Représentations des groupes réductifs p-adiques

David Renard
Centre de Mathématiques
Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

19 février 2020

Table des matières

Préface

Le but de ce livre est de présenter, sous une forme plus ou moins complète, les bases de la théorie des représentations des groupes réductifs p-adiques. Dans ce sujet se mêlent une vision géométrique, ne pouvant être développée que par l'étude soigneuse d'exemples explicites, et l'utilisation de résultats et principes très généraux, relevant de ce que les anglo-saxons appellent ≪ l'abstract nonsense ≫, c'est-à-dire la théorie des catégories. [1] L'un des promoteurs principaux de l'utilisation de ces techniques est J. Bernstein, à qui beaucoup de résultats fondamentaux sont dûs, en particulier ceux autour de ce que l'on appelle le *centre de Bernstein*.

L'idée de départ était d'en faire une présentation telle qu'on la trouve esquissée dans les notes plus ou moins officielles de J. Bernstein [1], [2], mais qui n'a pas, à notre connaissance, été exposée complètement sous une forme publiable. Il existe des textes, plus vieux, où l'on peut trouver les bases de la théorie et la démonstration de ses principaux résultats, dûs à Bernstein, Casselman, Harish-Chandra, Howe, Jacquet, Zelevinskii ([3], [4], [19], [40]). On trouve ensuite la rédaction très claire et complète de P. Deligne [23] des idées de Bernstein sur le ≪ centre ≫. Toutefois, les textes [1] et [2], postérieurs à celui de Deligne, proposent une approche sensiblement différente de ces résultats, qui nous semble encore plus élégante et de plus grande portée. D'autre part, des spécialistes du domaine ont parfois mis à disposition sur le web leur notes sur le sujet, donnant ou complétant les démonstrations de [1], [2], par exemple [22], [37]. Mais aucun de ces textes ne couvre la totalité de la théorie de Bernstein. Le besoin d'un livre se faisait donc sentir. Des conversations avec des collègues ont confirmé cette impression, ce qui m'a motivé à entreprendre cette tâche. Etant plutôt ≪ réel ≫ que ≪ p-adicien ≫, je n'étais pas le mieux placé pour ce travail, ce qui se reflète sans doute dans les imperfections de ce texte. Mais comme beaucoup le savent, le meilleur moyen d'apprendre un sujet est de l'enseigner devant des étudiants, ou d'écrire un livre dessus. J'espère tout de même que d'autres, novices ou spécialistes, en tireront profit.

Donnons maintenant un aperçu du contenu du livre, ainsi que des indications sur la manière de le lire. Chaque chapitre est précédé d'une introduction décrivant son contenu et est suivi de notes où nous avons essayé d'attribuer les résultats et indiqué les sources utilisées pour la rédaction des démonstrations. Nous serons donc brefs dans cette introduction générale.

La théorie des représentations lisses des groupes réductifs p-adiques est exposée dans les chapitres VI et VII, qui constituent le coeur du livre. Les outils principaux de cette étude sont les foncteurs d'induction et de restriction paraboliques, la notion de représentation supercuspidale et les propriétés de finitude de celles-ci provenant de la structure fine des groupes réductifs p-adiques. La catégorie des représentations lisses d'un groupe réductif p-adique est étudiée au chapitre VI, où sont établis entre autres résultats le théorème de décomposition de Bernstein et la détermination du centre de cette catégorie. Le chapitre VII traite des représentations de carré intégrable, des représentations tempérées, des opérateurs d'entrelacement, et culmine avec

1. Le concept le plus important à cet égard est celui d'adjonction, qui s'incarne en théorie des représentations sous le nom de ≪ réciprocité de Frobenius ≫.

le théorème de classification de Langlands.

Les chapitres précédents placent cette étude dans un cadre plus général : un groupe réductif p-adique est en particulier un groupe topologique totalement discontinu. La théorie des représentations de cette classe de groupes est développée dans les chapitres III et IV. Le chapitre II présente des résultats généraux de topologie des espaces totalement discontinus (fonctions, distributions, faisceaux) et des groupes totalement discontinus (mesure de Haar, convolution, algèbre de Hecke). On utilise de manière essentielle le langage de la théorie des catégories : soit G un groupe topologique totalement discontinu. L'objet d'étude principal du chapitre III est la catégorie $\mathcal{M}(G)$ des représentations lisses (*i.e.* continues) de G dans des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On montre que cette catégorie est équivalente à celle des modules non dégénérés sur l'algèbre de Hecke de G, qui est une algèbre à idempotents. Les notions d'algèbre à idempotents et de modules non dégénérés pour une telle algèbre font l'objet du chapitre I du livre. De nombreux résultats sur la catégorie $\mathcal{M}(G)$ résultent alors immédiatement de ceux obtenus dans le cadre purement algébrique du chapitre I. En particulier, les foncteurs d'oubli et de changement de base de la théorie des modules donnent des foncteurs entre catégories de représentations lisses de groupes totalement discontinus. Le chapitre IV étudie des classes particulières de représentations : représentations compactes, unitaires, de carré intégrable modulo le centre. Les représentations compactes se comportent comme les représentations d'un groupe compact et leurs propriétés sont tout à fait essentielles à la suite de la théorie.

Pour aller plus avant, il faut restreindre la classe de groupes étudiés à des groupes possédant plus de structure. Les groupes réductifs p-adiques ont une structure très riche, qui provient d'une part de la théorie générale des groupes algébriques réductifs, et d'autre part de la théorie de Bruhat-Tits. Ces résultats de structure sont simplement rappelés dans le chapitre V. Nous avons toutefois essayé de les présenter soigneusement, en introduisant les notations nécessaires, en les ordonnant et en donnant les références précises des résultats non démontrés.

Ce livre ne se lit pas forcément linéairement. Le lecteur ayant déjà une certaine connaissance du sujet pourra commencer sa lecture directement au chapitre VI et se reporter aux chapitres précédents selon ses besoins.

Les quatre premiers chapitres demandent très peu de pré-requis mathématiques, mais une certaine familiarité avec le langage de la théorie des catégories est nécessaire. Les rudiments de cette théorie sont donnés dans l'annexe A. Les chapitres VI et VII ne sont accessibles qu'aux lecteurs ayant une bonne connaissance des groupes réductifs, et le chapitre V ne peut qu'au plus servir de guide à l'étudiant qui devra se reporter à la bibliographie donnée. En particulier, l'étude d'exemples est indispensable à ce stade, et le lecteur n'en trouvera aucun dans ce livre.

Remerciements

Je tiens à remercier vivement J. Bernstein pour avoir donné son assentiment à la rédaction de ce livre présentant nombre (mais pas toutes) de ses idées sur la théorie des représentations des groupes réductifs p-adiques. Je voudrais aussi remercier les spécialistes du sujet qui ont bien voulu répondre à mes questions au cours de mon apprentissage : A. Badulescu, G. Chenevier, G. Muic, P. Garrett, et plus particulièrement S. DeBacker, A. Roche et J-F. Dat qui ont aussi acceptés que je reprenne, pratiquement mot à mot, certaines démonstrations de leur notes ou articles. Y. Laszlo m'a aidé, avec patience, à comprendre quelques notions de géométrie algébrique, certaines nécessaires à la lecture (et donc à l'écriture) de ce livre. Enfin, un referee anonyme a remarqué de nombreuses erreurs, parfois embarrassantes, et suggéré quelques simplifications de

démonstrations.

Bien entendu, les erreurs et imperfections restantes sont de mon entière responsabilité. Enfin, la connaissance absolue des arcanes de l'informatique et des mystères de Latex de S. Aicardi a été un secours précieux.

Chapitre I

Algèbres à idempotents

La théorie des représentations d'un groupe fini G (disons à valeurs dans des espaces vectoriels complexes) se ramène à l'étude de la catégorie $\mathcal{M}(\mathbb{C}[G])$ des modules unitaires [1] sur l'algèbre du groupe $\mathbb{C}[G]$. De multiples constructions et résultats en découlent alors. Pour des groupes plus généraux, une idée importante est de définir une ≪ bonne ≫ catégorie de représentations à étudier, c'est-à-dire assez riche pour contenir les représentations auxquelles on est susceptible de s'intéresser, et dont on puisse néanmoins montrer qu'elle est équivalente à une catégorie de modules sur une certaine $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{H}(G)$, de manière à ce que les constructions faites dans le cas des groupes finis se généralisent. Il est possible de définir une telle catégorie lorsque G est le groupe des points rationels d'un groupe algébrique connexe et réductif défini sur un corps local $\mathbb{F}$ de. Dans le cas où $\mathbb{F}$ est un corps p-adique, nous verrons dans les chapitres suivants la définition de la catégorie des représentations lisses du groupe G, et l'équivalence de cette catégorie avec une catégorie de modules sur une certaine $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{H}(G)$, *l'algèbre de Hecke* de G. De même, si $\mathbb{F}$ est archimédien, la catégorie des modules de Harish-Chandra est équivalente à une certaine catégorie de modules sur l'algèbre de Hecke de G (voir [34]). Dans les deux cas, cette algèbre n'est pas unitaire. Ceci pourrait a priori ruiner notre stratégie, car les constructions pour les groupes finis utilisent de manière cruciale le fait que l'on considère la catégorie des modules unitaires sur l'algèbre unitaire $\mathbb{C}[G]$. Il s'avère que les algèbres de Hecke en question sont munie d'une structure proche de celle donnée par une unité. Nous utilisons la terminologie ≪ algèbre à idempotents ≫ pour cette structure, là où [34] utilise celle d'algèbre avec unité approchée, qui véhicule peut-être plus l'idée d'une généralisation du cas unitaire. Dans ce chapitre, nous étudions les algèbres à idempotents, et leurs catégories de modules non dégénérés (notion qui généralise celle de modules unitaires sur un anneau unitaire), ainsi que certains foncteurs entre ces catégories.

Notations et conventions. Nous utiliserons dans toute la suite les notations suivantes :

$\mathbb{Z}$ − **mod** pour la catégorie des groupes abéliens,

k − **Ev** pour la catégorie des espaces vectoriels sur un corps k.

Si A et B sont des anneaux :

1. Le terme unitaire signifie ici que l'unité de l'anneau agit comme l'identité du module. Cette terminologie interfère avec celle de représentation unitaire, qui suppose une structure hermitienne sur l'espace de représentation. Pour éviter ceci, certains préfèrent employer l'adjectif ≪ unifère ≫ au lieu d'unitaire. Nous ne les suivrons pas sur ce terrain.

$A - \mathbf{mod}$ pour la catégorie des A-modules à gauche,
$\mathbf{mod} - A$ pour la catégorie des A-modules à droite,
$A - \mathbf{mod} - B$ pour la catégorie des $A - B$-bimodules.

Rappelons que M est un $A - B$-bimodule si M est muni d'une structure de A-module à gauche et d'une structure de B-module à droite et que les actions de A et B sur M commutent.

Si Vest un espace vectoriel, on note V^* son dual algébrique, et $\langle . , . \rangle$ la forme bilinéaire canonique sur $V^* \times V$.

Les anneaux ne sont pas supposés unitaires, sauf mention explicite du contraire. Si A est un anneau unitaire, on notera $\mathbf{1}_A$ son unité. Si A est un anneau unitaire, les modules sur A ne sont pas supposés unitaires a priori. S'ils le sont (c'est-à-dire si $\mathbf{1}_A$ agit trivialement), on le précisera en disant que le A-module M est *unitaire* .

En général, si e est un élément idempotent de A, c'est-à-dire tel que $e^2 = e$ (par exemple, si A est unitaire, $e = \mathbf{1}_A$), et si M est un A-module, alors M, comme $\mathbb{Z}$-module, se décompose en :

$$M = e \cdot M \oplus (1 - e) \cdot M,$$

où $e \cdot M = \{e \cdot m | \, m \in M\}$ et $(1 - e) \cdot M = \{m - e \cdot m | \, m \in M\}$. L'idempotent e agit comme l'identité sur $e \cdot M$ et annule $(1 - e) \cdot M$. L'anneau eAe est unitaire (d'unité e), et $e \cdot M$ est un eAe-module unitaire.

Si A est un anneau unitaire, on note $\mathcal{M}(A)$ la sous-catégorie pleine de $A - \mathbf{mod}$ dont les objets sont les A-modules unitaires.

Remarque. La notation $(1 - e) \cdot M$ n'est qu'une commodité d'écriture, et l'on prendra bien garde au fait que le 1 ne désigne pas ici l'unité de l'anneau A.

I.1 Anneaux à idempotents

I.1.1 Ordre sur les idempotents

Soit A un anneau et notons $I = \mathrm{Idem}(A)$ l'ensemble des éléments idempotents de A, muni de la relation d'ordre :

$$e \leq f \quad \text{si} \quad eAe \subset fAf.$$

Remarques. Si e est un idempotent de A, alors eAe est une sous-algèbre de A admettant e comme unité. D'autre part :

$$eae = a \Leftrightarrow a \in eAe \quad (a \in A),$$
$$eAe = eA \cap Ae.$$

Lemme. *Soient $e, f \in I$, et $a \in A$.*

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $e \leq f$ (c'est-à-dire $eAe \subset fAf$).

b) $e \in fAf$.

c) $e = fef$.

De plus on a alors $e = ef = fe$.

(ii) *Si* $e \leq f$ *et si* $ea = a$, *alors* $fa = fea = ea = a$.

Démonstration. Il est clair que $c) \Rightarrow b) \Rightarrow a)$. Supposons que l'on ait $a)$. Alors $e \in eAe$ s'écrit faf pour un certain $a \in A$. On a alors $fef = ffaff = faf = e$. De même $fe = e$ et $ef = e$. Le point (ii) en découle immédiatement. □

I.1.2 Anneaux à idempotents : définitions

Définition. Soit A un anneau (non unitaire a priori). On dit que A est un anneau à idempotents si pour tout ensemble fini d'éléments $\{a_i\}$ de A, il existe un idempotent e dans A ($e^2 = e$) tel que $a_i = ea_ie$ pour tout i.

Lemme. *Soit* A *un anneau à idempotents. L'ordre* $\leq$ *sur* $I = \mathrm{Idem}(A)$ *est filtrant, c'est-à-dire que toute famille finie d'éléments de* I *admet un majorant.*

Démonstration. Ceci découle facilement des définitions. □

On peut reformuler la définition ci-dessus en disant qu'un anneau à idempotents est un anneau A tel que :

$$A = \varinjlim_{e \in I} eAe = \bigcup_{e \in I} eAe$$

La limite inductive étant formée par rapport aux morphismes d'inclusion $eAe \hookrightarrow fAf$, $e \leq f$ dans I (voir A.IV.2 pour la notion de limite inductive).

Définition. Un module M de l'anneau à idempotents A est dit non dégénéré si pour tout élément $m \in M$, il existe un idempotent e de A tel que $e \cdot m = m$. De manière équivalente, M est non dégénéré si $M = \varinjlim_{e \in I} e \cdot M$.

Remarques. 1. Un anneau unitaire est à idempotents et ses modules unitaires sont exactement les modules non dégénérés.

— 2. Nous aurons parfois besoin de la notion de système filtrant d'idempotents. Dans un anneau à idempotents, une partie J de I sera dite filtrante si toute famille finie d'éléments de $\mathrm{Idem}(A)$ admet un majorant dans J. Pour qu'un module M soit non dégénéré, il suffit que tout élément de M soit fixé par un idempotent dans un système filtrant J. Pour un tel J, et pour tout module non dégénéré M, on a (voir A.IV.2 pour la définition des limites inductives),

$$A = \varinjlim_{e \in J} eAe \quad \text{et} \quad M = \varinjlim_{e \in J} e \cdot M.$$

— 3. Plus généralement, si J est une partie de $\mathrm{Idem}(A)$ telle que deux idempotents quelconques dans J admettent un majorant dans J, on peut généraliser la notion de module non dégénéré, relativement à ce système J.

Pour tout module M sur A, nous noterons M_A le plus grand sous-module non-dégénéré de M. On a

$$M_A = \bigcup_{e \in I} e \cdot M.$$

On note $\mathcal{M}(A)$ la catégorie des modules (à gauche) non dégénérés de l'anneau à idempotents A. C'est une sous-catégorie pleine de la catégorie $A-\mathbf{Mod}$ de tous les modules sur A. On vérifie facilement que cette sous-catégorie est stable par passage aux sous-modules et aux quotients : c'est donc une catégorie abélienne (*cf.* A.VI.2). Dans le cas où A est un anneau unitaire, $\mathcal{M}(A)$ est alors la catégorie des A-modules unitaires, ce qui est cohérent avec des notations introduites précédemment. Nous aurons aussi besoin parfois de considérer des modules à droite. On note $\mathcal{M}(A)_d$ la catégorie des A-modules à droite non dégénérés.

Proposition. *Le foncteur $A-\mathbf{mod} \to \mathcal{M}(A)$, $M \mapsto M_A$ est exact.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si $f: M \to N$ est un morphisme dans $A-\mathbf{mod}$, il envoie M_A dans N_A. Ceci définit le foncteur sur les morphismes par restriction à la partie non dégénérée. Si

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

est une suite exacte dans $A-\mathbf{mod}$, il est clair que $\mathrm{Im}\,(f_{|L_A}) \subset \ker(g_{|M_A})$. Réciproquement, si $m \in \ker g \cap M_A$, il existe $l \in L$ tel que $f(l) = m$. Soit e un idempotent de A fixant m. On a alors $f(l) = m = e \cdot m = e \cdot f(l) = f(e \cdot l)$, et comme $e \cdot l \in L_A$, on a bien $m \in \mathrm{Im}\,(f_{|L_A})$. Ceci montre que $\mathrm{Im}\,(f_{|L_A}) = \ker(g_{|N_A})$. □

I.1.3 Topologie de A. Complété

Nous renvoyons le lecteur à [9] où [25] pour les généralités sur les espaces topologiques utilisées dans cette section, comme les notions de famille d'écarts, de structure uniforme, de complété, etc.

Soit A un anneau à idempotents et soit $e \in I = \mathrm{Idem}(A)$. En tant que $\mathbb{Z}$-module, on a une décomposition

$$A = A(1-e) \oplus Ae,$$

$$\text{où} \quad A(1-e) = \{a - ae,\, a \in A\} = \{a \in A \,|\, ae = 0\}$$

$$\text{et} \quad Ae = \{ae,\, a \in A\} = \{a \in A \,|\, ae = a\}.$$

Il existe sur A une topologie naturelle : une base de voisinages de 0 est donnée par les parties $A(1-e)$, $e \in I$. En effet, si $e \leq f$, on a $e = fef = fe$, d'où $(a - af)e = 0$ pour tout $a \in A$, et donc :

$$a - af = (a - af) - (a - af)e \in A(1-e),$$

ce qui montre que $A(1-f) \subset A(1-e)$. Comme tout ensemble fini d'idempotents admet un majorant, on voit que toute intersection finie de parties de la forme $A(1-e)$ contient une partie de cette forme. Il est donc loisible de choisir l'ensemble des parties $A(1-e)$, $e \in I$ comme base de voisinages de 0. Une base de voisinages de l'élément $b \in A$ est obtenue par translation à gauche par b. Ceci munit A d'une structure uniforme. Une manière équivalente de voir les choses est d'introduire sur A la famille d'écarts d_e, $e \in I$, où

$$d_e : A \times A \to \{0, 1\},$$

$$d_e(a, b) = 0 \text{ si } a - b \in A(1-e),\ d_e(a, b) = 1 \text{ sinon.}$$

Il est immédiat de vérifier que les d_e vérifient les axiomes des écarts, que la famille d'écarts $(d_e)_{e \in I}$ est filtrante (c'est-à-dire que si $e \leq f$, alors $d_e \leq d_f$) et que la topologie définie ci-dessus est celle définie par cette famille d'écarts.

Nous allons maintenant construire le complété $\bar{A}$ de l'espace topologique A muni de cette structure uniforme. La situation étudiée ici est proche de celle où A est un anneau unitaire, J est un idéal de A, A étant muni de la topologie invariante par multiplication à gauche où une base de voisinages de 0 est donnée par les $\{J^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On sait alors que $\bar{A}$ est donné par la limite projective des A/J^n. De même, dans notre cas, si e et f sont deux idempotents de A tels que $e \leq f$, introduisons les morphismes de transition $A/A(1-f) \to A/A(1-e)$ qui vont servir à former la limite projective (*cf.* A.IV.1) . Comme $A = A(1-e) \oplus Ae$, on a $A/A(1-e) \simeq Ae$. On cherche donc à définir des morphismes $Af \to Ae$ lorsque $e \leq f$. Il est naturel de prendre :

$$Af \to Ae, \quad b \mapsto be.$$

Formons maintenant la limite projective $\bar{A} = \varprojlim Ae$ pour ces morphismes de transition. Explicitement, $\bar{A}$ est l'ensemble des familles $\{\bar{a}(e)\}_{e\in I}$, telles que quels que soient e, f dans I avec $e \leq f$, alors $\bar{a}(e) \in Ae$ et $\bar{a}(f)e = \bar{a}(e)$. L'espace $\bar{A}$ est muni de la topologie invariante par translation à gauche telle qu'une base de voisinages de 0 soit donnée par l'ensemble des parties de la forme

$$\bar{A}(1-e) := \{\bar{a} \in \bar{A} \,|\, \bar{a}(e) = 0\}.$$

Il est clair que A se plonge canoniquement et continument dans $\bar{A}$ par $a \mapsto \bar{a}$, $\bar{a}(e) = ae$. On munit $\bar{A}$ d'une structure d'anneau prolongeant celle de A. Si $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$, $e \in I$, on pose

$$(\bar{a}\bar{b})(e) = \bar{a}(f)\bar{b}(e)$$

où $f \in I$ est tel que $f\bar{b}(e) = \bar{b}(e)$. On vérifie facilement que ceci est bien défini (c'est-à-dire ne dépend pas des choix faits). L'anneau $\bar{A}$ est alors unitaire, d'unité $\mathbf{1}_{\bar{A}}$, avec $\mathbf{1}_{\bar{A}}(e) = e$ pour tout e dans I.

Il est clair aussi que A est dense dans $\bar{A}$. En effet, pour tout $\bar{a} \in \bar{A}$, pour tout $e \in I$, pour tout $f \geq e$, on a

$$(\bar{a} - \bar{a}(f))e = \bar{a}(e) - \bar{a}(f)e = \bar{a}(e) - \bar{a}(e) = 0,$$

et donc $\bar{a} - \bar{a}(f) \in \bar{A}(1-e)$.

Nous n'avons pas montré que $\bar{A}$ est un espace uniforme complet, le complété de A, mais nous n'en aurons pas besoin dans la suite, et nous laissons donc cela au lecteur. En revanche, le fait que l'action de A sur tout A-module non dégénéré M se prolonge en une action de $\bar{A}$ est absolument crucial. Si $e \cdot m = m$, $e \in I$, $m \in M$, on pose $\bar{a} \cdot m = \bar{a}(e) \cdot m$, $\bar{a} \in \bar{A}$. Ceci ne dépend pas du choix de e et munit M d'une structure de $\bar{A}$-module unitaire. Autrement dit, si M est muni de la topologie discrète, l'application uniformément continue $A \to M$, $a \mapsto a \cdot m$ se prolonge par continuité à $\bar{A}$.

I.1.4 Complété d'un module non dégénéré

Généralisons les constructions de la section précédente, en définissant le complété $\bar{M}$ d'un module non dégénéré M sur l'anneau à idempotents A. Les démonstrations des assertions qui suivent s'adaptent facilement de celles de la section précédente. On munit M de la base de voisinages de 0 donnée par les parties de la forme :

$$(1-e) \cdot M := \{m - e \cdot m,\, m \in M\}$$

où e décrit $I = \mathrm{Idem}(A)$. Une base de voisinages d'un élément $m \in M$ quelconque est obtenue par translation $m' \mapsto m + m'$ dans M. On obtient ainsi une structure uniforme sur M. Cette topologie de M est donnée par la famille d'écarts d_e, $e \in \mathrm{Idem}(A)$,

$$d_e : M \times M \to \{0,1\},$$

$$d_e(m,m') = 0 \text{ si } m - m' \in (1-e)\cdot M,\ d_e(m,m') = 0 \text{ sinon.}$$

Le complété $\bar{M}$ de M pour cette structure uniforme est alors la limite projective

$$\bar{M} = \varprojlim_{e \in I} e \cdot M$$

pour les morphismes de transition

$$f \cdot M \to e \cdot M\ , \quad m \mapsto e \cdot m, \quad (e \leq f).$$

On peut voir $\bar{M}$ comme l'ensemble des familles $\{\bar{m}(e)\}_{e \in I}$ telles que quels que soient e, f dans I avec $e \leq f$, alors $\bar{m}(e) \in e \cdot M$ et $e \cdot \bar{m}(f) = \bar{m}(e)$. De plus M se plonge dans $\bar{M}$ par

$$m \mapsto \bar{m}, \quad \bar{m}(e) = e \cdot m, \quad (e \in I).$$

Proposition. *Avec les notations ci-dessus, le morphisme*

$$\mathrm{Hom}_A(A,M) \to \bar{M}, \quad \phi \mapsto \{\phi(e)\}_{e \in \mathrm{Idem}(A)}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_A(A,M)$ et soit $a \in A$. Soit e un idempotent de A tel que $ae = a$. On a alors $\phi(a) = \phi(ae) = a\phi(e)$, donc ϕ est déterminé par la famille $\{\phi(e)\}_{e \in I}$ et il est clair que si $e \leq f$, alors $e \cdot \phi(f) = \phi(e)$. Réciproquement, si l'on a une famille $\{\bar{m}(e)\}_{e \in I}$ d'éléments de M, on peut définir $\phi \in \mathrm{Hom}_A(A,M)$ par $\phi(a) = a \cdot \bar{m}(e)$, $e \in I$, $ae = e$ dès lors que $\{\bar{m}(e)\}_{e \in I}$ est un élément de $\bar{M}$. □

Le complété $\bar{M}$ est muni d'une structure de A-module, apparente dans la description ci-dessus, puisque $\mathrm{Hom}_A(A,M)$ est naturellement un A-module à gauche :

$$(a \cdot \phi)(b) = \phi(ba), \quad (a, b \in A),\ \phi \in \mathrm{Hom}_A(A,M)$$

Cette structure étend celle de M, mais le module $\bar{M}$ n'est plus nécessairement non dégénéré.

Remarque. Dans la section précédente, ces constructions ont été faites en considérant A comme module à droite sur lui-même. Comme les constructions de cette section s'adaptent de toute évidence aux modules à droite, on voit que $\bar{A} \simeq \mathrm{End}_{A^\circ}(A)$ (la notation Hom_{A° est là pour rappeler que l'on considère les structures de modules à droite).

I.1.5 Adjonction lissification/complétion

Soient A un anneau à idempotents et $I = \mathrm{Idem}(A)$. Nous avons vu dans la section I.1.2 que le foncteur de « lissification »

$$A - \mathbf{mod} \to \mathcal{M}(A), \quad M \mapsto M_A$$

est un foncteur exact. Dans la section précédente, nous avons défini un foncteur de « complétion »

$$\mathcal{M}(A) \to A - \mathbf{mod}, \quad N \mapsto \bar{N}.$$

Ce foncteur étant défini de manière évidente sur les morphismes par prolongement par continuité, c'est-à-dire que si $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ est un morphisme dans $\mathcal{M}(A)$, il se prolonge en un morphisme

$$\bar{f} : \bar{M} \to \bar{N}, \quad \bar{f}(\bar{m})(e) = f(m(e)), \quad (e \in I).$$

Proposition. *Pour tout module $M \in \mathcal{M}(A)$, $(\bar{M})_A = M$.*

— Le foncteur de complétion est fidèle. Il est l'adjoint à droite du foncteur de lissification.

Démonstration. Donnons explicitement la forme de l'inclusion naturelle de M dans $\bar{M}$ lorsque $\bar{M}$ est identifié à $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ par la proposition I.1.4 :

(I.1.5.1) $$M \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, M), \quad m \mapsto \phi_m,$$

où $\phi_m(a) = a \cdot m$, pour tout $a \in A$.

Rappelons que la structure de A-module sur $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ est donnée par :

$$(a \cdot \phi)(a') = \phi(a'a), \quad (a, a' \in A), (\phi \in \mathrm{Hom}_A(A, M)).$$

Supposons que $\phi \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ soit fixé par un idempotent e de A. Alors pour tout $a \in A$, $a \cdot \phi(e) = \phi(ae) = (e \cdot \phi)(a) = \phi(a)$, et donc ϕ est dans l'image de (I.1.5.1). On en déduit que M s'identifie à la partie non dégénérée de $\bar{M} = \mathrm{Hom}_A(A, M)$.

— Si $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ est un morphisme dans $\mathcal{M}(A)$ tel que $\bar{f} = 0$, alors $f = 0$. Ceci montre que le foncteur de complétion est fidèle. Etablissons l'adjonction des deux foncteurs. Pour les généralités concernant les foncteurs adjoints, nous renvoyons à l'annexe A.V. Il s'agit d'exhiber un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_A(N, \bar{M}) \simeq \mathrm{Hom}_A(N_A, M)$$

pour tout $M \in \mathcal{M}(A)$ et tout $N \in A - \mathbf{mod}$. Comme l'image d'un module non dégénéré est non dégénérée, on a

$$\mathrm{Hom}_A(N_A, \bar{M}) = \mathrm{Hom}_A(N_A, (\bar{M})_A) = \mathrm{Hom}_A(N_A, M).$$

D'autre part, tout morphisme $\phi \in \mathrm{Hom}_A(N, \bar{M})$ définit par restriction un morphisme ϕ_A dans $\mathrm{Hom}_A(N_A, \bar{M}) = \mathrm{Hom}_A(N_A, M)$. Si $\phi_A = 0$, on a $\phi(e \cdot n) = 0 = e \cdot \phi(n)$ pour tout $n \in N$ et tout $e \in I$, et donc ϕ est nul, car M est non dégénéré. Cette application de restriction est donc injective. Elle est surjective, car si $\phi_A \in \mathrm{Hom}_A(N_A, M)$, on définit ϕ dans $\mathrm{Hom}_A(N, \bar{M})$ par $\phi(n) = \bar{m}$ où $\bar{m}(e) = \phi_A(e \cdot n)$ pour tout $e \in I$. On vérifie facilement que la restriction de ϕ à N_A est ϕ_A. La naturalité de ces constructions est claire. □

Remarque. Si M est un A-module non dégénéré, et N un sous-module, alors $\bar{N}$ est l'adhérence de N dans $\bar{M}$, c'est-à-dire :

(I.1.5.2) $$\bar{N} = \{\bar{n} \in \bar{M} \mid \bar{n}(e) \in e \cdot N, (e \in I)\} = \{\bar{n} \in \bar{M} \mid A \cdot \bar{n} \subset N\}.$$

I.1.6 Autres descriptions de $\bar{A}$

Comme A est naturellement par multiplication à gauche un A-module à gauche non dégénéré, c'est aussi un $\bar{A}$-module à gauche unitaire, et tout élément $\bar{a} \in \bar{A}$ définit un endomorphisme de groupes abéliens de A qui commute avec les multiplications à droite. On peut donc identifier (*cf.* remarque I.1.4) $\bar{A}$ avec le sous-groupe $\mathrm{End}_{A^\circ}(A)$ de $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$

Munissons $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$ de la topologie de la convergence simple : c'est un groupe abélien (pour l'addition) topologique où une base de voisinages de 0 est donnée par la famille d'ouverts

$$\mathcal{O}(U_1, \dots, U_n, a_1, \dots, a_n) := \{\beta \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A) \,|\, \beta(a_i) \in U_i\}$$

où les a_i sont des éléments de A, et les U_i des voisinages ouverts de 0 dans A. On peut prendre les U_i de la forme $U_i = A(1 - e_i)$ avec $e_i \in I$. La topologie induite sur $\bar{A}$ coincide alors avec celle définie précédemment. En effet

$$\mathcal{O}(U_1, \dots, U_n, a_1, \dots, a_n) \cap \bar{A} = \{\bar{a} \in \bar{A} \,|\, \bar{a}a_i \in U_i\},$$

donc si les U_i sont de la forme $U_i = A(1 - e_i)$ avec $e_i \in I$, et si l'on prend $f \in I$ qui majore tous les a_i, alors pour tout $\bar{a} \in \bar{A}(1 - f)$, on a $\bar{a}a_i = 0$, ce qui montre que $\bar{A}(1 - f) \subset \mathcal{O}(U_1, \dots, U_n, a_1, \dots, a_n) \cap \bar{A}$. Réciproquement, $\bar{A}(1 - f) = \mathcal{O}(\bar{A}(1 - f), f) \cap \bar{A}$.

Il est clair que $\bar{A}$ est contenu dans l'adhérence, pour cette topologie de la convergence simple, de l'ensemble des multiplications à gauche par des éléments de A. Réciproquement cette adhérence est bien sûr elle-même contenue dans le commutant des multiplications à droite, c'est-à-dire dans $\mathrm{End}_{A^\circ}(A) = \bar{A}$.

Nous avons donc obtenu :

Lemme. *L'anneau $\bar{A}$ s'identifie avec l'adhérence dans $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$, pour la topologie de la convergence simple, de l'ensemble des multiplications à gauche par des éléments de A.*

On peut voir $\bar{A}$ d'une autre manière encore. Soit

$$\varpi : \mathcal{M}(A) \to \mathbb{Z} - \mathbf{mod}$$

le foncteur d'oubli de structure.

Proposition. *Le complété $\bar{A}$ de A s'identifie à $\mathrm{Hom}(\varpi, \varpi)$, l'anneau des endomorphismes du foncteur d'oubli ϖ, par l'application qui a une transformation naturelle θ du foncteur d'oubli vers lui-même associe $\theta_A \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$.*

Démonstration. Il peut être utile d'expliciter le terme de droite de cette égalité. Il s'agit d'un Hom de la catégorie des foncteurs additifs de $\mathcal{M}(A)$ dans elle-même, et il admet donc naturellement une structure d'anneau. Soit θ une transformation naturelle de ϖ vers lui-même. Soit f dans $\mathrm{Hom}_A(A, A)$ un morphisme donné par une multiplication à droite dans A. D'après la définition d'une transformation naturelle, on voit que θ_A commute à f, et donc, d'après le lemme précédent, ceci nous donne un élément $\bar{a}$ de $\bar{A}$. Réciproquement, si $\bar{a} \in \bar{A}$, et si $M \in \mathcal{M}(A)$, on prend pour θ_M l'action de l'élément $\bar{a}$ sur M. On vérifie facilement que ceci définit une transformation naturelle de ϖ vers lui-même. Les deux constructions sont inverses l'une de l'autre. □

I.1.7 Centre de $\mathcal{M}(A)$

Nous renvoyons le lecteur à A.X pour les généralités sur le centre d'une catégorie. Soit A un anneau à idempotents. On se propose d'expliciter le centre de la catégorie $\mathcal{M}(A)$, c'est-à-dire l'ensemble des transformations naturelles du foncteur identité de la catégorie vers lui-même. On considère A comme module à gauche sur lui-même.

Lemme. *Soit $\phi \in \bar{A} = \mathrm{End}_{A^\circ}(A)$ un morphisme commutant aussi avec l'action par multiplication à gauche de A sur lui-même, c'est-à-dire*

$$\phi(abc) = a\phi(b)c, \quad (a, b, c \in A).$$

Alors pour tout A-module non dégénéré M, il existe un morphisme $\tilde{\phi}_M : M \to M$ tel que :

$$\tilde{\phi}_M(a \cdot m) = \phi(a) \cdot m, \quad (a \in A), (m \in M).$$

De plus $\phi \mapsto \tilde{\phi}_M$ est naturel en M, c'est-à-dire que si M et N sont des A-modules non dégénérés, alors pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, on a $\tilde{\phi}_N \circ f = f \circ \tilde{\phi}_M$.

Démonstration. Comme M est non dégénéré, pour tout $m \in M$, choisissons un idempotent e de A tel que $e \cdot m = m$. On pose alors $\tilde{\phi}_M(m) = \phi(e) \cdot m$. Ceci ne dépend pas du choix de e, car si e et f vérifient $e \cdot m = f \cdot m = m$, on peut d'après le corollaire I.1.1 trouver un majorant h de e et f. Comme $e = he$ et $f = hf$, on a alors :

$$\phi(e) \cdot m = \phi(he) \cdot m = (\phi(h)e) \cdot m = \phi(h) \cdot m = \phi(f) \cdot m.$$

Soit e un idempotent fixant $a \cdot m$, et soit f un idempotent fixant a, et prenons h majorant de e et f. On a alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_M(a \cdot m) &= \phi(e) \cdot (a \cdot m) = \phi(he) \cdot (a \cdot m) = (\phi(h)e) \cdot (a \cdot m) \\ &= \phi(h) \cdot (a \cdot m) = \phi(ha) \cdot m = \phi(hfa) \cdot m = \phi(fa) \cdot m \\ &= \phi(a) \cdot m.\end{aligned}$$

Le reste du lemme se démontre facilement. □

Autrement dit, tout $\phi \in \bar{A}$ commutant avec l'action par multiplication à gauche de A sur lui-même définit une transformation naturelle du foncteur $\mathcal{I}d_{\mathcal{M}(A)}$ dans lui-même. Réciproquement, une telle transformation naturelle θ determine un morphisme $\phi = \theta_A \in \bar{A} = \mathrm{End}_{A^\circ}(A)$ commutant avec les multiplications à gauche. Ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre.

Théorème. *Le centre de $\mathcal{M}(A)$ s'identifie au commutant de A dans $\bar{A}$, où encore au centre de $\bar{A}$. C'est la limite projective sur $I = \mathrm{Idem}(A)$ des centres des anneaux eAe, $e \in I$.*

Démonstration. Le centre de $\mathcal{M}(A)$ s'identifie au sous-groupe de $\bar{A}$ des éléments commutant avec les éléments de A, ou par continuité, au centre de $\bar{A}$. Vérifions la dernière assertion. Les morphismes de transition

$$fAf \to eAe, \quad a \mapsto eae, \quad (e, f \in I,\ e \le f),$$

induisent des morphismes de transitions entre les centres de ces anneaux. En effet, si z est dans le centre de fAf, il commute avec e, et l'on a pour tout $x \in eAe$,

$$[eze, x] = ezex - xeze = ezx - xze = zex - xez = zx - xz = 0.$$

Ceci montre que l'image de z par le morphisme de transition est central dans eAe. Ceci définit le système projectif dont nous voulons identifier la limite.

Si $\bar{a} \in \bar{A}$ est central, alors il est clair que pour tout $e \in I$, $e\bar{a}e = \bar{a}(e)$ est dans le centre de eAe. Pour la réciproque, montrons tout d'abord que $e\bar{a} = \bar{a}e$ pour tout $e \in I$. Prenons $f \geq e$. On a

$$(e\bar{a} - \bar{a}e)f = e\bar{a}f - \bar{a}ef = e(f\bar{a}f) - (\bar{a}f)e = e\bar{a}(f) - \bar{a}(f)e = 0$$

car $\bar{a}(f) = f\bar{a}f$ est central dans fAf, et en particulier commute avec e. Ceci dit, pour que $\bar{a}$ commute à eAe, il faut et il suffit que $\bar{a}e = e\bar{a}e = \bar{a}(e)$ soit dans le centre de eAe, et l'on conclut grâce au fait que A est la réunion des eAe. □

Nous notons $\mathfrak{Z}(A)$ le centre de la catégorie $\mathcal{M}(A)$. Il est clair d'après ce qui précède que $\mathfrak{Z}(A)$ est muni d'une structure d'anneau.

Remarque. Lorsque A est unitaire, le centre $\mathfrak{Z}(A)$ s'identifie au centre de l'anneau A, résultat bien connu.

I.1.8 Le centre comme algèbre de fonctions sur les irréductibles

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents, de dimension finie ou dénombrable. Notons $\mathbf{Irr}(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de modules simple dans $\mathcal{M}(A)$. Le lemme de Schur B.II montre que tout élément z du centre $\mathfrak{Z}(A)$ agit par un opérateur scalaire sur les modules simples. Pour tout A-module simple M, et tout élément $z \in \mathfrak{Z}(A)$, notons z_M ce scalaire. Il ne dépend évidemment que de la classe de M dans $\mathbf{Irr}(A)$. Notons $\mathrm{Fonc}(\mathbf{Irr}(A))$ l'algèbre des fonctions sur $\mathbf{Irr}(A)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous avons mis en évidence un morphisme d'algèbres :

(I.1.8.1) $$\mathfrak{Z}(A) \to \mathrm{Fonc}(\mathbf{Irr}(A)), \quad z \mapsto [M \mapsto z_M].$$

Dans les bonnes situations, ce morphisme est injectif. Introduisons la propriété de séparation suivante :

(**Sep**) : pour tout $a \in A$ non nul, il existe un module simple M non dégénéré et $m \in M$ tel que $a \cdot m \neq 0$.

De manière équivalente, tout A-module non dégénéré M est donné par un morphisme[2] π_M : $A \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$, et la propriété (**Sep**) dit que le morphisme d'algèbres :

(I.1.8.2) $$A \to \prod_{M \in \mathbf{Irr}(A)} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$$

est injectif.

