page 10 : le stabilisateur $\mathbf{Stab}_G(Y)$ d'une partie Y d'un G-ensemble X tel qu'il est défini là, n'est en général pas un sous-groupe de G. En effet, si la partie Y est infinie, rien n'assure que l'inverse d'un élément de $\mathbf{Stab}_G(Y)$ est bien dans $\mathbf{Stab}_G(Y)$. Il faut donc ajouter cette condition dans la définition, en remarquant qu'elle est automatique si Y est finie.

$$\mathbf{Stab}_G(Y) = \{g \in G | \, (\forall y \in Y), g \cdot y \in Y, g^{-1} \cdot y \in Y\}$$

page 67 : exercice II.8.15, 4-
lire $\frac{N}{n}\mathrm{Id}_{N^2} - (a_{kl})_{k,l}$ au lieu de $\frac{N}{n}\mathrm{Id}_E - (a_{kl})_{k,l}$.

page 73 : exercice III.1.2 : il y a un problème dans la définition de l'action de G sur l'espace des section de p. Parler simplement de l'action par « translation à droite » est insuffisant et induit en erreur. Pour mettre tout ceci au clair, voir ci-dessous le complément sur les représentations induites.

page 77, exercice III.4.4 : remplacer « Montrer que pour tout $g \in G$, $H(gK) = (K \cap g^{-1}Hg)\backslash K$ » par « Montrer que pour tout $g \in G$, $(Hg) \cdot K = (K \cap g^{-1}Hg)\backslash K$ » et remplacer la note de bas de page par $(Hg) \cdot K$ est l'orbite sous l'action de K dans $H\backslash G$ du point Hg.

page 90, ligne 4 : remplacer $\lambda_i > 0$ par $\lambda_i \neq 0$.

page 114 : bas de page, la notation pour la composante connexe de l'identité de $\mathbf{SO}(2,1)$ est $\mathbf{SO}_0(2,1)$ et non $\mathbf{SO}_e(2,1)$

page 139, exercice VI.2.7 : la formule finale est fausse. Il faut lire :
« En déduire que pour $n \geq m$, $\pi_n \otimes \pi_m \simeq \sum_{l=0}^{m} \pi_{n+m-2l}$.

page 140, exercice VI.3.1 : remplacer les matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A propos des représentations induites

Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G et (ρ, W) une représentation de dimension finie de H. Notons $I_H^G(\rho, W)$ la représentation induite de (ρ, W) en une représentation de G. Rappelons que l'espace de cette représentation est

$$I_H^G(W) = \{f : G \to W \mid f(hg) = \rho(h) \cdot f(g), \forall h \in H, \forall g \in G\}$$

et que l'action de G sur cet espace est donnée par translation à droite de la variable

$$(g \cdot f)(x) = f(xg), \forall x, g \in G.$$

Donnons une autre réalisation de cette représentation induite. Le groupe H agit dans $G \times W$, l'action de H étant donnée par

$$h \cdot (g, w) = (hg, \rho(h) \cdot w), \quad w \in W, h \in H, g \in G$$

On note $[g, w]$ l'orbite de $(g, w) \in G \times W$ pour cette action et l'on note $G \times_H W$ l'ensemble des orbites.

Le groupe G agit lui aussi sur $G \times W$ par

$$k \cdot (g, w) = (gk^{-1}, w), \quad w \in W, g, k \in G.$$

Cette action commute avec la précédente, et elle induit donc une action de G sur $G \times_H W$:

$$k \cdot [g, w] = [gk^{-1}, w], \quad w \in W, g, k \in G.$$

D'autre part, on dispose d'une projection naturelle

$$p : G \times_H W \to H\backslash G, \quad [g, w] \mapsto Hg.$$

Cette projection est G-équivariante pour l'action de G sur $G \times_H W$ donnée ci-dessus et l'action naturelle par translation à droite sur $H\backslash G$, en effet

$$p(k\cdot[g, w]) = p([gk^{-1}, w]) = Hgk^{-1} = k\cdot(Hg) = k\cdot p([g, w]), \ w \in W, \ g, k \in G.$$

Introduisons l'espace $\mathcal{I}_H^G(W)$ des sections de p, c'est-à-dire des fonctions

$$s : H\backslash G \to G \times_H W$$

vérifiant $p \circ s(Hg) = Hg$ pour tout $g \in G$. C'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, sur lequel G agit par :

$$(k \cdot s)(Hg) = k \cdot s(Hgk), \quad s \in \mathcal{I}_H^G(W), \ g, k \in G.$$

En effet, $k \cdot s$ ainsi défini est encore une section, comme le montre le calcul suivant : on peut écrire $s(Hgk) = [gk, w]$ pour un certain $w \in W$. On a alors

$$p((k \cdot s)(Hg)) = p(k \cdot s(Hgk)) = p(k \cdot [gk, w]) = p([g, w]) = Hg.$$

On vérifie aussi immédiatement que l'on a bien $(k_1k_2) \cdot s = k_1 \cdot (k_2 \cdot s)$ quels que soient $s \in \mathcal{I}_H^G(W)$ et $k_1, k_2 \in G$.

