COMPLEXIFICATION DES ALGÈBRES DE LIE RÉELLES

par

David Renard

1. Complexification d'un espace vectoriel réel

Soit W un espace vectoriel complexe. On peut le considérer, par « oubli de structure » comme un espace vectoriel réel. Si W est de dimension finie d sur $\mathbb{C}$, alors il est de dimension finie $2d$ sur $\mathbb{R}$, et si $(e_1, \dots, e_d)$ est une base de V sur $\mathbb{C}$, $(e_1, ie_1, \dots e_d, ie_d)$ est une base de W sur $\mathbb{R}$.

Soit maintenant V un espace vectoriel réel. Comment lui associer naturellement un espace vectoriel $V_{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}$? Si l'on fixe une base $\mathcal{B} = (f_i)_{i \in I}$ de V, on peut écrire tout vecteur $v_i \in V$ de manière unique dans la base $\mathcal{B}$,

$$v = \sum_i c_i \ f_i, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

la somme étant à support fini, et formellement, on a envie de prendre $V_{\mathbb{C}}$ comme l'espace des combinaisons linéaires $\sum_i c_i \ f_i$, avec les c_i dans $\mathbb{C}$. Une manière de faire cela en évitant le choix d'une base est de prendre

$$V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

la structure complexe étant donnée par

$$\lambda(v \otimes z) = v \otimes \lambda z, \quad v \in V, \lambda, z \in \mathbb{C}.$$

Si $\mathcal{B} = (f_i)_{i \in I}$ est une base de Vsur $\mathbb{R}$, alors $(f_i \otimes 1)_{i \in I}$ est une base de $V_{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}$.

Un point important est que $V_{\mathbb{C}}$ vérifie la propriété universelle suivante : pour tout espace vectoriel complexe W, l'espace des applications

$\mathbb{R}$-linéaires de V dans W, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, est « naturellement isomorphe » à l'espace des applications $\mathbb{C}$-linéaires de $V_{\mathbb{C}}$ dans W, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W)$. Si ϕ est dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, on le prolonge en une application $\mathbb{C}$-linéaire de $V_{\mathbb{C}}$ dans W par la formule

$$\phi(v \otimes z) = z\phi(v), \quad v \in V,\ z \in \mathbb{C}.$$

2. Structure complexe conjuguée

Soit V un espace vectoriel complexe. Notons $\overline{V}$ l'espace vectoriel dont le groupe abélien sous-jacent est encore V, mais la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$) est donnée par

$$\lambda \cdot v := \bar{\lambda} v$$

Rappelons que si W est un espace vectoriel complexe et $\phi : V \to W$ est un morphisme de groupe additif, alors ϕ est dit sesquilinéaire s'il vérifie

$$\phi(\lambda v) = \bar{\lambda}\phi(v), \quad v \in V, \lambda \in \mathbb{C}.$$

On note $\mathrm{Hom}_{sq-\mathbb{C}}(V, W)$ l'ensemble des applications sesquilinéaire de V dans W. Il résulte clairement des définition que

$$\mathrm{Hom}_{sq-\mathbb{C}}(V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{V}, W). \tag{2.0.1}$$

Supposons maintenant que V soit obtenu en complexifiant un espace vectoriel réel V_0. Alors V est muni d'une conjugaison complexe,

$$\sigma : V \to V,\ X \mapsto \bar{X}$$

caractérisée par les deux propriétés suivantes :

- $\sigma(X) = \bar{X} = X$ si $X \in V_0$,
- σ est sesquilinéaire.

Il est d'autre part clair que σ réalise alors un isomorphisme entre V et $\overline{V}$.

3. Complexification d'un espace complexe

Nous allons voir que lorsque V est un espace vectoriel complexe, que l'on considère comme espace vectoriel réel, alors sa complexification vérifie $V_{\mathbb{C}} \simeq V \oplus \overline{V}$. Rappelons que la complexification est caractérisée par le fait que pour tout espace complexe W,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W).$$

Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)$. Posons

$$\phi^\sigma(v) = -i\phi(iv).$$

Alors le lecteur vérifiera rapidement que ϕ est $\mathbb{C}$-linéaire (resp. sesquilinéaire) si et seulement si $\phi = \phi^\sigma$ (resp. $\phi = -\phi^\sigma$). Comme on a pour tout ϕ, $\phi = \frac{\phi+\phi^\sigma}{2} + \frac{\phi-\phi^\sigma}{2}$, on voit que ϕ se décompose (de manière unique) en une somme d'un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire et d'un morphisme sesquilinéaire, c'est-à-dire

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W) \oplus \mathrm{Hom}_{sq-\mathbb{C}}(V,W).$$

D'où, d'après (**??**),

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{V},W) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V \oplus \overline{V},W).$$

L'espace $V \oplus \overline{V}$ vérifie la même propriété universelle que $V_{\mathbb{C}}$. En vertu de principes généraux on doit alors avoir un isomorphisme

$$V_{\mathbb{C}} \simeq V \oplus \overline{V}.$$

Pour le trouver explicitement, prenons $W = V \oplus \overline{V}$ et regardons à quoi correspond l'identité de cet espace dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, V \oplus \overline{V})$: ce sera l'isomorphisme cherché. En retraçant la chaîne d'isomorphismes

$$\mathrm{Id}_{V\oplus\overline{V}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V \oplus \overline{V}, V \oplus \overline{V})$$

correspond à

$$i_1 + i_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V \oplus \overline{V}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{V}, V \oplus \overline{V})$$

où i_1 (resp. i_2 est l'inclusion de V (resp. de $\overline{V}$) dans$V \oplus \overline{V}$, puis à

$$i_1 + i_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V \oplus \overline{V}) \oplus \mathrm{Hom}_{sq-\mathbb{C}}(V, V \oplus \overline{V}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V \oplus \overline{V})$$

la formule explicite est alors $X \mapsto (X,X) \in V \oplus \overline{V}$ et l'isomorphisme final entre $V_{\mathbb{C}}$ et $V \oplus \overline{V}$ est alors donné par complexification

$$X \otimes z \mapsto z(X,X) = (zX, z\cdot X) = (zX, \bar{z}X).$$

Lorsque que V est obtenu en complexifiant un espace vectoriel réel V_0, on peut en plus composer cet isomorphisme avec celui entre V et $\overline{V}$ pour obtenir

$$X \otimes z \mapsto z(X,\bar{X}) = (zX, \bar{z}\bar{X}), \quad V_{\mathbb{C}} \simeq V \oplus V.$$

4. Complexification des algèbres de Lie

Tout ce qui précède peut être appliqué en remplaçant partout les espaces vectoriels par des algèbres de Lie, et les applications linéaires par des morphismes d'algèbres de Lie. Pour résumer la discussion dans ce cas, on a en général, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{g} \oplus \overline{\mathfrak{g}}, \quad X \otimes z \mapsto z \cdot (X, X)$$

et si $\mathfrak{g}$ est elle-même obtenue par complexification d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_0$, en notant $X \mapsto \bar{X}$ la conjugason dans $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{g}_0$, on a

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, \quad X \otimes z \mapsto z \cdot (X, \bar{X}).$$

---

28 novembre 2011

David Renard, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, Ecole Polytechnique