Le prolongement de (I.1.8.2) à $\bar{A}$ reste injectif et il en est donc de même de sa restriction à $\mathfrak{Z}(A)$.

Dans le cas où A vérifie la propriété (**Sep**), tout élément de $\mathfrak{Z}(A)$ est donc caractérisé par la fonction sur $\mathbf{Irr}(A)$ qu'il définit. Comme nous le verrons, ceci s'applique au cas où A est l'algèbre de Hecke d'un groupe topogique totalement discontinu G. Lorsque G est un groupe réductif p-adique, la description par Bernstein du centre est alors essentiellement la détermination de l'image de (I.1.8.1).

2. Il est expliqué dans la section suivante comment un module dans $\mathcal{M}(A)$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel qui rend l'action de A linéaire.

I.2 Foncteurs d'oubli et leurs adjoints

I.2.1 Structure d'espace vectoriel sur les modules non dégénérés

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire, d'élément neutre $\mathbf{1}_A$. Si M est un A-module unitaire, il est canoniquement muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel par :

$$\lambda m := (\lambda \mathbf{1}_A) \cdot m, \qquad (m \in M),\ (\lambda \in \mathbb{C}).$$

De plus, on a : $(\forall m \in M)$, $(\forall \lambda \in \mathbb{C}), (\forall a \in A)$,

$$\lambda(a \cdot m) = (\lambda a) \cdot m = a \cdot (\lambda m). \tag{I.2.1.1}$$

Supposons que A soit une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents. Il est encore possible de munir tout A-module non dégénéré M d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel par : $(\forall m \in M)$, $(\forall \lambda \in \mathbb{C})$, $(\forall e \in \mathrm{Idem}(A) \,|\, e \cdot m = m)$,

$$\lambda m := (\lambda e) \cdot m.$$

On vérifie facilement que ceci ne dépend pas du choix de e, et que la propriété (I.2.1.1) est encore vérifiée.

Supposons que X et Y soient deux A-modules non dégénérés. D'après ce qui précéde, ce sont aussi deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Il est alors immédiat que tout morphisme dans $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$ est aussi $\mathbb{C}$-linéaire. En particulier, $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel : pour tout ϕ dans $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$ et pour tout λ dans $\mathbb{C}$,

$$\lambda\phi :\ x \mapsto \lambda(\phi(x)) = \phi(\lambda x).$$

De même, si X est un A-module à droite, et Y un A-module à gauche, tous deux non dégénérés, le produit tensoriel $X \otimes_A Y$ hérite d'une structure d'espace vectoriel et $X \otimes_A Y$ est un quotient de $X \otimes_{\mathbb{C}} Y$.

Si A est une $\mathbb{C}$-algèbre sans unité, il n'y a pas de structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel canonique sur $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$ ou sur $X \otimes_A Y$, même lorsque X et Y sont des espaces vectoriels. Ceci est extrêmement génant, et l'on y remédie en introduisant l'algèbre unitaire $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_A$, où l'on décide que $\mathbf{1}_A$ est l'unité de $\tilde{A}$ (ceci détermine une unique structure d'algèbre sur $\tilde{A}$). Si X et Y sont deux A-modules et aussi des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, ils deviennent naturellement des $\tilde{A}$-modules unitaires et l'on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(X,Y) &= \mathrm{Hom}_A(X,Y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,Y),\\ X \otimes_{\tilde{A}} Y &= X \otimes_A Y/\mathrm{Vect}(\{\lambda x \otimes y - x \otimes \lambda y,\ x \in X, y \in Y, \lambda \in \mathbb{C}\}).\end{aligned}$$

où $\mathrm{Vect}(P)$ désigne le sous-espace engendré par une partie P d'un espace vectoriel. Si A est une algèbre à idempotents, d'après ce qui précéde, si X et Y sont deux A-modules non dégénérés,

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_A(X,Y), \quad X \otimes_{\tilde{A}} Y = X \otimes_A Y \tag{I.2.1.2}$$

pour les structures canoniques de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur X et Y. Ceci est vrai en particulier si A, ainsi que les modules X et Y, sont unitaires.

I.2.2 Formules d'associativité

Lorsque A est une algèbre unitaire, et que X est un module dans $\mathcal{M}(A)$, on peut définir les foncteurs :

$$\bullet \otimes_A X : \mathcal{M}(A)_d \longrightarrow \mathbb{C} - \mathbf{Ev}, \qquad Y \mapsto Y \otimes_A X,$$
$$\mathrm{Hom}_A(\bullet, X) : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathbb{C} - \mathbf{Ev}, \qquad Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(Y, X)$$

et

$$\mathrm{Hom}_A(X, \bullet) : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathbb{C} - \mathbf{Ev}, \qquad Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(X, Y)$$

Les propriétés de ceux-ci sont bien connues (voir par exemple [28]). Grâce à (I.2.1.2), ces résultats se généralisent au cas où A est une algèbre à idempotents.

Proposition. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents, et X un A-module non dégénéré.*

Le foncteur $\bullet \otimes_A X$ est covariant et exact à droite,

le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\bullet, X)$ est contravariant et exact à gauche,

le foncteur $\mathrm{Hom}_A(X, \bullet)$ est covariant et exact à gauche.

Nous renvoyons le lecteur à [33], pages 218-219 pour une démonstration.

Soient R, S deux $\mathbb{C}$-algèbres. Nous écrirons X^R, ${}^SY^R$, Z^R pour dire que X est un R-module à droite, Y un $S - R$-bimodule (à gauche sur S et à droite sur R), etc... Les R-modules deviennent naturellement des $\tilde{R}$-modules unitaires. Idem pour S.

Théorème. *Soient R, S deux $\mathbb{C}$-algèbres et X^R, ${}^RY^S$, Z^S des modules. Alors on a un isomorphisme naturel :*

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{S}}(X \otimes_{\tilde{R}} Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\tilde{R}}(X, \mathrm{Hom}_{\tilde{S}}(Y, Z)) \tag{I.2.2.1}$$
$$\phi \mapsto \psi, \quad \psi(x)(y) = \phi(x \otimes y). \tag{I.2.2.2}$$

De même, quels que soient les modules ${}^RX$, ${}^SY^R$ et ${}^SZ$, on a un isomorphisme naturel :

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{S}}(Y \otimes_{\tilde{R}} X, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\tilde{R}}(X, \mathrm{Hom}_{\tilde{S}}(Y, Z)). \tag{I.2.2.3}$$

Enfin, quels que soient les modules X^R, ${}^RY^S$ et ${}^SZ$, on a un isomorphisme naturel :

$$(X \otimes_{\tilde{R}} Y) \otimes_{\tilde{S}} Z \simeq X \otimes_{\tilde{R}} (Y \otimes_{\tilde{S}} Z). \tag{I.2.2.4}$$

On trouvera une démonstration dans [33], pages 97-98.

Corollaire. *Soient R, S des $\mathbb{C}$-algèbres à idempotents. Quels que soient les modules non dégénérés X^R, ${}^RY^S$ et Z^S, on a un isomorphisme naturel :*

$$\mathrm{Hom}_S(X \otimes_R Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_S(Y, Z)_R). \tag{I.2.2.5}$$

Quels que soient les modules non dégénérés ${}^RX$, ${}^SY^R$ et ${}^SZ$, on a un isomorphisme naturel :

$$\mathrm{Hom}_S(Y \otimes_R X, Z) \simeq \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_S(Y, Z)_R). \tag{I.2.2.6}$$

Enfin, quels que soient les modules non dégénérés X^R, ${}^RY^S$ et ${}^SZ$, on a un isomorphisme naturel :

$$(X \otimes_{\tilde{R}} Y) \otimes_{\tilde{S}} Z \simeq X \otimes_{\tilde{R}} (Y \otimes_{\tilde{S}} Z). \tag{I.2.2.7}$$

Démonstration. Ceci découle immédiatement du théorème, de (I.2.1.2) et par exemple pour la deuxième formule, du fait que

$$\mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_S(Y,Z)_R) = \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_S(Y,Z))$$

car l'image d'un module non dégénéré est non dégénérée. □

Remarque. Comme conséquence du théorème et de son corollaire, nous obtenons l'adjonction bien connue des foncteurs Hom et $\bigotimes$. Mais le théorème donne la naturalité des isomorphismes en les trois variables X, Y et Z.

I.2.3 Foncteurs d'oubli et d'induction

Soient A et B des $\mathbb{C}$-algèbres unitaires, et $\phi :\ A \to B$ un morphisme d'algèbres unitaires. Le « foncteur d'oubli »

$$\phi_* :\ \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$$

qui transforme un B-module unitaire N en A-module unitaire par

$$a \cdot n := \phi(a) \cdot n, \quad (a \in A), (n \in N),$$

admet des adjoints respectivement à gauche et à droite :

$${}^*\phi, \phi^* : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B)$$

que nous allons décrire. Remarquons que grâce à ϕ, B est muni d'une structure de A-bimodule. L'adjoint à gauche ${}^*\phi$ est donné alors par le produit tensoriel

$${}^*\phi :\ M \mapsto B \otimes_A M$$

et l'adjoint à droite ϕ^* par le foncteur Hom

$$\phi^* :\ M \mapsto \mathrm{Hom}_A(B, M).$$

Remarquons aussi que nous adoptons les conventions de la géométrie algébrique : $\phi \mapsto \phi_*$ est contravariant, mais malgré cela nous mettons l'étoile en indice plutôt qu'en exposant. Ceci parce que d'un point de vue géométrique nous le considérons ϕ comme un morphisme entre les variétés $\mathrm{Spec}(B)$ et $\mathrm{Spec}(A)$, ce qui rétablit la covariance.

D'autre part, dans la construction de ${}^*\phi$ (resp. ϕ^*), on utilise seulement la structure de A-module à droite sur B induite par ϕ et la structure naturelle de module à gauche de B sur lui même (resp. la structure de A-module à gauche sur B induite par ϕ et la structure naturelle de module à droite de B sur lui même) et le fait que les actions à gauche et à droite commutent. Il est donc intéressant de décrire le foncteur d'oubli ϕ_* en termes de ces structures a priori plus faibles. Or, pour tout B-module unitaire N, on a les isomorphismes canoniques

$$N \simeq \mathrm{Hom}_B(B, N) \simeq B \otimes_B N,$$

et la construction de $\mathrm{Hom}_B(B, N)$ (resp. $B \otimes_B N$) comme A-module ne fait intervenir que la structure de A-module à droite et de B-module à gauche (resp de A-module à gauche et de B-module à droite) de B et le fait que les actions à gauche et à droite commutent. Les adjonctions entre ϕ_* et ${}^*\phi, \phi^*$ sont alors conséquences de la deuxième identité du théorème I.2.2 .

Lorsque A et B ne sont plus supposés unitaires, les constructions faites ci-dessus ne marchent plus. Dans la situation qui nous intéresse, celle où A et B sont des $\mathbb{C}$-algèbres à idempotents, on utilise le corollaire du théorème I.2.2 pour rétablir la situation. Le contexte est le suivant : soient A et B des anneaux à idempotents. On suppose que B est un $A-B$-bimodule non dégénéré (si la structure de bimodule provient d'un morphisme $\phi : A \to B$, il n'est pas forcément non dégénéré. Il faudra prendre garde, dans cette situation, de s'assurer que cette hypothèse est vérifiée). On définit le foncteur d'oubli :

$$\mathcal{F}_A^B : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A), \quad N \mapsto B \otimes_B N, \tag{I.2.3.1}$$

où B est considéré comme un $A-B$-bimodule. Remarquons que $B \otimes_B N$ est bien un A-module à gauche non-dégénéré, puisque B l'est.

Si B est un $B-A$-bimodule non dégénéré, on définit de manière similaire le *pseudo foncteur d'oubli* :

$$\check{\mathcal{F}}_A^B : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A), \quad N \mapsto \mathrm{Hom}_B(B, N)_A. \tag{I.2.3.2}$$

Remarquons que $\mathrm{Hom}_B(B, N)$ est le complété du B-module N, au sens de la section I.1.4. La structure de A-module sur $\mathrm{Hom}_B(B, N)$ est donnée par :

$$(a \cdot \phi)(b') = \phi(b'a), \quad (a \in A), \, (b' \in B), (\phi \in \mathrm{Hom}_B(B, N)).$$

Remarque. La terminologie pseudo foncteur d'oubli est tirée de [34], et sert à véhiculer l'idée qu'il s'agit d'un foncteur ressemblant à un foncteur d'oubli. Il est à noter que cela n'a rien à voir avec les pseudo-foncteurs. Peut-être vaudrait-il mieux dire foncteur de pseudo-oubli pour éviter l'ambiguité ?

Lemme. *Soit B une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents et N un B-module. Alors $B \otimes_B N$ s'identifie à N_B, la partie non-dégénérée de N par*

$$B \otimes_B N \to N, \quad b \otimes n \mapsto b \cdot n. \tag{I.2.3.3}$$

Si N est non-dégénéré, on a alors $B \otimes_B N \simeq N$. Toujours dans le cas où N est non-dégénéré, le morphisme naturel

$$N \to \mathrm{Hom}_B(B, N), \quad n \mapsto \phi_n \tag{I.2.3.4}$$

$$\phi_n(b) = b \cdot n, \, (b \in B), \, (n \in N).$$

est injectif, et son image est la partie non dégénérée $\mathrm{Hom}_B(B, N)_B$ du B-module $\mathrm{Hom}_B(B, N)$.

Démonstration. Comme B est non dégénéré comme module sur lui-même, il est clair que $B \otimes_B N$ est non dégénéré, et son image par tout morphisme est non dégénérée. Pour tout n dans N_B, il existe un idempotent e dans B tel que $e \cdot n = n$, et donc l'application (I.2.3.3) est surjective sur la partie non dégénérée N_B. Maintenant supposons que $\sum_{i=1}^r b_i \cdot n_i = 0$, $b_i \in B$, $n_i \in N$. Soit e un idempotent de B tel que $eb_i = b_i$ pour tout $i = 1, \ldots, r$. Alors

$$\sum_{i=1}^r b_i \otimes n_i = \sum_{i=1}^r eb_i \otimes n_i = e \otimes \sum_{i=1}^r b_i \cdot n_i = 0,$$

ce qui montre que l'application (I.2.3.3) est injective.

La dernière assertion a déjà été démontrée dans la proposition I.1.4. $\square$

Remarque. Le pseudo foncteur d'oubli est obtenu en prenant la partie non-dégénérée de $\mathrm{Hom}_B(B,N)$ en tant que A-module. Lorsque les parties non dégénérées de $\mathrm{Hom}_B(B,N) = \bar{N}$ en tant que A ou B module coincident, on a donc $\check{\mathcal{F}}_A^B(N) \simeq N$.

Construisons maintenant les adjoints (respectivement à droite et à gauche) de $\mathcal{F}_A^B$ et $\check{\mathcal{F}}_A^B$. Nous appellerons ces foncteurs « foncteurs d'induction ».

Définition. Si B est un $A-B$-bimodule non dégénéré, on pose

$$I_A^B : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B), \quad M \mapsto \mathrm{Hom}_A(B,M)_B.$$

et si B est un $B-A$-bimodule non dégénéré, on pose

$$P_A^B : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B), \quad M \mapsto B \otimes_A M.$$

On a alors :

Théorème. *Le foncteur I_A^B est l'adjoint à droite du foncteur d'oubli $\mathcal{F}_A^B$, et le foncteur P_A^B est l'adjoint à gauche du pseudo foncteur d'oubli $\check{\mathcal{F}}_A^B$. On a donc, pour tout $N \in \mathcal{M}(A)$ et $M \in \mathcal{M}(B)$, des isomorphismes naturels*

$$\mathrm{Hom}_B(M, I_A^B(N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathcal{F}_A^B(M), N),$$

$$\mathrm{Hom}_B(P_A^B(N), M) \simeq \mathrm{Hom}_A(N, \check{\mathcal{F}}_A^B(M)).$$

Démonstration. Ceci découle immédiatement des définitions et du corollaire du théorème I.2.2.

Remarque. Nous aurons besoin de clarifier encore la situation dans le cas particulier où B est muni d'une structure de A-bimodule provenant d'un morphisme $\phi : A \to B$. Nous supposons toujours B non dégénéré pour cette structure de A-bimodule. Comme nous l'avons remarqué plus haut, ceci n'est pas automatique. Le foncteur d'oubli est alors égal à ϕ_* grâce à (I.2.3.3). Le A-bimodule B étant supposé non dégénénéré, ceci signifie que pour toute famille finie (b_i) dans B, il existe un idempotent e dans A tel que pour tout i, $\phi(e)b_i = b_i\phi(e) = b_i$. En d'autres termes

$$\{\phi(e),\, e \in \mathrm{Idem}(A)\}$$

est un système filtrant d'idempotents pour B (*cf.* Remarque I.1.2). En particulier la partie non dégénérée d'un B-module coïncide avec sa partie non dégénérée pour la structure de A-module donnée par le foncteur d'oubli. Soit N un B-module non dégénéré, et $\mathrm{Hom}_B(B,N)_A$ son image par le pseudo foncteur d'oubli. D'après ce que nous venons de dire, la partie non dégénérée de $\mathrm{Hom}_B(B,N)$ pour les structures de A-module et de B-module coincident, et donc, d'après la remarque précédente,

$$\mathrm{Hom}_B(B,N)_A = \mathrm{Hom}_B(B,N)_B \simeq N.$$

On voit que le pseudo foncteur d'oubli est dans ce cas naturellement isomorphe au foncteur d'oubli.

I.2.4 Propriétés d'exactitude des foncteurs d'oubli et d'induction

Les notations sont celles de la section précédente, où nous avons défini les foncteurs $\mathcal{F}_A^B, \check{\mathcal{F}}_A^B$, I_A^B et P_A^B. Nous donnons maintenant les propriétés d'exactitude de ces foncteurs, et quelques conséquences de celles-ci.

Théorème. *Le foncteur $\mathcal{F}_A^B$ est exact, les foncteurs I_A^B et $\check{\mathcal{F}}_A^B$ sont exacts à gauche. Le foncteur P_A^B est exact à droite.*

Démonstration. Ceci résulte de l'exactitude à droite des foncteurs $\otimes$ et à l'exactitude a gauche des foncteurs Hom (proposition I.2.2) et du fait que le foncteur

$$A - \mathbf{mod} \to \mathcal{M}(A), \quad M \mapsto M_A$$

est exact (proposition I.1.2). Pour la première assertion, il faut aussi vérifier l'exactitude à gauche du foncteur d'oubli, mais ceci résulte trivialement de (I.2.3.3). $\square$

Corollaire. *Le foncteur I_A^B préserve l'injectivité des modules.*

Démonstration. Ceci découle du fait que I_A^B est l'adjoint à droite d'un foncteur exact. Nous redonnons l'argument, tout à fait classique. Soit X un module injectif dans $\mathcal{M}(A)$. Il s'agit de prouver que le foncteur

$$\mathcal{M}(B) \to \mathbb{Z} - \mathbf{mod}, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}_B(Y, I_A^B(X))$$

est exact. Or ce foncteur, par adjonction, est isomorphe au foncteur

$$\mathcal{M}(B) \to \mathbb{Z} - \mathbf{mod}, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(\mathcal{F}_A^B(Y), X).$$

On voit que ce dernier est exact, étant la composition du foncteur d'oubli $\mathcal{F}_A^B$ qui est exact d'après le théorème, et du foncteur $\mathrm{Hom}_A(\bullet, X)$ qui l'est par hypothèse. $\square$

I.3 Le foncteur $j_e : M \mapsto e \cdot M$

I.3.1 Exactitude

Soient A une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents, et e un idempotent de A. Comme nous l'avons remarqué plus haut, tout A-module non dégénéré M se décompose en

$$M = e \cdot M \oplus (1 - e) \cdot M \tag{I.3.1.1}$$

et $e \cdot M$ est un eAe-module unitaire. Il est facile de voir que ceci définit un foncteur

$$j_e : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(eAe), \quad M \mapsto e \cdot M.$$

Proposition. *Le foncteur j_e défini ci-dessus est exact.*

Démonstration. Il est clair que tout morphisme de A-modules préserve les décompositions (I.3.1.1). Soit $M_1 \xrightarrow{\psi} M_2 \xrightarrow{\phi} M_3$ une suite exacte dans $\mathcal{M}(A)$. Il s'agit de vérifier que si $e \cdot m_2 \in \ker \phi$, il existe $e \cdot m_1 \in e \cdot M_1$ tel que $\psi(e \cdot m_1) = e \cdot m_2$. Prenons $m_1 \in M_1$ tel que $\psi(m_1) = e \cdot m_2$. On a alors $e \cdot (e \cdot m_2) = e \cdot m_2 = e \cdot \psi(m_1) = \psi(e \cdot m_1)$. $\square$

I.3.2 Modules simples

Soient A une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents et $e \in \mathrm{Idem}(A)$. Notons :

$\mathcal{M}(A,e)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(A)$ des modules M tels que $M = Ae \cdot M$.
$\mathbf{Irr}(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de A-modules simples non dégénérés,
$\mathbf{Irr}(eAe)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de eAe-modules simples unitaires,
$\mathbf{Irr}(A,e)$ le sous-ensemble de $\mathbf{Irr}(A)$ des modules M tels que $e \cdot M \neq 0$.

Les éléments de $\mathcal{M}(A,e)$ sont donc les modules M dans $\mathcal{M}(A)$ engendrés par $e \cdot M$ et $\mathbf{Irr}(A,e)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets irréductibles de $\mathcal{M}(A,e)$.

Lemme. *Considérons le foncteur d'induction :*

$$i : \mathcal{M}(eAe) \to \mathcal{M}(A) \quad Z \mapsto A \otimes_{eAe} Z.$$

Alors $j_e \circ i$ est naturellement isomorphe à l'identité de $\mathcal{M}(eAe)$, c'est-à-dire que pour tout $Z \in \mathcal{M}(eAe)$

(I.3.2.1)
$$\begin{aligned} Z &\simeq j_e \circ i(Z), \\ z &\mapsto e \otimes z \end{aligned}$$

ces isomorphismes étant naturels en Z.

Remarquons que nous ne sommes pas tout-à-fait dans les conditions de la section I.2.3 où le foncteur P est défini de manière similaire, car A n'est pas un eAe-module unitaire, e n'agissant pas comme l'identité de A. Néanmoins si Z est un eAe-module unitaire, c'est en particulier un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. L'algèbre A aussi, et les deux structures induites de $\mathbb{C}$ espaces-vectoriel sur le produit tensoriel $A \otimes_{eAe} Z$ coïncident.

Démonstration. Par définition $j_e \circ i(Z) = e(A \otimes_{eAe} Z) = eA \otimes_{eAe} Z$, et l'on a une injection $z \mapsto e \otimes z$ de Z dans $eA \otimes_{eAe} Z$. En effet, Il s'agit de montrer que si $z \in Z$ est non nul, $e \otimes z$ ne s'annule pas dans $A \otimes_{eAe} Z$. Par définition du produit tensoriel, il suffit de trouver une application bilinéaire (pour la strucure de $\mathbb{Z}$-module) balancée $B : A \times Z \to W$ qui ne s'annule pas sur (e,z) car son relèvement $\mathbb{Z}$-linéaire au produit tensoriel ne s'annulera pas sur $e \otimes z$. Prenons $W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A,Z)$ et

$$B : A \times Z \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A,Z), \quad (a,z) \mapsto [\phi_{a,z} : b \mapsto ebae\text{Ĺ} \cdot z].$$

Il est clair que B est $\mathbb{Z}$-bilinaire. Elle est balancée car

$$B(aece, z) = [b \mapsto ebaecee \cdot z = ebaece \cdot z] = B(a, ece \cdot z).$$

On a $B(e,z) = [\phi_{e,z} : b \mapsto ebeee \cdot z = ebe \cdot z]$, et $\phi_{e,z}(e) = e \cdot z = z \neq 0$ donc $\phi_{e,z} \neq 0$.

Montrons que $z \mapsto e \otimes z$ de Z dans $eA \otimes_{eAe} Z$ est aussi surjective : si $ea \otimes z \in eA \otimes_{eAe} Z$,

$$ea \otimes z = ea \otimes ez = eae \otimes z = e \otimes eaez.$$

La naturalité de ces isomorphismes se vérifie de manière routinière. □

On en déduit immédiatement que $A \cdot (e \cdot i(Z)) = i(Z)$, c'est-à-dire que le foncteur i est à valeurs dans $\mathcal{M}(A,e)$.

Il se peut que j_e annule certains modules de $\mathcal{M}(A)$, et donc on ne peut espérer reconstruire tous les A-modules non dégénérés à partir de modules dans $\mathcal{M}(eAe)$. Néanmoins, nous allons obtenir tous les irréductibles dans $\mathcal{M}(A,e)$.

Définition. Soient M un A-module non dégénéré et $e \in \mathrm{Idem}(A)$. On définit le A-module non dégénéré :

$$M_e := M/F(eA, M), \quad \text{où} \quad F(eA, M) = \{m \in M \mid eA \cdot m = 0\}.$$

Lemme. *Soit M un A-module non dégénéré. On a alors $(M_e)_e = M_e$.*

Démonstration. Soit $\bar{m} \in M_e$ tel que $eA \cdot \bar{m} = 0$. Soit $m \in M$ un relèvement de $\bar{m}$ dans M. On a $eA \cdot m \subset F(eA, M)$ et donc $eAeA \cdot m = 0$. En particulier $eeeA \cdot m = eA \cdot m = 0$, d'où $\bar{m} = 0$. Il s'ensuit que $(M_e)_e = M_e$. □

Proposition. *L'application $M \mapsto e \cdot M$ réalise une bijection entre $\mathbf{Irr}(A, e)$ et $\mathbf{Irr}(eAe)$, dont l'inverse est donnée par $W \mapsto (A \otimes_{eAe} W)_e$.*

Démonstration. Montrons que si M est un A-module simple non dégénéré tel que $e \cdot M \neq 0$, alors $e \cdot M$ est un eAe-module simple unitaire. Soit $e \cdot m \in e \cdot M$ non nul. Comme M est simple, on a

$$(eAe)e \cdot m = (eA)e \cdot m = e(Ae \cdot m) = e \cdot M.$$

Donc $e \cdot M$ ne contient pas de sous-eAe-module propre, c'est donc un module simple. Ceci montre que $M \mapsto e \cdot M$ définit une application de $\mathbf{Irr}(A, e)$ dans $\mathbf{Irr}(eAe)$.

Montrons maintenant que si W est un eAe-module simple unitaire, alors $(A \otimes_{eAe} W)_e$ est un A-module simple. La projection canonique $(A \otimes_{eAe} W) \to (A \otimes_{eAe} W)_e$ se transforme par le foncteur j_e en un morphisme de eAe-modules unitaires

$$e \cdot (A \otimes_{eAe} W) \to e \cdot (A \otimes_{eAe} W)_e. \tag{I.3.2.2}$$

Ce morphisme est surjectif, puisque j_e est exact (proposition I.3.1). Il est aussi injectif car un élément du noyau est un invariant par e de $F(eA, A \otimes_{eAe} W)$, donc nul par définition.

Ceci montre que le morphisme (I.3.2.2) est un isomorphisme. En le composant avec (I.3.2.1), on obtient un isomorphisme de eAe-modules $W \simeq e \cdot (A \otimes_{eAe} W)_e$.

Soit $\bar{w}$ un élément non nul de $(A \otimes_{eAe} W)_e$. On veut montrer que $A \cdot \bar{w} = (A \otimes_{eAe} W)_e$. En effet ceci implique que $(A \otimes_{eAe} W)_e$ n'a pas de sous-modules propres, et donc que c'est un module simple. Supposons $e \cdot \bar{w} \neq 0$. Comme $W \simeq e \cdot (A \otimes_{eAe} W)_e$ et que W est un eAe-module simple,

$$eAe \cdot (e \cdot \bar{w}) = e \cdot (A \otimes_{eAe} W)_e,$$

On a vu que $A \otimes_{eAe} W$ est engendré par $e \cdot (A \otimes_{eAe} W)$, et par conséquent $(A \otimes_{eAe} W)_e$ est engendré par $e \cdot (A \otimes_{eAe} W)_e$. On a donc $A \cdot \bar{w} = Ae \cdot \bar{w} = (A \otimes_{eAe} W)_e$, ce qui montre l'assertion dans ce cas.

Il reste à traiter le cas où $e \cdot \bar{w} = 0$. Utilisons pour cela le lemme précédent, qui affirme que $(A \otimes_{eAe} W)_e = ((A \otimes_{eAe} W)_e)_e$, et donc que $0 \neq eA \cdot \bar{w}$. Soit alors $\bar{w}'$ non nul de la forme $\bar{w}' = a \cdot \bar{w}$ tel que $e \cdot \bar{w}' \neq 0$. Ce qui précède montre que $A \cdot \bar{w}' = (A \otimes_{eAe} W)_e$ et l'on en déduit que $A \cdot \bar{w} = (A \otimes_{eAe} W)_e$. Ceci termine la démonstration du fait que $W \mapsto (A \otimes_{eAe} W)_e$ définit une application de $\mathbf{Irr}_e(eAe)$ dans $\mathbf{Irr}(A, e)$.

Il s'agit maintenant de voir que les deux applications ainsi définies sont inverses l'une de l'autre. Nous avons déjà démontré que si W est dans $\mathbf{Irr}_e(eAe)$, $W \simeq e \cdot (A \otimes_{eAe} W)_e$. Soit M dans $\mathbf{Irr}(A, e)$. Soit

$$\phi : A \otimes_{eAe} e \cdot M \to M, \quad a \otimes e \cdot m \mapsto ae \cdot m.$$

Alors $eA \cdot (\ker \phi) = 0$. En effet, supposons que

$$\phi\left(\sum_i a_i \otimes e \cdot m_i\right) = \sum_i a_i e \cdot m_i = 0.$$

Soit $ea \in eA$. On a :

$$ea \cdot \left(\sum_i a_i \otimes e \cdot m_i\right) = \sum_i eaa_i e \otimes e \cdot m_i = e \otimes ea\left(\sum_i a_i e \cdot m_i\right) = 0.$$

Ceci montre que $\ker \phi \subset F(eA, M)$. Le morphisme ϕ se factorise donc par

$$\bar{\phi} : (A \otimes_{eAe} e \cdot M)_e \to M, \quad a \otimes e \cdot m \mapsto ae \cdot m.$$

Comme nous savons maintenant que $(A \otimes_{eAe} eM)_e$ est un A-module simple, ce morphisme étant non nul, c'est nécessairement un isomorphisme. Ceci termine la démonstration de la proposition. □

Dans certains cas le foncteur j_e est en fait une équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(A, e)$ et $\mathcal{M}(eAe)$. Le résultat suivant donne un critère pour cela.

Théorème. *Le foncteur j_e est une équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(A, e)$ et $\mathcal{M}(eAe)$ si et seulement si la sous-catégorie $\mathcal{M}(A, e)$ de $\mathcal{M}(A)$ est stable par passage aux sous-quotients (en particulier, c'est alors une catégorie abélienne). Le foncteur inverse est donné par le foncteur $i = P^A_{eAe}$.*

Démonstration. Pour montrer que la condition est nécessaire, il suffit de vérifier que si V est dans $\mathcal{M}(A, e)$, et si W est un sous-A-module de V, alors W et V/W sont encore dans $\mathcal{M}(A, e)$. Il est clair que si $Ae \cdot V = V$, alors $Ae \cdot (V/W) = V/W$. Il reste à voir que $W \in \mathcal{M}(A, e)$. D'autre part, en remplaçant V par $V/Ae \cdot W$, on se ramène au cas où $Ae \cdot W = 0$. Il s'agit alors de montrer que $W = 0$. Considérons la projection canonique $p : V \to V/W$, et son image par le foncteur j_e,

$$j_e(p) : e \cdot V \to e \cdot (V/W).$$

Comme j_e est exact, $j_e(p)$ est surjective, mais l'on voit aussi qu'elle est injective. En effet, si $e \cdot v = w \in W$, on a $e \cdot v = w = e \cdot w = 0$ puisque $e \cdot W = 0$. Si l'on suppose que j_e est une équivalence de catégories, la projection p doit être un isomorphisme, et alors $W = 0$. Montrons maintenant que la condition est suffisante. Il est clair que pour tout $V \in \mathcal{M}(A, e)$, le sous-module $F(eA, V)$ est trivial. La démonstration de la proposition précédente suggère alors que l'inverse de j_e est donné par le foncteur d'induction i. On a déjà montré en (I.3.2.1) que $j_e \circ i$ est naturellement isomorphe à l'identité de $\mathcal{M}(eAe)$. Si V est un objet de $\mathcal{M}(A, e)$, on a une surjection canonique

$$\psi = \psi_V : (i \circ j_e)(V) \to V, \quad a \otimes e \cdot v \mapsto ae \cdot v$$

Soit W le noyau de ψ. On a $e \cdot W = W \cap e \cdot V = W \cap (j_e \circ i \circ j_e)(V) = 0$ car ψ est injective sur $(j_e \circ i \circ j_e)(V)$. Or par hypothèse, $W = Ae \cdot W$, d'où $W = 0$, ce qui montre que ψ est un isomorphisme. On en déduit que les ψ_V donnent un isomorphisme naturel entre $i \circ j_e$ et l'identité de $\mathcal{M}(eAe)$. □

I.4 Dualité

I.4.1 Le foncteur $M \mapsto \tilde{M}$.

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents, et M un A-module (à gauche) non dégénéré. Le dual de M est

$$M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C})$$

qui est naturellement muni d'une structure de A-module à droite. Notons $\tilde{M}$ la partie non-dégénérée de ce A-module. Ceci définit un foncteur contravariant :

$$\mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(A)_d, \quad M \mapsto \tilde{M}.$$

De même, si M est un A-module à droite non dégénéré, son dual $\tilde{M}$ est un A-module à gauche non dégénéré, et l'on a un foncteur (contravariant)

$$\mathcal{M}(A)_d \to \mathcal{M}(A), \quad M \mapsto \tilde{M}.$$

Dans la pratique, l'algèbre A est souvent munie d'une anti-involution grâce à laquelle on peut identifier modules à droite et modules à gauche et la dualité sera alors un foncteur de $\mathcal{M}(A)$ dans $\mathcal{M}(A)$.

Lemme. *Soit M un A-module non dégénéré, et soit e un idempotent de A. On a alors $\tilde{M} \cdot e \simeq (e \cdot M)^*$. Le foncteur de dualité $M \mapsto \tilde{M}$ est exact.*

Démonstration. La décomposition $M = e \cdot M \oplus (1 - e) \cdot M$ permet d'identifier $(e \cdot M)^*$ avec l'espace des formes linéaires sur M s'annulant sur $(1 - e) \cdot M$. Mais celles-ci sont clairement les formes linéaires fixées par l'action (à droite) de e, c'est à dire que $(e \cdot M)^* \simeq M^* \cdot e \simeq \tilde{M} \cdot e$.

Montrons maintenant l'exactitude du foncteur de dualité. Si

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

est une suite exacte dans $\mathcal{M}(A)$, on veut montrer l'exactitude de la suite

$$0 \to \tilde{M}_3 \to \tilde{M}_2 \to \tilde{M}_1 \to 0.$$

Comme ces modules sont non dégénérés, il suffit de montrer que pour tout idempotent e de A, la suite

$$0 \to \tilde{M}_3 \cdot e \to \tilde{M}_2 \cdot e \to \tilde{M}_1 \cdot e \to 0$$

est exacte. D'après ce qui précède, ceci peut se réécrire sous la forme

$$0 \to (e \cdot M_3)^* \to (e \cdot M_2)^* \to (e \cdot M_1)^* \to 0.$$

Or les foncteurs $j_e : M \mapsto e \cdot M$ et $M \mapsto M^*$ sont exacts. Ceci termine la démonstration du lemme. $\square$

Corollaire. *On a une injection canonique $M \hookrightarrow \tilde{\tilde{M}}$.*

Démonstration. Tout vecteur $m \in M$ est fixé par un certain idempotent e de A. Par conséquent $m \in e \cdot M$ et m définit un élément de $((e \cdot M)^*)^*$ Donc comme $\tilde{M} \cdot e = M^* \cdot e = (e \cdot M)^*$, m définit un élément du dual de $\tilde{M} \cdot e$. L'égalité précédente appliquée à $\tilde{M}$ nous dit que $m \in (\tilde{M} \cdot e)^* = e \cdot (\tilde{M}^*) = e \cdot (\tilde{\tilde{M}})$. Le morphisme $M \to \tilde{\tilde{M}}$ est injectif car pour tout $m \in M$ non nul, on peut trouver $\lambda \in M^*$ tel que $\lambda(m) \neq 0$, et si $e \cdot m = m$, alors $(\lambda \cdot e)(m) \neq 0$, $\lambda \cdot e \in \tilde{M}$. $\square$

I.4.2 Dualité et foncteur d'oubli

Le but de cette section est de montrer que $M \mapsto \tilde{M}$ entrelace foncteur d'oubli et pseudo foncteur d'oubli, ainsi que leurs adjoints respectifs I_A^B et P_A^B.

Théorème. *Soient A et B des algèbres à idempotents, et supposons que B soit muni d'une structure de A-bimodule non dégénéré. On suppose que les actions à droite de A et B sur B commutent avec les actions à gauche, de sorte que B est aussi un $A-B$ et un $B-A$-bimodule. Le foncteur d'oubli $\mathcal{F}_A^B$ et le pseudo foncteur d'oubli $\check{\mathcal{F}}_A^B$, et leurs adjoints respectivement à droite et à gauche I_A^B et P_A^B sont alors définis comme dans la section précédente (avec les adaptations évidentes lorsqu'on considère des modules à droite plutôt qu'à gauche). On a alors, pour tout B-module à gauche non-dégénéré N,*

$$\check{\mathcal{F}}_A^B(\tilde{N}) = \mathcal{F}_A^B(N)\tilde{},$$

et pour tout A-module à gauche non dégénéré M,

$$I_A^B(\tilde{M}) = P_A^B(M)\tilde{}.$$

Les égalités de foncteurs énoncées dans ce théorème sont bien évidemment à interpréter comme étant simplement l'existence d'isomorphismes naturels (par ailleurs explicites) entre eux. Il s'agit là d'un abus de langage et de notation très répandu parce que très commode.

<u>Démonstration</u>. On a

$$\begin{aligned}\check{\mathcal{F}}_A^B(\tilde{N}) &= \mathrm{Hom}_B(B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(N,\mathbb{C})_B)_A = \mathrm{Hom}_B(B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(N,\mathbb{C}))_A\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(B\otimes_B N, \mathbb{C})_A \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_A^B(N),\mathbb{C})_A\\ &\simeq (\mathcal{F}_A^B(N))\tilde{}\end{aligned}$$

On utilise tout d'abord le fait que l'image d'un module non dégénéré est non dégénérée, puis la première identité du théorème I.2.2, où N est vu comme B-module à gauche et $\mathbb{C}$-module à droite, et $\mathbb{C}$ comme le $\mathbb{C}$-module à droite trivial.

La deuxième assertion du théorème se montre de la même façon en utilisant le théorème I.2.2. On peut aussi la déduire de la première par adjonction. On utilise pour cela l'identité suivante.

Lemme. *Pour tout A-module à droite V et pour tout A-module à gauche W, tous deux non dégénérés*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_A(V,\tilde{W}) \simeq \mathrm{Hom}_A(W,\tilde{V})\\ &\phi\mapsto\psi,\quad \psi(w)(v)=\phi(v)(w),\quad (\forall v\in V, w\in W),\end{aligned}\tag{I.4.2.1}$$

fonctoriellement en V et W.

<u>Démonstration</u>. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(V,\tilde{W}) &= \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,\mathbb{C})_A)\\ &= \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,\mathbb{C}))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V\otimes_A W,\mathbb{C}).\end{aligned}$$

Ceci est obtenu de la première identité du théorème I.2.2, en considérant W comme $A-\mathbb{C}$-bimodule. De même, en considérant V comme $\mathbb{C}-A$-bimodule, la deuxième identité du théorème I.2.2, nous donne

$$\mathrm{Hom}_A(W,\tilde{V}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V\otimes_A W,\mathbb{C}).$$

Toute ses identités sont fonctorielles en V et W. □

Terminons la démonstration du théorème. Montrons que l'on peut déduire du lemme que $I_A^B(\tilde{M}) = P_B^A(M)\tilde{}$. On a, quels que soient $M \in \mathcal{M}(A)$, $N \in \mathcal{M}(B)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(M, \check{\mathcal{F}}_A^B(\tilde{N})) &\simeq \mathrm{Hom}_B(P_A^B(M), \tilde{N}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_B(N, P_A^B(M)\tilde{}).\end{aligned}$$

Ceci est obtenu en utilisant l'adjonction entre $\check{\mathcal{F}}_A^B$ et P_A^B et l'identité du lemme. D'autre part

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(M, \check{\mathcal{F}}_A^B(\tilde{N})) &\simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{F}_A^B(N)\tilde{}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_A(\mathcal{F}_A^B(N), \tilde{M}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_B(N, I_A^B(\tilde{M})).\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{Hom}_B(N, P_A^B(M)\tilde{}) \simeq \mathrm{Hom}_B(N, I_A^B(\tilde{M})),$$

ce qui par unicité de l'adjoint à isomorphisme près, montre l'identité voulue. □

I.4.3 Dualité et complétion

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents et soit M un A-module non dégénéré. On a défini $\tilde{M}$ comme la partie non-dégénéré de M^*.

