'inclusion \subset dans 3. Le même argument montre que si $i < j$, $\pi(E_{i,j}) \cdot v_0 = 0$.

Soit $v_0 \in V_\lambda$ non nul, et soit W_i le sous-espace de V engendré par tout les $\pi(F_i)^k \cdot v_0$, $k \in \mathbb{N}$. Il est clair que W_i est une représentation irréductible de la sous-algèbre \mathfrak{s}_i et la théorie des représentations de \mathfrak{sl}_2 nous dit que $\lambda(H_i) \in \mathbb{N}$, donc λ est dominant.

Soit maintenant W le sous espace de V engendré par les vecteurs de la forme

$$(*) \quad \pi(X_1) \cdot \pi(X_2) \cdot \pi(X_k) \cdot v_0, \quad x_i \in \mathfrak{g}$$

Comme les H_i , et les $E_{i,j}$, $i \neq j$ forment une base de \mathfrak{g} , par linéarité, on peut supposer que W est l'espace engendré par les vecteurs $(*)$ avec les X_i parmi les H_i et les $E_{i,j}$. En utilisant les relations de commutation entre ceux-ci, on peut de plus supposer qu'on met à gauche les $E_{i,j}$ avec $j < i$, puis les H_i , puis les $E_{i,j}$ avec $j > i$. Mais comme ces derniers annulent v_0 , et que les H_i agissent sur v_0 par multiplication par $\lambda(H_i)$, on voit que W est engendré par les vecteurs $(*)$, avec les X_i parmi les $E_{i,j}$, avec $j > i$. Or un tel vecteur est dans un espace $V_{\lambda - n_1\alpha_1 - \dots - n_{n-1}\alpha_{n-1}}$. D'autre part, W est stable par \mathfrak{g} , donc par irréductibilité de V , $W = V$. Ceci montre la dernière assertion du théorème.

Prenons maintenant un vecteur w non nul vérifiant $\pi(E_{i,j}) \cdot w = 0$ pour tout $i < j$, et formons l'espace W' obtenu comme W ci-dessus, en

remplaçant v_0 par w . Le même raisonnement montre que $W' = V$ et que tous les poids de V sont de la forme

$$\mu - n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2 - \dots - n_{n-1}\alpha_{n-1}, \quad n_i \in \mathbb{N}$$

où μ est un poids intervenant dans la décomposition de w selon $V = \bigoplus_{\mu} V_{\mu}$. Par maximalité de λ , on voit que la seule manière d'obtenir v à partir de w est que w soit colinéaire à v . Ceci montre l'inclusion inverse dans 3 et le fait que $\dim V_{\lambda} = 1$.

Il reste à montrer l'injectivité et la surjectivité de la correspondance. Pour la surjectivité, il est possible de construire pour chaque poids dominant entier une représentation \mathbb{C} -irréductible de dimension finie de \mathfrak{g} de plus haut poids λ (théorie des modules de Verma), mais ceci demande des outils qui dépassent le cadre de ce cours (algèbres enveloppantes). Pour l'injectivité, l'argument est assez joli : soient (π, V) et (π', V') des représentations irréductibles \mathbb{C} -linéaires de dimension finie de \mathfrak{g} de plus haut poids λ et soient v, v' non nuls respectivement dans V_{λ} et V'_{λ} . Soit S la sous-représentation de $V \oplus V'$ engendrée par $v + v'$ et soit $T \subset S$ une sous-représentation irréductible. Soit $w + w'$ un vecteur de plus haut poids de T . On a alors $\pi(E_i) \cdot w = \pi(E_i) \cdot w' = 0$ d'où $w \in V_{\lambda}$ et $w' \in V'_{\lambda}$. Ecrivons alors $w + w' = cv + c'v'$. Ce vecteur est dans S , donc il a été obtenu à partir de $v + v'$, et ceci n'est possible que si $c = c'$, d'où $T = S$. Considérons la projection de S sur V : elle est \mathfrak{g} -équivariante et non nulle : d'après le lemme de Schur, c'est un isomorphisme entre S et V . Idem pour S et V' . \square

Théorème 2.10. — Soit (π, V) une représentation irréductible \mathbb{C} -linéaire de dimension finie de \mathfrak{g} de plus haut poids $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors

$$\dim V = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j + (j - i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)}$$

3. Exemple : $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$

On a ici $\dim \mathfrak{h}_0^* = 2$ ce qui permet de faire un dessin. On y a représenté les deux vecteurs de base α_1 et α_2 , ainsi que les autres racines de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} (6 en tout). Les points noirs sont les poids entiers. Ceux à l'intérieur du cône délimité en rouge sont les poids dominants.

