

page 10 : le stabilisateur  $\mathbf{Stab}_G(Y)$  d'une partie  $Y$  d'un  $G$ -ensemble  $X$  tel qu'il est défini là, n'est en général pas un sous-groupe de  $G$ . En effet, si la partie  $Y$  est infinie, rien n'assure que l'inverse d'un élément de  $\mathbf{Stab}_G(Y)$  est bien dans  $\mathbf{Stab}_G(Y)$ . Il faut donc ajouter cette condition dans la définition, en remarquant qu'elle est automatique si  $Y$  est finie.

$$\mathbf{Stab}_G(Y) = \{g \in G \mid (\forall y \in Y), g \cdot y \in Y, g^{-1} \cdot y \in Y\}$$

page 67 : exercice II.8.15, 4-  
lire  $\frac{N}{n}\text{Id}_{N^2} - (a_{kl})_{k,l}$  au lieu de  $\frac{N}{n}\text{Id}_E - (a_{kl})_{k,l}$ .

page 73 : exercice III.1.2 : il y a un problème dans la définition de l'action de  $G$  sur l'espace des section de  $p$ . Parler simplement de l'action par « translation à droite » est insuffisant et induit en erreur. Pour mettre tout ceci au clair, voir ci-dessous le complément sur les représentations induites.

page 77, exercice III.4.4 : remplacer « Montrer que pour tout  $g \in G$ ,  $H(gK) = (K \cap g^{-1}Hg) \setminus K$  » par « Montrer que pour tout  $g \in G$ ,  $(Hg) \cdot K = (K \cap g^{-1}Hg) \setminus K$  » et remplacer la note de bas de page par  $(Hg) \cdot K$  est l'orbite sous l'action de  $K$  dans  $H \setminus G$  du point  $Hg$ .

page 90, ligne 4 : remplacer  $\lambda_i > 0$  par  $\lambda_i \neq 0$ .

page 114 : bas de page, la notation pour la composante connexe de l'identité de  $\mathbf{SO}(2, 1)$  est  $\mathbf{SO}_0(2, 1)$  et non  $\mathbf{SO}_e(2, 1)$

page 139, exercice VI.2.7 : la formule finale est fausse. Il faut lire :

« En déduire que pour  $n \geq m$ ,  $\pi_n \otimes \pi_m \simeq \sum_{l=0}^m \pi_{n+m-2l}$ .

page 140, exercice VI.3.1 : remplacer les matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## A PROPOS DES REPRÉSENTATIONS INDUITES

Soient  $G$  un groupe fini,  $H$  un sous-groupe de  $G$  et  $(\rho, W)$  une représentation de dimension finie de  $H$ . Notons  $I_H^G(\rho, W)$  la représentation induite de  $(\rho, W)$  en une représentation de  $G$ . Rappelons que l'espace de cette représentation est

$$I_H^G(W) = \{f : G \rightarrow W \mid f(hg) = \rho(h) \cdot f(g), \forall h \in H, \forall g \in G\}$$

et que l'action de  $G$  sur cet espace est donnée par translation à droite de la variable

$$(g \cdot f)(x) = f(xg), \forall x, g \in G.$$

Donnons une autre réalisation de cette représentation induite. Le groupe  $H$  agit dans  $G \times W$ , l'action de  $H$  étant donnée par

$$h \cdot (g, w) = (hg, \rho(h) \cdot w), \quad w \in W, h \in H, g \in G$$

On note  $[g, w]$  l'orbite de  $(g, w) \in G \times W$  pour cette action et l'on note  $G \times_H W$  l'ensemble des orbites.

Le groupe  $G$  agit lui aussi sur  $G \times W$  par

$$k \cdot (g, w) = (gk^{-1}, w), \quad w \in W, g, k \in G.$$

Cette action commute avec la précédente, et elle induit donc une action de  $G$  sur  $G \times_H W$  :

$$k \cdot [g, w] = [gk^{-1}, w], \quad w \in W, g, k \in G.$$

D'autre part, on dispose d'une projection naturelle

$$p : G \times_H W \rightarrow H \backslash G, \quad [g, w] \mapsto Hg.$$

Cette projection est  $G$ -équivariante pour l'action de  $G$  sur  $G \times_H W$  donnée ci-dessus et l'action naturelle par translation à droite sur  $H \backslash G$ , en effet

$$p(k \cdot [g, w]) = p([gk^{-1}, w]) = Hgk^{-1} = k \cdot (Hg) = k \cdot p([g, w]), \quad w \in W, g, k \in G.$$

Introduisons l'espace  $\mathcal{I}_H^G(W)$  des sections de  $p$ , c'est-à-dire des fonctions

$$s : H \backslash G \rightarrow G \times_H W$$

vérifiant  $p \circ s(Hg) = Hg$  pour tout  $g \in G$ . C'est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, sur lequel  $G$  agit par :

$$(k \cdot s)(Hg) = k \cdot s(Hgk), \quad s \in \mathcal{I}_H^G(W), g, k \in G.$$

En effet,  $k \cdot s$  ainsi défini est encore une section, comme le montre le calcul suivant : on peut écrire  $s(Hgk) = [gk, w]$  pour un certain  $w \in W$ . On a alors

$$p((k \cdot s)(Hg)) = p(k \cdot s(Hgk)) = p(k \cdot [gk, w]) = p([g, w]) = Hg.$$

On vérifie aussi immédiatement que l'on a bien  $(k_1 k_2) \cdot s = k_1 \cdot (k_2 \cdot s)$  quels que soient  $s \in \mathcal{I}_H^G(W)$  et  $k_1, k_2 \in G$ .