Il est facile de voir directement que lorqu'on complète $\tilde{M}$, on retrouve M^*. Nous allons donner une démonstration de ce fait qui découle formellement de ce qui a déjà été établi. Pour tout A-module à droite N, on a en effet :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(N, \overline{(M^*)_A}) &\simeq \mathrm{Hom}_A(N_A, (M^*)_A) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_A(N_A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C})_A) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_A(N_A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C})) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(N_A \otimes_A M, \mathbb{C})\end{aligned}$$

La première égalité provient de l'adjonction I.1.5, la dernière de (I.2.2.6), avec $R = A$ et $S = \mathbb{C}$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(N, M^*) &= \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C})) \\ &= \mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C})) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(N \otimes_{\tilde{A}} M, \mathbb{C}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(N \otimes_A M, \mathbb{C})\end{aligned}$$

On a utilisé (I.2.2.3) et les notations afférentes pour la deuxième égalité. Enfin, l'inclusion $N_A \otimes_A M \hookrightarrow N \otimes_A M$ est surjective, car quels que soient $n \in N$, $m \in M$, on trouve un idempotent e de A qui fixe m et l'on a

$$n \otimes m = n \otimes e \cdot m = n \cdot e \otimes m \in N_A \otimes_A M.$$

On obtient ainsi pour tout A-module à droite N un isomorphisme (naturel) :

$$\mathrm{Hom}_A(N, \overline{(M^*)_A}) \simeq \mathrm{Hom}_A(N, M^*)$$

On en déduit d'après A.III.3 que $\overline{(M^*)_A} \simeq M^*$.

Ceci nous donne une réalisation de $\bar{M}$ qui est commode pour les calculs. On plonge M dans un module $\tilde{L}$ (par exemple, on peut utiliser le plongement de M dans $\tilde{\tilde{M}}$). On a alors, d'après (I.1.5.2)

$$\bar{M} = \{l \in L^* \mid A \cdot l \subset M \subset \tilde{L}\}. \tag{I.4.3.1}$$

I.5 Quelques classes de modules

I.5.1 Modules admissibles

Comme dans les paragraphes précédents, A est une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents.

Définition. Un module non dégénéré M dans $\mathcal{M}(A)$ est dit admissible si pour tout idempotent e de A, l'espace vectoriel $e \cdot M$ est de dimension finie.

Proposition. *Un module M est admissible si et seulement si l'inclusion $M \hookrightarrow \tilde{\tilde{M}}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Supposons M admissible. Alors pour tout idempotent e de A, $e \cdot M$ est de dimension finie. L'injection de $e \cdot M$ dans $e \cdot (\tilde{\tilde{M}})$ exhibée dans la démonstration du lemme I.4.1 est alors un isomorphisme. Comme tout vecteur de $\tilde{\tilde{M}}$ est fixé par un idempotent de A, on obtient $M \simeq \tilde{\tilde{M}}$. Réciproquement, supposons que $\tilde{\tilde{M}}$ soit strictement plus grand que M. Soit $m \in \tilde{\tilde{M}} \backslash M$, et soit e un idempotent de A tel que $m \in e \cdot (\tilde{\tilde{M}})$. Il est clair que m n'est pas dans l'image de l'injection de $e \cdot M$ dans $e \cdot \tilde{\tilde{M}}$, et donc $e \cdot M$ n'est pas de dimension finie. □

Corollaire. *Soit M un A-module non dégénéré admissible. Alors $\tilde{M}$ est admissible. De plus M est simple si et seulement si $\tilde{M}$ est simple.*

Démonstration. Le premier point est un corollaire de la démonstration de la proposition ci-dessus, plutôt que du résultat lui-même. Pour le second point, il suffit de remarquer que si M admet un sous-module propre M_1, alors son orthogonal dans $\tilde{M}$ est aussi un sous-module propre de $\tilde{M}$, et donc $\tilde{M}$ est réductible. L'égalité $M = \tilde{\tilde{M}}$ montre la réciproque. □

I.5.2 Modules projectifs, injectifs

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents. Rappelons qu'un module $X \in \mathcal{M}(A)$ est dit projectif (resp. injectif) si le foncteur $\mathrm{Hom}_A(X, \bullet)$ (resp. $\mathrm{Hom}_A(\bullet, X)$) est exact.

Théorème. *La catégorie $\mathcal{M}(A)$ possède assez de projectifs (c'est-à-dire que tout module dans $\mathcal{M}(A)$ est quotient d'un module projectif).*

<u>*Démonstration*</u>. Soit $e \in A$ un idempotent, et considérons le module $P_e = Ae$. Le module P_e est projectif puisque pour tout A-module M dans $\mathcal{M}(A)$, $\mathrm{Hom}_A(P_e, M) = e \cdot M = j_e(M)$ et que le foncteur j_e est exact (I.3.1). D'autre part, toute somme directe de modules projectifs est encore projective. En effet, pour toute famille $(P_i)_{i\in I}$ de modules

$$\mathrm{Hom}_A(\oplus_{i\in I} P_i, M) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(P_i, M).$$

Si M est dans $\mathcal{M}(A)$, et si $m \in M$, par définition, il existe un idempotent e de A tel que $m = e\cdot m$. Donc m est dans l'image de $P_e \to M$, $a \cdot e \mapsto a \cdot m$. Pour chaque $m \in M$, on choisit un tel e. En prenant la somme sur tous les $m \in M$ des P_e correspondants, on voit que M est un quotient d'un module projectif. □

Grâce à la dualité dans $\mathcal{M}(A)$, nous allons déduire de l'existence d'assez de projectifs l'existence d'assez d'injectif. Pour cela, montrons tout d'abord le

Lemme. *Soit X un module projectif dans $\mathcal{M}(A)$. Alors $\tilde{X}$ est injectif.*

<u>*Démonstration*</u>. Il s'agit de montrer l'exactitude du foncteur $\mathrm{Hom}_A(\bullet, \tilde{X})$. Or d'après (I.4.2.1) ce foncteur est isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}_A(X, \tilde{\bullet})$ qui est la composition du foncteur de dualité, exact d'après le lemme I.4.1, et du foncteur $\mathrm{Hom}_A(X, \bullet)$, exact par hypothèse. □

Corollaire. *La catégorie $\mathcal{M}(A)$ possède assez d'injectifs (c'est-à-dire que tout module dans $\mathcal{M}(A)$ est sous-module d'un module injectif).*

<u>*Démonstration*</u>. Soit M dans $\mathcal{M}(A)$ et P un module projectif tel que $\tilde{M}$ soit un quotient de P. Alors $\tilde{\tilde{M}}$ est un sous-module du module injectif $\tilde{P}$. Or M s'injecte dans $\tilde{\tilde{M}}$ (corollaire I.4.1), donc dans $\tilde{P}$. □

I.5.3 Modules libres

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents. On dit que $M \in \mathcal{M}(A)$ est un module libre s'il est isomorphe à une somme directe de modules isomorphes à A.

Tout module M est quotient d'un module libre. La démonstration est similaire à celle du fait que $\mathcal{M}(A)$ contient assez de projectifs. En effet, soit $M \in \mathcal{M}(A)$, et soit $m \in M$, fixé par un certain idempotent e de A. Alors m est dans l'image du morphisme $\phi : A \to M$, défini par $\phi(a) = a \cdot m$. On construit ainsi un morphisme surjectif de $\bigoplus_{m\in M} A$ dans M.

Contrairement au cas des anneaux unitaires, A n'est pas nécessairement projectif dans $\mathcal{M}(A)$, et donc un facteur direct d'un module libre n'est pas nécessairement projectif. En revanche, tout module projectif est facteur direct d'un module libre, la démonstration restant la même que dans le cas des anneaux unitaires (*cf.* [35]).

I.6 Propriétés de $\mathcal{M}(A)$

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents. La catégorie $\mathcal{M}(A)$ étant une sous-catégorie pleine de $A -$ **mod** stable par passage aux sous-modules et aux quotients, c'est une catégorie abélienne. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A.VI pour les généralités sur les catégories abéliennes et la terminologie employée.

Proposition. *La catégorie $\mathcal{M}(A)$ est complète et cocomplète et vérifie les axiomes* **AB5** *et* **AB6** *(cf. A.VI). Les limites inductives dans $\mathcal{M}(A)$ sont exactes.*

Démonstration. La première assertion signifie que les limites et colimites quelconques existent dans $\mathcal{M}(A)$, et pour cela, il suffit de vérifier l'existence de produits et de sommes directes dans $\mathcal{M}(A)$. On utilise l'existence de produits et de sommes directes quelconques dans $A-\mathbf{mod}$. Si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets dans $\mathcal{M}(A)$, alors $\prod_i M_i$ et $\bigoplus_i M_i$ existent dans $A-\mathbf{mod}$. Il est immédiat que $\bigoplus_i M_i$ est non dégénéré, et est donc la somme directe des M_i dans $\mathcal{M}(A)$. En revanche, le produit $\prod_i M_i$ n'est pas forcément non dégénéré, mais il est clair que sa partie non dégénérée $(\prod_i M_i)_A$ vérifie la propriété universelle du produit dans $\mathcal{M}(A)$.

L'axiome **AB5** affirme que pour tout système filtrant croissant M_i de sous-objets d'un objet M, et pour tout sous-objet N de M, on a

$$N\bigcap\left(\sum_i M_i\right)=\sum_i(N\bigcap M_i).$$

Comme tous les objets sont des modules, donc des ensembles, on peut faire des raisonnements ensemblistes standards pour montrer l'égalité ci-dessus, en montrant l'inclusion dans les deux sens.

L'axiome **AB6** affirme que tout objet de $\mathcal{M}(A)$ est une somme croissante d'objets de type fini. Là encore, cette propriété est évidente dans le cas d'une catégorie de modules stables par passage aux sous-modules.

Enfin, la dernière assertions signifie que si les $((M_i)_{i\in\mathcal{I}},(f_{ij})_{i\leq j})$, $((N_i)_{i\in\mathcal{I}},(g_{ij})_{i\leq j})$ et $((P_i)_{i\in\mathcal{I}},(h_{ij})_{i\leq j})$ forment des systèmes inductifs dans $\mathcal{M}(A)$ tels que pour tout $i\in\mathcal{I}$ on ait une suite exacte

$$0\to M_i\to N_i\to P_i\to 0$$

alors la suite

$$0\to\varinjlim_i M_i\to\varinjlim_i N_i\to\varinjlim_i P_i\to 0$$

est exacte. On peut soit déduire ceci du même énoncé dans $A-\mathbf{mod}$, démontré par exemple dans [11], §6, Prop. 3, en constatant que toutes les limites injectives sont en fait dans $\mathcal{M}(A)$, ou bien en recopier la démonstration. □

I.7 Notes sur le chapitre I

Des généralités sur les anneaux à idempotents se trouvent à plusieurs endroits dans la littérature. Je me suis servi de [23] pour la section sur le complété de l'anneau A et sur le centre de $\mathcal{M}(A)$. J'ai suivi [34] pour la définition des foncteurs d'induction I_A^B et P_A^B, ainsi que pour la terminologie « pseudo foncteur d'oubli ». La démonstration du fait que la dualité entrelace les foncteurs I_A^B et P_A^B est aussi tirée de [34]. La section I.3.2 est inspirée de [22], les résultats s'y trouvant étant dus à J. Bernstein. La notion de complété d'un module non dégénéré est introduite dans [2].

Chapitre II

Espaces et groupes totalement discontinus

Dans ce chapitre, nous développons l'étude des espaces (et plus particulièrement des groupes) topologiques localement compacts totalement discontinus (t.d. pour abréger), c'est-à-dire tels que chaque point de l'espace admette une base de voisinages ouverts compacts. En effet, les groupes réductifs p-adiques sont munis d'une telle topologie, provenant de celle des corps sur lesquels ils sont définis. La notion de fonction ≪ lisse ≫ adéquate sur de tels espaces est celle de fonction localement constante. Une fonction lisse à support compact est alors une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ouverts compacts disjoints. Ce fait donne à l'analyse fonctionnelle sur ces espaces un caractère purement algébrique, qui la rend beaucoup plus simple que dans le cas des variétés différentiables, par exemple. Il en est de même de la théorie des faisceaux (de groupes abéliens) sur X. Nous étudions aussi les actions continues de groupes topologiques t.d. sur des espaces topologiques t.d. Là encore, la théorie est débarrassée des pathologies rencontrées dans le cas général, ou même dans le cadre différentiel. Un outil fondamental de l'étude des groupes topologiques localement compacts est la mesure de Haar. Une mesure de Haar est une mesure invariante par l'action par translation à gauche du groupe sur lui-même. La démonstration de l'existence et de l'unicité à un facteur scalaire près d'une telle mesure sur les groupes topologiques localement compacts totalement discontinus est assez élémentaire. L'action par translation à droite du groupe sur la mesure de Haar définit sur le groupe une fonction (ou caractère) ≪ modulaire ≫. Le calcul de cette fonction peut s'effectuer en termes d'indices de sous-groupes ouverts compacts.

Une autre notion fondamentale pour la suite de la théorie est celle de convolution de distributions. C'est cette convolution qui va nous permettre de définir les algèbres jouant un rôle dans la théorie des représentations des groupes topologiques t.d. L'espace des distributions à support compact sur un tel groupe G devient une algèbre une fois munie du produit de convolution, dont l'élément neutre est la distribution de Dirac en l'élément neutre du groupe. Les mesures de Haar sur les sous-groupes ouverts compacts de G fournissent un système filtrant d'idempotents de cette algèbre. L'algèbre de Hecke de G est la sous-algèbre constituée des distributions à support compact fixés par convolution à gauche et à droite par un de ces idempotents. On obtient ainsi une algèbre à idempotents (sans unité), notée $\mathcal{H}(G)$. La théorie du chapitre I s'applique à cette algèbre. Nous décrivons explicitement le complété et le centre de la catégorie des $\mathcal{H}(G)$-modules non dégénérés en termes de distributions dites à support essentiellement compact. L'importance de ces résultats vient de ce que la catégorie des $\mathcal{H}(G)$-modules non dégénérés est équivalente à la catégorie des représentations lisses de G, qui sera l'objet d'étude du chapitre suivant.

II.1 Topologie des espaces t.d.

Nous donnons dans cette section quelques résultats généraux de topologie des espaces localement compacts totalement discontinus.

Si X est un ensemble et Y une partie de X, on note χ_Y la fonction caractéristique de Y dans X. Si X est un espace topologique et Y est une partie de X, on note $\bar{Y}$ l'adhérence de Y dans X.

II.1.1 Espaces t.d.

Un espace topologique localement compact totalement discontinu (espace t.d.) est un espace topologique séparé tel que chaque point admette une base de voisinages d'ouverts compacts.

Un groupe topologique localement compact totalement discontinu est un groupe topologique dont l'espace topologique sous-jacent est t.d. Il suffit pour cela que l'élément neutre e admette une base de voisinages composée de sous-groupes ouverts compacts. Cette condition est en fait nécessaire, mais nous laissons ce point à la sagacité du lecteur. Si l'on ne veut pas se fatiguer, on prendra cette condition a priori plus forte comme définition des groupes topologiques t.d.

Lemme. (i) *Soient X un espace t.d. et Y une partie localement fermée de X. Alors Y est un espace t.d. pour la topologie induite.*

(ii) *Si K est un compact de X et $\bigcup_\alpha U_\alpha$ est un recouvrement de K par des ouverts, alors il existe un recouvrement subordonné fini de K par des ouverts compacts disjoints V_i (c'est-à-dire que pour tout i, il existe α tel que $V_i \subset U_\alpha$).*

Démonstration. Rappelons que $Y \subset X$ est localement fermé si pour tout point $y \in Y$, il existe un voisinage U de y dans X tel que $U \cap Y$ est fermé dans U. Ici, on peut supposer U ouvert compact, et le (i) découle alors assez facilement des définitions. Passons à (ii). Pour chaque point x dans un U_α, choisissons un voisinage ouvert compact $V_{x,\alpha} \subset U_\alpha$. On a alors $K \subset \bigcup_{\alpha,x} V_{x,\alpha}$, et par compacité de K, on peut en extraire un recouvrement fini $K \subset \bigcup_i V_{x_i,\alpha_i}$. Comme les V_{x_i,α_i} sont à la fois ouverts et fermés, il en est de même de leurs intersections et de leurs différences symétriques deux à deux. On construit donc facilement à partir de cela un recouvrement fini de K vérifiant les propriétés voulues dans l'énoncé. $\square$

Proposition. *Un espace t.d. vérifie la propriété de Baire, c'est à dire qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Démonstration. C'est vrai de tout espace localement compact (*cf.* [25], theorem XI. 10.1).

II.1.2 Fonctions et distributions

Soit X un espace t.d. Nous considérons sur X les espaces fonctionnels suivants :

$\mathcal{C}^\infty(X)$: espace des fonctions localement constantes à valeurs complexes,
$\mathcal{D}(X)$: sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(X)$ des fonctions à support compact,

$\mathcal{D}'(X)$: dual (algébrique) de $\mathcal{D}(X)$, l'espace des distributions,
(à noter que ces espaces ne sont pas munis de topologies).

Rappelons que si f est une fonction sur un espace t.d. X à valeurs complexes, son support, noté $\operatorname{Supp} f$, est défini comme étant le complémentaire de la réunion des ouverts U de X où la restriction de f est nulle.

Lemme. *Toute fonction localement constante à support compact sur un espace t.d. X peut s'écrire comme une somme finie de multiples scalaires de fonctions caractéristiques d'ouverts compacts disjoints.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}(X)$. Pour chaque point $x \in \operatorname{Supp} f$, choisissons un voisinage ouvert compact $\mathcal{U}_x$ où f est constante. Comme $\operatorname{Supp} f$ est compact, du recouvrement par les $\mathcal{U}_x$ on peut extraire un sous-recouvrement fini et d'après le (ii) du lemme II.1.1, on peut supposer ces ouverts disjoints. Le résultat est alors clair. □

Proposition. *Soient X un espace t.d. et U un ouvert de X. Notons $Z = X \setminus U$. On a alors une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{D}(U) \xrightarrow{i_U} \mathcal{D}(X) \xrightarrow{p_Z} \mathcal{D}(Z) \to 0. \tag{II.1.2.1}$$

Démonstration. L'injection i_U consiste à étendre les fonctions sur U par 0 en dehors de U pour obtenir une fonction sur X. L'application p_Z est la restriction des fonctions de X à Z. La partie Z étant fermée, on obtient bien ainsi des fonctions localement constantes et à support compact. Pour montrer que la restriction de X à Z est surjective, on doit montrer comment étendre une fonction f de $\mathcal{D}(Z)$ à X tout entier. Comme le support de f (notons-le Z') est compact, et comme f est localement constante, on peut recouvrir Z' par des ouverts de X tels que f soit constante sur l'intersection de Z' et d'un de ces ouverts. D'après le (ii) du lemme II.1.1, il existe un recouvrement fini de Z' par des ouverts compacts disjoints de X ayant cette même propriété. On étend f en une fonction constante sur ces ouverts compacts. En dehors de ces ouverts compacts, on étend f par 0. L'exactitude de la suite (II.1.2.1) est maintenant facile à vérifier : il est clair que $p_Z \circ i_U = 0$, et si $p_Z(f) = 0$, comme f est localement constante, f est nulle dans un voisinage de Z. Son support est donc dans U. □

Par dualité, on obtient :

Corollaire. *La suite :*

$$0 \to \mathcal{D}'(Z) \xrightarrow{p_Z^*} \mathcal{D}'(X) \xrightarrow{i_U^*} \mathcal{D}'(U) \to 0 \tag{II.1.2.2}$$

est exacte.

Si T est une distribution sur X, on définit son support, noté $\operatorname{Supp} T$: c'est le complémentaire de la réunion des ouverts U de X tels que $i_U^*(T) = 0$. On dira que f (resp. T) est à support dans une partie Y de X si $\operatorname{Supp} f \subset Y$ (resp. $\operatorname{Supp} T \subset Y$). Si Z est une partie fermée de X, alors la suite exacte (II.1.2.2) montre que toute distribution T sur X à support dans Z s'écrit de manière unique $p_Z^*(T_0)$, $T_0 \in \mathcal{D}'(Z)$. On identifiera donc souvent les distributions sur X à support dans Z et les distributions sur Z.

On peut maintenant définir un autre espace fonctionnel sur X :

$\mathcal{E}'(X)$, l'espace des distributions sur X à support compact.

Définissons une dualité entre les espaces $\mathcal{C}^\infty(X)$ et $\mathcal{E}'(X)$: si $T \in \mathcal{E}'(X)$, son support F est compact. Considérons la suite exacte (II.1.2.2) avec $Z = F$. Alors il existe une unique distribution T_0 sur F telle que $p_F^*(T_0) = T$. Comme F est compact, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$, $p_F(f)$ est dans $\mathcal{D}(F)$ et l'on pose :

$$\langle T, f\rangle = \langle T_0, p_F(f)\rangle.$$

Lorsque ceci sera pratique, on utilisera aussi la notation suivante pour la dualité entre $\mathcal{D}(X)$ et $\mathcal{D}'(X)$ (resp. entre $\mathcal{C}^\infty(X)$ et $\mathcal{E}'(X)$) :

$$\langle T, f\rangle = \int_X f\, dT = \int_X f(x)\, dT(x), \quad (f \in \mathcal{D}(X)),\ (T \in \mathcal{D}'(X)).$$

On peut étendre sans difficulté les résultats ci-dessus aux fonctions à valeurs dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V. On note $\mathcal{C}^\infty(X, V)$ (respectivement $\mathcal{D}(X, V)$) l'ensemble des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans V (respectivement, localement constantes à support compact). On a une injection canonique

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(X) \otimes V &\to \mathcal{C}^\infty(X, V) \\ f \otimes v &\mapsto [x \mapsto f(x)v]. \end{aligned} \tag{II.1.2.3}$$

Et de même

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(X) \otimes V &\to \mathcal{D}(X, V) \\ f \otimes v &\mapsto [x \mapsto f(x)v]. \end{aligned} \tag{II.1.2.4}$$

Or toute fonction de $\mathcal{D}(X, V)$ est somme finie de fonctions constantes sur des ouverts compactes disjoints de X (lemme II.1.2), il est donc clair que (II.1.2.4) est surjective, et c'est donc un isomorphisme.

II.1.3 Produit tensoriel de distributions

Soient X et Y des espaces t.d. et munissons $X \times Y$ de la topologie produit, qui en fait un espace t.d. Rappelons que d'après la remarque II.1.2, toute fonction dans $\mathcal{D}(X \times Y)$ est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ouverts compacts disjoints. Comme les parties de la forme $U \times V$, où U (resp. V) est un ouvert compact de X (resp. de Y) forment une base de voisinages de $X \times Y$, on peut d'après le lemme II.1.1, (ii) écrire tout ouvert compact de $X \times Y$ comme réunion disjointe finie d'ouverts compacts de la forme $U \times V$. Toute fonction dans $\mathcal{D}(X \times Y)$ est donc une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ouverts compacts disjoints de la forme $U \times V$. Ceci montre que $\mathcal{D}(X \times Y) \simeq \mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$, l'isomorphisme étant donné par

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)\, g(y), \quad x \in X,\ y \in Y,\ f \in \mathcal{D}(X),\ g \in \mathcal{D}(Y).$$

On peut alors définir le produit tensoriel de distributions : si $T_1 \in \mathcal{D}'(X)$, $T_2 \in \mathcal{D}'(Y)$, alors $T_1 \otimes T_2$ est défini sur $\mathcal{D}(X \times Y)$ par :

$$\langle T_1 \otimes T_2, f \otimes g\rangle = \langle T_1, f\rangle \langle T_2, g\rangle.$$

D'autre part l'argument utilisé ci-dessus montre que les formules de Fubini sont valables : pour tout $f \in \mathcal{D}(X \times Y)$,

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(T_1 \otimes T_2)(x,y) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, dT_2(y)\right) dT_1(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, dT_1(x)\right) dT_2(y).\end{aligned}$$

En effet, les intégrales se ramènent à des sommes finies.

Proposition. *On a*

$$\mathrm{Supp}(T_1 \otimes T_2) = \mathrm{Supp}(T_1) \times \mathrm{Supp}(T_2).$$

En particulier, le produit tensoriel de deux distributions à support compact est à support compact.

Démonstration. Soit Ω un ouvert de $X \times Y$ et quitte à le réduire, supposons le de la forme $U \times V$ où U est un ouvert de X et V est un ouvert de Y. Notons $T_{1,U}$ (resp. $T_{2,V}$) la restriction de T_1 à U (resp. T_2 à V). Il est clair que la restriction de $T_1 \otimes T_2$ à Ω est égale à $T_{1,U} \otimes T_{2,V}$. La première assertion s'en déduit par une suite de tautologies. La seconde en découle immédiatement. □

II.2 Faisceaux sur un espace topologique t.d.

II.2.1 Généralités sur la théorie des faisceaux

Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{T}$ la topologie de X, c'est-à-dire l'ensemble des ouverts de X. Une *base de la topologie* de X est un sous-ensemble $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ tel que pour tout $x \in X$ et pour tout ouvert U contenant x, il existe un ouvert $U_0 \in \mathcal{T}_0$ contenant x tel que

$$U_0 \subset U.$$

Bien sûr, une base détermine la topologie.

Nous allons introduire les notions de préfaisceau et de faisceau (de groupes abéliens) sur X, de base $\mathcal{T}_0$. Ceci généralise légèrement les définitions données dans la plupart des traités sur la théorie des faisceaux (par exemple [28]), qui ne considèrent que le cas $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$. Cette plus grande généralité n'est en fait qu'apparente, puisque nous verrons que tout faisceau de base $\mathcal{T}_0$ se prolonge naturellement en un faisceau de base $\mathcal{T}$ (ce n'est pas vrai pour les préfaisceaux), mais cette souplesse dans les définitions est pratique lorsque X est un espace t.d., pour lequel le choix $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_c$, l'ensemble des ouverts compacts de X, est particulièrement adapté.

Définition. Un préfaisceau $\mathcal{F}$ (de groupes abéliens) sur X, de base $\mathcal{T}_0$, est la donnée, pour chaque ouvert U de $\mathcal{T}_0$, d'un groupe abélien $\mathcal{F}(U)$ (si $\emptyset \in \mathcal{T}_0$, alors on demande que $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$), et pour tout couple $U \subset V$ d'ouverts de $\mathcal{T}_0$, d'un morphisme de restriction

$$\rho_{V,U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

vérifiant $\rho_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$ et lorsque $U \subset V \subset W$ sont des éléments de $\mathcal{T}_0$, $\rho_{V,U} \circ \rho_{W,V} = \rho_{W,U}$. Lorsque l'on suppose que les $\mathcal{F}(U)$ sont munis de structures supplémentaires (anneaux, espaces vectoriels sur un corps k, etc), et que les morphismes de restriction préservent ces structures, on parle de préfaisceaux d'anneaux, de k-espaces vectoriels, etc.

Une manière équivalente et un peu plus sophistiquée de définir les préfaisceaux est la suivante : notons encore $\mathcal{T}_0$ la catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathcal{T}_0$, et dont les morphismes sont donnés par :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_0}(U,V)=\emptyset \quad \text{si } U \text{ n'est pas inclus dans } V,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_0}(U,V) \quad \text{est l'inclusion de } U \text{ dans } V \text{ si } U \text{ est inclus dans } V.$$

Un préfaisceau de groupes abéliens (resp. d'anneaux, de k-espaces vectoriels, etc) est alors un foncteur (contravariant) de $\mathcal{T}_0$ dans la catégorie des groupes abéliens (resp. des anneaux, des k-espaces vectoriels, etc).

Les préfaisceaux (de groupes abéliens) sur X, de base $\mathcal{T}_0$ (on dira maintenant simplement préfaisceau sur X), forment une catégorie, notée $p\mathcal{S}h(X)$ dont les morphismes sont définis de la manière suivante. Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux préfaisceaux sur X de base $\mathcal{T}_0$. Un morphisme ϕ entre $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est la donnée, pour chaque $U\in\mathcal{T}_0$, d'un morphisme de groupes

$$\phi_U:\ \mathcal{F}_1(U)\to\mathcal{F}_2(U).$$

Il est de plus exigé que si $U\subset V$ sont des ouverts de $\mathcal{T}_0$,

$$\phi_U\circ\rho_{V,U}=\rho_{V,U}\circ\phi_V. \tag{II.2.1.1}$$

Définition. Un préfaisceau $\mathcal{F}$ est un *faisceau* si la condition suivante est vérifiée :

(F) : soit $V\in\mathcal{T}_0$ et $\{V_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de V par des ouverts de $\mathcal{T}_0$. Supposons que pour chaque $i\in I$ soit donné un élément f_i de $\mathcal{F}(V_i)$ de telle sorte que quels que soient i,j dans I et pour tout ouvert $V_{ij}\subset V_i\cap V_j$ de $\mathcal{T}_0$, on ait

$$\rho_{V_i,V_{ij}}(f_i)=\rho_{V_j,V_{ij}}(f_j).$$

Alors il existe un unique $f\in\mathcal{F}(V)$ tel que pour tout $j\in I$, $\rho_{V,V_j}(f)=f_j$.

Les faisceaux sur X forment une catégorie (les morphismes sont les morphismes de préfaisceaux), notée $\mathcal{S}h(X)$.

Définissons maintenant la fibre $\mathcal{F}_x$ d'un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X. L'ensemble des ouverts U de $\mathcal{T}_0$ contenant x, noté $\mathcal{V}_{\mathcal{T}_0}(x)$ est muni de l'ordre partiel :

$$V\leq U \text{ si et seulement si } U\subset V.$$

Cet ensemble est *filtrant croissant*, c'est-à-dire que si U et V sont des ouverts de $\mathcal{T}_0$ contenant x, il existe un ouvert W de $\mathcal{T}_0$ tel que $W\geq V$, $W\geq U$ (ceci découle simplement du fait que $\mathcal{T}_0$ est une base de la topologie). Les morphismes $\rho_{V,U}$, $U\subset V$, $U,V\in\mathcal{T}_0$, forment un système inductif de groupes abéliens (voir exemples A.IV.2).

On pose

$$\mathcal{F}_x=\varinjlim_{U\in\mathcal{V}_{\mathcal{T}_0}(x)}\mathcal{F}(U).$$

Cette limite inductive peut être décrite explicitement : formons l'union disjointe $\coprod_{U\in\mathcal{V}_{\mathcal{T}_0}(x)}\mathcal{F}(U)$ que l'on munit de la relation d'équivalence suivante : $s\in\mathcal{F}(U)$ est équivalent à $t\in\mathcal{F}(V)$ s'il existe $W\in\mathcal{V}_{\mathcal{T}_0}(x)$, $W\subset U\cap V$ tel que $\rho_{U,W}(s)=\rho_{V,W}(t)$. La limite inductive $\mathcal{F}_x$ est alors l'ensemble des classes d'équivalence, muni de la structure de groupe et des morphismes $\rho_{U,x}:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}_x$ canoniques.

Nous allons maintenant définir un foncteur

$$p\mathcal{S}h(X) \longrightarrow \mathcal{S}h(X), \qquad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+.$$

Soient $x \in X$ et $U \in \mathcal{T}_0$, avec $x \in U$ et soit

$$\rho_{U,x} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$$

la projection canonique. Posons

$$\hat{\mathcal{F}} = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x.$$

Il s'agit de l'union disjointe des $\mathcal{F}_x$. L'espace $\hat{\mathcal{F}}$ est appelé *espace étalé* au-dessus du préfaisceau $\mathcal{F}$.

Pour tout ouvert U de X (pas nécessairement dans $\mathcal{T}_0$), une *section* de $\hat{\mathcal{F}}$ au-dessus de U est une application

$$s : U \to \hat{\mathcal{F}}$$

telle que pour tout $x \in X$, $s(x) \in \mathcal{F}_x$ et telle qu'il existe un recouvrement de U par des ouverts $(U_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{T}_0$, et des éléments $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ vérifiant :

(II.2.1.2) $$s(x) = \rho_{U_i,x}(f_i), \ (\forall x \in U_i \cap U).$$

Soit $\hat{\mathcal{F}}$ l'espace étalé pour le préfaisceau $\mathcal{F}$. Pour tout $U \in \mathcal{T}_0$, définissons $\mathcal{F}^+(U)$ comme l'ensemble des sections de $\hat{\mathcal{F}}$ au-dessus de U. Si $U \subset V$ sont des ouverts de $\mathcal{T}_0$, définissons le morphisme de restriction $\rho^+_{V,U}$ par $\rho^+_{V,U}(s) = s_{|U}$, $s \in \mathcal{F}^+(V)$. Il faut s'assurer que ceci est bien une section de $\hat{\mathcal{F}}$ au-dessus de U, au sens où nous l'avons défini ci-dessus. Par définition, il existe un recouvrement de V par des ouverts $(V_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{T}_0$, et des éléments $f_i \in \mathcal{F}(V_i)$ vérifiant

$$s(x) = \rho_{V_i,x}(f_i), \ (\forall x \in V_i \cap V).$$

Prenons un recouvrement $(U_j)_{j \in J}$ de U de sorte que pour tout $j \in J$, $U_j \in \mathcal{T}_0$ et $U_j \subset V_i$ pour un certain $i \in I$. Posons alors $g_j = \rho_{V_i,U_j}(f_i)$. On a pour tout $x \in U_j$,

$$\rho_{U_j,x}(g_j) = \rho_{U_j,x}(\rho_{V_i,U_j}(f_i)) = \rho_{V_i,x}(f_i) = s(x) = s_{|U}(x),$$

ce qui montre que $s_{|U}$ est bien une section. Il est clair que $\mathcal{F}^+$ est un préfaisceau de groupes abéliens, la structure de groupe sur les $\mathcal{F}^+(U)$ étant claire.

Montrons maintenant que $\mathcal{F}^+$ est bien un faisceau en vérifiant la propriété **(F)**. Soit $V \in \mathcal{T}_0$ et $\{V_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de V par des ouverts de $\mathcal{T}_0$. Supposons que pour chaque $i \in I$ soit donné un élément s_i de $\mathcal{F}^+(V_i)$ de telle sorte que quels que soient i, j dans I et pour tout ouvert $V_{ij} \in V_i \cap V_j$ de $\mathcal{T}_0$, on ait

$$\rho^+_{V_i,V_{ij}}(s_i) = \rho^+_{V_j,V_{ij}}(s_j).$$

Pour tout $x \in V$, choisissons V_i contenant x et posons $s(x) = s_i(x)$. Il est clair que $s(x)$ ne dépend pas du choix de V_i contenant x, car si $x \in V_i \cap V_j$, on prend un ouvert $V_{ij} \in \mathcal{T}_0$ tel que $x \in V_{ij} \subset V_i \cap V_j$, et l'on a alors :

$$s_i(x) = (s_i)_{|V_{ij}}(x) = \rho^+_{V_i,V_{ij}}(s_i)(x) = \rho^+_{V_j,V_{ij}}(s_j)(x) = (s_j)_{|V_{ij}}(x) = s_j(x).$$

Vérifions que s est une section de $\hat{\mathcal{F}}^+$ au-dessus de V. Chaque s_i, $i \in I$, est une section, et donc il existe un recouvrement $(U^i_j)_{j \in J_i}$ de V_i par des ouverts de $\mathcal{T}_0$ et des $s^i_j \in \mathcal{F}^+(U^i_j)$ tels que

$s_i(x) = \rho_{U_j^i,x}(s_j^i)$. On a alors $s(x) = \rho_{U_j^i,x}(s_j^i)$ pour tout $x \in U_j^i$, ce qui montre que s est une section. La propriété d'existence dans la définition des faisceaux est donc établie. Reste l'unicité. Supposons que deux sections s et s' dans $\hat{\mathcal{F}}^+(V)$ vérifient

$$\rho_{V,V_i}(s) = \rho_{V,V_i}(s') = s_i, \quad (\forall i \in I).$$

On a immédiatement, pour tout $x \in V$, en choisissant un V_i contenant x, $s(x) = s'(x) = s_i(x)$, et donc $s = s'$.

Soit $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux sur X. Définissons maintenant $\phi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$. Soit $s \in \mathcal{F}^+(U)$. Par définition, il existe un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de U par des ouverts de $\mathcal{T}_0$ et des $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tels que $s(x) = \rho_{U_i,x}(f_i)$. Posons, pour tout $i \in I$, $g_i = \phi_{U_i}(f_i)$ et $t(x) = \rho_{U_i,x}(g_i)$. On vérifie par les techniques désormais familières que ceci ne dépend pas des choix faits et que la condition (II.2.1.1) est satisfaite pour les $\rho^+_{V,U}$ et les ϕ^+_U. Nous laissons aussi au lecteur la vérification du fait que

$$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+, \qquad [\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}] \mapsto [\mathcal{F}^+ \xrightarrow{\phi^+} \mathcal{G}^+]$$

est un foncteur.

Proposition. *Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$ de $p\mathcal{S}h(X)$ dans $\mathcal{S}h(X)$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli de $\mathcal{S}h(X)$ dans $p\mathcal{S}h(X)$, c'est-à-dire que pour tout $\mathcal{F} \in p\mathcal{S}h(X)$ et pour tout $\mathcal{G} \in \mathcal{S}h(X)$, on a un isomorphisme naturel :*

$$\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}(\mathcal{F}^+, \mathcal{G})$$

Démonstration. Pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X, définissons un morphisme

$$\iota^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+.$$

Soit $U \in \mathcal{T}_0$ et $f \in \mathcal{F}(U)$. Posons

$$\iota^{\mathcal{F}}_U(f) = s_f,$$

où $s_f : U \to \coprod_{x\in U} \mathcal{F}_x$ est la section donnée par $s_f(x) = \rho_{U,x}(f)$. Ceci est bien une section. On le voit en choisissant comme recouvrement de U, U lui-même. Une vérification sans difficulté montre que pour tout morphisme de préfaisceau $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota^{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{G} \arrow[d, "\iota^{\mathcal{G}}"'] \\ \mathcal{F}^+ \arrow[r, "\phi^+"'] & \mathcal{G}^+ \end{tikzcd}$$

Soit $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux sur X, où $\mathcal{G}$ est un faisceau. Nous allons définir $\Psi : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ factorisant ψ par $\iota^{\mathcal{F}}$. Soient $s \in \mathcal{F}^+(U)$, et les U_i, f_i comme en (II.2.1.2). Posons $f'_i = \psi_{U_i}(f_i) \in \mathcal{G}(U_i)$. On a alors d'après (II.2.1.1), quels que soient i et j dans I :

$$\rho_{U_i,U_i\cap U_j}(f'_i) = \rho_{U_i,U_i\cap U_j}(\psi_{U_i}(f_i)) = \psi_{U_i\cap U_j}(\rho_{U_i,U_i\cap U_j}(f_i)),$$

et de même

$$\rho_{U_j,U_i\cap U_j}(f'_j) = \rho_{U_j,U_i\cap U_j}(\psi_{U_j}(f_j)) = \psi_{U_i\cap U_j}(\rho_{U_j,U_i\cap U_j}(f_j)).$$

Montrons que

$$\rho_{U_i,U_i\cap U_j}(f_i)=\rho_{U_j,U_i\cap U_j}(f_j), \tag{II.2.1.3}$$

ce qui entraînera

$$\rho_{U_i,U_i\cap U_j}(f'_i)=\rho_{U_j,U_i\cap U_j}(f'_j). \tag{II.2.1.4}$$

On a pour tout $x\in U_i\cap U_j$:

$$s(x)=\rho_{U_i,x}(f_i)=\rho_{U_i\cap U_j,x}(\rho_{U_i,U_i\cap U_j}(f_i)),$$

et de même

$$s(x)=\rho_{U_j,x}(f_j)=\rho_{U_i\cap U_j,x}(\rho_{U_i,U_i\cap U_j}(f_j))$$

d'où

$$\rho_{U_i\cap U_j,x}(\rho_{U_i,U_i\cap U_j}(f_i)-\rho_{U_j,U_i\cap U_j}(f_j))=0. \tag{II.2.1.5}$$

Or nous avons le résultat suivant :

Lemme. *Soient $\mathcal{F}$ un faisceau sur X, $U\in\mathcal{T}_0$ et $f\in\mathcal{F}(U)$ tels que $\rho_{U,x}(f)=0\in\mathcal{F}_x$ pour tout $x\in U$. Alors $f=0$.*

Démonstration. Par définition de la limite inductive, pour tout $x\in U$, il existe un ouvert $U_x\in\mathcal{T}_0$ contenant x et contenu dans U tel que $\rho_{U,U_x}(f)=0$. Les ouverts $(U_x)_{x\in U}$ forment un recouvrement de U. La propriété **(F)** des faisceaux montre alors que $f=0$. □

Terminons la démonstration de la proposition. Le lemme et (II.2.1.5) montrent (II.2.1.3) et donc (II.2.1.4). La propriété **(F)** pour le faisceau $\mathcal{G}$ entraîne alors qu'il existe un unique $f'\in\mathcal{G}(U)$ tel que $\rho_{U,U_i}(f')=f'_i$. Posons alors $\Psi_U(s)=f'$.