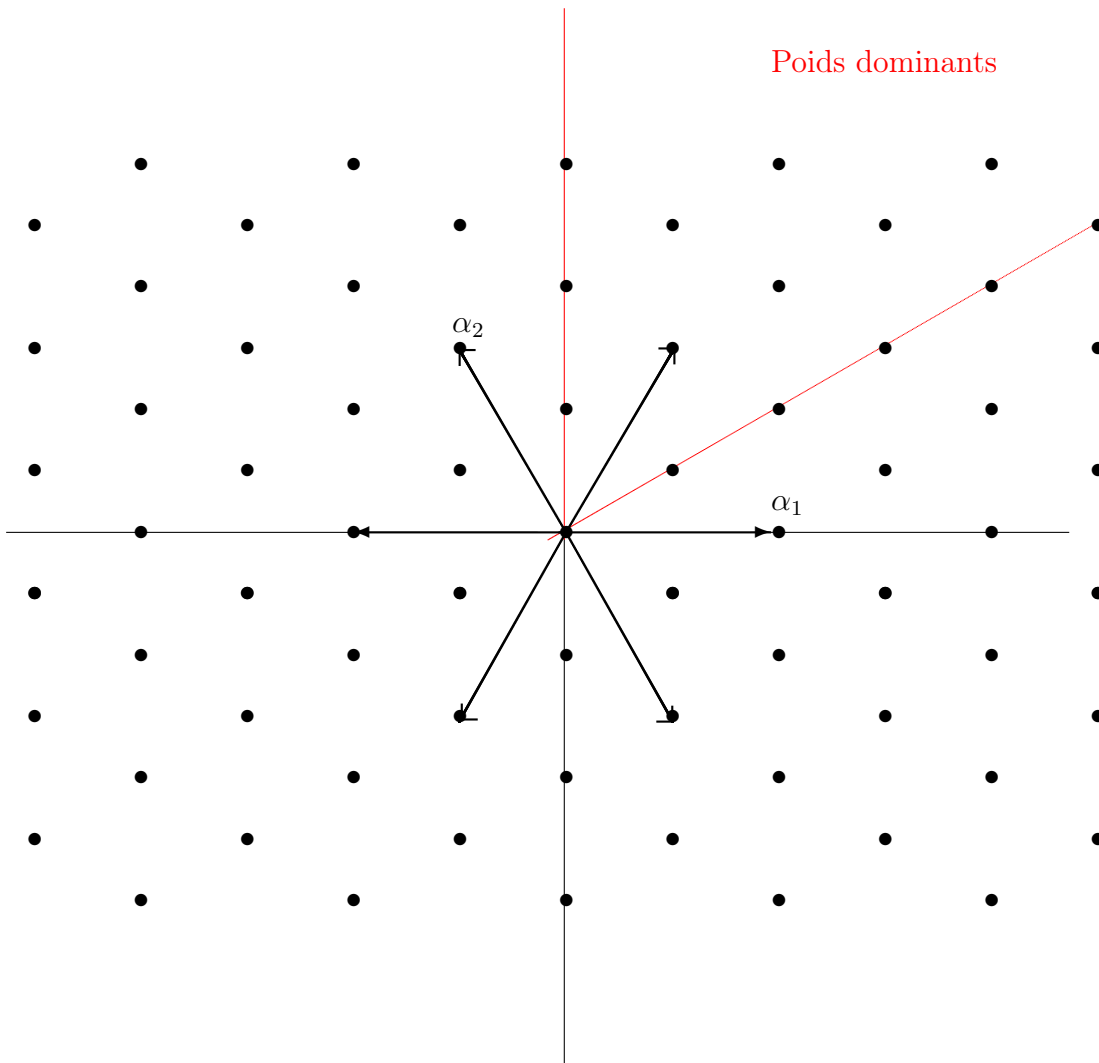


FIGURE 1. Poids de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$

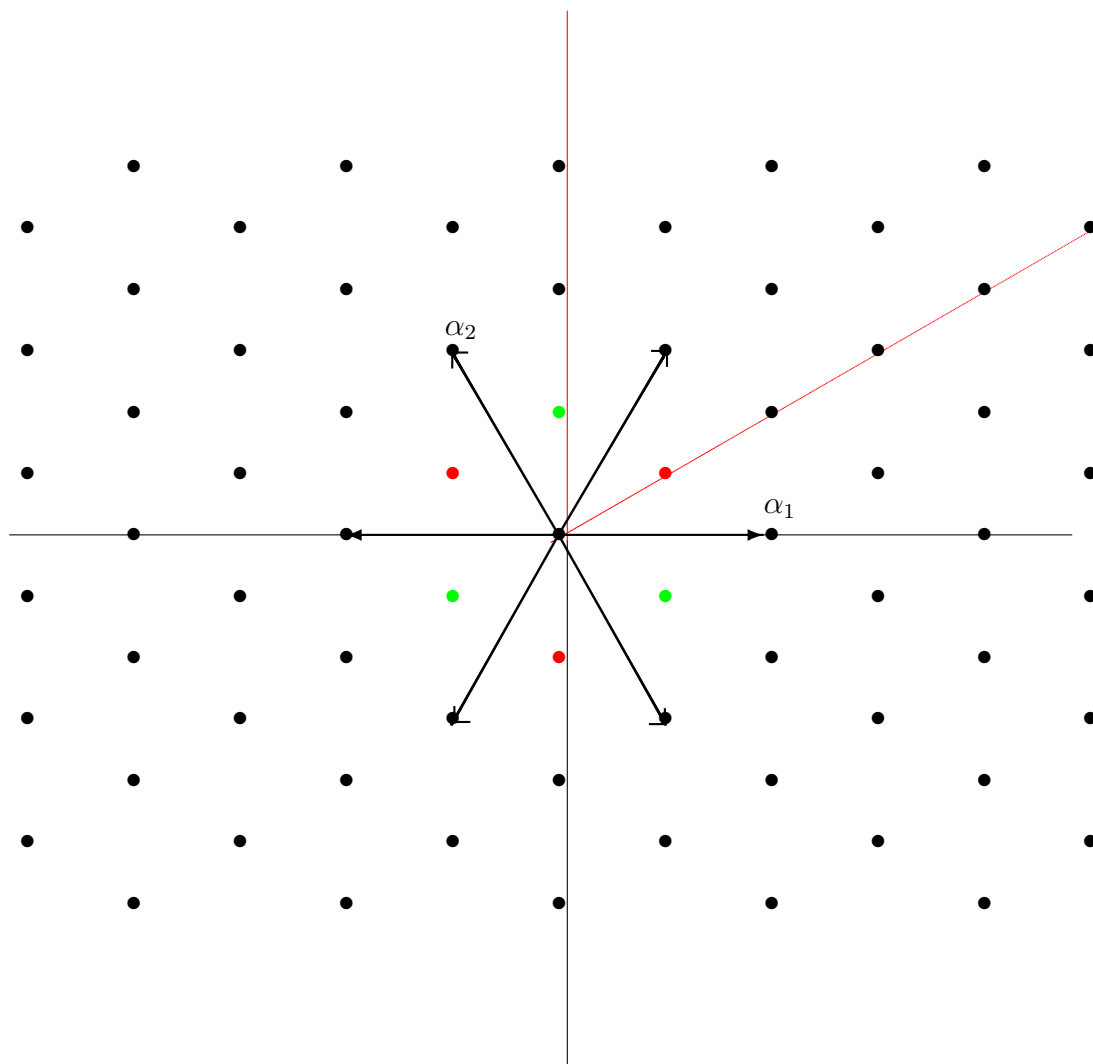


FIGURE 2. Dans cette figure, les poids en rouge sont ceux de la représentation standard de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, ceux en vert de sa contra-grédiente. Chaque poids apparaît avec multiplicité 1

28 novembre 2011

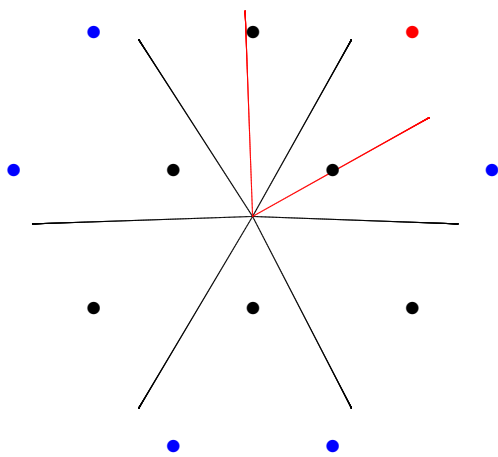


FIGURE 3. Les poids d'(une représentation de dimension 15.
Les trois poids intérieurs ont multiplicité 2

DAVID RENARD, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, Ecole Polytechnique