Proposition 0.1. *Les représentations de G dans les espaces $I_H^G(W)$ et $\mathcal{I}_H^G(W)$ sont isomorphes.*

Proof. Définissons $\Phi : I_H^G(W) \to \mathcal{I}_H^G(W)$ de la manière suivante : Si f une fonction dans $I_H^G(W)$, on pose

$$\Phi(f) :\ H\backslash G \to G \times_H W, \quad \Phi(f)(Hg) = [g, f(g)].$$

Vérifions tout d'abord que $\Phi(f)$ est bien une section de p :

$$p(\Phi(f)(Hg)) = p([g, f(g)]) = Hg.$$

Il est clair que Φ est linéaire. Montrons que c'est un opérateur d'entrelacement pour les actions de G dans $I_H^G(W)$ et $\mathcal{I}_H^G(W)$ respectivement :

$$(k \cdot \Phi(f))(Hg)) = k \cdot (\Phi(f))(Hgk)) = k \cdot ([gk, f(gk)]) = [g, f(gk)])$$
$$=[g, (k \cdot f)(g)] = \Phi(k \cdot f)(Hg),$$

quels que soient $f \in I_H^G(W)$, $g, k \in G$.

Pour montrer que Φ est un isomorphisme, il suffit d'exhiber l'inverse. Définissons

$$\Psi :\ \mathcal{I}_H^G(W) \to I_H^G(W)$$

de la manière suivante. Si s est dans $\mathcal{I}_H^G(W)$, on peut écrire pour tout $g \in G$, de manière unique,

$$s(Hg) = [g, w].$$

On pose alors :

$$\Psi(s)(g) = w.$$

Vérifions que la fonction obtenue est bien dans $I_H^G(W)$. On a, quels que soient $g \in G$ et $h \in H$, $s(Hg) = [g, w] = [hg, \rho(h) \cdot w]$ d'où

$$\Psi(s)(hg) = \rho(h) \cdot w = \rho(g) \cdot \Psi(s)(g).$$

Il est clair que Ψ est linéaire et que $\Psi \circ \Phi(f) = f$ pour toute fonction f dans $I_H^G(W)$. Ceci termine la démonstration (il est inutile de vérifier que Ψ est un opérateur d'entrelacement. Etant l'inverse d'un opérateur d'entrelacement, il l'est nécessairement). $\square$

Définissons le support d'une section $s \in \mathcal{I}_H^G(W)$ comme le complémentaire dans $H\backslash G$ de l'ensemble des classes Hg telles que $s(Hg) = [g, 0]$. Notons $\mathcal{I}_H^G(W)_{|Hg}$ l'ensemble des sections de support réduit à la classe Hg. Il est clair que chaque $\mathcal{I}_H^G(W)_{|Hg}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{I}_H^G(W)$ et que

$$\mathcal{I}_H^G(W) = \bigoplus_{Hg \in H\backslash G} \mathcal{I}_H^G(W)_{|Hg}.$$

D'autre part, chaque $\mathcal{I}_H^G(W)_{|Hg}$ s'identifie à la fibre au-dessus de Hg, c'est-à-dire à l'ensemble des classes dans $G \times_H W$ ayant un représentant de la forme $[g, w]$, ensemble qui lui-même s'identifie (mais de manière non canonique) à l'espace W. En effet, un élément de la fibre à une écriture unique sous la forme $[g, w]$. Si s est une section à support dans Hg, $s \mapsto w$ où w est donné par $s(Hg) = [g, w]$ définit donc un isomorphisme entre $\mathcal{I}_H^G(W)_{|Hg}$ et W.

Calculons le caractère de la représentation induite $\mathcal{I}_H^G(W)$ en un élément $g \in G$. Pour qu'il y ait une contribution non nulle à la trace, d'après la décomposition en somme directe ci-dessus, elle ne peut provenir que des espaces $\mathcal{I}_H^G(W)_{|Hk}$ stables sous l'action de g, c'est-à-dire telles que $Hkg = Hk$, ou encore $kgk^{-1} \in H$. Soit Hk une telle classe et soit s une section dans $\mathcal{I}_H^G(W)_{|Hk}$. Ecrivons $s(Hk) = [k, w]$ de sorte que $s \mapsto w$ dans l'isomorphisme entre $\mathcal{I}_H^G(W)_{|Hk}$ et W. Alors $g \cdot s$ correspond à l'élément $\rho(kgk^{-1}) \cdot w$ par cet isomorphisme. En effet

$$(g \cdot s)(Hk) = g \cdot s(Hkg) = g \cdot s(H(kgk^{-1})k) = g \cdot s(Hk) = g \cdot [k, w] = [kg^{-1}, w]$$
$$=[(kg^{-1}k^{-1})k, w] = [k, \rho(kgk^{-1}) \cdot w]$$

La contribution à la trace est donc $\Theta_\rho(kgk^{-1})$ et l'on somme sur les classes Hk telles que $Hkg = Hk$ pour obtenir le caractère.