Soient $f\in\mathcal{F}(U)$, $\iota_U^{\mathcal{F}}(f)=s_f$ et $f'=\Psi_U(s_f)$ obtenu comme ci-dessus On a alors :

$$\Psi_U(\iota_U^{\mathcal{F}}(f))=\Psi_U(s_f)=f'$$

et $\rho_{U,U_i}(f')=f'_i=\psi_{U_i}(f_i)$ pour tout $i\in I$. Ceci montre que $\Psi\circ\iota^{\mathcal{F}}=\psi$.

Réciproquement, si Ψ est dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})$, on définit ϕ dans $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ par

$$\phi_U(f)=\Psi_U(s_f),\quad (f\in\mathcal{F}(U)).$$

On voit alors immédiatement que les opérations $\phi\mapsto\Phi$ et $\Phi\mapsto\phi$ décrites ci-dessus sont inverses l'une de l'autre, en utilisant le fait que Ψ est déterminé de manière unique par la donnée des $\Psi(s_f)$, $f\in\mathcal{F}(U)$, $U\in\mathcal{T}_0$. □

Remarque. Le faisceau $\mathcal{F}^+$ et le morphisme $\iota^{\mathcal{F}}$ sont solutions du problème universel (à droite) posé par $\mathcal{F}$ et le foncteur d'oubli des faisceaux vers les préfaisceaux (voir A.III.1). Il y a donc unicité de $(\mathcal{F}^+,\iota^{\mathcal{F}})$ à unique isomorphisme près. En particulier, si $\mathcal{F}$ est un faisceau, $\mathcal{F}$ est naturellement isomorphe à $\mathcal{F}^+$ (l'isomorphisme est $\iota^{\mathcal{F}}$). Un faisceau s'identifie donc avec le faisceau des sections de son espace étalé $\hat{\mathcal{F}}$. Lorsque $\mathcal{F}$ est un faisceau, nous ne ferons plus la différence entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^+$ dans la suite.

Terminons cette section en remarquant que la catégorie des faisceaux sur X de base $\mathcal{T}_0$ est équivalente à la catégorie des faisceaux de base $\mathcal{T}$. On passe de manière évidente d'un faisceau de base $\mathcal{T}$ à un faisceau de base $\mathcal{T}_0$, par restriction. Dans l'autre sens, si $\mathcal{F}$ est un faisceau de base $\mathcal{T}_0$ et si U est un ouvert quelconque de X, on définit $\mathcal{F}^+(U)$ comme l'ensemble des sections

$$s : U \to \coprod_{x\in U} \mathcal{F}_x$$

exactement comme en (II.2.1.2). Ceci définit un faisceau de base $\mathcal{T}$ prolongeant le faisceau $\mathcal{F}^+$ de base $\mathcal{T}_0$ construit dans la proposition ci-dessus (la démonstration que c'est un faisceau est la même que pour $\mathcal{T}_0$). Notons le (provisoirement) $\mathcal{F}^+_{\mathcal{T}}$. Comme $\mathcal{F}$ est un faisceau, d'après la remarque ci-dessus, $\mathcal{F}$ est naturellement isomorphe à $\mathcal{F}^+$. Ceci montre que le foncteur qui consiste à partir d'un faisceau $\mathcal{F}$ de base $\mathcal{T}_0$, à construire le faisceau $\mathcal{F}^+_{\mathcal{T}}$ et à restreindre celui-ci à la base $\mathcal{T}_0$ est naturellement isomorphe au foncteur identique de la catégorie des faisceaux sur X de base $\mathcal{T}_0$. Dans l'autre sens, partons d'un faisceau $\mathcal{G}$ sur X de base $\mathcal{T}$. Il est naturellement isomorphe au faisceau $\mathcal{G}^+$. Restreignons $\mathcal{G}$ à la base $\mathcal{T}_0$ pour obtenir $\mathcal{G}_{\mathcal{T}_0}$, puis formons $(\mathcal{G}_{\mathcal{T}_0})^+$. Il est clair que ce faisceau est égal à $\mathcal{G}^+$. Ceci montre que l'on obtient ainsi un foncteur isomorphe au foncteur identique de la catégorie des faisceaux sur X de base $\mathcal{T}$ et finit d'établir l'équivalence de catégories.

II.2.2 Support d'une section

Nous reprenons les notations de la section précédente, en particulier $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X de base $\mathcal{T}_0$.

Définition. Supposons que $s : U \to \hat{\mathcal{F}}$ soit une section. Son support, noté $\mathrm{Supp}(s)$, est l'ensemble des $x \in U$ tels que $s(x) \neq 0$.

Proposition. *Le support d'une section $s : U \to \hat{\mathcal{F}}$ du faisceau $\mathcal{F}$ est fermé.*

Démonstration. Supposons que $x \notin \mathrm{Supp}(s)$. Par définition d'une section, x possède un voisinage ouvert $W \in \mathcal{T}_0$ tel qu'il existe un élément $f \in \mathcal{F}(W)$ avec $s(y) = \rho_{W,y}(f)$ pour tout $y \in W$. Comme par hypothèse $\rho_{W,x}(f) = s(x) = 0$, par définition de la limite inductive, il existe un voisinage $V \in \mathcal{T}_0$ de x contenu dans W tel que $\rho_{W,V}(s) = 0$. Alors pour tout $y \in V$,

$$s(y) = \rho_{V,y} \circ \rho_{W,V}(f) = 0.$$

Ceci montre que V n'intersecte pas le support de s. Le complémentaire de ce support est donc ouvert. □

Grâce à l'identification de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^+$ on peut parler du support d'un élément de $\mathcal{F}(U)$. Si U est un ouvert quelconque, on note $\mathcal{F}_c(U)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}(U)$ à support compact.

II.2.3 Faisceau de modules

Soit $\mathcal{R}$ un faisceau d'anneaux sur X, de base $\mathcal{T}_0$ (on dit que $(X, \mathcal{R})$ est un *espace annelé*). Un faisceau de $\mathcal{R}$-modules sur X est un faisceau $\mathcal{M}$ sur X tel que pour tout ouvert $U \in \mathcal{T}_0$, $\mathcal{M}(U)$ est un module (à gauche) sur $\mathcal{R}(U)$. Si $U \subset V$ sont des ouverts de $\mathcal{T}_0$, alors l'application de restriction $\rho_{V,U} : \mathcal{R}(V) \to \mathcal{R}(U)$ est un morphisme d'anneaux grâce auquel tout $\mathcal{R}(U)$-module devient un $\mathcal{R}(V)$-module. On exige alors que les morphismes de restriction $\rho_{V,U} : \mathcal{M}(V) \to \mathcal{M}(U)$ soient des morphismes de $\mathcal{R}(V)$-modules.

II.2.4 Caractérisation des faisceaux sur un espace t.d.

Soit X un espace t.d. L'ensemble $\mathcal{T}_c$ des ouverts compacts de X est une base de la topologie de X. Nous allons considérer dans la suite les faisceaux (de groupes abéliens) de base $\mathcal{T}_c$. La nature très particulière de la topologie localement compacte totalement discontinue donne à ceux-ci une structure très simple, comme le montre la proposition suivante.

Proposition. *Soit X un espace t.d. et soit $\mathcal{F}$ un faisceau (de groupes abéliens) de base $\mathcal{T}_c$. Alors il existe un groupe abélien $\mathcal{F}_c(X)$ et un faisceau $\mathcal{F}_1$ isomorphe à $\mathcal{F}$ tel que*

— pour tout $U \in \mathcal{T}_c$, $\mathcal{F}_1(U) \subset \mathcal{F}_c(X)$,

— si $U \subset V$ sont des ouverts de $\mathcal{T}_c$, alors $\mathcal{F}_1(U) \subset \mathcal{F}_1(V)$,

— si $U \subset V$ sont des ouverts de $\mathcal{T}_c$, alors pour tout $f \in \mathcal{F}_1(U)$, $\rho_{V,U}(f) = f$ tandis que $\rho_{V,V \setminus U}(f) = 0$,

— $\mathcal{F}_c(X) = \bigcup_{U \in \mathcal{T}_c} \mathcal{F}_1(U)$.

Démonstration. Comme $\mathcal{F}$ est un faisceau, $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathcal{F}^+$, le faisceau des sections de l'espace étalé $\hat{\mathcal{F}}$. Soit $\mathcal{F}_c(X)$ l'espace des sections dans $\mathcal{F}^+(X)$ à support compact. Si U est un ouvert compact de X, on plonge $\mathcal{F}^+(U)$ dans $\mathcal{F}_c(X)$ en étendant les sections $s \in \mathcal{F}^+(U)$ par 0 en dehors de U. Comme $X \setminus U$ est ouvert, il est clair que ceci définit bien une section dans $\mathcal{F}^+(X)$, et elle est à support dans U, donc compact. Les autres assertions de la proposition se vérifient alors aisément. □

Exemple. Soit $\mathcal{C}_X^\infty$ le faisceau dont l'espace des sections au-dessus d'un ouvert U est l'espace $\mathcal{C}^\infty(U)$ des fonctions localement constantes sur U. Le groupe abélien donné par la proposition est dans ce cas $\mathcal{D}(X)$, l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur X. Remarquons que les $\mathcal{C}^\infty(U)$ sont des $\mathbb{C}$-algèbres (pour la multiplication des fonctions), en particulier, ce sont des anneaux, et donc $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$ est un espace annelé. Remarquons aussi que l'algèbre $\mathcal{D}(X)$ n'est en général pas unitaire, sauf si X est compact, auquel cas $\mathcal{C}^\infty(X) = \mathcal{D}(X)$, dont l'unité est χ_X. En revanche, c'est une algèbre à idempotents (voir I.1), puisque chaque ouvert compact U de X donne un idempotent χ_U.

II.2.5 Faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

Soit X un espace t.d. et soit $\mathcal{C}_X^\infty - \mathcal{M}od(X)$ la catégorie des faisceaux de $\mathcal{C}_X^\infty$-modules.

Proposition. *Soit X un espace t.d. et $\mathcal{M}$ un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X de base $\mathcal{T}_c$. Alors $\mathcal{M}$ est naturellement un faisceau de $\mathcal{C}_X^\infty$-modules.*

Démonstration. On identifie $\mathcal{M}$ et le faisceau des sections de l'espace étalé $\hat{\mathcal{M}}$ associé. Soient $U \in \mathcal{T}_c$, $s : U \to \hat{\mathcal{M}}$ une section et $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Alors $x \mapsto f(x)s(x)$ est défini, et comme f est localement constante, il est clair que c'est une section. Ainsi $\mathcal{M}$ devient un $\mathcal{C}_X^\infty$-module. □

Remarque. Il est évident que réciproquement, un faisceau de $\mathcal{C}_X^\infty$-modules est naturellement un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. En effet $\mathbb{C}$ s'injecte naturellement dans tous les $\mathcal{C}^\infty(U)$ en associant à un scalaire de $\mathbb{C}$ la fonction constante égale à ce scalaire sur U. Ainsi les notions de faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X et de faisceau de $\mathcal{C}_X^\infty$-modules sont équivalentes (*i.e.* les catégories respectives sont équivalentes). De plus, en vertu du dernier paragraphe de II.2.1, ceci reste vrai pour les faisceaux de base $\mathcal{T}$.

Notre but est maintenant de démontrer le théorème qui suit. Rappelons que $\mathcal{D}(X)$ est une algèbre à idempotents, avec comme système d'idempotents les $\{\chi_U\}$, U ouvert compact. L'algèbre $\mathcal{C}^\infty(X)$ est elle une algèbre unitaire, d'unité χ_X. La notion de module non dégénéré définie dans le chapitre précédent pour les algèbres à idempotents s'étend aisément au cas d'une algèbre munie d'un système filtrant d'idempotents (*cf.* remarque 3, I.1.2). et $\mathcal{C}^\infty(X)$ admet aussi comme système filtrant d'idempotents les $\{\chi_U\}$, U ouvert compact. Dans ce qui suit, on considère les modules non dégénérés sur $\mathcal{C}^\infty(X)$ relativement à ce système filtrant d'idempotents.

Théorème. *Pour tout* $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_X^\infty - \mathcal{M}od(X)$*,* $\mathcal{M}_c(X)$ *est un* $\mathcal{D}(X)$*-module non dégénéré et* $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}_c(X)$ *réalise une équivalence de catégories entre* $\mathcal{C}_X^\infty - \mathcal{M}od(X)$ *et* $\mathcal{M}(\mathcal{D}(X))$*.*

Remarquons tout d'abord que l'on peut remplacer $\mathcal{D}(X)$ dans l'énoncé par $\mathcal{C}^\infty(X)$.

Lemme. *Soit* M *un* $\mathcal{D}(X)$*-module non dégénéré. Alors l'action de* $\mathcal{D}(X)$ *sur* M *s'étend de manière unique en une action de* $\mathcal{C}^\infty(X)$ *qui fait de* M *un* $\mathcal{C}^\infty(X)$*-module non dégénéré.*

Démonstration. Soit $m \in M$ et soit U un ouvert compact tel que $\chi_U \cdot m = m$. Définissons, pour $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$,
$$f \cdot m = (f\chi_U) \cdot m.$$
On vérifie facilement que le membre de droite est indépendant du choix de U et que cette définition fait de M un $\mathcal{C}^\infty(X)$-module non dégénéré, pour le système filtrant $\{\chi_U\}$, U ouvert compact, et ce de manière unique.

Démonstration du théorème. Soit $s \in \mathcal{M}_c(X)$, et soit U un ouvert compact de X tel que $\operatorname{Supp} s \subset U$. La section s est alors fixée par l'idempotent χ_U. Ceci montre que $\mathcal{F}_c(X)$ est un $\mathcal{D}(X)$-module non dégénéré.

Définissons le foncteur inverse : pour tout $\mathcal{D}(X)$-module non dégénéré M, et pour tout ouvert compact U de X, définissons $\mathcal{M}(U) = \chi_U \cdot M$. Si $U \subset V$ sont des ouverts compacts, le morphisme de restriction
$$\rho_{V,U} : \mathcal{M}(V) = \chi_V \cdot M \to \mathcal{M}(U) = \chi_U \cdot M$$
est donné par $m \mapsto \chi_U \cdot m$. Nous allons vérifier que $\mathcal{M}$ est bien un faisceau.

En premier lieu, nous avons une caractérisation simple des modules $\mathcal{M}(U)$, U ouvert compact :
$$\mathcal{M}(U) = \{m \in M \mid \chi_U \cdot m = m\}.$$

Le fait que $\mathcal{M}$ soit un préfaisceau est simplement la traduction du fait que si $U \subset V$ sont deux ouverts compacts, alors $\chi_U \chi_V = \chi_U$. Vérifions maintenant la propriété **(F)** des faisceaux. Soit $V \in \mathcal{T}_c$ et $\{V_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de V par des ouverts de $\mathcal{T}_c$. Supposons que pour chaque $i \in I$ soit donné un élément m_i de $\mathcal{M}(V_i)$ de telle sorte que quels que soient i, j dans I et pour tout ouvert $V_{ij} \in V_i \cap V_j$ de $\mathcal{T}_c$, on ait

$$\rho_{V_i, V_{ij}}(m_i) = \chi_{V_{ij}} \cdot m_i = \rho_{V_j, V_{ij}}(m_j) = \chi_{V_{ij}} \cdot m_j.$$

Nous voulons montrer qu'il existe un unique $m \in \mathcal{M}(V)$ tel que pour tout $j \in I$, $\rho_{V,V_j}(m) = \chi_{V_{ij}} \cdot m = m_j$. Fixons k et l dans I, et montrons que l'on peut remplacer V_k et V_l dans le recouvrement par le seul ouvert compact $V_0 = V_k \cup V_l$. Plus précisément, nous allons voir qu'il existe un unique élément $m_0 \in \mathcal{M}(V_0)$ tel que

$$\rho_{V_0, V_k} \cdot m_0 = m_k, \quad \rho_{V_0, V_l} \cdot m_0 = m_l. \tag{II.2.5.1}$$

De plus, pour tout $j \in I$,

$$\rho_{V_0, V_0 \cap V_j} \cdot m_0 = \rho_{V_j, V_0 \cap V_j} \cdot m_j. \tag{II.2.5.2}$$

Supposons qu'un tel élément existe. Il est clair que la propriété que nous voulons établir est vraie pour le recouvrement $(V_i)_{i \in I}$ et les éléments $(m_i)_{i \in I}$ si elle l'est pour $(V_i)_{i \in I \setminus \{k,l\} \cup \{0\}}$ et $(m_i)_{i \in I \setminus \{k,l\} \cup \{0\}}$. Comme V est compact, on peut extraire du recouvrement $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini. Ceci montre qu'en un nombre fini d'étapes on se ramène à un recouvrement dont V lui même fait partie et l'élément m voulu est donné.

Posons

$$m_{kl} = \chi_{V_k \cap V_l} \cdot m_k = \chi_{V_k \cap V_l} \cdot m_l.$$

Comme $\chi_{V_k} \chi_{V_l} = \chi_{V_k \cap V_l}$ et que $\chi_{V_k} \cdot m_k = m_k$, $\chi_{V_l} \cdot m_l = m_l$, on obtient

$$m_{kl} = \chi_{V_l} \cdot m_k = \chi_{V_k} \cdot m_l.$$

Posons $V_0 = V_k \cup V_l$. Comme $\chi_{V_0} = \chi_{V_k} + \chi_{V_l} - \chi_{V_k \cap V_l}$, on a alors

$$m_{kl} = \chi_{V_k \cap V_l} \cdot m_{kl} = \chi_{V_l} \cdot m_{kl} = \chi_{V_k} \cdot m_{kl} = \chi_{V_0} \cdot m_{kl}.$$

Définissons $m_0 = m_k + m_l - m_{kl}$. On a $\chi_{V_k} \cdot m_0 = m_k$, $\chi_{V_l} \cdot m_0 = m_l$ et $\chi_{V_k \cap V_l} \cdot m_0 = m_{kl}$, d'où $\chi_{V_0} \cdot m_0 = m_0$. Donc $m_0 \in \mathcal{M}(V_0)$, et

$$\rho_{V_0, V_k} \cdot m_0 = m_k, \quad \rho_{V_0, V_l} \cdot m_0 = m_l,$$

ce qui établit (II.2.5.1). Pour tout $j \in I$, on a

$$\chi_{V_j} \cdot m_0 = \chi_{V_j} \cdot (m_k + m_l - m_{kl}) = (\chi_{V_k} + \chi_{V_l} - \chi_{V_k \cap V_l}) \cdot m_j = \chi_{V_0} \cdot m_j,$$

ce qui établit (II.2.5.2).

Pour l'unicité, remarquons que si m'_0 vérifie (II.2.5.1), alors

$$m'_0 = \chi_{V_0} \cdot m'_0 = (\chi_{V_k} + \chi_{V_l} - \chi_{V_k \cap V_l}) \cdot m'_0 = m_k + m_l - m_{kl} = m_0.$$

Ceci termine la démonstration du fait que $\mathcal{M}$ est un faisceau.

Il est clair que les deux foncteurs sont inverses l'un de l'autre : si l'on part d'un $\mathcal{D}(X)$-module M non dégénéré, on forme le faisceau $\mathcal{M}$ correspondant comme ci-dessus. On a alors

$$\mathcal{M}_c(X) = \bigcup_{U \in \mathcal{T}_c} \mathcal{M}(U) = \bigcup_{U \in \mathcal{T}_c} \chi_U \cdot M = M,$$

car M est non dégénéré. Réciproquement, si l'on part d'un faisceau de $\mathcal{C}_X^\infty$-modules $\mathcal{M}$, que l'on pose $M = \mathcal{M}_c(X)$, on voit que pour tout ouvert compact U, $\chi_U \cdot M = \chi_U \cdot \mathcal{M}(U) = \mathcal{M}(U)$. Ceci montre que le faisceau construit comme ci-dessus à partir de M est bien le faisceau $\mathcal{M}$ de départ. □

Soit M un $\mathcal{D}(X)$-module non dégénéré et soit $\mathcal{M}$ le faisceau de $\mathcal{C}_X^\infty$-modules correspondant par le théorème. La fibre $\mathcal{M}_x$ en tout point $x \in X$ est la limite inductive des $\mathcal{M}(U) = \chi_U \cdot M$ sur le système des ouverts compacts U de X contenant x. Plus explicitement, munissons M de la relation d'équivalence définie par $m \equiv m'$ s'il existe U voisinage ouvert compact de x tel que $\chi_U \cdot m = \chi_U \cdot m'$. La fibre $\mathcal{M}_x$ est alors l'ensemble des classes d'équivalence.

On peut aussi définir directement la fibre $\mathcal{M}_x$ comme $M/M(x)$ où

$$M(x) = \{m \in M \mid \exists f \in \mathcal{D}(X),\ f(x) \neq 0 \text{ et } f \cdot m = 0\}.$$

En effet, si $m \in M$, son image dans $M/M(x)$ ne dépend que de sa classe d'équivalence pour la relation ci-dessus : si pour un certain $m' \in M$ et un certain voisinage ouvert compact U de x, $\chi_U \cdot m = \chi_U \cdot m'$, on a $\chi_U \cdot (m - m') = 0$, ce qui montre que $m - m'$ est dans $M(x)$ (prendre $f = \chi_U$). Ceci permet de définir une application de $\mathcal{M}_x$ dans $M/M(x)$. On utilise alors le (ii) du lemme II.1.1 pour montrer que cette application est injective : si $m \in M(x)$ car $f \cdot m = 0$ pour une certaine fonction f vérifiant les propriétés requises, on écrit celle-ci sous la forme $f = \sum_{j=0}^m \alpha_j\, \chi_{U_j}$ où les U_j sont des ouverts compacts disjoints de X, U_0 contient x et α_0 est non nul. Comme pour tout $j \neq 0$, $\chi_{U_0}\chi_{U_j} \cdot m = 0$, on voit que $\chi_{U_j} \cdot m \equiv 0$. D'autre part

$$f \cdot m = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j\, \chi_{U_j} \cdot m = 0$$

et donc $\alpha_0\, \chi_{U_0} \cdot m \equiv 0$, d'où $m \equiv 0$, ce qui montre l'injectivité de l'application. La surjectivité étant claire, on a bien $\mathcal{M}_x \simeq M/M(x)$.

Exemples. 1. Si $M = \mathcal{D}(X)$ alors $\mathcal{M}$ est le faisceau $\mathcal{C}_X^\infty$ des fonctions localement constantes sur X.

— 2. Si $q : X \to Y$ est une application continue entre deux espaces t.d., tout $\mathcal{D}(X)$-module non-dégénéré M devient un $\mathcal{D}(Y)$-module non dégénéré par

$$g \cdot m = (g \circ q)\chi_U \cdot m, \quad (g \in \mathcal{D}(Y)),\ (m \in M),$$

où χ_U est un idempotent de $\mathcal{D}(X)$ qui fixe m. On vérifie immédiatement que cette définition est indépendante du choix de χ_U et donne bien une structure de $\mathcal{D}(Y)$-module non dégénéré.

En fait q définit un morphisme d'algèbres, encore noté q :

$$q : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{C}^\infty(X), \quad g \mapsto g \circ q.$$

Ceci munit $\mathcal{D}(X)$ d'une structure de $\mathcal{D}(Y)$-bimodule non dégénéré de la manière suivante. Remarquons d'abord que les algèbres considérées sont commutatives, et qu'il n'y a pas lieu de distinguer module à droite et à gauche. Ensuite, si $f \in \mathcal{D}(X)$, soit U un ouvert compact de X tel que $\chi_U \cdot f = f$ et soit U_Y un ouvert compact de Y contenant le compact $q(U)$. On a alors $(\chi_{U_Y} \circ q)\chi_U = \chi_U(\chi_{U_Y} \circ q) = \chi_U$, d'où

$$\chi_{U_Y} \cdot f = (\chi_{U_Y} \circ q) \cdot f = (\chi_{U_Y} \circ q)\chi_U \cdot f = \chi_U \cdot f = f.$$

On peut donc appliquer les résultats du dernier paragraphe de I.2.3. La partie non dégénérée de M pour la structure de $\mathcal{D}(X)$-module coïncide avec sa partie non dégénérée pour la structure de $\mathcal{D}(Y)$-module. Les foncteurs d'oubli et de pseudo oubli sont ainsi égaux. Par l'équivalence de catégories établie dans le théorème, ils coïncident respectivement avec des foncteurs notés usuellement $q_!$ et q_* en théorie des faisceaux (voir [28]). Lorsque les espaces sont totalement discontinus, on a donc $q_! = q_*$.

Rappelons que le foncteur d'oubli admet un adjoint à droite

$$I_Y^X : \mathcal{M}(\mathcal{D}(Y)) \to \mathcal{M}(\mathcal{D}(X)), \quad M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(Y)}(\mathcal{D}(X), M)_0,$$

et, d'après ce qui vient d'être dit dans ce cas, un adjoint à gauche

$$P_Y^X : \mathcal{M}(\mathcal{D}(Y)) \to \mathcal{M}(\mathcal{D}(X)), \quad M \mapsto \mathcal{D}(X) \otimes_{\mathcal{D}(Y)} M.$$

Grâce à l'équivalence de catégories établie ci-dessus, on obtient des foncteurs

$$I_Y^X, P_Y^X : \mathcal{C}_Y^\infty - \mathcal{M}od(Y) \to \mathcal{C}_X^\infty - \mathcal{M}od(X).$$

En théorie des faisceaux, les notations traditionnelles pour I_Y^X et P_Y^X sont respectivement $q^!$ et q^{-1}.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur l'espace t.d. X et que Y est une partie localement fermée de X, alors on définit un faisceau $\mathcal{F}_{|Y}$ sur Y, que l'on appelle restriction de $\mathcal{F}$ à Y. La fibre de $\mathcal{F}_{|Y}$ en un point $y \in Y$ est égale à la fibre $\mathcal{F}_y$, et les sections au dessus d'un ouvert U de Y sont celles qui coïncident au voisinage de chaque point de U avec la restriction d'une section de $\mathcal{F}$. Lorsqu'on identifie $\mathcal{F}$ au faisceau des sections de $\hat{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}_{|Y}$ s'identifie au faisceau des sections au dessus des ouverts de Y.

Définition. Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_X^\infty - \mathcal{M}od(X)$. L'espace $\mathcal{F}_c(X)^*$ (il s'agit ici du dual algébrique de l'espace vectoriel $\mathcal{F}_c(X)$) est appelé espace des distributions sur $\mathcal{F}$. Il est clair que $\mathcal{F}_c(X)^*$ est un $\mathcal{C}^\infty(X)$-module, l'action étant définie par

$$\langle f \cdot T, \phi \rangle = \langle T, f\phi \rangle, \quad (T \in \mathcal{F}^*), (\phi \in \mathcal{F}_c(X)), (f \in \mathcal{C}^\infty(X)).$$

Soient U un ouvert de X, Z un fermé de X et $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_X^\infty - \mathcal{M}od(X)$. De même qu'en (II.1.2.1), on définit deux morphismes :

$$i_U : \mathcal{F}_c(U) \to \mathcal{F}_c(X) \quad \text{et} \quad p_Z : \mathcal{F}_c(X) \to (\mathcal{F}_{|Z})_c(Z).$$

On allège les notations en posant $\mathcal{F}_c(Z) = (\mathcal{F}_{|Z})_c(Z)$. On a alors un résultat qui généralise (II.1.2.1) et (II.1.2.2), et dont la démonstration est similaire :

Proposition. *Avec les notations ci-dessus, et $Z = X \setminus U$, on a une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{F}_c(U) \xrightarrow{i_U} \mathcal{F}_c(X) \xrightarrow{p_Z} \mathcal{F}_c(Z) \to 0.$$

Et dualement, une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{F}_c(Z)^* \xrightarrow{p_Z^*} \mathcal{F}_c(X)^* \xrightarrow{i_U^*} \mathcal{F}_c(U)^* \to 0.$$

Remarque. La proposition ci-dessus affirme que toute section à support compact $s \in \mathcal{F}_c(U)$ est la restriction d'une section de $\mathcal{F}_c(X)$. On peut alors décrire la fibre en un point $x \in X$ de la manière suivante : si $\phi \in \mathcal{F}_c(X)$, notons $\phi_{|U}$ sa restriction à un ouvert U.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x &= \mathcal{F}_c(X)/\{\phi \in \mathcal{F}_c(X) \,|\, \exists U \text{ voisinage ouvert de } x,\ \phi_{|U} = 0\} \\ &= \mathcal{F}_c(X)/\langle\, f \cdot \phi,\, \phi \in \mathcal{F}_c(X),\ f \in \mathcal{D}(X), f(x) = 0\rangle.\end{aligned}$$

Pour obtenir cette dernière égalité, on remarque que

$$\langle\, f \cdot \phi,\, \phi \in \mathcal{F}_c(X),\ f \in \mathcal{D}(X), f(x) = 0\rangle$$

est inclus dans

$$\{\phi \in \mathcal{F}_c(X) \,|\, \exists U \text{ voisinage ouvert de } x,\ \phi_{|U} = 0\}.$$

Soit ϕ dans ce dernier ensemble et Z son support. Soit U un ouvert compact de X contenant Z, mais pas x (un tel ouvert est facile à construire en utilisant le lemme II.1.1). Soit f la fonction caractéristique de U. On a alors $f \cdot \phi = \phi$ et $f(x) = 0$, ce qui montre l'inclusion dans l'autre sens.

Nous terminons cette section en revenant sur la notion d'isomorphisme de faisceaux. Soit $\gamma : X \to Y$ un homéomorphisme entre espaces topologiques t.d. Ceci induit un isomorphisme d'algèbres $\mathcal{D}(Y) \simeq \mathcal{D}(X)$ grâce auquel nous identifions $\mathcal{D}(X)$ et $\mathcal{D}(Y)$-modules.

Soient X et Y deux espaces topologiques t.d. et soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ deux faisceaux dans $\mathcal{C}_X^\infty - \mathcal{M}od(X)$ et $\mathcal{C}_Y^\infty - \mathcal{M}od(Y)$ respectivement. Un isomorphisme entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$ est donc la donnée d'un homéomorphisme $\gamma : X \to Y$ et d'un isomorphisme de $\mathcal{D}(X)$-modules entre $\mathcal{F}_c(X)$ et $\mathcal{E}_c(Y)$. Il est clair que ceci induit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathcal{F}_x \to \mathcal{E}_{\gamma(x)}$ pour tout $x \in X$.

Si $\gamma : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ est un tel isomorphisme, on note encore

$$\gamma : \mathcal{E}_c(Y)^* \to \mathcal{F}_c(X)^*$$

son transposé.

II.3 Groupes topologiques t.d.

L'élément neutre d'un groupe G sera noté $\mathbf{1}_G$.

II.3.1 Groupes et actions de groupes.

Si X est un ensemble, G un groupe agissant sur X, et E un espace vectoriel de fonctions sur X, alors G agit linéairement sur E par :

$$g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x), \quad (x \in X), (g \in G), (f \in E).$$

Si E' est un espace fonctionnel sur X en dualité avec un espace de fonctions E, alors G agit sur E' par :

$$\langle g \cdot T,\, f\rangle = \langle T,\, g^{-1} \cdot f\rangle, \quad (g \in G), (f \in E), (T \in E').$$

En particulier, si G est un groupe, le groupe de ses automorphismes $\operatorname{Aut} G$ est un groupe agissant sur G. On peut alors appliquer les conventions précédentes. Si g_0 est un élément de G, on notera $\operatorname{Int}(g_0)$ l'automorphisme intérieur de G, $g \mapsto g_0 g g_0^{-1}$.

Le groupe G agit sur lui-même par translation à gauche et à droite. Notons l et r respectivement ces actions

$$l(g) \cdot g' = gg', \quad r(g) \cdot g' = g'g^{-1}, \quad (g,\ g' \in G).$$

Ces actions induisent des actions de G sur tous les espaces fonctionnels sur G que l'on notera encore l et r.

On note $f \mapsto \check{f}$ l'application linéaire d'un espace fonctionnel sur G dans lui-même induite par l'antiautomorphisme $g \mapsto g^{-1}$ de G.

II.3.2 Un résultat de finitude

Dans ce paragraphe, G est un groupe t.d. Nous utiliserons souvent, et sans plus de commentaires, le résultat suivant :

Lemme. (i) *Soient $K \subset K_1$ des sous-groupes ouverts compacts de G. Alors $[K_1 : K]$ est fini.*

(ii) *Si K est un sous-groupe ouvert compact de G, alors G/K muni de la topologie quotient est discret. Si de plus G est dénombrable à l'infini, alors G/K est dénombrable.*

Démonstration. (i) Le groupe K_1 est réunion disjointe des classes à droite modulo K, ce qui forme un recouvrement de K_1 par des ouverts disjoints. Par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Or ce sous-recouvrement ne peut pas être strictement plus petit. Donc l'ensemble des classes à droite est fini.

(ii) Supposons que G soit réunion dénombrable de parties compactes A_n, $n \in \mathbb{N}$. Du recouvrement de A_n par les ouverts gK, $g \in G$, on extrait un sous-recouvrement fini, et ainsi G est recouvert par une famille dénombrable $(g_i K)_i$, ce qui montre que G/K est au plus dénombrable. □

II.3.3 Actions de groupes t.d.

Lorsqu'on considère une action d'un groupe t.d. G sur un espace t.d. X, il s'agit toujours d'une action à gauche continue.

Proposition. *Supposons que G soit un groupe t.d. dénombrable à l'infini agissant sur un espace t.d. X avec un nombre fini d'orbites. Alors il existe une orbite ouverte X_0, et pour tout point $x_0 \in X_0$, l'application $G \to X_0$, $g \mapsto g \cdot x_0$ est ouverte. Il en résulte que toutes les orbites sont localement fermées dans X.*

Démonstration. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G. Comme on a supposé ce dernier dénombrable à l'infini, on a un système dénombrable de représentants $(g_i)_{i \in I}$ des classes à droite de K dans G. Choisissons aussi un système de représentants $x_0, \dots x_m$ des orbites de G dans X. On a alors

$$X = \bigcup_{i,j} (g_i K) \cdot x_j.$$

Donc X est une union dénombrable de parties compactes. Comme X vérifie la propriété de Baire (proposition II.1.1), l'une des parties $(g_iK) \cdot x_j$ est voisinage d'un de ses points. Soit $(g_ik) \cdot x_j$ un tel point. Alors la partie

$$K \cdot x_j = (g_ik)^{-1}(g_iK) \cdot x_j$$

est voisinage de $x_j = (g_ik)^{-1}(g_ik) \cdot x_j$. Quitte à renuméroter les orbites, on peut supposer que $j = 0$. Soit K' un sous-groupe ouvert compact de G contenu dans K. Comme K' est d'indice fini dans K, il existe un système de représentants fini $\{k_1, \ldots, k_m\}$ des classes à gauche de K' dans K. On peut alors refaire le même raisonnement que ci-dessus : l'une des parties $k_iK' \cdot x_0$ est voisinage de l'un de ses points $k_ik' \cdot x_0$ et $K' \cdot x_0 = (k_ik')^{-1}k_iK' \cdot x_0$ est un voisinage de x_0. Ceci montre que l'application $g \mapsto g \cdot x_0$ de G dans X est ouverte. La dernière assertion est claire, et ceci termine la démonstration de la proposition. □

Corollaire. *Soit G un groupe t.d. dénombrable à l'infini, agissant transitivement sur un espace t.d. X. Soit x_0 dans X, et soit H son stabilisateur dans G. Alors l'application naturelle $G/H \to X$, $gH \mapsto g \cdot x_0$ est un homéomorphisme.* □

Soit G un groupe t.d. agissant sur un espace t.d. X. Notons $G\backslash X$ l'ensemble des orbites, et $p : X \to G\backslash X$ la projection naturelle. On munit $G\backslash X$ de la topologie quotient ($U \in G\backslash X$ est ouvert si et seulement si $p^{-1}(U)$ est ouvert dans X). Il est clair que p est alors continue, mais $G\backslash X$ est un espace topologique qui n'est pas nécessairement séparé.

Lemme. *L'application p est ouverte. Si Z est une partie G-invariante fermée (resp. localement fermée) de X, alors $p(Z)$ est fermé dans $G\backslash X$ (resp. localement fermé).*

Démonstration. Soit U un ouvert de X. On a $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g\in G} g \cdot U$, et ceci est un ouvert de X. Donc $p(U)$ est ouvert dans $G\backslash X$ ce qui montre que l'application p est ouverte. Si Z est une partie G-invariante fermée de X, son complémentaire U est une partie G-invariante ouverte de X, et comme p est surjective, le complémentaire de $p(Z)$ dans $G\backslash X$ est l'image de U par p : c'est un ouvert de $G\backslash X$. Si maintenant Z est localement fermé, $Z = U \cap F$, où U est ouvert et F est fermé dans X. On a alors $Z = U \cap \bar{Z}$, et comme $\bar{Z}$ est G-invariant, $p(Z) = p(U) \cap p(\bar{Z})$. Ceci montre que $p(Z)$ est localement fermé dans $G\backslash X$. □

Supposons que la topologie de $G\backslash X$ soit séparée. Alors, comme p est ouverte et que l'image par p d'un compact est compact, il est clair que l'espace $G\backslash X$ est un espace totalement discontinu.

II.3.4 Espaces quotients

Nous appliquons les résultats ci-dessus au cas d'un groupe quotient :

Lemme. *Soit N un sous-groupe fermé de G. Alors l'espace G/N, muni de la topologie quotient, est un espace t.d. Si N est distingué le groupe $M = G/N$ est un groupe t.d.*

Démonstration. La seule chose qui reste à vérifier est que l'espace G/N est séparé. Il s'agit de montrer que la diagonale

$$\Delta = \{(xN, xN) \in G/N \times G/N\}$$

est fermée dans $G/N \times G/N$. Considérons l'action par multiplication à droite de $N \times N$ dans $G \times G$, de sorte que l'ensemble des orbites $(G \times G)/(N \times N)$ s'identifie canoniquement à $G/N \times G/N$.

Soit p_2 la projection naturelle de $G \times G$ dans $G/N \times G/N$. D'après le lemme II.3.3, il suffit de vérifier que $p_2^{-1}(\Delta)$ est fermé. Or

$$p_2^{-1}(\Delta) = \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid g_1 g_2^{-1} \in N\}$$

est fermé car N est un sous-groupe fermé. □

II.3.5 Espaces fonctionnels sur G

En plus des espaces fonctionnels $\mathcal{C}^\infty(G)$, $\mathcal{D}(G)$, $\mathcal{D}'(G)$, $\mathcal{E}'(G)$ déjà définis ci-dessus, et sur lesquels G agit par l et r, on introduit pour tout sous-groupe ouvert compact K de G les espaces suivants :

$$\mathcal{C}^\infty(G, K, l) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(G) | \, l(k) \cdot f = f, \, k \in K\},$$
$$\mathcal{C}^\infty(G, K, r) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(G) | \, r(k) \cdot f = f, \, k \in K\},$$

$$\mathcal{C}^\infty(G, K) = \mathcal{C}^\infty(G, K, l) \cap \mathcal{C}^\infty(G, K, r)$$

On définit de manière analogue :

$$\mathcal{D}(G, K, l), \quad \mathcal{D}(G, K, r) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(G, K),$$
$$\mathcal{D}'(G, K, l), \quad \mathcal{D}'(G, K, r) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}'(G, K),$$
$$\mathcal{E}'(G, K, l), \quad \mathcal{E}'(G, K, r) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'(G, K).$$

On pose aussi :

$$\mathcal{C}^\infty_{unif,l}(G) = \bigcup_K \mathcal{C}^\infty(G, K, l), \quad \mathcal{C}^\infty_{unif,r}(G) = \bigcup_K \mathcal{C}^\infty(G, K, r),$$
$$\text{et} \quad \mathcal{C}^\infty_{unif}(G) = \bigcup_K \mathcal{C}^\infty(G, K)$$

où K décrit l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G.

De même on définit :

$$\mathcal{D}_{unif,l}(G), \quad \mathcal{D}_{unif,r}(G, r) \text{ et } \mathcal{D}_{unif}(G),$$
$$\mathcal{D}'_{unif,l}(G), \quad \mathcal{D}'_{unif,r}(G, r) \text{ et } \mathcal{D}'_{unif}(G),$$
$$\mathcal{E}'_{unif,l}(G), \quad \mathcal{E}'_{unif,r}(G) \text{ et } \mathcal{E}'_{unif}(G).$$

Lemme. (i) *Soit une fonction f de $\mathcal{D}(G)$. Alors il existe un sous-groupe compact ouvert K de G, un ensemble fini de représentants $\{g_j\}$ des doubles classes modulo K dans G et des scalaires a_j tels que*

$$f = \sum_j a_j \, \chi_{K g_j K}$$

où χ_X désigne la fonction caractéristique d'une partie X de G.