**Proposition 0.1.** *Les représentations de  $G$  dans les espaces  $I_H^G(W)$  et  $\mathcal{I}_H^G(W)$  sont isomorphes.*

*Proof.* Définissons  $\Phi : I_H^G(W) \rightarrow \mathcal{I}_H^G(W)$  de la manière suivante : Si  $f$  une fonction dans  $I_H^G(W)$ , on pose

$$\Phi(f) : H \backslash G \rightarrow G \times_H W, \quad \Phi(f)(Hg) = [g, f(g)].$$

Vérifions tout d'abord que  $\Phi(f)$  est bien une section de  $p$  :

$$p(\Phi(f)(Hg)) = p([g, f(g)]) = Hg.$$

Il est clair que  $\Phi$  est linéaire. Montrons que c'est un opérateur d'entrelacement pour les actions de  $G$  dans  $I_H^G(W)$  et  $\mathcal{I}_H^G(W)$  respectivement :

$$\begin{aligned} (k \cdot \Phi(f))(Hg) &= k \cdot (\Phi(f))(Hkg) = k \cdot ([kg, f(kg)]) = [g, f(kg)] \\ &= [g, (k \cdot f)(g)] = \Phi(k \cdot f)(Hg), \end{aligned}$$

quels que soient  $f \in I_H^G(W)$ ,  $g, k \in G$ .

Pour montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme, il suffit d'exhiber l'inverse. Définissons

$$\Psi : \mathcal{I}_H^G(W) \rightarrow I_H^G(W)$$

de la manière suivante. Si  $s$  est dans  $\mathcal{I}_H^G(W)$ , on peut écrire pour tout  $g \in G$ , de manière unique,

$$s(Hg) = [g, w].$$

On pose alors :

$$\Psi(s)(g) = w.$$

Vérifions que la fonction obtenue est bien dans  $I_H^G(W)$ . On a, quels que soient  $g \in G$  et  $h \in H$ ,  $s(Hg) = [g, w] = [hg, \rho(h) \cdot w]$  d'où

$$\Psi(s)(hg) = \rho(h) \cdot w = \rho(g) \cdot \Psi(s)(g).$$

Il est clair que  $\Psi$  est linéaire et que  $\Psi \circ \Phi(f) = f$  pour toute fonction  $f$  dans  $I_H^G(W)$ . Ceci termine la démonstration (il est inutile de vérifier que  $\Psi$  est un opérateur d'entrelacement. Etant l'inverse d'un opérateur d'entrelacement, il l'est nécessairement).  $\square$

Définissons le support d'une section  $s \in \mathcal{I}_H^G(W)$  comme le complémentaire dans  $H \backslash G$  de l'ensemble des classes  $Hg$  telles que  $s(Hg) = [g, 0]$ . Notons  $\mathcal{I}_H^G(W)_{|Hg}$  l'ensemble des sections de support réduit à la classe  $Hg$ . Il est clair que chaque  $\mathcal{I}_H^G(W)_{|Hg}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{I}_H^G(W)$  et que

$$\mathcal{I}_H^G(W) = \bigoplus_{Hg \in H \backslash G} \mathcal{I}_H^G(W)_{|Hg}.$$

D'autre part, chaque  $\mathcal{I}_H^G(W)_{|Hg}$  s'identifie à la fibre au-dessus de  $Hg$ , c'est-à-dire à l'ensemble des classes dans  $G \times_H W$  ayant un représentant de la forme  $[g, w]$ , ensemble qui lui-même s'identifie (mais de manière non canonique) à l'espace  $W$ . En effet, un élément de la fibre à une

écriture unique sous la forme  $[g, w]$ . Si  $s$  est une section à support dans  $Hg$ ,  $s \mapsto w$  où  $w$  est donné par  $s(Hg) = [g, w]$  définit donc un isomorphisme entre  $\mathcal{I}_H^G(W)|_{Hg}$  et  $W$ .

Calculons le caractère de la représentation induite  $\mathcal{I}_H^G(W)$  en un élément  $g \in G$ . Pour qu'il y ait une contribution non nulle à la trace, d'après la décomposition en somme directe ci-dessus, elle ne peut provenir que des espaces  $\mathcal{I}_H^G(W)|_{Hk}$  stables sous l'action de  $g$ , c'est-à-dire telles que  $Hkg = Hk$ , ou encore  $kgk^{-1} \in H$ . Soit  $Hk$  une telle classe et soit  $s$  une section dans  $\mathcal{I}_H^G(W)|_{Hk}$ . Ecrivons  $s(Hk) = [k, w]$  de sorte que  $s \mapsto w$  dans l'isomorphisme entre  $\mathcal{I}_H^G(W)|_{Hk}$  et  $W$ . Alors  $g \cdot s$  correspond à l'élément  $\rho(kgk^{-1}) \cdot w$  par cet isomorphisme. En effet

$$\begin{aligned} (g \cdot s)(Hk) &= g \cdot s(Hkg) = g \cdot s(H(kgk^{-1})k) = g \cdot s(Hk) = g \cdot [k, w] = [kg^{-1}, w] \\ &= [(kg^{-1}k^{-1})k, w] = [k, \rho(kgk^{-1}) \cdot w] \end{aligned}$$

La contribution à la trace est donc  $\Theta_\rho(kgk^{-1})$  et l'on somme sur les classes  $Hk$  telles que  $Hkg = Hk$  pour obtenir le caractère.