(ii) Soit $f \in \mathcal{D}(G, K, l)$ (resp. $\mathcal{D}(G, K, r)$. Alors le support de f est une union finie de classes à droite (resp. à gauche) de K dans G. Soit $g_1, \ldots, g_r$ des représentants de ces classes. Alors f peut s'écrire :

$$f = \sum_i c_i \, \chi_{Kg_i}, \qquad \textit{resp.} \quad f = \sum_i c_i \, \chi_{g_i K},$$

où seul un nombre fini de c_i sont non nuls.

<u>*Démonstration*</u>. Soit $F = \mathrm{Supp}(f)$, un compact de G. Comme f est localement constante, pour tout $g \in F$, il existe un sous-groupe compact ouvert K_g tel que f soit constante sur $K_g g K_g$. Du recouvrement $F \subset \bigcup_{g \in F} K_g g K_g$, on peut extraire un sous-recouvrement fini (compacité de F), disons $F \subset \bigcup_i K_{g_i} g_i K_{g_i}$. Soit $K = \bigcap_i K_{g_i}$: c'est un sous-groupe ouvert compact de G. Comme pour tout i, $[K_{g_i} : K]$ est fini (lemme II.3.2), on peut trouver un ensemble fini $\{g_j\}$ de représentants des doubles classes modulo K tel que $F \subset \bigcup_j K g_j K$, et donc f s'écrit sous la forme :

$$f = \sum_j a_j \, \chi_{K g_j K},$$

où les a_j sont des scalaires. La démonstration du (ii) est similaire. □

Corollaire. *On a :*

$$\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{C}^\infty_{unif}(G) \subset \mathcal{C}^\infty(G).$$

En particulier $\mathcal{D}_{unif,l}(G) = \mathcal{D}_{unif,r}(G) = \mathcal{D}_{unif}(G) = \mathcal{D}(G)$.

II.3.6 Mesure de Haar

Nous montrons ici l'existence d'une mesure de Haar (à gauche) sur un groupe t.d. Le résultat reste valable pour un groupe topologique localement compact quelconque, mais la démonstration pour les groupes t.d. donnée ici est plus simple que celle du cas général.

Proposition. *Soit G un groupe t.d. Il existe, à un facteur multiplicatif scalaire près, une seule distribution μ_G sur G invariante par translation à gauche. On peut choisir μ_G positive (c'est-à-dire telle que $\langle \mu_G, f \rangle > 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(G)$ non identiquement nulle et à valeurs positives ou nulles). Une mesure invariante à droite ν_G peut être définie de manière similaire.*

<u>*Démonstration*</u>. Soit K_α un système fondamental de voisinages de l'élément neutre dans G composé de sous-groupes ouverts compacts et supposons de plus que l'un d'eux, disons K_{α_0} contient tous les autres. Pour tout α, posons $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}(G, K_\alpha, r)$. Il est clair que si $K_\alpha \subset K_\beta$, alors $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{D}_\alpha$ et que $\mathcal{D}(G) = \bigcup_\alpha \mathcal{D}_\alpha$. D'autre part, chaque $\mathcal{D}_\alpha$ est stable sous l'action l de G. Pour définir une distribution invariante à gauche sur G, il suffit de définir de manière compatible pour chaque α un élément μ_α du dual de $\mathcal{D}_\alpha$ invariant à gauche, c'est-à-dire que si $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{D}_\alpha$, alors $\mu_{\alpha|\mathcal{D}_\beta} = \mu_\beta$. Comme $\mathcal{D}_\alpha$ est engendré par les translatés à gauche de la fonction caractéristique de K_α, cet élément du dual est complètement de terminé par sa valeur prise sur χ_{K_α}. Il s'ensuit que μ_G est bien unique à multiplication par un facteur scalaire près. Pour démontrer l'existence, il s'agit de normaliser les μ_α de manière compatible, et pour cela, on utilise le sous-groupe compact ouvert K_{α_0} ci-dessus. On choisit μ_{α_0} en posant $\langle \mu_{\alpha_0}, \chi_{K_{\alpha_0}} \rangle = 1$, et on normalise alors les μ_α en posant

$$\langle \mu_\alpha, \chi_{K_\alpha} \rangle = [K_{\alpha_0} : K_\alpha]^{-1}.$$

Il est facile de vérifier que ceci définit bien une famille $\{\mu_\alpha\}$ compatible. □

La mesure de Haar μ_G est un élément de $\mathcal{D}'(G)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, définissons la distribution

$$f\mu_G \ : \phi \in \mathcal{D}(G) \mapsto \int_G \phi(g) f(g)\, d\mu_G(g).$$

Ceci permet de plonger (canoniquement, à un multiple scalaire près) $\mathcal{C}^\infty(G)$ dans $\mathcal{D}'(G)$. Si f est de plus à support compact, il en est de même de la distribution $f\mu_G$, d'où un plongement de $\mathcal{D}(G)$ dans $\mathcal{E}'(G)$.

II.3.7 Fonction modulaire

Soit G un groupe t.d. et soit μ_G une mesure de Haar à gauche positive sur G. L'unicité à un facteur multiplicatif près de la mesure de Haar permet de définir la fonction modulaire δ_G, grâce à la formule

$$r(g) \cdot \mu_G = \delta_G(g)\, \mu_G.$$

En effet, $r(g) \cdot \mu_G$ est bien une mesure de Haar à gauche positive et en particulier δ_G est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Il est facile de vérifier que δ_G est un caractère de G. En pratique, la formule à utiliser est donc la suivante : pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(G)$, pour tous $h, h' \in H$,

$$\int_G f(h'gh^{-1})\, d\mu_G(g) = \int_G f(gh^{-1})\, d\mu_G(g) = \delta_G(h) \int_G f(g)\, d\mu_G(g).$$

Proposition. (i) *La restriction de δ_G à tout sous-groupe compact de G est identiquement égale à* 1.

(ii) *La distribution $\delta_G^{-1}\mu_G$ est invariante à droite. Si $T \mapsto \check{T}$ est l'involution de $\mathcal{D}'(G)$ induite par l'homéomorphisme $g \mapsto g^{-1}$, alors $\check{\mu}_G = \delta_G^{-1}\mu_G$.*

Démonstration. L'image d'un sous-groupe compact K de G par δ_G est un sous-groupe compact de $\mathbb{R}_+^*$: il n'y a que le sous-groupe trivial. Ceci montre (i). Pour (ii), on vérifie d'abord que l'on a $r(g) \cdot \delta_G = \delta_G(g)\delta_G$ pour tout $g \in G$. On a alors :

$$r(g) \cdot (\delta_G^{-1}\mu_G) = (r(g) \cdot \delta_G^{-1})\,(r(g) \cdot \mu_G) = \delta_G^{-1}(g)\delta_G^{-1}\delta_G(g)\mu_G = \delta_G^{-1}\mu_G$$

et donc $\delta_G^{-1}\mu_G$ est invariante à droite. Comme il est clair que $\check{\mu}_G$ l'est aussi, ces deux distributions sont proportionnelles, et en les évaluant sur la fonction caractéristique d'un sous-groupe ouvert compact, on voit qu'elle sont égales. $\square$

Définition. Un groupe G tel que δ_G est identiquement égal à 1 est dit unimodulaire.

Exemples. 1. Un groupe abélien est unimodulaire.

— 2. Un groupe compact est unimodulaire (car le seul sous-groupe compact de $\mathbb{R}^\times$ est $\{1\}$).

— 3. Si G est réunion de ses sous-groupes compacts, alors G est unimodulaire.

On peut plus généralement définir le module d'un automorphisme σ de G par la formule $\sigma \cdot \mu_G = \delta_G(\sigma)\, \mu_G$. Plus explicitement, comme pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(G)$,

$$\langle \sigma \cdot \mu_G, f\rangle = \langle \mu_G, \sigma^{-1} \cdot f\rangle = \int_G (\sigma^{-1} \cdot f)(g)\, d\mu_G(g) = \int_G f(\sigma(g))\, d\mu_G(g),$$

on obtient la formule

$$\int_G f(\sigma(g))\, d\mu_G(g) = \delta_G(\sigma) \int_G f(g)\, d\mu_G(g). \tag{II.3.7.1}$$

En particulier, si $\sigma = \mathrm{Int}(h)$, on obtient $\delta_G(\sigma) = \delta_G(h)$.

II.3.8 Calcul de la fonction modulaire

Nous allons donner une formule pour δ_G en termes d'indices de sous-groupes ouverts compacts. Comme dans la section précédente, G est un groupe t.d. et σ est un automorphisme de G. On fixe une mesure de Haar à gauche μ_G sur G. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G et posons $K_1 = K \cap \sigma^{-1}(K)$. Comme

$$\mu_G(K) = \int_G \chi_K(g)\, d\mu_G(g),$$

l'équation (II.3.7.1) nous donne :

$$\begin{aligned}\delta_G(\sigma)\mu_G(K) = \delta_G(\sigma)\int_G \chi_K(g)\, d\mu_G(g) &= \int_G \chi_K(\sigma(g))\, d\mu_G(g)\\ &= \int_G \chi_{\sigma^{-1}(K)}(g)\, d\mu_G(g) = \mu_G(\sigma^{-1}(K)).\end{aligned}$$

Or,

$$\mu_G(K) = [K : K_1]\mu_G(K_1), \quad \mu_G(\sigma^{-1}(K)) = [\sigma^{-1}(K) : K_1]\mu_G(K_1),$$

d'où,

$$\delta_G(\sigma) = \frac{[\sigma^{-1}(K) : K_1]}{[K : K_1]}. \tag{II.3.8.1}$$

II.3.9 Mesure invariante sur un espace homogène

Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe t.d. G. Il n'existe pas toujours de mesure sur l'espace topologique t.d. G/H (cf. lemme II.3.4) invariante sous l'action de G par translations à gauche. Décrivons ce qui se passe en général, mais pour des raisons qui apparaîtront dans la suite, considérons plutôt l'espace $H\backslash G$ muni de l'action de G par translations à droite. Posons $\delta_{H\backslash G} = \delta_G/\delta_H$: c'est un caractère de H. Considérons l'ensemble des fonctions f localement constantes sur G vérifiant :

a) $f(hg) = \delta_{H\backslash G}(h)\, f(g)$, $g \in G$, $h \in H$.

b) f est à support compact modulo H, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble compact K_f de G tel que $\mathrm{Supp}\,(f) \subset H \cdot K_f$.

On note $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$ l'espace de ces fonctions. Il est clair que cet espace est invariant sous l'action à droite de G. Si $\delta_{H\backslash G}$ est identiquement égal à la fonction constante 1, alors $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$ est isomorphe à $\mathcal{D}(H\backslash G)$.

Théorème. *Il existe à un facteur multiplicatif près une seule distribution $\nu_{H\backslash G}$ sur $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$ invariante sous l'action à droite de G. On peut la choisir positive.*

On note :

$$\langle \nu_{H\backslash G}, f\rangle = \int_{H\backslash G} f(g)\, d\nu_{H\backslash G}(g), \quad f \in \mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G}).$$

Démonstration. Soient respectivement μ_G et μ_H des mesures de Haar à gauche sur G et H. Définissons un opérateur $p : \mathcal{D}(G) \to \mathcal{C}^\infty(G)$ par

$$p(f)(g) = \int_H f(hg)\delta_G(h)^{-1}\, d\mu_H(h).$$

Il est clair que p commute avec l'action à droite de G sur $\mathcal{D}(G)$ et $\mathcal{C}^\infty(G)$. D'autre part, pour tout $h_0 \in H$,

$$\begin{aligned}
p(f)(h_0 g) &= \int_H f(hh_0 g)\delta_G(h)^{-1}\, d\mu_H(h) \\
&= \delta_G(h_0)\int_H f(hh_0 g)\delta_G(hh_0)^{-1}\, d\mu_H(h) \\
&= \delta_G(h_0)\delta_H(h_0)^{-1}\int_H f(hg)\delta_G(h)^{-1}\, d\mu_H(h) \\
&= \delta_{H\backslash G}(h_0)\int_H f(hg)\delta_G(h)^{-1}\, d\mu_H(h) = \delta_{H\backslash G}(h_0)\, p(f)(g)
\end{aligned}$$

et donc l'image de p est dans $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$, la condition sur le support étant vérifiée de manière évidente.

Montrons maintenant que p est surjectif. Pour tout g in G et tout sous-groupe ouvert compact K de G, notons $\mathcal{D}(G)_g^K$ (respectivement $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})_g^K$) le sous-espace de $\mathcal{D}(G)$ (resp. $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$) des fonctions à support dans HgK et fixes sous l'action par translation à droite de K. Il est clair que

$$p(\mathcal{D}(G)_g^K) \subset \mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})_g^K.$$

D'autre part, toute fonction de $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})_g^K$ est déterminée par sa valeur en g, et donc cet espace est de dimension 1.

Soient $f \in \mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$ et K_f un compact de G tel que $\mathrm{Supp}\,(f) \subset H \cdot K_f$. Pour chaque $x \in K_f$, soit K_x un sous-groupe compact ouvert de G tel que f soit constante sur xK_x. Du recouvrement $K_f \subset \bigcup_{x\in F} xK_x$ on extrait par compacité un recouvrement fini $K_f \subset \bigcup_i x_i K_{x_i}$, et l'on pose $K = \bigcap_i K_{x_i}$. Comme chaque $[K_{x_i} : K]$ est fini, en considérant des représentants des classes à gauche de K dans les K_{x_i}, on trouve un recouvrement fini de K_f de la forme $K_f \subset \bigcup_j x_j K$. De ceci, on déduit que f s'écrit comme une somme finie $f = \sum_j f_j$ où $\mathrm{Supp}\,(f_j) = Hx_jK$, les f_j étant invariantes à droite par K (et f_j est déterminée par sa valeur en x_j). Toute fonction de $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$ s'écrit comme somme finie de fonctions dans des $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})_g^K$. Par conséquent, il suffit de montrer la surjectivité de $p : \mathcal{D}(G)_g^K \to \mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})_g^K$. Comme l'espace d'arrivée est de dimension un, il suffit de montrer que $p(\mathcal{D}(G)_g^K)$ est non nul. Or il est clair que $p(f)$ est non nul dès que f est à valeurs positives ou nulles et non identiquement nulle. Ceci termine la démonstration de la surjectivité de p.

Soit $f \in \mathcal{D}(G)_g^K$. Comme f est à support compact, il existe une partie compacte F de H telle que f est à support dans FgK. Pour chaque $y \in F$, ygK est un voisinage de yg dans G, et donc il existe un sous-groupe ouvert compact K_y de G tel que $K_y yg \subset ygK$. Du recouvrement $F \subset \bigcup_{y\in F} K_y y$ on extrait un sous-recouvrement fini $F \subset \bigcup_i K_{y_i} y_i$, et l'on a $FgK \subset \bigcup_i K_{y_i} y_i gK \subset \bigcup_i y_i gK$. Comme f est invariante sous l'action à droite de K, on voit qu'elle est déterminée par ses valeurs aux points y_i. L'espace $\mathcal{D}(G)_g^K$ s'identifie donc à l'espace des fonctions à support fini sur l'espace HgK/K, espace sur lequel H agit transitivement par translation à gauche. Comme $HgK/K \subset G/K$ et que ce dernier est discret (lemme II.3.2, (ii)), il en est de même de HgK/K. L'espace $\mathcal{D}(G)_g^K$ est donc engendré par les $l(h) \cdot \chi_{gK}$, $h \in H$. Deux formes linéaires T_i, $i = 1, 2$, sur $\mathcal{D}(G)_g^K$ telles que $T_i(l(h) \cdot f) = \delta_G(h)^{-1} T_i(f)$ sont donc proportionnelles. Pour tout $g \in G$, notons δ_g la distribution de Dirac en g. Comme $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})_g^K$ est de dimension 1, son dual aussi, et il est engendré par δ_g. Il est facile de voir que les distributions T_1 et T_2 définies par $T_1(f) := \langle \delta_g, p(f) \rangle$ et $T_2(f) := \langle \nu_G, f \rangle$ vérifient toute deux la propriété ci-dessus, et sont donc proportionnelles. On en déduit que si $f \in \mathcal{D}(G)$, $p(f) = 0$ dès que $\langle \nu_G, f \rangle = 0$. On a donc montré que $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G}) \simeq \mathcal{D}(G)/\ker p$ et que toute distribution sur G invariante sous l'action à droite de G est nulle sur $\ker p$. La mesure de Haar à droite ν_G sur G induit donc une forme linéaire invariante $\nu_{H\backslash G}$ sur $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$, unique à un facteur multiplicatif près. Comme on peut prendre ν_G positive, il en est de même de $\nu_{H\backslash G}$. $\square$

Remarque. l'espace $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$ est un $\mathcal{D}(H\backslash G)$-module (par multiplication des fonctions) et donc définit un faisceau sur $H\backslash G$ grâce à l'équivalence de catégories du théorème II.2.

II.3.10 Convolution

Soit G un groupe t.d. et soient T_1 et T_2 deux distributions dans $\mathcal{E}'(G)$. On peut alors définir leur produit de convolution par la formule :

$$\int_G f(g)\, d(T_1 * T_2)(g) := \int_{G\times G} f(gh)\, d(T_1 \otimes T_2)(g, h), \quad (f \in \mathcal{D}(G)).$$

Ceci est bien défini, car $T_1 \otimes T_2$ est à support compact d'après la proposition II.1.3. Si $T \in \mathcal{D}'(G)$ et $f \in \mathcal{D}(G)$, on définit aussi $T * f$ et $f * T$ dans $\mathcal{C}^\infty(G)$ par :

$$(T * f)(g_0) := \int_G f(g^{-1} g_0)\, dT(g) = \langle T, l(g_0) \cdot \check{f} \rangle$$

$$(f * T)(g_0) := \int_G f(g_0 g^{-1})\, dT(g) = \langle T, r(g_0^{-1}) \cdot \check{f} \rangle.$$

Si T est à support compact, alors $T * f$ et $f * T$ sont dans $\mathcal{D}(G)$.

Proposition. *Pour toutes distributions T_1, T_2, T_3 dans $\mathcal{E}'(G)$ et toute fonction f dans $\mathcal{D}(G)$, on a*

(i) $\mathrm{Supp}(T_1 * T_2) \subset \mathrm{Supp}(T_1) \cdot \mathrm{Supp}(T_2)$. *En particulier $T_1 * T_2$ est à support compact.*

(ii) $(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3)$.

(iii) $(T_1 * T_2) * f = T_1 * (T_2 * f)$, $\quad (T_1 * (f * T_2)) = (T_1 * f) * T_2$, $\quad (f * T_1) * T_2 = f * (T_1 * T_2)$.

Soient μ_G et ν_G respectivement des mesures de Haar à gauche et à droite. Pour tout $T \in \mathcal{E}'(G)$ et tout $f \in \mathcal{D}(G)$, on a,

(iv) $(T * f\mu_G) = (T * f)\mu_G$, $\quad (f\nu_G * T) = (f * T)\nu_G$.

Pour tout $T \in \mathcal{D}'(G)$ et tout $f \in \mathcal{D}(G)$, on a,

(v) $\langle T, f \rangle = (T * \check{f})(\mathbf{1}_G) = (\check{f} * T)(\mathbf{1}_G)$.

Démonstration. Le point (i) découle facilement de la proposition II.1.3, et le point (ii) des formules de Fubini. Les définitions de $T * f$ et $f * T$ sont faites pour que (iv) soit vérifié. Il est facile de déduire (*iii*) de (*ii*) et (*iv*), ou directement des formules de Fubini. Le dernier point est immédiat. □

L'espace $\mathcal{E}'(G)$ est stable par produit de convolution et ce produit est associatif et bilinéaire pour la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{E}'(G)$. Notons δ_g la distribution de Dirac au point $g \in G$. C'est évidemment un élément de $\mathcal{E}'(G)$. Il est clair en utilisant les formules de Fubini que pour tout $T \in \mathcal{E}'(G)$, on a

$$\delta_{\mathbf{1}_G} * T = T * \delta_{\mathbf{1}_G} = T.$$

Autrement dit, $\delta_{\mathbf{1}_G}$ est l'élément neutre pour le produit de convolution sur $\mathcal{E}'(G)$. Pour résumer, l'espace $\mathcal{E}'(G)$ des distributions à support compact sur G muni du produit de convolution est une algèbre associative, d'élément neutre $\delta_{\mathbf{1}_G}$.

Le groupe G agit sur l'algèbre de convolution $\mathcal{E}'(G)$ par l et r.

Lemme. *Soit $T \in \mathcal{E}'(G)$ et soit g, $g' \in G$. On a alors*

$$\delta_g * T = l(g) \cdot T, \quad T * \delta_g = r(g^{-1}) \cdot T, \quad \delta_g * \delta_{g'} = \delta_{gg'}.$$

<u>Démonstration</u>. Ceci est le résultat de calculs sans difficultés. □

II.3.11 Quelques formules

Si Γ est un sous-groupe compact de G, alors la mesure de Haar sur Γ, normalisée par $\mu_\Gamma(\Gamma) = 1$ définit un élément e_Γ de $\mathcal{E}'(G)$:

$$\langle e_\Gamma, f \rangle = \int_\Gamma f(\gamma)\, d\mu_\Gamma(\gamma), \qquad (f \in \mathcal{C}^\infty(G)).$$

Lemme. *Soient Γ_1 et Γ_2 des sous-groupes compacts de G, et soit $g \in G$. Alors il existe une unique distribution T sur G à support compact telle que* $\operatorname{Supp} T \subset \Gamma_1 g \Gamma_2$*, invariante sous l'action de Γ_1 par l et de Γ_2 par r et normalisée par $\int_G dT = 1$.*

<u>Démonstration</u>. On définit une action ρ de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ sur $\Gamma_1 g \Gamma_2$ par :

$$\rho(\gamma_1, \gamma_2) \cdot x = \gamma_1 x \gamma_2^{-1}, \quad (x \in \Gamma_1 g \Gamma_2),\ (\gamma_1 \in \Gamma_1),\ (\gamma_2 \in \Gamma_2).$$

Comme cette action est simplement transitive, on déduit du théorème II.3.9 et du fait que $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ est unimodulaire, qu'il existe une unique distribution $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$-invariante T_0 sur $\Gamma_1 g \Gamma_2$ telle que $\int_{\Gamma_1 g \Gamma_2} dT_0 = 1$. D'après le corollaire II.1.2, ceci définit une distribution sur G ayant les propriétés voulues. On vérifie facilement que cette distribution n'est autre que $e_{\Gamma_1} * \delta_g * e_{\Gamma_2}$. □

Proposition. *Soient Γ, Γ_1 et Γ_2 des sous-groupes compacts de G, tels que $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ et soit g un élément de G. On a :*

(*i*) $e_\Gamma = e_{\Gamma_1} * e_{\Gamma_2} = e_{\Gamma_2} * e_{\Gamma_1}$.

(*ii*) $\delta_g * e_\Gamma * \delta_{g^{-1}} = e_{g\Gamma g^{-1}}$.

En particulier $e_\Gamma * e_\Gamma = e_\Gamma$ et si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, $e_{\Gamma_2} = e_{\Gamma_1} * e_{\Gamma_2} = e_{\Gamma_2} * e_{\Gamma_1}$.

<u>Démonstration</u>. Ceci découle sans difficulté du lemme du précédent. □

II.3.12 L'algèbre de Hecke

Nous allons changer quelque peu les notations introduites au paragraphe II.3.5.

Lemme. *Fixons une mesure de Haar à gauche μ_G sur G. Alors la multiplication par μ_G induit un isomorphisme*

$$\mathcal{D}(G) \simeq \mathcal{E}'_{unif}(G,l).$$

De plus, toute distribution T dans $\mathcal{E}'_{unif}(G,l)$ est aussi dans $\mathcal{E}'_{unif}(G,r)$, donc dans $\mathcal{E}'_{unif}(G)$.

On a donc $\mathcal{E}'_{unif}(G,l) = \mathcal{E}'_{unif}(G,r) = \mathcal{E}'_{unif}(G)$ et nous noterons dorénavant $\mathcal{H}(G)$ cet espace, appelé généralement l'algèbre de Hecke de G.

Démonstration. Soit T une distribution dans $\mathcal{E}'_{unif}(G,l)$, et soit K un sous-groupe ouvert compact tel que T soit invariante sous l'action de K par l. D'après le lemme II.3.11, la restriction de T à toute partie de la forme Kg de G est proportionnelle à la restriction de μ_G. On en déduit que T est de la forme $T = f\,\mu_G$ pour une fonction invariante sous l'action de K par l . Une telle fonction est localement constante. De plus, clairement, $\operatorname{Supp} T = \operatorname{Supp} f$ et donc comme T est à support compact, f est dans $\mathcal{D}(G)$. Réciproquement, il est clair que si $f \in \mathcal{D}(G)$, alors $f\,\mu_G \in \mathcal{E}'_{unif,l}(G)$. On en déduit la dernière assertion. □

Si Γ est un sous-groupe compact ouvert de G, alors e_Γ est dans $\mathcal{H}(G)$. En revanche, pour tout $g \in G$, δ_g est dans $\mathcal{E}'(G)$ mais pas dans $\mathcal{H}(G)$.

Remarques. 1. Il est clair que $\mathcal{H}(G)$ est stable par produit de convolution. Mais comme $\delta_{\mathbf{1_G}}$ n'est pas dans $\mathcal{H}(G)$, l'algèbre $(\mathcal{H}(G),*)$ n'est pas unitaire.

— 2. La sous-algèbre $\mathcal{H}(G)$ est en fait un idéal bilatère de $(\mathcal{E}'(G),*)$. En effet,

$$T * f\mu_G = (T*f)\mu_G, \quad f\nu_G * T = (f*T)\nu_G, \quad (T \in \mathcal{E}'(G)), (f \in \mathcal{D}(G)).$$

— 3. L'isomorphisme $\mathcal{D}(G) \simeq \mathcal{H}(G)$ induit par transport de structure un produit de convolution sur $\mathcal{D}(G)$:

$$(f_1\mu_G) * (f_2\mu_G) = (f_1 * f_2)\mu_G, \quad = (f_1, f_2 \in \mathcal{D}(G)).$$

La formule explicite pour ce produit est :

$$(f_1 * f_2)(g_0) = \int_G f_1(g) f_2(g^{-1}g_0)\, d\mu_G(g), \quad (f_1, f_2 \in \mathcal{D}(G)). \tag{II.3.12.1}$$

Proposition. *L'algèbre $\mathcal{H}(G)$ est une algèbre à idempotents. La famille $(e_K)_K$, où K décrit l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G est un système filtrant d'idempotents. Elle est munie de l'anti-involution $T \mapsto \check{T}$ induite par $g \mapsto g^{-1}$.*

Démonstration. Nous avons vu que tout sous-groupe compact ouvert K de G définit un idempotent e_K dans $\mathcal{H}(G)$. Comme toute distribution T de $\mathcal{H}$ est localement invariante par translation à droite et à gauche, on peut trouver un sous-groupe compact ouvert K de G assez petit tel que T soit invariante sous l'action de K par translation à gauche et à droite. On en déduit immédiatement que $e_K * T * e_K = T$. Si l'on a une famille finie de distributions $\{T_i\}$ de $\mathcal{H}(G)$, on trouve pour chacune d'elle un sous-groupe compact ouvert K_i de G tel que $e_{K_i} * T_i * e_{K_i} = T_i$. Il suffit alors de prendre $K = \bigcap_i K_i$, qui est bien un sous-groupe compact ouvert de G, et l'on a $e_K * T_i * e_K = T_i$. Il est clair que $T \mapsto \check{T}$ préserve le support et l'invariance par translation à gauche et à droite et donc préserve $\mathcal{H}(G)$. □

Remarquons que $e_{K_1} \leq e_{K_2}$ pour l'ordre sur $\mathrm{Idem}(\mathcal{H}(G))$ (*cf.* paragraphe I.1.1) si et seulement si $K_2 \subset K_1$.

Soit K un sous-groupe ouvert compact de G. Posons

$$\mathcal{H}(G,K) = e_K * \mathcal{H}(G) * e_K.$$

C'est une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{H}(G)$, d'élément neutre e_K.

Remarques. 1. L'espace $\mathcal{H}(G,K)$ n'est autre que l'espace $\mathcal{E}(G,K)$ introduit dans le paragraphe II.3.5.

— 2. Une base de $\mathcal{H}(G,K)$ est donnée par les distributions

$$a_{g,K} \ := e_K * \delta_g * e_K,$$

où g décrit un système de représentants des doubles classes $K\backslash G/K$.

Démonstration. Soit $T = e_K * T * e_K$ un élément de $\mathcal{H}(G,K)$, et soit $k \in K$. On a :

$$l(k) \cdot T = l(k) \cdot (e_K * T * e_K) = \delta_k * e_K * T * e_K = e_K * T * e_K$$

d'après le lemme II.3.10 et la proposition II.3.11. Donc l'action l de K sur $\mathcal{H}(G,K)$ est triviale. De même pour l'action r. Ceci montre que $\mathcal{H}(G,K) \subset \mathcal{E}(G,K)$. Réciproquement, si $T \in \mathcal{E}(G,K)$, on utilise Fubini pour montrer alors que $e_K * T = T$ et $T * e_K = T$, et donc $T \in \mathcal{H}(G,K)$.

Il est clair que $a_{g,K} = a_{g',K}$ pour tout g' dans la double classe KgK. L'isomorphisme $\mathcal{H}(G) = \mathcal{D}(G)$ donné par le choix d'une mesure de Haar induit un isomorphisme $\mathcal{H}(G,K) = \mathcal{D}(G,K)$, et d'après le lemme II.3.5, toute fonction de $\mathcal{D}(G,K)$ est combinaison linéaire des χ_{KgK}. Il est facile de voir que χ_{KgK} correspond à un multiple scalaire près à $a_{g,K}$ sous l'isomorphisme $\mathcal{H}(G,K) = \mathcal{D}(G,K)$, et que les $\{\chi_{KgK}\}$ où g décrit un système de représentants des doubles classes $K\backslash G/K$ est une base de $\mathcal{D}(G,K)$. La remarque 2 en découle. □

II.3.13 Complété de $\mathcal{H}(G)$ et centre de $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$

Dans ce paragraphe, nous allons décrire de manière explicite en termes de distributions sur G le complété $\overline{\mathcal{H}(G)}$ de l'algèbre à idempotents $\mathcal{H}(G)$, au sens de la section I.1.3. Ceci nous permettra aussi de décrire le centre de la catégorie $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ en termes de distributions invariantes sur G.

Définition. Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(G)$, pour tout élément h de $\mathcal{H}(G)$, et pour toute fonction f dans $\mathcal{D}(G)$, posons

$$\langle T \bullet h, f\rangle := \langle T, f * \check{h}\rangle,$$
$$\langle h \bullet T, f\rangle := \langle T, \check{h} * f\rangle.$$

Il est clair que $T \bullet h$ et $h \bullet T$ définissent des éléments de $\mathcal{D}'(G)$.

Remarque. Avec les notations de la définition, si T est à support compact, $T * h$ est défini, à support compact, et en utilisant la proposition II.3.10, (v),

$$\begin{aligned}\langle T * h, f\rangle &= ((T * h) * \check{f})(\mathbf{1}_G) = (T * (h * \check{f}))(\mathbf{1}_G)\\ &= (T * (f * \check{h})\check{})(\mathbf{1}_G) = \langle T, f * \check{h}\rangle\\ &= \langle T \bullet h, f\rangle.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $T \bullet h = T * h$ dans ce cas. De même, on a $h \bullet T = h * T$. Ceci nous permet d'abandonner la notation $T \bullet h$ et de la remplacer par $T * h$, ceci même lorsque T n'est pas à support compact. Il faudra prendre garde toutefois dans ce cas à ce que $T * h$ ne désigne pas la convolution de deux distributions, et revenir à la définition pour effectuer des calculs. Comme exercice d'application, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que

$$(T * h)\check{} = \check{h} * \check{T}, \quad (T \in \mathcal{D}'(G)),\ (h \in \mathcal{H}(G)).$$

Le calcul ci-dessus montre aussi que pour $T \in \mathcal{D}'(G)$ et $h \in \mathcal{H}(G)$, une définition équivalente de $T * h$ est :

(II.3.13.1) $$\langle T * h, f\rangle = (T * (h * \check{f}))(\mathbf{1}_G).$$

Définition. On dit qu'une distribution T de $\mathcal{D}'(G)$ est essentiellement compacte à droite (resp. à gauche), si pour tout $h \in \mathcal{H}(G)$, $T * h$ (resp. $h * T$) est une distribution à support compact. On note $\mathcal{D}'(G)_{r.e.c.}$ (resp. $\mathcal{D}'(G)_{l.e.c.}$) l'espace des distributions essentiellement compactes à droite (resp. à gauche) sur G. On dit que qu'une distribution T de $\mathcal{D}'(G)$ est essentiellement compacte si elle est essentiellement compacte à droite et à gauche. On note

$$\mathcal{D}'(G)_{e.c.} = \mathcal{D}'(G)_{r.e.c.} \cap \mathcal{D}'(G)_{l.e.c.}.$$

L'espace $\mathcal{D}'(G)_{e.c.}$ contient $\mathcal{E}'(G)$.

Il est clair que si T est essentiellement compacte à droite (resp. à gauche), alors $T * h$ (resp. $h*T$) est dans $\mathcal{H}(G)$ pour tout $h \in \mathcal{H}(G)$. En effet, par définition, $T*h$ (resp. $h*T$) est à support compact. De plus, il existe un idempotent e_K de $\mathcal{H}(G)$ tel que $h * e_K = h$ (resp. $e_K * h = h$), donc $T * h \in \mathcal{E}'(G, K, r) \subset \mathcal{H}(G)$ (resp. $h * T \in \mathcal{E}'(G, K, l) \subset \mathcal{H}(G)$).

Lemme. *L'espace $\mathcal{D}'(G)_{r.e.c.}$ est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre qui étend celle de $\mathcal{E}'(G)$. Il en est de même de $\mathcal{D}'(G)_{l.e.c.}$ et $\mathcal{D}'(G)_{e.c.}$.*

Démonstration. Il s'agit de définir le produit $T_1 * T_2$ de deux distributions T_1, T_2 dans $\mathcal{D}'(G)_{r.e.c.}$, puis de vérifier que ce produit est un produit de $\mathbb{C}$-algèbre. Posons, pour toute f dans $\mathcal{D}(G)$

$$\langle T_1 * T_2, f\rangle := \langle T_1 * (T_2 * e_K), f\rangle$$

où e_K est un idempotent de $\mathcal{H}(G)$ tel que $f * e_K = f$. Ceci est bien défini car $e_K \in \mathcal{H}(G)$, donc $(T_2 * e_K) \in \mathcal{H}(G)$ puisque T_2 est essentiellement compacte, et $T_1 * (T_2 * e_K) \in \mathcal{H}(G)$, puisque T_1 est essentiellement compacte. On vérifie par les techniques usuelles que cette définition ne dépend pas du choix de l'idempotent e_K de $\mathcal{H}(G)$. Dans le cas où $T_2 = h \in \mathcal{H}(G)$, les définitions des produits

$$T_1 * T_2 \quad \text{et} \quad T_1 * h$$

coïncident, comme on le vérifie facilement en utilisant (II.3.13.1). L'associativité de ce produit découle de l'associativité du produit de convolution et sa bilinéarité est évidente. On déduit immédiatement de ces propriétés que $T_1 * T_2$ est encore essentiellement compacte à droite. L'algèbre $\mathcal{D}'(G)_{r.e.c.}$ admet $\delta_{\mathbf{1}_G}$ comme élément neutre. On raisonne de même pour $\mathcal{D}'(G)_{l.e.c.}$ en échangeant gauche et droite. Pour $\mathcal{D}'(G)_{e.c.}$, on dispose de deux définitions du produit (une version à droite, et l'autre à gauche). Montrons qu'elles coïncident. Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(G)_{e.c.}$ et $f \in \mathcal{D}(G)$. Choisissons l'idempotent e_K de sorte que

$$e_K * f = f * e_K = f.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\langle T_1 * (T_2 * e_K), f\rangle &= ((T_1 * (T_2 * e_K)) * \check{f})(\mathbf{1}_G)\\ &= (T_1 * (T_2 * (e_K * \check{f})))(\mathbf{1}_G)\\ &= (T_1 * (T_2 * (f * e_K)\check{}\,))(\mathbf{1}_G)\\ &= (T_1 * (T_2 * \check{f}))(\mathbf{1}_G)\end{aligned}$$

De même pour la version à gauche, on montre que

$$\langle (e_K * T_1) * T_2, f\rangle = ((\check{f} * T_1) * T_2)(\mathbf{1}_G)$$

Il s'agit donc de montrer que

$$(T_1 * (T_2 * \check{f}))(\mathbf{1}_G) = ((\check{f} * T_1) * T_2)(\mathbf{1}_G).$$

On sait que si $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(G)$, alors

$$(h_1 * (h_2 * \check{f}))(\mathbf{1}_G) = ((\check{f} * h_1) * h_2)(\mathbf{1}_G).$$

Pour pouvoir utiliser ceci, on choisit un idempotent e_K de tel sorte que $e_K * f = f * e_K = f$, $e_K * (T_2 * \check{f}) = (T_2 * \check{f}) * e_K = T_2 * \check{f}$ et $e_K * (\check{f} * T_1) = (\check{f} * T_1) * e_K = \check{f} * T_1$. On a alors :

$$\begin{aligned}(T_1 * (T_2 * \check{f}))(\mathbf{1}_G) &= (T_1 * (e_K * (T_2 * \check{f})))(\mathbf{1}_G)\\ &= ((T_1 * e_K) * (e_K * (T_2 * \check{f})))(\mathbf{1}_G)\\ &= ((T_1 * e_K) * (e_K * (T_2 * (e_K * \check{f}))))(\mathbf{1}_G)\\ &= ((T_1 * e_K) * (e_K * T_2)) * (e_K * \check{f})(\mathbf{1}_G)\\ &= (e_K * \check{f}) * ((T_1 * e_K) * (e_K * T_2))(\mathbf{1}_G)\\ &= \check{f} * ((T_1 * e_K) * (e_K * T_2))(\mathbf{1}_G)\\ &= ((\check{f} * T_1) * e_K) * (e_K * T_2)(\mathbf{1}_G)\\ &= ((\check{f} * T_1) * T_2)(\mathbf{1}_G).\end{aligned}$$

□

Nous avons donc les inclusions suivantes :

$$\mathcal{H}(G) \subset \mathcal{E}'(G) \subset \mathcal{D}'(G)_{e.c.} \subset \mathcal{D}'(G)_{r.e.c.}$$

Théorème. *La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{D}'(G)_{r.e.c.}$ s'identifie au complété $\overline{\mathcal{H}(G)}$ de l'algèbre à idempotents $\mathcal{H}(G)$.*

<u>*Démonstration*</u>. Rappelons qu'un élément $\bar{a}$ de $\overline{\mathcal{H}(G)}$ est une application

$$\bar{a} : \mathrm{Idem}(\mathcal{H}(G)) \to \mathcal{H}(G),$$

telle que $\bar{a}(e) \in \mathcal{H}(G) * e$ pour tout $e \in \mathrm{Idem}(\mathcal{H}(G))$, et $\bar{a}(f) * e = \bar{a}(e)$ pour tout couple d'idempotents (e, f) tel que $e \leq f$. A un tel élément $\bar{a}$ de $\overline{\mathcal{H}(G)}$, associons la distribution A sur G définie par

$$\langle A, f\rangle = \langle \bar{a}(e), f\rangle$$

pour toute $f \in \mathcal{D}(G)$ et tout idempotent e de $\mathcal{H}(G)$ tel que $f * e = f$. On vérifie que ceci ne dépend pas du choix de l'idempotent e. Montrons que A est essentiellement compacte à droite. Pour tout $h \in \mathcal{H}(G)$, pour toute $f \in \mathcal{D}(G)$,

$$\begin{aligned}\langle A * h, f\rangle &= \langle A, f * \check{h}\rangle \\ &= \langle \bar{a}(e), f * \check{h}\rangle \quad \text{où } \check{h} * e = \check{h} \\ &= \langle \bar{a}(e) * h, f\rangle.\end{aligned}$$

Ceci montre que $A * h = \bar{a}(e) * h$ où e est tel que $\check{h} * e = \check{h}$ (ce que l'on peut réécrire $e * h = h$). En particulier, $A * h$ est dans $\mathcal{H}(G)$ et donc A est essentiellement compacte à droite.

Réciproquement, définissons une application

$$\mathcal{D}'(G)_{r.e.c.} \to \overline{\mathcal{H}(G)}, \quad T \mapsto \bar{T}, \quad \bar{T}(e) = T * e.$$

Il est facile de vérifier que cette application est l'inverse de l'application $\bar{a} \mapsto A$ définie précédemment, et que ce sont bien des morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres. Le théorème en découle. □

Corollaire. *Le centre de la catégorie $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ s'identifie au sous-espace de $\mathcal{D}'(G)_{e.c.}$ des distributions invariantes par conjugaison.*

Démonstration. D'après les résultats de la section I.1.7, le centre de $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ s'identifie au centre de $\mathcal{D}'(G)_{r.e.c.}$. C'est aussi le commutant de $\mathcal{H}(G)$ dans $\mathcal{D}'(G)_{r.e.c.}$. Une distribution T est donc dans le centre si $T * h = h * T$, pour tout $h \in \mathcal{H}(G)$. Remarquons alors que $T \in \mathcal{D}'(G)_{e.c.}$. Autrement dit, le centre de $\mathcal{D}'(G)_{r.e.c.}$ est aussi le centre de $\mathcal{D}'(G)_{e.c.}$.

Soit T dans le centre de $\mathcal{D}'(G)_{e.c.}$. On a alors

$$\langle T, f * h\rangle = \langle T, h * f\rangle, \quad (f \in \mathcal{D}(G)). \tag{II.3.13.2}$$

D'autre part une distribution T invariante par conjugaison est une distribution vérifiant $r(g) \cdot l(g) \cdot T = T$ pour tout $g \in G$, ce que l'on peut réécrire

$$\langle l(g) \cdot T, f\rangle = \langle r(g^{-1}) \cdot T, f\rangle, \quad (f \in \mathcal{D}(G)), \quad (g \in G),$$

c'est-à-dire ,

$$\langle T, l(g^{-1} \cdot f\rangle = \langle T, r(g) \cdot f\rangle, \quad (f \in \mathcal{D}(G)), \quad (g \in G),$$

ou encore,

$$\langle T, \delta_g * f\rangle = \langle T, f * \delta_g\rangle, \quad (f \in \mathcal{D}(G)), \quad (g \in G),$$

soit

$$\langle T, e_K * \delta_g * e_K * f\rangle = \langle T, f * e_K * \delta_g * e_K\rangle, \tag{II.3.13.3}$$

$(f \in \mathcal{D}(G))$, $(g \in G)$, où e_K est un idempotent de $\mathcal{H}(G)$ tel que

$$e_K * f * e_K = f, \quad e_K * (\delta_g * f) = \delta_g * f, \quad (f * \delta_g) * e_K = f * \delta_g.$$

Il est alors clair que (II.3.13.2) implique (II.3.13.3) en prenant $h = e_K * \delta_g * e_K$. Pour la réciproque, on utilise le fait que h est dans $\mathcal{H}(G, K) = e_K * \mathcal{H}(G) * e_K$ pour un sous-groupe ouvert compact K de G assez petit, et que donc h peut s'écrire comme une combinaison linéaire de distributions de la forme $e_K * \delta_g * e_K$. Il suffit donc de montrer (II.3.13.2) pour des distributions de cette forme, et cela découle alors de (II.3.13.3). □

II.4 Notes pour le Chapitre II

La plupart des résultats de ce chapitre sont dans [3]. Le passage sur les faisceaux sur les espaces topologiques t.d. est en grande partie inspiré du traitement qui en est fait dans [15]. La description du centre et du complété de $\mathcal{H}(G)$ en termes de distributions est dans [23], mais les notes d'un exposé de A. Moy et des remarques de M. Tadić m'ont été très utiles.

Chapitre III

Représentations des groupes totalement discontinus

Ayant défini dans le chapitre précédent les groupes topologiques localement compact totalement discontinus, nous nous attaquons maintenant à la théorie des représentations de ces groupes. Nous ne considérons que des représentations dans des espaces vectoriels complexes, pour lesquelles il s'avère que la (une ?) bonne catégorie à considérer est celle des représentations lisses, c'est-à-dire celles qui sont continues lorsque l'espace de représentation est muni de la topologie discrète. Cette catégorie est alors équivalente à celle des modules non dégénérés sur l'algèbre de Hecke du groupe définie au chapitre II. Ceci nous permet d'utiliser les constructions et les résultats du chapitre I. On en déduit par exemple directement les propriétés du foncteur associant à une représentation l'espace de ses vecteurs fixés par un sous-groupe ouvert compact, ou celles du foncteur de dualité (représentation contragrédiente). Le cœur du chapitre est consacré aux foncteurs d'induction et d'oubli entre catégories de représentations de deux groupes t.d. définis par un morphisme entre ces deux groupes. Là encore, on particularise les résultats du chapitre I. Le cas le plus important est celui où le morphisme est une inclusion d'un sous-groupe fermé. On retrouve dans ce cas la notion usuelle de représentation induite, la ≪ réciprocité de Frobenius ≫étant le fait que l'induction est l'adjoint à droite du foncteur d'oubli. On identifie aussi dans ce cadre induction compacte et foncteur P du chapitre I, à un caractère modulaire près, l'induction compacte étant donc l'adjoint à gauche du pseudo foncteur d'oubli. Ceci est particulièrement utile lorsque le pseudo foncteur d'oubli est naturellement isomorphe au foncteur d'oubli, par exemple lorsque le sous-groupe est ouvert. Un autre type important de foncteur entre catégories de représentations est donné par la construction d'espace de ≪ coinvariants ≫. Dans un cas particulier qui servira au chapitre VI pour la construction de l'induction parabolique des groupes réductifs, le foncteur de Jacquet est un foncteur de type P, donc adjoint à gauche du pseudo foncteur d'oubli (qui est isomorphe au foncteur d'oubli dans ce cas).

Un autre outil fondamental de la théorie des représentations est le lemme de Schur. La version dont nous avons besoin ici est démontrée en annexe. Les représentations irréductibles admettent un caractère central. Plus généralement, le centre de la catégorie des représentations lisses agit sur les représentations irréductibles par des scalaires. Nous montrons aussi qu'il y a suffisamment de représentations lisses irréductibles dans le sens où les réprésentations irréductibles ≪ séparent les points ≫de l'algèbre de Hecke du groupe.

Pour résumer, notre objet d'étude dans ce chapitre n'est pas tant la catégorie des représentations lisses d'un groupe totalement discontinu que les foncteurs que l'on peut définir entre de telles catégories. Ces foncteurs sont des cas particuliers des foncteurs d'induction et d'oubli du chapitre I, via les équivalences de catégories avec les modules non dégénérés sur les algèbres de Hecke.

III.1 Représentations lisses

III.1.1 Généralités

Soit G un groupe. Une représentation (π, V) de G est la donnée d'un espace vectoriel complexe V et d'un morphisme de groupe π de G dans $\mathrm{GL}(V)$. Ceci définit une action linéaire de G sur V. Une représentation (π, V) est dite unitaire si V est muni d'un produit hermitien (antilinéaire par rapport à la première variable) $\langle .\, , . \rangle_V$ vérifiant

$$\langle \pi(g) \cdot v, w \rangle_V = \langle v, \pi(g^{-1}) \cdot w \rangle_V, \quad (g \in G), (v, w \in V).$$

Si W est un sous-espace de V stable par l'action de G donnée par π, nous noterons π_W le morphisme de G dans $\mathrm{GL}(W)$ induit par π. La représentation (π_W, W) (souvent simplement notée (π, W)) est une sous-représentation de (π, V). De même, π induit un morphisme $\pi_{V/W}$ de G dans $\mathrm{GL}(V/W)$. La représentation $(\pi_{V/W}, V/W)$ (souvent simplement notée $(\pi, V/W)$) est une représentation quotient de (π, V). Plus généralement, si $W_1 \subset W_2$ sont deux sous-espaces stables de V sous l'action de G, le morphisme π_{W_2/W_1} de G dans W_2/W_1 induit par π définit une représentation $(\pi_{W_2/W_1}, W_2/W_1)$ (ou simplement $(\pi, W_2/W_1)$) que l'on dit être un sous-quotient de (π, V).

Une représentation (π, V) de G avec V de dimension 1 s'appelle un caractère. On peut dans ce cas identifier V avec $\mathbb{C}$, et l'on note alors parfois $\mathbb{C}_\pi$ ce caractère. S'il est à valeur dans les nombres complexes de module 1, on dit qu'il est unitaire.

Définition. Soit G un groupe t.d. Une représentation (π, V) de G dans un espace vectoriel complexe V est dite lisse, si pour tout v dans V, il existe un sous-groupe ouvert de G qui fixe v.

Remarque. Munissons V de la topologie discrète. Si l'on suppose que pour tout v dans V, l'application :

$$\phi_v \ : G \to V, \quad g \mapsto \pi(g) \cdot v$$

est continue, alors l'image réciproque de l'ouvert $\{v\}$ de V est un ouvert, ce qui montre que π est lisse. Réciproquement, si (π, V) est lisse, l'image réciproque de tout ouvert de V, qui est la réunion (composée d'ouverts) de ses points, est une réunion d'ouverts, donc un ouvert.

Si (π, V) est une représentation quelconque de G, notons V_0 l'ensemble des vecteurs de V fixés par un sous-groupe ouvert de G. Il est clair que V_0 est un sous-espace de V stable sous l'action de G. La représentation (π, V_0) est alors trivialement lisse. On l'appelle la partie lisse de (π, V).

III.1.2 Exemples

Le groupe G agit sur $\mathcal{C}^\infty(G)$ par les représentations régulières gauche et droite : $(\forall f \in \mathcal{C}^\infty(G))$, $(\forall g \in G)$, $(\forall x \in G)$,

$$l(g) \cdot f\,(x) = f(g^{-1}x), \quad r(g) \cdot f\,(x) = f(xg).$$

Proposition. *Les représentations l et r préservent les sous-espaces $\mathcal{C}^\infty_{unif}(G)$ et $\mathcal{D}(G)$. Les sous-représentations $(l, \mathcal{C}^\infty_{unif}(G))$, $(r, \mathcal{C}^\infty_{unif}(G))$, $(l, \mathcal{D}(G))$, et $(r, \mathcal{D}(G))$ sont lisses.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty_{unif}(G)$ et soit K tel que $f \in \mathcal{C}^\infty(G, K)$. On a alors, pour tous $k, k' \in K$, $x, g \in G$

$$(l(g) \cdot f)(gkg^{-1}xk') = f(kg^{-1}xk') = f(g^{-1}x) = (l(g) \cdot f)(x).$$

Donc $l(g) \cdot f$ est dans $\mathcal{C}^\infty(G, K \cap gKg^{-1}) \subset \mathcal{C}^\infty_{unif}(G)$. La démonstration est similaire pour $(r, \mathcal{C}^\infty_{unif}(G))$, $(l, \mathcal{D}(G))$, $(r, \mathcal{D}(G))$. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(G, K)$, $l(K)$ et $r(K)$ fixent f, par définition, donc $(l, \mathcal{C}^\infty_{unif}(G))$, $(r, \mathcal{C}^\infty_{unif}(G))$ sont lisses. Il en est de même de $(l, \mathcal{D}(G))$ et $(r, \mathcal{D}(G))$ qui sont des sous-représentations. □

III.1.3 La catégorie $\mathcal{M}(G)$

Soient (π, V) et (τ, W) deux représentations lisses du groupe G. Un opérateur d'entrelacement f entre (π, V) et (τ, W) est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ vérifiant

$$f(\pi(g) \cdot v) = \tau(g) \cdot f(v), \quad (v \in V), (g \in G).$$

Notons $\mathrm{Hom}_G((\pi, V), (\tau, W))$ (ou pour abréger simplement $\mathrm{Hom}_G(V, W)$, ou encore $\mathrm{Hom}_G(\pi, \tau)$) l'espace des opérateurs d'entrelacements entre (π, V) et (τ, W).

Notons $\mathcal{M}(G)$ la catégorie des représentations lisses de G, les morphismes étant les opérateurs d'entrelacements. C'est une catégorie abélienne. Nous ne le démontrons pas maintenant, bien qu'une vérification directe soit élémentaire, car ceci résulte de l'équivalence de catégories de la section III.1.4. Notons $\mathbf{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses irréductibles de G.

Etant donnée une représentation lisse (π, V) de G, et un élément T de $\mathcal{E}'(G)$, on définit sur V l'opérateur $\pi(T)$ de la façon suivante. Soit :

$$\phi_v \ : G \to V, \quad g \mapsto \pi(g) \cdot v.$$

C'est une fonction localement constante à valeurs dans V, un élément de $\mathcal{C}^\infty(G, V)$ (II.1.2.3). La dualité entre $\mathcal{C}^\infty(G, V)$ et $\mathcal{E}'(G)$ (voir II.1.2)

$$\langle ., . \rangle \ : \mathcal{C}^\infty(G, V) \times \mathcal{E}'(G) \to V$$

permet de définir

$$\pi(T) \cdot v = \langle T, \phi_v \rangle = \int_G \pi(g) \cdot v \, dT(g).$$

On vérifie aisément que :

$$\pi(T_1 * T_2) = \pi(T_1) \circ \pi(T_2), \quad \pi(\delta_g) = \pi(g), \quad (T_1, T_2 \in \mathcal{E}'(G)), (g \in G).$$

Ceci définit une structure de $\mathcal{E}'(G)$-module (et donc, par restriction, de $\mathcal{H}(G)$-module) sur V.

Exemple. Considérons la représentation lisse $(l, \mathcal{D}(G))$. Alors pour tout $T \in \mathcal{E}'(G)$, pour tout $f \in \mathcal{D}(G)$,

$$l(T) \cdot f = T * f.$$

Remarque. Fixons une mesure de Haar μ_G sur G, et identifions $\mathcal{D}(G)$ à $\mathcal{H}(G)$ par l'isomorphisme $f \mapsto f\mu_G$. Par transport de structure, si (π, V) est une représentation lisse de G, on obtient une représentation de $\mathcal{D}(G)$, donnée explicitement par la formule :

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)\, d\mu_G(g), \quad (f \in \mathcal{D}(G)).$$

III.1.4 Une équivalence de catégories

Toute représentation lisse (π, V) de G induit sur V une structure de $\mathcal{H}(G)$-module.

Théorème. *Si (π, V) est une représentation lisse de G, le $\mathcal{H}(G)$-module V est non dégénéré.*

Réciproquement, tout $\mathcal{H}(G)$-module V non dégénéré V définit une représentation lisse de G.

Ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre et induisent une équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(G)$ et $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$.

Démonstration. Soit $v \in V$, et soit K un sous-groupe ouvert compact de G qui fixe v. Alors $\pi(e_K) \cdot v = v$ et donc v est fixé par un idempotent de $\mathcal{H}(G)$. Ceci montre que le $\mathcal{H}(G)$-module V est non dégénéré. De plus, tout morphisme dans $\mathcal{M}(G)$ est de manière évidente un morphisme dans $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$. Réciproquement, si V est un $\mathcal{H}(G)$-module non dégénéré, pour tout $v \in V$, il existe un sous-groupe ouvert compact K de G tel que $e_K \cdot v = v$. Si $T \in \mathcal{E}'(G)$, on définit $T \cdot v := (T * e_K) \cdot v$. Ceci ne dépend pas du choix de K, car cette construction est un cas particulier de la construction du lemme I.1.7 : en effet toute distribution $T \in \mathcal{E}'(G)$ définit un opérateur $h \mapsto T * h$ dans $\mathcal{H}(G)$ qui commute avec la convolution à droite dans $\mathcal{H}(G)$. Le lemme I.1.7 nous permet alors de définir fonctoriellement $\pi(T) : V \to V$. On peut alors poser $\pi(g) \cdot v := \pi(\delta_g) \cdot v$, $v \in V$. Il est également clair que tout morphisme dans $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ induit un morphisme dans $\mathcal{M}(G)$. Les deux foncteurs ainsi définis établissent une équivalence de catégories. □

Remarque. En vertu de cette équivalence de catégories, nous noterons l'action d'un élément T de $\mathcal{H}(G)$ sur un vecteur v d'une représentation lisse (π, V) de G, soit $\pi(T) \cdot v$, soit simplement $T \cdot v$. Cette dernière notation sera privilégiée lorsque la représentation sous-jacente π est clairement identifiée par le contexte.

Dans l'appendice A.VI.3, nous rappelons la notion d'objets de longueur finie et de suite de composition (aussi appelée de Jordan-Hölder) dans certaines catégories abéliennes. On peut appliquer ceci aux modules dans $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ et grâce à l'équivalence de catégorie entre $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ et $\mathcal{M}(G)$, on transpose la terminologie de A.VI.3 aux représentations lisses de G.

Ainsi, toute représentation lisse de G admet toujours un sous-quotient irréductible, si elle est de type fini, elle admet un quotient irréductible, et enfin si elle est de longueur finie, elle admet une sous-représentation irréductible.

III.1.5 Points fixes de K

Soit K un sous-groupe ouvert compact de G, et soit e_K l'idempotent de $\mathcal{H}(G)$ donné par la mesure de Haar normalisée sur K. Toute représentation lisse (π, V) de G est un $\mathcal{H}(G)$-module non dégénéré, d'après l'équivalence de catégories établie au paragraphe précédent. Nous avons défini dans la section I.3.1 un foncteur j_{e_K}, que nous noterons plus simplement j_K, de $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ dans $\mathcal{M}(e_K * \mathcal{H}(G) * e_K)$. Rappelons que $e_K * \mathcal{H}(G) * e_K = \mathcal{H}(G, K)$. Donnons quelques propriétés de ce foncteur.

Proposition. (i) *Le module $j_K(V) = e_K \cdot V$ est le sous-espace V^K de V des vecteurs fixes sous l'action de K dans V.*

(ii) *le noyau de $\pi(e_K)$ dans V est le sous-espace $V(K)$ de V engendré par les vecteurs de la forme $\pi(e_K) \cdot v - v$, $v \in V$.*

(iii) *On a $V = V^K \oplus V(K)$.*

(iv) *Le foncteur j_K est exact.*

<u>*Démonstration*</u>. Le point (i) est immédiat. Il est clair que

$$e_K \cdot (e_K \cdot v - v) = 0, \quad (v \in V),$$

donc $V(K) \subset \ker e_K$. D'autre part, $\pi(e_K)$ étant un projecteur,

$$V = \ker e_K \oplus \operatorname{Im} e_K.$$

Comme $v = e_K \cdot v - (e_K \cdot v - v)$, on a $V = e_K \cdot V + V(K)$. On en déduit que $V(K) = \ker \pi(e_K)$ et l'on obtient (ii) et (iii). L'exactitude de j_K a été démontrée dans la section I.3.1.

Nous redonnons, dans le cadre plus spécifique de cette section, les résultats de la proposition I.3.2.

Théorème. (i) *La représentation (π, V) est irréductible si et seulement si pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, le $\mathcal{H}(G, K)$-module V^K est simple ou nul.*

(ii) *Soient (π_i, V_i), $i = 1, 2$, deux représentations lisses irréductibles de G, et soit K un sous-groupe ouvert compact de G tel que $V_i^K \neq 0$. Alors π_1 et π_2 sont équivalentes si et seulement si V_1^K et V_2^K sont des $\mathcal{H}(G, K)$-modules isomorphes.*

(iii) *Pour chaque module simple W de $\mathcal{H}(G, K)$, il existe une représentation irréductible π de G telle que $V^K = W$.*

III.1.6 Représentation contragrédiente

Soit (π, V) une représentation lisse de G. L'espace dual V^* est muni de la représentation π^* de G définie par :

$$\pi^*(g) \cdot \lambda(v) = \lambda(\pi(g^{-1}) \cdot v), \quad (\lambda \in V^*), (v \in V).$$

Cette représentation n'est pas nécessairement lisse. Soit $\tilde{V}$ la partie lisse de V^*. Il est clair que $\tilde{V}$ est stable sous l'action de G. Nous noterons $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ la restriction de π^* à $\tilde{V}$: c'est une représentation lisse de G, que l'on appelle représentation contragrédiente de (π, V).

Dans la section I.4.1, nous avons construit un foncteur de dualité de $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))_d$. Comme l'algèbre $\mathcal{H}(G)$ est munie de l'anti-involution $T \mapsto \check{T}$ induite par $g \mapsto g^{-1}$, on peut identifier modules à droite et à gauche, et donc voir le foncteur de dualité comme un endofoncteur de

$\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$. Il est clair que par l'équivalence de catégories du théorème III.1.4, la représentation contragrédiente $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ de (π, V) correspond au $\mathcal{H}(G)$-module non dégénéré $\tilde{V}$ défini dans la section I.4.1.

Lemme. *Soit $T \in \mathcal{E}'(G)$. Pour tout $\lambda \in V^*$, pour tout $v \in V$, on a :*

$$(\tilde{\pi}(\check{T}) \cdot \lambda)(v) = \lambda(\pi(T) \cdot v).$$

En particulier,

$$(\tilde{\pi}(e_K) \cdot \lambda)(v) = \lambda(\pi(e_K) \cdot v)$$

pour tout sous-groupe compact K. Si λ est de plus K-invariant, on a alors :

$$\lambda(v) = \lambda(\pi(e_K) \cdot v).$$

Donc $(V^*)^K \simeq (V^K)^*$, et si K est ouvert, $\tilde{V}^K = (V^*)^K \simeq (V^K)^*$.

Démonstration. Rappelons que l'homéomorphisme $g \mapsto g^{-1}$ de G induit l'endomorphisme $T \mapsto \check{T}$ de $\mathcal{E}(G)$. On a :

$$\begin{aligned}(\tilde{\pi}(\check{T}) \cdot \lambda)(v) &= \int_G (\tilde{\pi}(g) \cdot \lambda)(v)\, d\check{T}(g) = \int_G \lambda(\pi(g^{-1}) \cdot v)\, d\check{T}(g) \\ &= \int_G \lambda(\pi(g) \cdot v)\, dT(g) \\ &= \lambda(\pi(T) \cdot v).\end{aligned}$$

Comme K est un groupe unimodulaire, on a $\check{e}_K = e_K$, d'où la deuxième assertion du lemme. Le reste est une reformulation du lemme I.4.1. □

Reformulons aussi le corollaire I.4.1

Corollaire. *On a une injection canonique $V \hookrightarrow \tilde{\tilde{V}}$.*

III.1.7 Représentations admissibles

La condition d'admissibilité d'une représentation est un critère technique de finitude permettant d'obtenir de nombreux résultats importants. Nous montrerons plus loin que dans le cas d'un groupe réductif p-adique, toutes les représentations lisses irréductibles sont admissibles.

Définition. Une représentation lisse (π, V) du groupe t.d. G est dite admissible, si pour tout sous-groupe ouvert N de G, le sous-espace des vecteurs fixes V^N est de dimension finie.

Traduisons ceci : comme les sous-groupes ouverts compacts forment une base de voisinages de l'identité dans G, la représentation (π, V) est admissible si et seulement si V^K est de dimension finie pour tout sous-groupe ouvert compact K de G. En terme de $\mathcal{H}(G)$-module, ceci signifie que $e_K \cdot V$ est de dimension finie pour tout K comme ci-dessus. Or pour tout idempotent e de $\mathcal{H}(G)$, il existe un tel K tel que $e \leq e_K$. On a donc $e \cdot V = e_K e \cdot V \subset e_K \cdot V$, et l'on voit que la représentation (π, V) est admissible si et seulement si le $\mathcal{H}(G)$-module non dégénéré V est admissible au sens de I.5.1

Proposition. *Une représentation lisse (π, V) de G est admissible si et seulement si $V \simeq \tilde{\tilde{V}}$.*

Démonstration. C'est la traduction de la proposition I.5.1. Le corollaire I.5.1 peut lui aussi s'énoncer en termes de représentations plutôt que de $\mathcal{H}(G)$ modules.

III.1.8 Lemme de Schur

Proposition. *Soit G un groupe t.d. dénombrable à l'infini, et soit (π, V) une représentation lisse et irréductible de G. Alors l'espace* $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ *est l'ensemble des opérateurs scalaires. Si (τ, W) est une autre représentation lisse et irréductible de G non équivalente à (π, V), alors* $\mathrm{Hom}_G(V, W) = 0$

Démonstration. Montrons tout d'abord que V est de dimension au plus dénombrable : fixons $v \in V$ non nul et soit K un sous-groupe ouvert compact de G fixant v. Alors par irréductibilité, V est engendré par les vecteurs $\pi(g) \cdot v$, où g décrit un système de représentants de G/K. Or, un tel système de représentants est dénombrable (lemme II.3.2).

La proposition découle alors du théorème B.II et de l'équivalence de catégories III.1.4 :

$$\mathrm{Hom}_G(V, V) \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{H}(G)}(V).$$

Le second point est évident, puisqu'un opérateur d'entrelacement non nul entre V et W est nécessairement un isomorphisme, ce qui est exclu par hypothèse. □

Remarque. Si dans la proposition, on suppose (π, V) admissible, on peut remplacer l'hypothèse G dénombrable à l'infini par le fait que l'élément neutre de G admette une base dénombrable de voisinages. En effet, V est de dimension dénombrable, puisque $V = \bigcup_K V^K$, où K décrit une famille (dénombrable) de sous-groupes ouverts compacts de G formant une base de voisinages de l'unité, et chaque V^K est de dimension finie.

III.1.9 Une application du lemme de Schur

Le résultat qui suit est une application du lemme de Schur qui nous servira par la suite.

Proposition. *Soit (π, V) une représentation admissible irréductible de G. Si $B : V \times \tilde{V} \to \mathbb{C}$ est une forme bilinéaire G-invariante, alors il existe une constante c_B dans $\mathbb{C}$ telle que*

$$B(v, \lambda) = c_B\, \lambda(v).$$

En particulier, si B est non nulle, elle est non dégénérée.

Démonstration. Comme (π, V) est admissible et irréductible, rappelons qu'il en est de même de $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ et que $\tilde{\tilde{V}} \simeq V$. Si B est dégénérée, il existe $\lambda \in \tilde{V}$ non nulle tel que $B(v, \lambda) = 0$ pour tout $v \in V$. Donc le noyau de l'application

$$\alpha : \tilde{V} \to \tilde{V}, \quad \lambda \mapsto (v \mapsto B(v, \lambda))$$

est non trivial et G-stable. Comme $\tilde{V}$ est irréductible, on a $\ker \alpha = \tilde{V}$ et donc $B = 0$.

Si B est non nulle, considérons deux isomorphismes entre V et $\tilde{\tilde{V}}$: le premier est l'isomorphisme canonique

$$\beta_1 : v \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(v)),$$

et le second est donné par $\beta_2 : v \mapsto (\lambda \mapsto B(v, \lambda))$. D'après le lemme de Schur β_1 et β_2 sont proportionnels. □

III.1.10 Caractère central

Supposons que G soit séparable et soit Z un sous-groupe contenu dans le centre $Z(G)$. Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G. D'après le lemme de Schur, pour tout élément $z \in Z$, $\pi(z)$ agit comme un scalaire dans V. Notons :

$$\pi(z) = \chi_\pi(z)\,\mathrm{Id}_V, \quad (z \in Z).$$

Il est clair que χ_π est un caractère de Z. Lorsque $Z = Z(G)$, on l'appelle caractère central de la représentation (π, V).

Si (π, V) une représentation lisse de G, et s'il existe un caractère χ de $Z(G)$ tel que :

$$\pi(z) = \chi(z)\,\mathrm{Id}_V, \quad (z \in Z),$$

on dit que (π, V) admet le caractère central χ (il est bien sûr uniquement déterminé).

Lemme. *Si (π_1, V_1) et (π_2, V_2) sont deux représentations lisses de G, admettant respectivement les caractères centraux χ_1 et χ_2, que l'on suppose distincts, alors il n'existe pas d'opérateurs d'entrelacement non triviaux entre V_1 et V_2.*

Démonstration. Soient $z \in Z(G)$ tel que $\chi_1(z) \neq \chi_2(z)$ et $A \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$. Alors pour tout $v \in V$,

$$\chi_1(z)A(v) = A(\chi_1(z)v) = A(\pi_1(z) \cdot v) = \pi_2(z) \cdot A(v) = \chi_2(z)A(v),$$

et donc $A(v) = 0$. □

Proposition. *Soit (π, V) une représentation lisse de longueur finie ou admissible de G. Alors, pour tout caractère χ de Z, posons*

$$V_\chi = \{v \in V \mid \exists m \in \mathbb{N}, \forall z \in Z, (\pi(z) - \chi(z)\mathrm{Id})^m \cdot v = 0\},$$

et appelons cet espace le sous-espace caractéristique de V pour le caractère χ. Alors $V = \bigoplus_\chi V_\chi$. Si (π, V) est de longueur finie, seul un nombre fini de facteurs sont non nuls.

On note $\mathrm{Exp}(Z, V)$ l'ensemble des caractères χ de Z tels que $V_\chi \neq \{0\}$.

Démonstration. Si (π, V) est de longueur finie, on raisonne par récurrence sur la longueur, le cas où (π, V) est irréductible étant traité par le lemme de Schur. Si V n'est pas irréductible, on considère une sous-représentation irréductible V_0, et l'on utilise l'hypothèse de récurrence pour décomposer $\bar{V} = V/V_0 = \bigoplus_\chi \bar{V}_\chi$. Soit χ_0 le caractère par lequel Z agit dans la représentation irréductible V_0. Soit $\bar{v} \in \bar{V}_\chi$, et $v \in V$ un relèvement de $\bar{V}$. On a alors, pour un certain $m \in \mathbb{N}$,

$$(\pi(z) - \chi(z)\mathrm{Id})^m \cdot v \in V_0, \quad (z \in Z),$$

et donc

$$(\pi(z) - \chi_0(z)\mathrm{Id})(\pi(z) - \chi(z)\mathrm{Id})^m \cdot v = 0, \quad (z \in Z).$$

On conclut par des arguments classiques que

$$V = \bigoplus_\chi V_\chi \quad \text{où} \quad \chi \in \mathrm{Exp}(Z, \bar{V}) \cup \{\chi_0\}.$$

Dans le cas où (π, V) est admissible, pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, on décompose V^K, qui est de dimension finie, en sous-espaces caractéristiques V_χ^K pour l'action des éléments de Z (comme les actions de Z et K commutent, V^K est stable sous l'action de Z). Les décompositions obtenues sont compatibles avec les inclusions $V^{K_1} \subset V^{K_2}$ lorsque $K_2 \subset K_1$, et l'on pose alors

$$V_\chi = \bigcup_K V_\chi^K.$$

La décomposition $V = \bigoplus_\chi V_\chi$ s'en déduit facilement. □

Remarque. On a défini en I.1.7 le centre de la catégorie $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ comme étant l'algèbre des endomorphismes du foncteur identité. Notons-le $\mathfrak{Z}(G)$. Il est clair qu'un élément de $Z = Z(G)$ définit, par son action sur les modules de $\mathcal{M}(G) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$, un tel endomorphisme, et donc un élément de $\mathfrak{Z}(G)$. Or, pour tout élément de $z \in \mathfrak{Z}(G)$, le lemme de Schur affirme que l'action de z sur un module simple V est un opérateur scalaire. De même que ci-dessus, ceci définit donc pour tout module simple V un caractère de $\mathfrak{Z}(G)$, que l'on appelle encore caractère central du module V et qui étend le caractère de $Z(G)$ décrit ci-dessus.

III.1.11 Complétude des représentations irréductibles

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que si G est un groupe t.d. séparable, alors G admet assez de représentations lisses irréductibles, au sens suivant.

Théorème. *Soit $T \in \mathcal{H}(G)$, $T \neq 0$. Alors il existe une représentation lisse irréductible π de G telle que $\pi(T) \neq 0$.*

Démonstration. Pour un sous-groupe compact ouvert K assez petit, on a $T = e_K * T * e_K \neq 0$, donc on peut supposer que $T \in \mathcal{H}(G, K)$. Ecrivons $T = f\mu_G$, $f \in \mathcal{D}(G, K)$, et posons $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$, $g \in G$. On vérifie directement en utilisant (II.3.12.1) que :

$$(f^* * f)(e) = \int_G |f(g^{-1})|^2 \, d\mu_G(g),$$

et donc, comme $f \neq 0$, on trouve $(f^* * f)(e) \neq 0$. Posons $h = f^* * f$. On a $h^* = h$ et $h \neq 0$, d'où par le même raisonnement $h^2 = h^* * h \neq 0$, $h^4 = (h^*)^2 * h^2 \neq 0$, etc. Posons $S = h\mu_G$. On a alors $S*S = (h^* * h)\, \mu_G \neq 0$, $S*S*S*S = (h^*)^2 * h^2 \, \mu_G \neq 0$, etc. Ainsi S n'est pas un élément nilpotent. D'autre part, l'algèbre $\mathcal{H}(G)$ est de dimension dénombrable, puisque $\mathcal{H}(G) = \bigcup_K \mathcal{H}(G, K)$, l'union portant sur une base dénombrable de sous-groupes ouverts compacts de G, et chaque $\mathcal{H}(G, K)$ est de dimension dénombrable car G/K, et donc à fortiori, $K\backslash G/K$ est discret et de cardinal dénombrable (lemme II.3.2). On peut conclure en utilisant le lemme B.III, qu'il existe une représentation lisse irréductible π telle que $\pi(S) \neq 0$, d'où $\pi(T) \neq 0$. □

Remarque. L'algèbre $\mathcal{H}(G)$ vérifie donc la propriété (**Sep**) de I.1.8. Ainsi, outre la description de $\mathfrak{Z}(G)$ obtenue en II.3.13, on peut chercher à la déterminer en caractérisant son image par le morphisme (I.1.8.1)

III.1.12 Caractères des représentations admissibles

Soit (π, V) une représentation admissible de G, soit $T \in \mathcal{H}(G)$ et soit K un sous-groupe compact ouvert de G tel que $T = e_K * T * e_K$. L'opérateur $\pi(T)$ a alors son image dans $e_K \cdot V = V^K$, qui est de dimension finie. On peut donc définir la trace de $\pi(T)$, que l'on note $\operatorname{Tr}\pi(T)$. On peut voir $\operatorname{Tr}\pi$ comme une forme linéaire sur $\mathcal{H}(G)$. Si l'on fixe une mesure de Haar à gauche μ_G, pour tout $f \in \mathcal{D}(G)$, on pose $\operatorname{Tr}\pi(f) \ := \operatorname{Tr}\pi(f\mu_G)$. On définit ainsi une distribution sur G, que l'on appelle le *caractère* de π.

Lemme. *Soit $g_0 \in G$ et $\operatorname{Int}(g_0)$ l'automorphisme intérieur de G donné par la conjugaison par g_0. On a alors, pour toute représentation admissible (π, V) de G :*

$$\operatorname{Int}(g_0) \cdot (\operatorname{Tr}\pi) = \delta_G(g_0) \operatorname{Tr}\pi.$$

En particulier si G est unimodulaire, $\operatorname{Tr}\pi$ est une distribution invariante par conjugaison.

<u>Démonstration</u>. On a pour tout $T \in \mathcal{H}(G)$:

$$\begin{aligned}(\operatorname{Int}(g_0) \cdot \operatorname{Tr}\pi)(T) &= \operatorname{Tr}\pi(\operatorname{Int}(g_0^{-1})(T)) = \operatorname{Tr}\pi(\delta_{g_0^{-1}} * T * \delta_{g_0}) \\ &= \operatorname{Tr}(\pi(g_0^{-1})\pi(T)\pi(g_0)) \\ &= \operatorname{Tr}\pi(T)\end{aligned}$$

Donc si $f \in \mathcal{D}(G)$, on a :

$$\begin{aligned}(\operatorname{Int}(g_0) \cdot \operatorname{Tr}\pi)(f) &= \operatorname{Tr}\pi(\operatorname{Int}(g_0^{-1})(f)) = \operatorname{Tr}\pi(\operatorname{Int}(g_0^{-1})(f)\,\mu_G) \\ &= \delta_G(g_0) \operatorname{Tr}\pi(\operatorname{Int}(g_0^{-1}) \cdot (f\mu_G)) \\ &= \delta_G(g_0) \operatorname{Tr}\pi(f\mu_G) = \delta_G(g_0) \operatorname{Tr}\pi(f).\end{aligned}$$

Exemple. Soit (π, V) une représentation admissible de G. Le caractère de la représentation contragrédiente $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ est donné par

$$\Theta_{\tilde{\pi}}(f) = \Theta_\pi(\check{f}), \quad (f \in \mathcal{D}(G)).$$

On rappelle que $\check{f}$ est définie par $\check{f}(g) = f(g^{-1})$.

III.1.13 Indépendance linéaire des caractères

Soit G un groupe t.d. et (π_1, V_1), ..., (π_n, V_n) des représentations irréductibles admissibles de G, non équivalentes deux à deux. On a alors :

Proposition. *Les caractères $\operatorname{Tr}\pi_1, \ldots \operatorname{Tr}\pi_n$ sont linéairement indépendants.*

<u>Démonstration</u>. Comme les π_i sont lisses, on peut trouver un sous-groupe ouvert compact K tel que pour tout i, $V_i^K \neq \{0\}$. D'après le théorème III.1.5, les $\mathcal{H}(G, K)$-modules V_i^K sont simples, non isomorphes et de dimension finie. L'indépendance linéaire découle alors de [10], Ch. VIII, §13, Prop. 2.

Corollaire. *Deux représentations irréductibles admissibles π_1 et π_2 de G sont équivalentes si et seulement si leurs caractères sont égaux.*

III.1.14 Produits tensoriels de représentations

Pour tout $i = 1, 2, \ldots, r$, supposons que G_i soit un groupe t.d. Le groupe produit $\prod_i G_i$ est alors un groupe topologique t.d. pour la topologie produit. Soient $(\pi_i, V_i) \in \mathcal{M}(G_i)$, pour $i = 1, 2, \ldots, r$. On définit alors le produit tensoriel :

$$\boxtimes_i(\pi_i, V_i) = (\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_r, V_1 \otimes \ldots \otimes V_r)$$

comme étant la représentation de $\prod_i G_i$ dans $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$ donnée par :

$$(\pi_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \pi_r)(g_1, \ldots, g_r) = \pi_1(g_1) \otimes \ldots \otimes \pi(g_r), \quad (g_i \in G_i,\ i = 1, \ldots, r).$$

Les produits tensoriels sont ici des produits tensoriels d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Toutefois, pour alléger les notations, on note simplement $\otimes$ plutôt que $\otimes_{\mathbb{C}}$.

Si $G_1 = G_2 = \ldots G_r = G$, on définit une représentation π de G dans $\bigotimes_i V_i$ par $\pi(g) = (\otimes_i \pi)(\Delta(g))$ où

$$\Delta : G \to \prod_i G, \quad g \mapsto (g, \ldots, g).$$

On note $\bigotimes_i(\pi_i, V_i)$ cette représentation de G.

Proposition. *Avec les notations ci-dessus, supposons que toutes les représentations* (π_i, V_i) *soient admissibles. Alors* $\boxtimes_i(\pi_i, V_i)$ *est admissible. D'autre part,* $(\boxtimes_i(\pi_i, V_i))\tilde{} = \boxtimes_i(\tilde{\pi}_i, \tilde{V}_i)$. *Si toutes les représentations* (π_i, V_i) *sont irréductibles, alors il en est de même de* $\boxtimes_i(\pi_i, V_i)$. *Enfin, toute représentation lisse admissible irréductible de* $\prod_i G_i$ *est de la forme* $\boxtimes_i(\pi_i, V_i)$ *où les* (π_i, V_i) *sont irréductibles admissibles et uniquement déterminées à isomorphisme près par* (π, V).

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $r = 2$. Soient $K_i \subset G_i$, $r = 1, 2$, des sous-groupes ouverts compacts et posons $K = K_1 \times K_2 \subset G_1 \times G_2$. On vérifie facilement que $\mathcal{H}(G, K) = \mathcal{H}(G_1, K_1) \otimes \mathcal{H}(G_2, K_2)$ et que $(V_1 \otimes V_2)^K = V_1^{K_1} \otimes V_2^{K_2}$, de sorte que $(V_1 \otimes V_2)^K$ est de dimension finie. L'application naturelle :

$$\tilde{V}_1^{K_1} \otimes \tilde{V}_2^{K_2} = (V_1^{K_1})^* \otimes (V_2^{K_2})^* \to ((V_1 \otimes V_2)^K)^* = \widetilde{(V_1 \otimes V_2)}^K$$

est un isomorphisme. Ceci prouve les deux premières assertions. Le reste découle alors facilement du théorème III.1.5 et du résultat suivant, dont on trouvera une démonstration dans [15], Prop. 3.4.1. $\square$

Scolie. Soient A_1 et A_2 des algèbres unitaires et soient (τ_1, V_1), (τ_2, V_2) des représentations irréductibles de dimension finie de A_1 et A_2 respectivement. Alors la représentation $(\tau_1 \boxtimes \tau_2, V_1 \otimes V_2)$ de $A_1 \times A_2$ est irréductible. Réciproquement, toute représentation irréductible de $A_1 \times A_2$ s'écrit sous cette forme, de manière unique à isomorphisme près.

Si (π, V) est une représentation lisse de G et si $(\omega, \mathbb{C})$ est un caractère (lisse) de G, alors nous simplifierons les notations et nous noterons $(\pi\omega, V)$ pour la représentation $(\pi \otimes \omega, V \otimes \mathbb{C})$ (bien sûr $V \otimes \mathbb{C}$ s'identifie canoniquement à V).

Lemme. *Soient* (π, V) *une représentation lisse admissible de* G *et* $(\omega, \mathbb{C})$ *un caractère (lisse) de* G. *Alors* $(\pi\omega, V)$ *est admissible.*

Démonstration. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G sur lequel ω est trivial. Soit K' un autre sous-groupe ouvert compact de G. Tout vecteur v de V est fixé par $K' \cap K$ sous π si et seulement s'il est fixé pour $\pi\omega$. $\square$

III.1.15 Les foncteurs $\otimes$ et Hom

Dans la section précédente, nous avons défini le produit tensoriel de représentations de $\mathcal{M}(G)$. Si l'on fixe une représentation (π, V) de $\mathcal{M}(G)$, on peut alors définir un foncteur

$$\bullet \otimes V : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G), \quad (\rho, W) \mapsto (\rho \otimes \pi, W \otimes V).$$

Nous allons définir de manière similaire un foncteur Hom. Si (ρ, W) et (π, V) sont deux représentations de G (pas nécessairement lisses), $\mathrm{Hom}(W, V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$ est muni d'une représentation π^ρ de G donnée par : pour tout $w \in W$, pour tout $g \in G$ et tout $\phi \in \mathrm{Hom}(W, V)$,

$$(\pi^\rho(g) \cdot \phi)(w) = \pi(g) \cdot \phi(\rho(g^{-1}) \cdot w).$$

Même si ρ et π sont lisses, la représentation ainsi obtenue ne l'est pas nécessairement. Pour pouvoir définir un foncteur de la catégorie $\mathcal{M}(G)$ dans elle-même, il faut donc en prendre la partie lisse $\mathrm{Hom}(W, V)_0$. On note toujours π^ρ la restriction de π^ρ à la partie lisse. Ainsi on obtient un foncteur :

$$\mathrm{Hom}(W, \bullet)_0 : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G), \quad (\pi, V) \mapsto (\pi^\rho, \mathrm{Hom}(W, V)_0)$$

On peut aussi bien entendu définir le foncteur contravariant

$$\mathrm{Hom}(\bullet, V)_0 : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G), \quad (\rho, W) \mapsto (\pi^\rho, \mathrm{Hom}(W, V)_0).$$

Exemple. Si l'on prend pour (π, V) la représentation triviale de G, on obtient le foncteur $\rho \mapsto \tilde{\rho}$ qui associe à toute représentation sa contragrédiente.

Les deux foncteurs que l'on vient de définir sont liés par une relation d'adjonction, comme le montre le résultat suivant.

Proposition. *Soient (π_i, V_i), $i = 1, 2, 3$, des représentations lisses de G. On a alors un isomorphisme naturel (en toutes les variables)*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, V_3)_0 &\simeq \mathrm{Hom}(V_1, \mathrm{Hom}(V_2, V_3)_0)_0 \\ \phi &\mapsto \Phi, \quad \Phi(v_1)(v_2) = \phi(v_1 \otimes v_2). \end{aligned}$$

Démonstration. Dans la catégorie des espaces vectoriels complexes, on a un isomorphisme naturel :

$$\mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, V_3) \simeq \mathrm{Hom}(V_1, \mathrm{Hom}(V_2, V_3))$$

donné par $\phi \mapsto \Phi$, $\Phi(v_1)(v_2) = \phi(v_1 \otimes v_2)$ (c'est un cas particulier de I.2.2.1). Montrons qu'il entrelace les actions de G. Pour tout $g \in G$, $g \cdot \phi$ est l'application linéaire

$$(g \cdot \phi) : v_1 \otimes v_2 \mapsto \pi_3(g) \cdot (\phi(\pi_1(g^{-1}) \cdot v_1 \otimes \pi_2(g^{-1}) \cdot v_2)),$$

et $g \cdot \Phi$ est l'application linéaire

$$g \cdot \Phi : V_1 \to \mathrm{Hom}(V_2, V_3), \quad v_1 \mapsto g \cdot (\Phi(\pi_1(g^{-1}) \cdot v_1))$$

où

$$\begin{aligned} g \cdot (\Phi(\pi_1(g^{-1}) \cdot v_1))(v_2) &= \pi_3(g) \cdot \big((\Phi(\pi_1(g^{-1}) \cdot v_1))(\pi_2(g^{-1}) \cdot v_2)\big) \\ &= \pi_3(g) \cdot (\phi(\pi_1(g^{-1}) \cdot v_1 \otimes \pi_2(g^{-1}) \cdot v_2)). \end{aligned}$$

Donc $\phi \mapsto \Phi$ est G-équivariant.

En prenant la partie lisse de chaque coté, on obtient

$$\mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, V_3)_0 \simeq \mathrm{Hom}(V_1, \mathrm{Hom}(V_2, V_3))_0.$$

Pour pouvoir conclure, nous utilisons le résultat suivant, qui nous servira encore par la suite.

Lemme. *Soient (π_i, V_i), $i = 1, 2$ des représentations de G (pas nécessairement lisses). Alors,*

$$\mathrm{Hom}((V_1)_0, V_2)_0 = \mathrm{Hom}((V_1)_0, (V_2)_0)_0.$$

Démonstration. Soient $\phi \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)_0$, $v_1 \in (V_1)_0$. Choisissons un sous-groupe ouvert compact K de G assez petit pour fixer simultanément ϕ et v_1. Alors pour tout $k \in K$,

$$\begin{aligned}\pi_2(k^{-1}) \cdot \phi(v_1) &= \pi_2(k^{-1}) \cdot ((k \cdot \phi)(\pi_1(k) \cdot v_1)) \\ &= \pi_2(k^{-1}) \cdot (\pi_2(k) \cdot (\phi(\pi_1(k^{-1}) \cdot (\pi_1(k) \cdot v_1)))) \\ &= \phi(v_1).\end{aligned}$$

Ceci montre que $\phi(v_1)$ est aussi fixé par K. $\square$

En prenant les morphismes G-invariants de chaque coté de l'égalité établie par la proposition, on obtient

Corollaire. $\mathrm{Hom}_G(V_1 \otimes V_2, V_3) \simeq \mathrm{Hom}_G(V_1, \mathrm{Hom}(V_2, V_3)_0)$.

Remarques. 1. Le corollaire montre qu'en particulier le foncteur $\bullet \otimes V_2$ est l'adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}(V_2, \bullet)_0$. Mais la proposition montre en plus la naturalité en la variable V_2.

— 2. L'adjonction ci-dessus entraine que le foncteur $\bullet \otimes V$ préserve les colimites, donc en particulier est exact à droite et préserve les limites inductives, tandis que le foncteur $\mathrm{Hom}(V, \bullet)_0$ préserve les limites, donc en particulier est exact à gauche et préserve les limites projectives.

— 3. Si $(\omega, \mathbb{C}_\omega)$ est une représentation de dimension 1 de G, alors $\bullet \otimes \mathbb{C}_\omega$ réalise une équivalence de catégories d'inverse $\bullet \otimes \mathbb{C}_{\omega^{-1}}$. De plus ces deux foncteurs sont adjoints, dans les deux sens possibles, c'est-à-dire que quelles que soient les représentations lisses (π, V) et (ρ, W) de G, on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_G(V, W \otimes \mathbb{C}_\omega) \simeq \mathrm{Hom}_G(V \otimes \mathbb{C}_{\omega^{-1}}, W),$$

l'autre adjonction étant obtenue en échangeant les rôles de ω et ω^{-1}. Ceci montre dans ce cas que le foncteur $\bullet \otimes \mathbb{C}_\omega$ est un adjoint à droite et à gauche et donc qu'il préserve les limites et les colimites. En particulier il est exact.

Soient (π_i, V_i), $i = 1, 2$ des représentations lisses de G. Intéressons nous maintenant à l'espace des coinvariants de $V_1 \otimes V_2$ pour l'action de G : par définition, il s'agit du quotient de $V_1 \otimes V_2$ par le sous-espace engendré par les vecteurs de la forme $\pi_1(g) \cdot v_1 \otimes \pi_2(g) \cdot v_2 - v_1 \otimes v_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $g \in G$. Notons-le $(V_1 \otimes V_2)_G$. Grâce à l'équivalence de catégorie III.1.4, il est immédiat que $(V_1 \otimes V_2)_G$ s'identifie à $V_1 \otimes_{\mathcal{H}(G)} V_2$, où la structure de $\mathcal{H}(G)$-module à gauche sur V_1 donnée par π_1 est transformée en une structure de module à droite par l'antiinvolution $T \mapsto \check{T}$ de $\mathcal{H}(G)$.

Soient (π_i, V_i), $i = 1, 2, 3$ des représentations lisses de G. De l'isomorphisme naturel (c'est un cas particulier de I.2.2.4)

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \simeq V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

on déduit, en prenant de chaque coté les coinvariants pour l'action de G,

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes_{\mathcal{H}(G)} V_3 \simeq V_1 \otimes_{\mathcal{H}(G)} (V_2 \otimes V_3) \tag{III.1.15.1}$$

Cette formule est à rapprocher de celle du corollaire ci-dessus.

Théorème. *Soit* (π, V) *une représentation lisse de* G.

(i) *Le foncteur* $\bullet \otimes V$ *est exact, et préserve les objets projectifs dans* $\mathcal{M}(G)$.

(ii) *Le foncteur (contravariant)* $\mathrm{Hom}(\bullet, V)_0$ *est exact, et envoie les objets projectifs sur des objets injectifs*

(iii) *Le foncteur* $\mathrm{Hom}(V, \bullet)_0$ *est exact, et préserve les objets injectifs.*

Démonstration. La démonstration de ces trois points est similaire, nous ne démontrerons donc que (iii). Tout d'abord, la catégorie des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels étant semi-simple, tous les objets y sont projectifs, injectifs et plats. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \bullet)$ de la catégorie des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels dans elle-même est donc exact. Soit

$$\{0\} \longrightarrow W_1 \xrightarrow{\phi} W_2 \xrightarrow{\psi} W_3 \longrightarrow \{0\} \tag{III.1.15.2}$$

une suite exacte dans $\mathcal{M}(G)$. On obtient donc une suite exacte de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W_3) \longrightarrow \{0\},$$

ces espaces étant munis de représentations (non lisses) de G. Il est facile de voir que prendre la partie lisse préserve l'exactitude à gauche. On a donc une suite exacte de représentations lisses de G :

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W_1)_0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W_2)_0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W_3)_0.$$

Etablissons la surjectivité de la dernière flèche. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W_3)_0$: il existe un sous-groupe ouvert K de G tel que $k \cdot f = f$ pour tout $k \in K$, c'est-à-dire

$$k \cdot f(k^{-1} \cdot v) = v, \ (\forall k \in K, \, \forall v \in V).$$

Considérons la suite exacte (III.1.15.2) comme une suite exacte dans la catégorie $\mathcal{M}(K)$ des représentations lisses du groupe K. Cette catégorie est semi-simple (nous le démontrons ci-dessous), et la suite est donc scindée : il existe un opérateur d'entrelacement (pour les actions de K) $s : W_3 \to W_2$ tel que $\psi \circ s = \mathrm{Id}_{W_3}$. Posons $g = s \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W_2)$. On a

$$(\forall k \in K, \, \forall v \in V), \quad (k \cdot g)(v) = k \cdot ((s \circ f)(k^{-1} \cdot v)) = s(k \cdot f(k^{-1} \cdot v)) = s \circ f(v) = g(v).$$

Ainsi $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W_2)_0$ et vérifie $\psi \circ g = f$, ce qui montre l'assertion. On a bien une suite exacte de représentations lisses de G

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W_1)_0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W_2)_0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W_3)_0 \longrightarrow \{0\},$$

ce qui établit l'exactitude du foncteur $\mathrm{Hom}(V, \bullet)$.

Il reste à établir que $\mathcal{M}(K)$ est une catégorie semi-simple. Soit $(\pi, V) \in \mathcal{M}(K)$, il suffit de montrer que V est somme de sous-modules simples, d'après le lemme A.VII. Soit $v \in V$, et soit K_1 un sous-groupe ouvert compact distingué de K fixant v. La sous-représentation V_v engendrée par v est de dimension finie car K/K_1 est fini, et complètement réductible comme représentation du groupe fini K/K_1, et donc comme représentation de K. Ainsi v est contenu dans une sous-représentation irréductible de K. □

III.2 Induction et restriction

III.2.1 Foncteur d'oubli et adjoints

Nous allons appliquer les résultats de la section I.2.3 pour définir des foncteurs entre catégories $\mathcal{M}(H)$ et $\mathcal{M}(G)$, où H et G sont des groupes topologiques t.d. Soit $\phi: H \to G$ un morphisme de groupes continu. On a alors un foncteur d'oubli $\mathcal{F}_\phi : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(H)$ défini de la manière suivante : si (π, V) est une représentation lisse de G, alors $\mathcal{F}_\phi(V) = V$ et $\mathcal{F}_\phi(\pi)$ est la représentation de H donnée par

(III.2.1.1) $$\mathcal{F}_\phi(\pi)(h) \cdot v = \pi(\phi(h)) \cdot v, \quad (v \in V),\ (h \in H).$$

On obtient bien ainsi une représentation lisse V de H car pour tout $v \in V$, $\mathrm{Stab}_G(v)$ est ouvert dans G, V étant une représentation lisse de G, et ϕ étant continue, $\mathrm{Stab}_H(v) = \phi^{-1}(\mathrm{Stab}_G(v))$ est ouvert dans H.

Comme on a les équivalences de catégories $\mathcal{M}(G) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ et $\mathcal{M}(H) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{H}(H))$, on en déduit par transport de structure un foncteur d'oubli

$$\mathcal{F}_\phi : \mathcal{M}(\mathcal{H}(G)) \to \mathcal{M}(\mathcal{H}(H)).$$

Il s'agit maintenant de l'identifier avec un foncteur d'oubli du type de ceux défini en I.2.3, et pour cela, il faut munir $\mathcal{H}(G)$ d'une structure de $\mathcal{H}(H)$-module à gauche non dégénéré. Nous allons faire un peu plus que cela, en munissant $\mathcal{H}(G)$ d'une structure de $\mathcal{H}(H)$-bimodule non-dégénéré telle que l'action à gauche (resp. à droite) de $\mathcal{H}(H)$ sur $\mathcal{H}(G)$ commute avec l'action par multiplication à droite (resp. à gauche) de $\mathcal{H}(G)$ sur elle-même. Dans une telle situation, nous avons défini en I.2.3 non seulement un foncteur d'oubli, mais aussi un pseudo foncteur d'oubli, ainsi que leurs adjoints respectivement à droite et à gauche.

Rappelons que $(\mathcal{H}(G), l)$ et $(\mathcal{H}(G), r)$ sont deux représentations lisses de G, qui par $\mathcal{F}_\phi$ définissent deux représentations lisses de H, et donc deux structures de $\mathcal{H}(H)$-modules à gauche non dégénérés sur $\mathcal{H}(G)$. On utilise l'anti-involution induite par $h \mapsto h^{-1}$ sur $\mathcal{H}(H)$ pour changer la structure de module à gauche donnée par $(\mathcal{H}(G), r)$ en structure de module à droite. Ceci nous donne donc une stucture de $\mathcal{H}(H)$-bimodule non dégénéré sur $\mathcal{H}(G)$. On peut donc comme en I.2.3 définir les foncteurs :

$$\mathcal{F}_H^G := \mathcal{F}_{\mathcal{M}(H)}^{\mathcal{M}(G)}, \quad \check{\mathcal{F}}_H^G := \check{\mathcal{F}}_{\mathcal{M}(H)}^{\mathcal{M}(G)}, \quad I_H^G := I_{\mathcal{M}(H)}^{\mathcal{M}(G)}, \quad P_H^G := P_{\mathcal{M}(H)}^{\mathcal{M}(G)}.$$

Il est clair que l'on a alors $\mathcal{F}_\phi = \mathcal{F}_H^G$. D'autre part, rappelons que I_H^G est l'adjoint à droite de $\mathcal{F}_H^G$ et que P_H^G est l'adjoint à gauche de $\check{\mathcal{F}}_H^G$.

Exemple. Soit $\sigma: H \to H_1$ un isomorphisme de groupes t.d. Soit (π, V) une représentation de H_1. En appliquant le foncteur d'oubli $\mathcal{F}_\sigma$, on obtient une représentation $\mathcal{F}_\sigma(\pi, V)$ de H. Nous notons plutôt $\mathcal{F}_\sigma(\pi, V) = ({}^\sigma\pi, V)$ cette représentation. Son espace est V, et l'action de H est donnée par

$${}^\sigma\pi(h) \cdot v = \pi(\sigma(h)) \cdot v.$$

(La notation est mnémotechnique : σ tire π vers la gauche.)

Ceci s'applique en particulier ou σ est un automorphisme de H. Ainsi, si H est un sous-groupe du groupe G, et si σ l'automorphisme de H induit par $\mathrm{Int}(g^{-1})$, pour un certain $g \in G$ normalisant H, on note (π^g, V) la représentation $({}^\sigma\pi, V)$ de H ($\sigma = \mathrm{Int}(g^{-1})\ : gHg^{-1} \to H$ et g pousse π de $\mathcal{M}(H)$ dans $\mathcal{M}(gHg^{-1})$, d'où la notation π^g). En pratique, la formule à utiliser est donc :

(III.2.1.2) $$\pi^g(ghg^{-1}) = \pi(h), \qquad (h \in H, g \in G).$$

III.2.2 Induction à partir d'un sous-groupe fermé

Plaçons-nous maintenant dans le cas où le morphisme $\phi : H \to G$ est l'inclusion d'un sous-groupe fermé. Dans ce cas, une construction classique, l'induction des représentations de H à G fournit un adjoint à droite du foncteur d'oubli. Par unicité de l'adjoint, ce foncteur est bien sûr naturellement isomorphe à I_H^G. Un adjoint à gauche du pseudo foncteur d'oubli est construit de manière similaire, en imposant une condition de compacité sur le support. Commençons par la définition des représentations induites, nous montrerons ensuite les propriétés d'adjonction.

Définition. Soit G un groupe t.d. et H un sous-groupe fermé de G. Soit (ρ, E) une représentation lisse de H. On définit la représentation induite

$$\mathrm{Ind}_H^G(\rho, E) = (\mathrm{Ind}_H^G \rho, \mathrm{Ind}_H^G E)$$

comme suit. L'espace $\mathrm{Ind}_H^G E$ est l'espace des fonctions $f : G \to E$ vérifiant :

a) $f(hg) = \rho(h) \cdot f(g), \quad (g \in G),\ (h \in H)$.

b) Il existe un sous-groupe ouvert compact K de G (dépendant de f), tel que $f(gk) = f(g)$, $g \in G$, $k \in K$.

Cet espace est muni de la représentation $\mathrm{Ind}_H^G \rho$ définie par

$$(\mathrm{Ind}_H^G \rho)(g) \cdot f = r(g) \cdot f$$

La condition b) garantit que $(\mathrm{Ind}_H^G \rho,\ \mathrm{Ind}_H^G E)$ est lisse.

On définit aussi $\mathrm{ind}_H^G E$ comme le sous-espace de $\mathrm{Ind}_H^G E$ des fonctions vérifiant de plus la condition suivante sur leur support :

c) il existe une partie compacte F de G tel que $\mathrm{Supp}\, f \subset H.F$

Il est clair que $\mathrm{ind}_H^G E$ est stable sous l'action $\mathrm{Ind}_H^G \rho$ de G. On note $\mathrm{ind}_H^G \rho$ la restriction de $\mathrm{Ind}_H^G \rho$ à $\mathrm{ind}_H^G E$ et $\mathrm{ind}_H^G(\rho, E) = (\mathrm{ind}_H^G \rho, \mathrm{ind}_H^G E)$.

Lemme. *Soit K un sous-groupe ouvert compact de G, et soit Ω un système de représentants des doubles classes $H\backslash G/K$. Pour tout $g \in \Omega$, posons $K_g = H \cap gKg^{-1}$. La restriction des fonctions de $\mathrm{Ind}_H^G E$ (resp. $\mathrm{ind}_H^G E$) à Ω définit un isomorphisme de $(\mathrm{Ind}_H^G E)^K$ (resp. $(\mathrm{ind}_H^G E)^K$) avec l'espace $\mathcal{F}(\Omega, E)$ (resp. $\mathcal{F}_c(\Omega, E)$) des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que $f(g) \in E^{K_g}$ pour tout $g \in \Omega$ (resp. avec l'espace de ces fonctions ayant un support fini).*

Démonstration. Puisque toute fonction f dans $(\mathrm{Ind}_H^G E)^K$ vérifie :

$$f(hgk) = \rho(h) \cdot f(g), \quad (h \in H,\ g \in G,\ k \in K), \tag{III.2.2.1}$$

il est clair que la restriction de f à Ω détermine f. D'autre part si $h = gkg^{-1} \in K_g$, on a

$$\rho(h) \cdot f(g) = f(hg) = f(gkg^{-1}g) = f(gk) = f(g),$$

et donc $f(g) \in E^{K_g}$. Réciproquement, toute fonction f sur Ω à valeurs dans E vérifiant $f(g) \in E^{K_g}$, peut se relever grâce à la formule (III.2.2.1) en une fonction de $(\mathrm{Ind}_H^G E)^K$. Le relèvement ne dépend pas des choix faits, car si $hgk = h_1 g k_1$, avec $h, h_1 \in H$ et $k, k_1 \in K$, on a $h_1^{-1}h = gk_1k^{-1}g^{-1} \in H \cap gKg^{-1} = K_g$, et donc

$$\rho(h) \cdot f(g) = \rho(h_1 h_1^{-1} h) \cdot f(g) = \rho(h_1)\rho(h_1^{-1}h) \cdot f(g) = \rho(h_1) \cdot f(g).$$

L'espace G/K étant discret (cf. proposition II.3.2), il en est de même de Ω, et une fonction à support compact sur un espace discret est une fonction à support fini. $\square$

Proposition. *L'induction de H à G :*

$$(\rho, E) \mapsto \mathrm{Ind}_H^G(\rho, E), \quad (\textit{resp.} \quad \mathrm{ind}_H^G(\rho, E))$$

définit un foncteur exact de $\mathcal{M}(H)$ dans $\mathcal{M}(G)$.

Décrivons, une fois n'est pas coutume, l'effet de ce foncteur sur les morphismes : si (ρ_1, E_1) et (ρ_2, E_2) sont deux représentations lisses de H, et si ϕ est un opérateur d'entrelacement entre ρ_1 et ρ_2, l'opérateur d'entrelacement $\mathrm{Ind}_H^G(\phi)$ entre $\mathrm{Ind}_H^G(\rho_1, E_1)$ et $\mathrm{Ind}_H^G(\rho_2, E_2)$ est donné par

$$\mathrm{Ind}_H^G(\phi)(f) = \phi \circ f, \quad (f \in \mathrm{Ind}_H^G(E_1)).$$

Démonstration. On a vu que l'induite d'une représentation lisse est une représentation lisse. Supposons que l'on ait une suite exacte

$$0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$$

dans $\mathcal{M}(H)$. Il s'agit de montrer que la suite

$$0 \to \mathrm{Ind}_H^G E_1 \to \mathrm{Ind}_H^G E_2 \to \mathrm{Ind}_H^G E_3 \to 0$$

est exacte dans $\mathcal{M}(G)$. Il suffit de montrer que pour tout sous-groupe compact ouvert K de G, la suite

$$0 \to (\mathrm{Ind}_H^G E_1)^K \to (\mathrm{Ind}_H^G E_2)^K \to (\mathrm{Ind}_H^G E_3)^K \to 0$$

est exacte. D'après le lemme précédent $(\mathrm{Ind}_H^G E_i)^K$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{F}(\Omega, E_i) \simeq \prod_{g \in \Omega} E_i^{K_g}$. Or le foncteur $E \mapsto E^{K_g}$ est exact (proposition III.1.3). La démonstration est la même pour ind_H^G. $\square$

III.2.3 Induction et admissibilité

On reprend les notations du paragraphe précédent.

Lemme. *Supposons que $H\backslash G$ soit compact. Soit (ρ, E) une représentation lisse admissible de H. Alors*

$$\mathrm{Ind}_H^G(\rho, E) = \mathrm{ind}_H^G(\rho, E)$$

est admissible.

Démonstration. Ceci découle des considérations du paragraphe précédent, en remarquant que ici $\Omega = H\backslash G/K$ est un ensemble fini.

III.2.4 Entrelacement

Soit G un groupe t.d , et soit H un sous-groupe fermé de G.

Lemme. *Supposons que $g \in G$ normalise H. Alors, avec les notations de l'exemple III.2.1, $\mathrm{Ind}_H^G(\rho^g, E)$ est équivalente à $\mathrm{Ind}_H^G(\rho, E)$. De même $\mathrm{ind}_H^G(\rho^g, E)$ est équivalente à $\mathrm{ind}_H^G(\rho, E)$.*

<u>*Démonstration*</u>. Définissons l'opérateur d'entrelacement qui réalise l'équivalence de ces représentations : si $f \in \mathrm{Ind}_H^G(\rho, E)$ (ou $\mathrm{ind}_H^G(\rho, E)$),

$$A \cdot f(g') = f(g^{-1}g').$$

On a alors :

$$\begin{aligned}(A \cdot f)(hg') &= f(g^{-1}hg') = f((g^{-1}hg)g^{-1}g') = \rho(g^{-1}hg) \cdot (A \cdot f)(g') \\ &= \rho^g(h) \cdot A \cdot f(g'),\end{aligned}$$

et donc $A \cdot f$ est bien dans $\mathrm{Ind}_H^G(\rho^g, E)$ (ou $\mathrm{ind}_H^G(\rho, E)$). Il est clair que A est inversible (échanger les rôles de (ρ, E) et (ρ^g, E), et remplacer g par g^{-1} pour avoir l'inverse). □

III.2.5 Réciprocité de Frobénius

Soit G un groupe t.d. et soit H un sous-groupe fermé de G. La réciprocité de Frobenius est ici l'assertion que le foncteur Ind_H^G est l'adjoint à droite du foncteur d'oubli. Nous adoptons ici une terminologie plus classique pour ce foncteur d'oubli, en le notant Res_H^G.

Théorème. *Le foncteur Ind_H^G est l'adjoint à droite du foncteur Res_H^G. C'est-à-dire que pour tout (π, V) dans $\mathcal{M}(G)$ et tout (τ, E) dans $\mathcal{M}(H)$, on a un isomorphisme naturel :*

$$\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_H^G E) \simeq \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G V, E).$$

<u>*Démonstration*</u>. Soit (π, V) dans $\mathcal{M}(G)$ et (τ, E) dans $\mathcal{M}(H)$. Définissons les morphismes

$$\alpha : \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(\tau, E)) \to (\tau, E), \quad \beta : (\pi, V) \to \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(\pi, V))$$

par :

$$\alpha : f \mapsto f(\mathbf{1}_G), \ (f \in \mathrm{Ind}_H^G(\tau, E)), \quad \beta : v \mapsto (f_v : g \mapsto \pi(g).v)$$

On vérifie immédiatement que α est un morphisme dans $\mathcal{M}(H)$ et β est un morphisme dans $\mathcal{M}(G)$. Vérifions que ce sont des morphismes d'adjonction, au sens de A.V. On regarde tout d'abord la composition

$$\mathrm{Ind}_H^G(\tau, E) \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G(\tau, E) \to \mathrm{Ind}_H^G(\tau, E),$$

où la première flèche est le morphisme β pour l'espace $\mathrm{Ind}_H^G(E)$. Elle envoie $f \in \mathrm{Ind}_H^G(E)$ sur

$$f_f : g \mapsto \mathrm{Ind}_H^G(\tau)(g) \cdot f = r(g) \cdot f.$$

La seconde flèche est obtenue en appliquant le foncteur Ind_H^G au H-morphisme α entre $\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(\tau, E))$ et (τ, E). L'effet du foncteur d'induction sur les morphismes est obtenu par composition. Lorsque l'on évalue en $r(g)\cdot f$, on obtient $\alpha(r(g)\cdot f) = (r(g)\cdot f)(\mathbf{1}_G) = f(g)$. La composition de ces deux flèches est donc l'identité de $\mathrm{Ind}_H^G(\tau, E)$. De même pour l'autre composition

$$\mathrm{Res}_H^G(\pi, V) \to \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G(\pi, V) \to \mathrm{Res}_H^G(\pi, V),$$

la première flèche est obtenue en appliquant le foncteur Res_H^G au G-morphisme β. Elle envoie $v \in V$ sur la fonction $f_v : h \mapsto \pi(h)\cdot v$. La seconde flèche est le morphisme α pour la représentation $\mathrm{Res}_H^G(\pi, V)$. Elle envoie la fonction f_v sur $f_v(\mathbf{1}_G) = \pi(\mathbf{1}_G)\cdot v = v$. Cette composition est donc l'identité de $\mathrm{Res}_H^G(\pi, V)$. Ceci termine la vérification des propriétés des morphismes d'adjonction. □

Remarque. Identifions les catégories $\mathcal{M}(G)$ et $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ (*cf.* section III.1.4). Par unicité de l'adjoint, le foncteur I_H^G défini en III.2.1 et Ind_H^G sont isomorphes et donc pour toute représentation lisse (ρ, W) de H, on a un isomorphisme naturel

(III.2.5.1) $$\mathrm{Ind}_H^G(\rho, W) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(H)}(\mathcal{H}(G), W)_{\mathcal{H}(G)}.$$

Démonstration. Il est instructif de donner la forme explicite de cet isomorphisme. Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(H)}(\mathcal{H}(G), W)_{\mathcal{H}(G)}$. Définissons une fonction f_ϕ sur G par

(III.2.5.2) $$f_\phi(g) = \phi(\delta_g).$$

La distribution δ_g n'étant pas dans $\mathcal{H}(G)$, cette définition appelle à des explications. Choisissons un idempotent e_K de $\mathcal{H}(G)$, pour un certain sous-groupe ouvert compact K de G, tel que ϕ soit fixé par e_K. La distribution $\delta_g * e_K$ est alors dans $\mathcal{H}(G)$, et l'on pose $\phi(\delta_g) = \phi(\delta_g * e_K)$. On peut vérifier immédiatement que ceci ne dépend pas du choix de K. De plus, pour tout $k \in K$, pour tout $g \in G$, on a

$$f_\phi(gk) = \phi(\delta_{gk}) = \phi(\delta_g * \delta_k * e_K) = \phi(\delta_g * e_K) = f_\phi(g),$$

ce qui montre que f_ϕ est fixé par $r(K)$. Montrons comment f_ϕ se transforme par translation à gauche par $h \in H$: pour tout $h \in H$, pour tout $g \in G$, on a

(III.2.5.3) $$f_\phi(hg) = \phi(\delta_{hg}) = \phi(\delta_{hg} * e_K) = \phi(\delta_h * \delta_g * e_K).$$

D'autre part $\rho(h)\cdot f_\phi(g) = (\delta_h * f)\cdot f_\phi(g)$ où f est un idempotent de $\mathcal{H}(H)$ qui fixe $\delta_g * e_K$. L'idempotent f fixe alors aussi $f_\phi(g) = \phi(\delta_g * e_K)$. On a alors

$$\rho(h)\cdot f_\phi(g) = (\delta_h * f)\cdot f_\phi(g) = (\delta_h * f)\cdot \phi(\delta_g * e_K) = \phi((\delta_h * f)\cdot(\delta_g * e_K)),$$

où $\delta_h * f \in \mathcal{H}(H)$ agit sur $\delta_g * e_K$ via la structure de $\mathcal{H}(H)$-module de $\mathcal{H}(G)$. Plus explicitement

$$\begin{aligned}
(\delta_h * f)\cdot(\delta_g * e_K) &= \int_H l(h')\cdot(\delta_g * e_K)\, d(\delta_h * f)(h') \\
&= \int_H \int_H l(h_1h_2)\cdot(\delta_g * e_K)\, d(\delta_h)(h_1)\, df(h_2) \\
&= l(h)\cdot\left(\int_H l(h_2)\cdot(\delta_g * e_K)\, df(h_2)\right) \\
&= l(h)\cdot(f\cdot(\delta_g * e_K)) \\
&= l(h)\cdot(\delta_g * e_K) = \delta_h * \delta_g * e_K. \qquad \text{(III.2.5.4)}
\end{aligned}$$

On obtient en comparant (III.2.5.3) et (III.2.5.4)

$$\rho(h) \cdot f_\phi(g) = \phi(\delta_h * \delta_g * e_K) = f_\phi(hg).$$

Ceci montre que f_ϕ est dans $\mathrm{Ind}_H^G W$.

Réciproquement, si $f \in \mathrm{Ind}_H^G W$, définissons $\phi_f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(G), W)$ par

(III.2.5.5) $$\phi_f(T) = (T \cdot f)(\mathbf{1}_G), \quad (T \in \mathcal{H}(G)),$$

où $T \cdot f$ désigne le résultat de l'action de $T \in \mathcal{H}(G)$ sur l'élément f du $\mathcal{H}(G)$-module $\mathrm{Ind}_H^G W$. Si f est fixée par $r(K)$, pour un certain sous-groupe ouvert compact K de G, alors pour tout $T \in \mathcal{H}(G)$,

$$(e_K \cdot \phi_f)(T) = \phi_f(T * e_K) = ((T * e_K) \cdot f)(\mathbf{1}_G) = (T \cdot (e_K \cdot f))(\mathbf{1}_G) = \phi_f(T).$$

Si $S \in \mathcal{H}(H)$, on a

$$\begin{aligned}
\phi_f(S \cdot T) = ((S \cdot T) \cdot f))(\mathbf{1}_G) &= \left(\int_G r(g) \cdot f \; d(S \cdot T)(g) \right) (\mathbf{1}_G) \\
&= \left(\int_G r(g) \cdot f \; d \left(\int_H l(h) \cdot T \; dS(h) \right) (g) \right) (\mathbf{1}_G) \\
&= \left(\int_G \int_H l(h^{-1}) \cdot (r(g) \cdot f) \; dT(g) \, dS(h) \right) (\mathbf{1}_G) \\
&= \int_H (l(h^{-1}) \cdot (T \cdot f))(\mathbf{1}_G) \, dS(h) \\
&= \int_H (T \cdot f)(h) \, dS(h) = \int_H (\rho(h) \cdot (T \cdot f))(\mathbf{1}_G) \, dS(h) \\
&= S \cdot ((T \cdot f)(\mathbf{1}_G)) = S \cdot \phi_f(T).
\end{aligned}$$

Ceci montre que ϕ_f est dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(H)}(\mathcal{H}(G), W)_{\mathcal{H}(G)}$. On vérifie aussi facilement que $f \mapsto \phi_f$ et $\phi \mapsto f_\phi$ sont inverses l'un de l'autre. La vérification de la naturalité en (ρ, W) des isomorphismes $\mathrm{Ind}_H^G(W) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(H)}(\mathcal{H}(G), W)_{\mathcal{H}(G)}$ est comme souvent dans ce genre de choses, fastidieuse mais élémentaire. Ceci montre que l'on a bien un isomorphisme naturel (III.2.5.1), réalisé par (III.2.5.2) et (III.2.5.5). □

III.2.6 Induction compacte et pseudo foncteur d'oubli

Dans ce qui suit, H est un sous-groupe fermé du groupe t.d. G. Les notations sont celles de la section III.2.2. Le pseudo foncteur d'oubli $\check{\mathcal{F}}_H^G$ à pour adjoint à gauche le foncteur P_H^G. Nous voulons maintenant identifier ce foncteur en terme d'induction compacte. Soit donc (ρ, W) une représentation lisse de H. Rappelons que $P_H^G(W) = \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(H)} W$, que la multiplication par μ_G donne un isomorphisme d'algèbres $\mathcal{D}(G) \simeq \mathcal{H}(G)$, et que de même la multiplication par μ_H donne un isomorphisme d'algèbres $\mathcal{D}(H) \simeq \mathcal{H}(H)$. Par transport de structure, $\mathcal{D}(G)$ est donc munie d'une structure de $\mathcal{D}(H)$-module à droite, que nous allons maintenant identifier explicitement. Soient $T = f\mu_G$, et $S = a\mu_H$ respectivement dans $\mathcal{H}(G)$ et $\mathcal{H}(H)$. On a par définition

$$T \cdot S = \int_H (r(h)^{-1} \cdot T) \; dS(h) = \int_H (r(h^{-1}) \cdot (f\mu_G)) \; dS(h).$$

Or, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^\infty(G)$

$$\begin{aligned}
&\langle r(h)^{-1} \cdot (f\mu_G), \phi\rangle = \langle (f\mu_G), r(h) \cdot \phi\rangle \\
&= \int_G f(g)\phi(gh)\, d\mu_G(g) = \int_G f(gh^{-1})\phi(g)\delta_G(h)^{-1}\, d\mu_G(g) \\
&= \langle \delta_G(h^{-1})(r(h)^{-1} \cdot f)\mu_G, \phi\rangle.
\end{aligned}$$

Donc $r(h)^{-1} \cdot (f\mu_G) = \delta_G(h)^{-1}(r(h)^{-1} \cdot f)\mu_G$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
T \cdot S &= \int_H \delta_G(h)^{-1}(r(h)^{-1} \cdot f)\mu_G\, dS(h) \\
&= \left(\int_H \delta_G(h)^{-1}(r(h)^{-1} \cdot f)a(h)\, d\mu_H(h)\right)\mu_G.
\end{aligned}$$

L'action à droite de $a \in \mathcal{D}(H)$ sur $f \in \mathcal{D}(G)$ s'écrit donc

$$f \cdot a = \int_H \delta_G(h)^{-1}a(h)(r(h)^{-1} \cdot f)\, d\mu_H(h). \tag{III.2.6.1}$$

Avec la structure de $\mathcal{D}(H)$-module à droite ainsi définie sur $\mathcal{D}(G)$, on a alors

$$P_H^G(W) \simeq \mathcal{D}(G) \otimes_{\mathcal{D}(H)} W.$$

Soient $f \in \mathcal{D}(G)$, et $v \in W$ et définissons une fonction $p(f \otimes v)$ de G dans W par

$$p(f \otimes v)(g) = \int_H \check{f}(hg)((\delta_G\rho)(h^{-1}) \cdot v)\, d\mu_H(h).$$

Montrons tout d'abord que ceci est bien défini pour tout élément $f \otimes v$ de $\mathcal{D}(G) \otimes_{\mathcal{D}(H)} W$. Il s'agit de voir que si $a \in \mathcal{D}(H)$, on a bien

$$p(f \cdot a \otimes v) = p(f \otimes (a\mu_H) \cdot v).$$

Or

$$\begin{aligned}
&p(f \cdot a \otimes v)(g) = \int_H (f \check{\cdot} a)(hg)((\delta_G\rho)(h^{-1}) \cdot v)\, d\mu_H(h) = \\
&\int_H \left[\int_H \delta_G(h')^{-1}a(h')(r(h')^{-1} \cdot f)((hg)^{-1})\, d\mu_H(h')\right]((\delta_G\rho)(h^{-1}) \cdot v)\, d\mu_H(h) \\
&= \int_H \int_H \delta_G(h'h)^{-1}\check{f}(h'hg)a(h')(\rho(h^{-1}) \cdot v)\ d\mu_H(h')d\mu_H(h) \\
&= \int_H \delta_G(h)^{-1}\check{f}(hg)\rho(h)^{-1} \cdot \left(\int_H a(h')(\rho(h') \cdot v)\, d\mu_H(h')\right) d\mu_H(h) \\
&= p(f \otimes (a\mu_H) \cdot v)(g).
\end{aligned}$$

Un calcul similaire montre que si f est fixé par un certain sous-groupe ouvert compact K de G pour l'action par translation à gauche, alors $p(f \cdot a \otimes v)$ est aussi fixé par K (pour l'action par translation à droite).

On calcule maintenant comment $p(f \cdot a \otimes v)$ se transforme par translation à gauche par un élément de H.

$$\begin{aligned}
p(f \otimes v)(h_0 g) &= \int_H \check{f}(hh_0 g)((\delta_G \rho)(h^{-1}) \cdot v)\, d\mu_H(h) \\
&= \delta_G(h_0)\rho(h_0) \cdot \int_H \check{f}(hh_0 g)((\delta_G \rho)((hh_0)^{-1}) \cdot v)\, d\mu_H(h) \\
&= \delta_H(h_0)^{-1}\delta_G(h_0)\rho(h_0) \cdot \left(\int_H \check{f}(hg)((\delta_G \rho)(h^{-1})) \cdot v)\, d\mu_H(h) \right) \\
&= (\delta_{H\backslash G}\rho)(h_0) \cdot \left(\int_H \check{f}(hg)((\delta_G \rho)(h^{-1})) \cdot v)\, d\mu_H(h) \right) \\
&= (\delta_{H\backslash G}\rho)(h_0)\, p(f \otimes v)(g).
\end{aligned}$$

D'autre part, f étant à support compact, $p(f \otimes v)$ est à support compact modulo H. Ceci montre que $p(f \otimes v)$ est une fonction dans $\mathrm{ind}_H^G(W \otimes \delta_{H\backslash G})$. Par linéarité, on a ainsi défini une application linéaire :

(III.2.6.2) $$p : P_H^G(W) \to \mathrm{ind}_H^G(W \otimes \delta_{H\backslash G}).$$

Un calcul semblable à celui effectué ci-dessus montre que p entrelace les actions de G sur $P_H^G(W)$ et $\mathrm{ind}_H^G(W \otimes \delta_{H\backslash G})$.

Théorème. *Le morphisme* $p : P_H^G(W) \to \mathrm{ind}_H^G(W \otimes \delta_{H\backslash G})$ *est un isomorphisme (naturel) dans la catégorie* $\mathcal{M}(G)$.

Démonstration. Fixons un sous-groupe ouvert compact K de G. Il suffit de montrer que p induit un isomorphisme
$$(\mathcal{D}(G) \otimes_{\mathcal{D}(H)} W)^K \simeq (\mathrm{ind}_H^G(W \otimes \delta_{H\backslash G}))^K.$$
Nous avons vu dans le lemme III.2.2 que ce dernier espace s'identifie avec l'espace des fonctions à support fini sur un système de représentants Ω de $H\backslash G/K$, vérifiant $f(g) \in W^{K_g}$ pour tout g dans Ω, c'est-à-dire

(III.2.6.3) $$(\mathrm{ind}_H^G(W \otimes \delta_{H\backslash G}))^K \simeq \bigoplus_{g \in \Omega} W^{K_g}.$$

Etudions maintenant l'espace

$$(\mathcal{D}(G) \otimes_{\mathcal{D}(H)} W)^K = (e_K * \mathcal{D}(G)) \otimes_{\mathcal{D}(H)} W.$$

Remarquons qu'à travers les équivalences de catégories

$$\mathcal{M}(H) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{H}(H)) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{D}(H)),$$

$\mathcal{D}(G) \otimes_{\mathcal{D}(H)} W$ s'identifie à $\mathcal{D}(G) \otimes_H W$ où ce dernier espace est par définition le quotient de $\mathcal{D}(G) \otimes W$ par l'espace engendré par les vecteurs de la forme $r(h^{-1}) \cdot f \otimes w - f \otimes \rho(h) \cdot w$. D'autre part, pour tout $g \in \Omega$, KgH est un ouvert de G, donc on a une décomposition de G en ouvert disjoints
$$G = \coprod_{g^{-1} \in \Omega} KgH.$$

Ceci induit une décomposition de $e_K * \mathcal{D}(G)$ en

$$e_K * \mathcal{D}(G) = \bigoplus_{g^{-1}\in\Omega} \mathcal{D}(G)_g^K$$

où $\mathcal{D}(G)_g^K$ est l'espace des fonctions f dans $\mathcal{D}(G)$ invariante par translation à gauche sous K et à support dans KgH. Remarquons que comme Ω est un système de représentants dans G des doubles classes $H\backslash G/K$, l'ensemble $\{g^{-1}\}_{g\in\Omega}$ est un système de représentants de $K\backslash G/H$. Comme chaque $\mathcal{D}(G)_g^K$ est stable sous l'action de H par translation à droite,

$$(e_K * \mathcal{D}(G)) \otimes_H W = \bigoplus_{g^{-1}\in\Omega} \mathcal{D}(G)_g^K \otimes_H W.$$

Le lecteur attentif a depuis longtemps remarqué la ressemblance de la démonstration que nous tentons de terminer avec celle du théorème II.3.9. En particulier, la définition de la fonction p est similaire dans les deux cas, et l'on introduit aussi (avec une convention légèrement différente, mais l'on peut rétablir les choses par un passage à l'inverse dans le groupe G) les espaces $\mathcal{D}(G)_g^K$. On avait vu que $\mathcal{D}(G)_g^K$ est isomorphe à l'espace des fonctions à support fini sur l'espace discret $K\backslash KgH$, espace muni d'une action transitive de H par translation à droite. On en conclut que

$$\mathcal{D}(G)_g^K \otimes_H W \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathrm{Stab}_H(K\backslash Kg)} W \simeq W^{K_{g^{-1}}}.$$

et donc

$$P_H^G(W) \simeq \bigoplus_{g^{-1}\in\Omega} W^{K_{g^{-1}}} = \bigoplus_{g\in\Omega} W^{K_g}. \tag{III.2.6.4}$$

L'isomorphisme $P_H^G(W)^K \simeq (\mathrm{ind}_H^G(W \otimes \delta_{H\backslash G}))^K$ se déduit de (III.2.6.3) et (III.2.6.4). $\square$

Remarque. Nous terminons cette section en étudiant le cas de l'induction à partir d'un sous-groupe ouvert H de G (la topologie étant totalement discontinue, H est aussi fermé dans G). Dans ce cas, on a une inclusion évidente $\mathcal{H}(H) \hookrightarrow \mathcal{H}(G)$, où l'on identifie $\mathcal{H}(H)$ à l'espace des distributions dans $\mathcal{H}(G)$ à support dans H. La structure de $\mathcal{H}(H)$-bimodule non dégénéré de $\mathcal{H}(G)$ décrite précédemment et utilisant les représentations l et r de H sur $\mathcal{H}(G)$ peut se décrire ici plus simplement comme la structure de bimodule donnée par l'inclusion d'algèbres de $\mathcal{H}(H)$ dans $\mathcal{H}(G)$. Dans ce cadre, nous avons remarqué à la fin de la section I.2.3 que le foncteur d'oubli et le pseudo foncteur d'oubli sont isomorphes. Ce qui nous intéresse ici est le fait que du coup, le foncteur d'oubli Res_H^G admet un adjoint à gauche, en plus de l'adjoint à droite Ind_H^G, et que celui-ci est donné par ind_H^G (le facteur $\delta_{H\backslash G}$ est trivial dans ce cas, puisque μ_H est, au choix d'un facteur multiplicatif près, la restriction de μ_G à H). On a donc, pour toute représentation (π, V) de $\mathcal{M}(G)$, et toute représentation (ρ, H) de $\mathcal{M}(H)$, un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G(\rho, W), (\pi, V)) \simeq \mathrm{Hom}_H((\rho, W), \mathrm{Res}_H^G(\pi, V)). \tag{III.2.6.5}$$

III.2.7 Induction et dualité

On peut combiner les résultats de la section précédente et le théorème I.4.2 pour obtenir l'énoncé suivant :

Théorème. *Soit H un sous-groupe fermé du groupe t.d. G, et soit (ρ, W) une représentation lisse de H. On a alors un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Ind}_H^G(\tilde{W}) \simeq \mathrm{ind}_H^G(W \otimes \delta_{H\backslash G})\tilde{}.$$

III.2.8 Induction par étapes

Soient $J \subset H$ deux sous-groupes fermés de G. Comme l'induction de H à G est l'adjoint à droite de la restriction de G à H, et que trivialement :

$$\mathrm{Res}_J^G = \mathrm{Res}_J^H \circ \mathrm{Res}_H^G,$$

on obtient la

Proposition. *On a un isomorphisme de foncteurs :*

$$\mathrm{Ind}_J^G \simeq \mathrm{Ind}_H^G \circ \mathrm{Ind}_J^H.$$

Démonstration. Ceci découle de l'unicité de l'adjoint (A.V). □

III.2.9 Coinvariants

Soient H un groupe t.d. et (τ, E) une représentation de H. On note

$$E(H, \tau)$$

le sous-espace de E engendré par les vecteurs $(\tau(h) \cdot v - v)$, $v \in E$, $h \in H$. L'espace coinvariant est par définition le quotient :

$$E_{H,\tau} = E/E(H, \tau).$$

Le dual $(E_{H,\tau})^*$ de $E_{H,\tau}$ s'identifie au sous-espace de E^* des formes linéaires nulles sur $E(H, \tau)$, c'est-à-dire telles que $\tau^*(h) \cdot (\lambda) = \lambda$, pour tout $h \in H$.

Exemple. Le théorème d'existence et d'unicité de la mesure de Haar sur un groupe t.d. G peut se reformuler en disant que

$$\dim(\mathcal{D}(G)_{G,l}) = 1.$$

Remarques. 1. Si H est un sous-groupe fermé d'un groupe t.d. G, et si (π, V) est une représentation lisse de G, on allège la notation pour $V(H, \mathrm{Res}_H^G(\pi))$ (resp. $V_{H,\mathrm{Res}_H^G(\pi)}$) en $V(H, \pi)$ (resp. $V_{H,\pi}$), ou même simplement $V(H)$ (resp. V_H) si la représentation π est clairement identifiée par le contexte. Dans ce cas, tout sous-groupe N de G normalisant H agit sur $V(H, \pi)$ et donc sur $V_{H,\pi}$. Nous noterons π_H l'action de N sur $V_{H,\pi}$.

— 2. Si H et N sont des sous-groupes fermés d'un groupe t.d. G, et si N normalise H, alors

$$(\pi, V) \mapsto (\pi_H, V_{H,\pi})$$

définit un foncteur j_H de $\mathcal{M}(G)$ dans $\mathcal{M}(N)$. En effet, tout opérateur d'entrelacement A entre deux représentations lisses (π, V) et (ρ, W) de G induit un opérateur d'entrelacement entre $(\pi_H, V_{H,\pi})$ et $(\rho_H, W_{H,\pi})$.

Lemme. (i) *Soit H un groupe t.d. et supposons que H_1 et H_2 soient des sous-groupes fermés de H tels que $H = H_1H_2$, où H_1 normalise H_2. Soit (τ, E) une représentation de H. On a alors*

$$(E_{H_2,\tau})_{H_1,\tau_{H_2}} = E_{H,\tau},$$

où τ_{H_2} désigne la représentation de H_1 sur $E_{H_2,\tau}$ obtenue à partir de τ par passage au quotient (cf. remarque 1 ci-dessus).

(ii) *Soient H, H_1, H_2 comme ci-dessus, H étant un sous-groupe fermé d'un groupe t.d. G, et soient N, N_2 des sous-groupes fermés de G tels que $N \subset N_2$, N normalise H et H_1, N_2 normalise H_2. Soit J le sous-groupe de G engendré par H_1 et N_2. Alors le foncteur $j_H : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(N)$ est isomorphe à la composition des foncteurs $j_{H_2} : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(J)$ et de $j_{H_1} : \mathcal{M}(J) \to \mathcal{M}(N)$.*

<u>Démonstration</u>. Pour tout $h_1 \in H_1$, pour tout $h_2 \in H_2$ et pour tout $v \in E$, on a :

$$\tau(h_1h_2) \cdot v - v = (\tau(h_1) \cdot (\tau(h_2) \cdot v) - (\tau(h_2) \cdot v)) + (\tau(h_2) \cdot v - v).$$

Ceci montre que $E(H, \tau) = E(H_1, \tau) + E(H_2, \tau)$. Le ($i$) en découle immédiatement, et (ii) est conséquence de (i). □

Proposition. *Supposons que H soit la réunion filtrée croissante de ses sous-groupes compacts. Soit (τ, E) une représentation lisse de H. Alors $E(H, \tau)$ est l'espace des vecteurs $v \in E$ tels qu'il existe un sous-groupe compact K de H vérifiant*

$$\tau(e_K) \cdot v = 0.$$

<u>Démonstration</u>. La proposition découle de la proposition III.1.5, qui traite le cas où H est lui-même compact.

Corollaire. *Avec les hypothèses de la proposition ci-dessus, si E' est une sous-représentation de E, alors $E'(H, \tau) = E(H, \tau) \cap E'$ et si*

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

est une suite exacte dans $\mathcal{M}(H)$, alors

$$0 \to E'_{H,\tau'} \to E_{H,\tau} \to E''_{H,\tau''} \to 0$$

est exacte. En particulier, le foncteur j_H défini dans la remarque 2 ci-dessus est exact dès que H est réunion de ses sous-groupes ouverts compacts.

<u>Démonstration</u>. La première assertion est conséquence de la proposition ci-dessus. Le seul point délicat à vérifier ensuite est que $E'_{H,\tau'} \to E_{H,\tau}$ est une injection, ce qui découle du premier point. □

III.2.10 Un cas particulier de foncteur d'oubli

Supposons maintenant que P soit un groupe t.d. et que N soit un sous-groupe distingué fermé de P. Posons $M = P/N$. C'est un groupe t.d. (lemme II.3.4). Notons $\phi : P \to M$ la projection naturelle. Elle induit un foncteur d'oubli $\mathcal{F}_P^M : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(P)$ et un pseudo foncteur d'oubli $\check{\mathcal{F}}_P^M$ (III.2.1). Nous allons montrer que dans ce contexte, ces deux foncteurs sont naturellement isomorphes. Soit K un sous-groupe ouvert compact de P, et notons $K_M = \phi(K)$. C'est un sous-groupe ouvert compact de M, et la famille des K_M, lorsque K parcourt la famille des sous-groupes ouverts compacts de P, forme une base de voisinages de l'identité de M, par définition de la topologie quotient. En conséquence, la famille des idempotents e_{K_M} forme un système filtrant d'idempotents de $\mathcal{H}(M)$. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(M)$ est munie d'une structure de $\mathcal{H}(P)$-bimodule non dégénéré. Montrons que l'action (disons à droite, mais la démonstration serait similaire pour l'action à gauche) d'un élément $a_{t,K} = e_K * \delta_t * e_K$ de $\mathcal{H}(P)$, où t est un élément de P, sur une distribution T de $\mathcal{H}(M)$ est donnée par

$$T \cdot a_{t,K} = T * a_{\phi(t),K_M} \tag{III.2.10.1}$$

où $a_{\phi(t),K_M} = e_{K_M} * \delta_{\phi(t)} * e_{K_M}$. En effet, pour toute fonction test ψ,

$$\begin{aligned}
\langle T \cdot a_{t,K}, \psi\rangle &= \int_M \psi(m)\, d(T \cdot a_{t,K})(m) \\
&= \int_M \psi(m) d\left(\int_P r(\phi(p^{-1})) \cdot T\, d(a_{t,K})(p)\right)(m) \\
&= \int_M \int_P \psi(m\phi(p))\, dT(m)\, d(a_{t,K})(p) \\
&= \int_M \int_M \psi(mm')\, dT(m) d(\phi_*(a_{t,K}))(m') \\
&= \int_M \int_M \psi(mm')\, dT(m) d(a_{\phi(t),K_M})(m') \\
&= \langle T * a_{\phi(t),K_M}, \psi\rangle.
\end{aligned}$$

L'égalité $\phi_*(a_{t,K}) = a_{\phi(t),K_M}$ découle de la caractérisation de $a_{\phi(t),K_M}$ comme l'unique distribution à support dans $K_M\phi(t)K_M$, invariante sous l'action de K_M par translation à gauche et à droite, et normalisée (lemme II.3.11). En effet, vérifions l'invariance par translation à droite de $\phi_*(a_{t,K})$ sous K_M. Soit $k \in K_M$ et soit $\tilde{k} \in K$ tel que $\phi(\tilde{k}) = k$. Alors, pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{D}(M)$,

$$\begin{aligned}
\langle r(k) \cdot \phi_*(a_{t,K}), \psi\rangle &= \langle \phi_*(a_{t,K}), r(k^{-1}) \cdot \psi\rangle = \langle a_{t,K}, (r(k^{-1}) \cdot \psi) \circ \phi\rangle \\
&= \langle a_{t,K}, (r(\tilde{k}^{-1}) \cdot (\psi \circ \phi)\rangle = \langle r(\tilde{k}) \cdot a_{t,K}, \psi \circ \phi\rangle \\
&= \langle a_{t,K}, \psi \circ \phi\rangle = \langle \phi_*(a_{t,K}), \psi\rangle.
\end{aligned}$$

L'invariance par translation à gauche et la normalisation se vérifient de la même manière.

Un cas particulier de (III.2.10.1) est

$$T \cdot e_K = T * e_{K_M}.$$

Donc pour toute famille finie d'éléments T_i de $\mathcal{H}(M)$, il existe un sous-groupe ouvert compact K tel que $T_i = T * e_{K_M} = T_i \cdot e_K$. De ceci, il découle que pour tout module V dans $\mathcal{M}(\mathcal{H}(M))$,

$$\begin{aligned}
\check{\mathcal{F}}_P^M(V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(M)}(\mathcal{H}(M), V)_{\mathcal{H}(P)} &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(M)}(\mathcal{H}(M), V)_{\mathcal{H}(M)} \simeq V \\
&\simeq \mathcal{F}_P^M(V).
\end{aligned}$$

Tous ces isomorphismes sont bien entendus naturels dans $\mathcal{M}(P)$.

Le pseudo foncteur d'oubli $\check{\mathcal{F}}_P^M$ admet un adjoint à gauche P_P^M. Maintenant décrivons-le dans le langage des représentations. Si (π, V) est une représentation lisse de P, d'après la remarque 2 du paragraphe précédent, (π_N, V_N) est une représentation lisse de P, dont le noyau contient N. On peut donc voir (π_N, V_N) comme une représentation de M, et nous le ferons sans changer de notations. Ceci définit un foncteur de j_N de $\mathcal{M}(P)$ dans $\mathcal{M}(M)$.

Proposition. *Les foncteurs j_N et P_P^M sont naturellement isomorphes. En particulier j_N est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli.*

Démonstration. Soit (π, V) une représentation lisse de P. Pour tout v dans V, choisissons un sous-groupe compact ouvert K de P fixant v, et définissons

(III.2.10.2) $$\Phi : V \to \mathcal{H}(M) \otimes_{\mathcal{H}(P)} V, \quad v \mapsto e_{K_M} \otimes v.$$

Tout d'abord, remarquons que $e_{K_M} \otimes v$ est en fait indépendant du choix de K. En effet, si $K' \subset K$ est un autre sous-groupe ouvert compact, on a

$$e_{K'_M} \otimes v = e_{K_M} * e_{K'_M} \otimes v = e_{K_M} \cdot e_{K'} \otimes v = e_{K_M} \otimes e_{K'} \cdot v = e_{K_M} \otimes v.$$

Ceci montre en particulier que l'application (III.2.10.2) est linéaire. Montrons maintenant que $V(N)$ est dans $\ker \Phi$. Soit $v \in V$. On a pour tout $n \in N$,

$$\Phi(\pi(n) \cdot v - v) = e_{K_M} \otimes (\pi(n) \cdot v - v),$$

où K est choisi de sorte que $e_K \cdot v = v$ et $e_K \cdot (\pi(n) \cdot v) = \pi(n) \cdot v$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi(\pi(n) \cdot v - v) &= e_{K_M} \otimes e_K * \delta_n * e_K \cdot v - e_{K_M} \otimes v \\ &= e_{K_M} \otimes a_{n,K} \cdot v - e_{K_M} \otimes v \\ &= e_{K_M} \cdot a_{n,K} \otimes v - e_{K_M} \otimes v \\ &= e_{K_M} * a_{\phi(n),K_M} \otimes v - e_{K_M} \otimes v \\ &= e_{K_M} * e_{K_M} \otimes v - e_{K_M} \otimes v = 0. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\phi(n) = \mathbf{1}_M$ et donc $a_{\phi(n),K_M} = e_{K_M}$. Par passage au quotient, Φ induit une application linéaire

$$\bar{\Phi} : V_N \to \mathcal{H}(M) \otimes_{\mathcal{H}(P)} V.$$

Cette application linéaire est un opérateur d'entrelacement pour les actions de M sur V_N et $\mathcal{H}(M) \otimes_{\mathcal{H}(P)} V$. En effet, pour tout $m \in M$ et pour tout $\bar{v} \in V_N$, si l'on choisit p dans P tel que $\phi(p) = m$, $v \in V$ qui relève $\bar{v}$, et K un sous-groupe ouvert compact de P tel que $e_K \cdot v = v$ et $e_K \cdot (\pi(p) \cdot v) = \pi(p) \cdot v$, alors

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\pi_N(m) \cdot \bar{v}) = \bar{\Phi}(\overline{\pi(p) \cdot v}) &= e_{K_M} \otimes \pi(p) \cdot v \\ &= e_{K_M} \otimes e_K * \delta_p * e_K \cdot v = e_{K_M} \otimes a_{p,K} \cdot v \\ &= e_{K_M} \cdot a_{p,K} \otimes v = e_{K_M} * a_{m,K_M} \otimes v \\ &= e_{K_M} * \delta_m * e_{K_M} \otimes v = e_{K_M} \cdot (l(m) \cdot \bar{\Phi}(\bar{v})). \end{aligned}$$

Quitte à remplacer K par un sous-groupe ouvert compact plus petit, on peut supposer que e_{K_M} fixe $l(m) \cdot \bar{\Phi}(\bar{v})$.

Il s'agit maintenant de construire un inverse de $\bar{\Phi}$. Comme V_N est une représentation lisse de M, c'est un $\mathcal{H}(M)$-module non dégénéré. On définit alors

$$\Psi : \mathcal{H}(M) \otimes V \to V_N, \quad T \otimes v \mapsto T \cdot \bar{v}.$$

Montrons que Ψ induit une application

$$\Psi : \mathcal{H}(M) \otimes_{\mathcal{H}(P)} V \to V_N.$$

Pour cela, il suffit de vérifier que pour tout $T \in \mathcal{H}(M)$, pour tout $S \in \mathcal{H}(P)$ et pour tout $v \in V$,

$$\Psi(T \cdot S \otimes v - T \otimes S \cdot v) = 0.$$

Or $\Psi(T \cdot S \otimes v - T \otimes S \cdot v) = (T \cdot S) \cdot \bar{v} - T \cdot (S \cdot \bar{v})$. Pour un sous-groupe ouvert compact K de P assez petit, la distribution S est dans $\mathcal{H}(P, K)$ et est donc combinaison linéaire de distributions de la forme $a_{p,K}$. Il suffit donc de vérifier que

$$(T \cdot a_{p,K}) \cdot \bar{v} - T \cdot (a_{p,K} \cdot \bar{v}) = 0.$$

Comme $T \cdot a_{p,K} = T * a_{\phi(p),K_M}$, il suffit de vérifier que $a_{p,K} \cdot \bar{v} = a_{\phi(m),K_M} \cdot \bar{v}$. Mais ceci découle des définitions. On finit la démonstration en vérifiant que $\bar{\Psi}$ est l'inverse de $\bar{\Phi}$, ce qui résulte de calculs sans difficultés. □

Corollaire. *Supposons que P soit un sous-groupe fermé du groupe t.d. G et que N, M soient comme ci-dessus. Alors le foncteur $\mathrm{Ind}_P^G \circ \mathcal{F}_P^M$ de $\mathcal{M}(M)$ dans $\mathcal{M}(G)$ est l'adjoint à droite du foncteur $j_N : V \mapsto V_N$.*

<u>Démonstration</u>. Ceci est clair par composition des foncteurs adjoints.

III.2.11 Isomorphismes de Mackey

L'isomorphisme de Mackey établit la commutativité entre le foncteur Hom (resp. $\otimes$) de la section III.1.15 et le foncteur d'induction I_H^G (resp. P_H^G) de la section III.2.1. Donnons l'énoncé du résultat.

Théorème. *Soit $\phi : H \to G$ un morphisme continu de groupes t.d. grâce auquel on construit les foncteurs d'induction I_H^G et P_H^G (III.2.1). Alors, pour toute représentation (ρ, W) de $\mathcal{M}(H)$ et toute représentation (π, V) de $\mathcal{M}(G)$, on a isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}(V, I_H^G(W))_0 \simeq I_H^G(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_H^G(V), W)_0).$$

De plus, si le pseudo foncteur d'oubli $\check{\mathcal{F}}_H^G$ est isomorphe au foncteur d'oubli $\mathcal{F}_H^G$, alors

$$P_H^G(W) \otimes V \simeq P_H^G(W \otimes \mathcal{F}_H^G(V)).$$

<u>Démonstration</u>. *Pour toute représentation (σ, E) dans $\mathcal{M}(G)$, on a*

$$\mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Hom}(V, I_H^G(W))_0) \simeq \mathrm{Hom}_G(E \otimes V, I_H^G(W)) \tag{III.2.11.1}$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_H(\mathcal{F}_H^G(E \otimes V), W) \tag{III.2.11.2}$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_H(\mathcal{F}_H^G(E) \otimes \mathcal{F}_H^G(V), W) \tag{III.2.11.3}$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_H(\mathcal{F}_H^G(E), \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_H^G(V), W)_0) \tag{III.2.11.4}$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_G(E, I_P^G(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_H^G(V), W)_0)). \tag{III.2.11.5}$$

En effet (III.2.11.1) est l'application du corollaire III.1.15, (III.2.11.2) est l'adjonction des foncteurs $\mathcal{F}_H^G$ et I_H^G, (III.2.11.3) est trivial, (III.2.11.4) est à nouveau le corollaire III.1.15, et (III.2.11.5) à nouveau l'adjonction de $\mathcal{F}_H^G$ et I_H^G.

Un argument général de théorie des catégories (*cf.* A.III.3) permet alors de conclure que l'on a bien un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}(V, I_H^G(W))_0 \simeq I_H^G(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_H^G(X), W)_0).$$

Passons maintenant au deuxième isomorphisme de Mackey, et tentons de copier l'argument utilisé pour le premier.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_G(V \otimes P_H^G(W), E) &\simeq \mathrm{Hom}_G(P_H^G(W), \mathrm{Hom}(V, E)_0) && \text{(III.2.11.6)}\\
&\simeq \mathrm{Hom}_H(W, \check{\mathcal{F}}_H^G(\mathrm{Hom}(V, E)_0)) && \text{(III.2.11.7)}\\
&\simeq \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_H^G(V), \check{\mathcal{F}}_H^G(E))_0)) && \text{(III.2.11.8)}\\
&\simeq \mathrm{Hom}_H(\mathcal{F}_H^G(V) \otimes W, \check{\mathcal{F}}_H^G(E)) && \text{(III.2.11.9)}\\
&\simeq \mathrm{Hom}_G(P_H^G(\mathcal{F}_H^G(V) \otimes W), E). && \text{(III.2.11.10)}
\end{aligned}$$

On a dans ce calcul utilisé (III.1.15.1) et l'adjonction entre les foncteur P_H^G et $\check{\mathcal{F}}_H^G$. Le seul point non justifié est l'égalité (III.2.11.8), qui contrairement à (III.2.11.3) ci-dessus, n'est pas triviale en général, mais le devient évidemment si $\check{\mathcal{F}}_H^G$ est isomorphe à $\mathcal{F}_H^G$. □

III.3 Représentations dans les sections de faisceaux

III.3.1 Action sur un faisceau

Définition. Soient X un espace t.d., G un groupe t.d. et $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_X^\infty - \mathcal{M}od$ un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. Une action de G sur $\mathcal{F}$ est la donnée pour tout $g \in G$ d'un isomorphisme γ_g de $\mathcal{F}$ dans lui-même (voir II.2.5), de sorte que $\gamma_g \circ \gamma_{g'} = \gamma_{gg'}$ pour tout couple (g, g') d'éléments de G et $\gamma_e = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ si e est l'élément neutre de G. On suppose de plus que l'application $\gamma : G \times X \to X$ sous-jacente est continue. L'espace des sections globales à support compact $\mathcal{F}_c(X)$ est alors par définition un espace de représentation pour G. Grâce à l'équivalence de catégories du II.2.5, on voit que la donnée d'un faisceau muni d'une action de G est équivalente à la donnée d'un $\mathcal{D}(X)$-module non dégénéré, muni d'une action linéaire de G qui commute avec celle de $\mathcal{D}(X)$. Si la représentation de G dans $\mathcal{F}_c(X)$ est lisse, on dira que γ est lisse. Une distribution $T \in \mathcal{F}_c(X)^*$ est dite G-invariante si $\gamma_g \cdot T = T$ pour tout g dans G.

Dans une telle situation, intéressons nous à l'espace des coinvariants $(\mathcal{F}_c(X))_G$. Supposons qu'il existe un espace t.d. Y et une application continue $q : X \to Y$, telle que $q(\gamma_g(x)) = q(x)$, pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$. Alors $\mathcal{F}_c(X)$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{D}(Y)$-module, et $\mathcal{F}_c(X)(G)$ est un sous-$\mathcal{D}(Y)$-module de $\mathcal{F}_c(X)$. Il s'ensuit que $\mathcal{F}_c(X)_G$ est un $\mathcal{D}(Y)$-module, ce qui implique qu'il correspond par l'équivalence de catégories du théorème II.2.5 à un faisceau sur Y, que l'on notera $\mathcal{F}'$. Par définition $\mathcal{F}_c(X)_G$ et $\mathcal{F}'_c(Y)$ sont isomorphes en tant que $\mathcal{D}(Y)$-modules.

Proposition. *La fibre $\mathcal{F}'_y$ de $\mathcal{F}'$ en un point $y \in Y$ est naturellement isomorphe à $\mathcal{F}_c(q^{-1}(\{y\}))_G$.*

Démonstration. Posons $Z = q^{-1}(\{y\})$. C'est une partie fermée de X, et la restriction $p_Z : \mathcal{F}_c(X) \to \mathcal{F}_c(Z)$ est surjective (proposition 2 de II.2.5). Le noyau de p_Z est le sous-espace $L \subset \mathcal{F}_c(X)$ engendré par les sections de la forme $f \cdot \phi$, où $f \in \mathcal{D}(Y)$, $f(y) = 0$, et $\phi \in \mathcal{F}_c(X)$. En effet, il est clair que $L \subset \ker p_Z$. Réciproquement, si $\phi \in \ker p_Z$, alors $q(\operatorname{Supp}\phi)$ est un ensemble compact dans Y qui ne contient pas y. On peut recouvrir $q(\operatorname{Supp}\phi)$ par un ouvert compact U qui ne contient pas y (c'est une conséquence du lemme II.1.1). Si f est la fonction caractéristique de U, on a $f \in \mathcal{D}(Y)$, $f(y) = 0$ et $f \cdot \phi = \phi$, d'où $\phi \in L$. On a donc $\mathcal{F}_c(Z) \simeq \mathcal{F}_c(X)/L$, d'où $\mathcal{F}_c(Z)_G \simeq \mathcal{F}_c(X)/L'$ où L' est le sous-espace de $\mathcal{F}_c(X)$ engendré par L et $\mathcal{F}_c(X)(G)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c(Z)_G &= \mathcal{F}_c(X)/(\mathcal{F}_c(X)(G) + L)\\ &= (\mathcal{F}_c(X)/\mathcal{F}_c(X)(G))\,/\,(L/(L \cap \mathcal{F}_c(X)(G)))\end{aligned}$$

Or, $\mathcal{F}_c(X)/\mathcal{F}_c(X)(G) = \mathcal{F}'_c(Y)$ et la description de la fibre du faisceau $\mathcal{F}'$ en y faite dans la remarque II.2.5 est

$$\mathcal{F}'_y = \mathcal{F}'_c(Y)/L''$$

où L'' est l'espace engendré par les $f \cdot \psi$, $\psi \in \mathcal{F}'_c(Y)$ et $f \in \mathcal{D}(Y)$ telle que $f(y) = 0$. On voit alors que $L'' \simeq L/(L \cap \mathcal{F}_c(X)(G))$ ce qui finit de montrer l'assertion. □

Corollaire. *Avec les hypothèses ci-dessus, s'il n'existe pas de distributions G-invariantes pour les restrictions du faisceau $\mathcal{F}$ aux fibres $Z = q^{-1}(\{y\})$, alors il n'existe pas de distributions G-invariantes dans $\mathcal{F}_c(X)^*$.*

Démonstration. Une distribution non nulle G-invariante dans $\mathcal{F}_c(X)^*$ est nulle sur $\mathcal{F}_c(X)(G)$ et donc définit une distribution non nulle sur $\mathcal{F}_c(X)_G$, c'est-à-dire un élément non nul du dual de $\mathcal{F}'_c(Y)$. Soit y un point du support de cette distribution. Alors par restriction, elle définit un élément non nul du dual de la fibre $\mathcal{F}'_y$, qui est isomorphe à $(\mathcal{F}_c(q^{-1}(\{y\}))_G$. Ceci montre qu'il existe une distribution G-invariante pour la restriction de $\mathcal{F}$ à la fibre $Z = q^{-1}(\{y\})$. □

III.3.2 Induction et faisceaux

Fixons une action γ_0 continue d'un groupe t.d. G sur un espace t.d. X. Formons la catégorie $\mathcal{C}^\infty_{X,G} - \mathcal{M}od$ dont les objets sont les faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X munis d'une action lisse γ de G compatible avec γ_0, et dont les morphismes sont les morphismes de faisceaux G-équivariants. Par exemple, si $X = \{x\}$ est un singleton, alors $\mathcal{C}^\infty_{X,G} - \mathcal{M}od$ est simplement $\mathcal{M}(G)$. La correspondance $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_c(X)$ (qui induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{C}^\infty_X - \mathcal{M}od$ et $\mathcal{M}(\mathcal{D}(X))$ d'après le théorème II.2.5) donne par restriction à la sous-catégorie $\mathcal{C}^\infty_{X,G} - \mathcal{M}od$ un foncteur

$$\Gamma_c : \mathcal{C}^\infty_{X,G} - \mathcal{M}od \to \mathcal{M}(G).$$

Si Q est un sous-groupe fermé de G, et Z une partie localement fermée, Q-invariante de X, le foncteur

$$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{|Z}$$

induit un foncteur

$$\mathcal{R}^{X,G}_{Z,Q} : \mathcal{C}^\infty_{X,G} - \mathcal{M}od \to \mathcal{C}^\infty_{Z,Q} - \mathcal{M}od.$$

En particulier, si $Z = \{x\}$ est un point de X, alors $\mathcal{R}^{X,G}_{Z,Q}\mathcal{F}$ est la représentation lisse de Q dans la fibre $\mathcal{F}_x$ de $\mathcal{F}$.

On se place maintenant dans le cas où l'action de G sur X est transitive. Comme le groupe G est supposé dénombrable à l'infini, X est alors homéomorphe à l'espace quotient G/H, où H est le stabilisateur d'un point quelconque de X (corollaire II.3.3). Pour des raisons de compatibilité avec notre définition de l'induction, il est plus adéquat de travailler avec $H\backslash G$ plutôt que G/H (l'action de G sur $H\backslash G$ est donnée par $(g_0, Hg) \mapsto Hgg_0^{-1}$). Dans ce cas, nous définissons un foncteur « d'induction »

$$\mathcal{I}_H^G : \mathcal{M}(H) \to \mathcal{C}^\infty_{X,G} - \mathcal{M}od,$$

de la manière suivante. Soit (τ, E) dans $\mathcal{M}(H)$. L'espace de la représentation induite $\mathrm{ind}_H^G E$ est naturellement un $\mathcal{D}(H\backslash G)$-module non dégénéré, par multiplication des fonctions : si $\phi \in \mathcal{D}(H\backslash G)$, et $f \in \mathrm{ind}_H^G E$, ϕf est dans $\mathrm{ind}_P^G E$. D'après l'équivalence de catégories du théorème II.2, $\mathrm{ind}_P^G E$ est l'espace des sections à support compact d'un certain faisceau $\mathcal{F}^\tau$ sur $H\backslash G$. Le foncteur $\mathcal{I}_H^G$ envoie (τ, E) sur $\mathcal{F}^\tau$. De plus il est clair que la représentation de H dans la fibre du faisceau $\mathcal{F}^\tau$ au dessus du point $o = H\mathbf{1}_G$ de $H\backslash G$ est isomorphe à (τ, E).

Réciproquement, si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $H\backslash G$ muni d'une action lisse de G compatible avec l'action de G sur $H\backslash G$, notons (τ, E) la représentation de H dans la fibre du faisceau $\mathcal{F}$ au dessus du point o de $H\backslash G$. Alors la représentation de G dans $\mathcal{F}_c(H\backslash G)$ est isomorphe à $\mathrm{ind}_H^G(\tau, E)$ et la partie lisse de la représentation de G dans $\mathcal{F}(H\backslash G)$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_H^G(\tau, E)$. Plus explicitement, le premier de ces isomorphismes est donné par

$$\alpha : \mathcal{F}_c(H\backslash G) \to \mathrm{ind}_H^G(\tau, E), \quad \phi \mapsto [g \mapsto (\gamma_g \cdot \phi)(o)],$$

d'inverse

$$\beta : f \mapsto [Hg^{-1} = \gamma_g(o) \mapsto \gamma_g(f(g^{-1}))],$$

et le deuxième par des formules analogues.

On vérifie sans difficulté que ces isomorphismes sont naturels. On a donc obtenu le

Théorème. *Les foncteurs*

$$\mathcal{I}_H^G : \mathcal{M}(H) \to \mathcal{C}^\infty_{H\backslash G,G} - \mathcal{M}od \quad \text{et} \quad \mathcal{R}^{H\backslash G,G}_{H\mathbf{1_G},H} : \mathcal{C}^\infty_{H\backslash G,G} - \mathcal{M}od \to \mathcal{M}(H)$$

sont inverses l'un de l'autre et définissent une équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(H)$ et $\mathcal{C}^\infty_{H\backslash G,G} - \mathcal{M}od$.

III.4 Notes sur le chapitre III

La plus grande partie de ce chapitre est tirée de [3]. Nous y avons ajouté quelques éléments inspirés de la philosophie de [34], qui consiste à voir les foncteurs d'induction et de Jacquet comme des cas particulier des foncteurs d'oubli $(\mathcal{F}, \check{\mathcal{F}})$ ou d'induction (I, P) définis dans le cadre des algèbres à idempotents. Outre le gain conceptuel, ceci permet de déterminer rapidement les adjonctions entre composés de tels foncteurs. La partie sur les représentations dans les espaces de sections de faisceaux équivariants est tirée de [4].

Chapitre IV

Représentations compactes, de carré intégrable, unitaires

Nous allons maintenant étudier des classes particulières de représentations lisses d'un groupe t.d. Nous commençons par rappeler la théorie des représentations des groupes compacts, théorie qui dans le cadre des groupes t.d. est particulièrement élémentaire. Le résultat principal est que la catégorie des représentations lisses d'un groupe t.d. compact est semi-simple. Ce n'est pas le cas en général si le groupe G n'est pas compact, mais il est alors possible de définir une classe de représentations ayant de bonnes propriétés, par une condition de support sur leurs coefficients matriciels : les représentations compactes. Toute représentation compacte est semi-simple, et si l'on fixe une classe d'isomorphie τ de représentations compactes irréductibles, toute représentation lisse de G se décompose en une somme directe dont le premier facteur est une somme directe de représentations dans la classe τ, et le second une représentation lisse dont aucun sous-quotient irréductible n'est dans τ. Ceci s'interprète en termes de décomposition de catégories. Nous donnons un critère simple de finitude pour que la catégorie $\mathcal{M}(G)$ se décompose en une « partie compacte », elle-même produit sur les classes d'isomorphie τ de représentations compactes des catégories $\mathcal{M}(G)_\tau$ dont les éléments sont les sommes directes de représentations dans la classe τ, et une partie non compacte, dont les éléments sont les représentations n'ayant aucun sous-quotient compact. Ce critère de finitude sera vérifié pour les groupes réductifs p-adiques, ce qui est à la base du théorème de décomposition de Bernstein. Nous étudions ensuite les représentations unitaires et nous introduisons une version tordue des foncteurs d'induction qui préserve l'unitarité des représentations. Les représentations unitaires admissibles sont semi-simples. Enfin nous nous intéressons aux représentations lisses dont le caractère central est unitaire et les coefficients matriciels sont des fonctions de carré intégrable (modulo le centre). Une telle représentation est admissible et unitaire et les coefficients de telles représentations vérifient les formules d'orthogonalité de Schur.

IV.1 Représentations compactes

IV.1.1 Représentations des groupes compacts

Soit K un groupe t.d. compact.

Théorème. (i) *Toute représentation lisse irréductible de K est de dimension finie.*

(ii) Pour toute représentation lisse de dimension finie (π, V) de K, il existe un sous-groupe ouvert compact N distingué dans K tel que N agisse trivialement sur V.

(iii) Toute représentation lisse de K est semi-simple.

(iv) Toute représentation lisse de K est unitaire.

Démonstration. (i) Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de K, et soit $v \in V$ non nul. Comme π est lisse, il existe un sous-groupe ouvert compact K_v de K qui fixe v. Comme K/K_v est fini (*cf.* lemme II.3.2), l'espace vectoriel W engendré par $K \cdot v$ est de dimension finie. Comme il est K-stable et non nul, par irréductibilité de π, $W = V$.

(ii) Soit (π, V) une représentation lisse de dimension finie de K. Soit $N = \ker \pi$. C'est un sous-groupe distingué de K. Soit $\{v_i\}_{i=1,\ldots,n}$ une base de V. Alors

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Stab}_K(v_i).$$

Comme π est lisse, chaque $\mathrm{Stab}_K(v_i)$ est un sous-groupe ouvert de K, donc N est ouvert. Comme K est compact, tout sous-groupe ouvert de K, étant fermé, est compact.

(iii) Montrons tout d'abord que V est somme de sous-représentations irréductibles. Soit $v \in V$ et soit W le sous-espace engendré par $K \cdot v$. Comme dans la démonstration du (i), on voit que W est de dimension finie, et donc d'après (ii), il existe un sous-groupe ouvert compact N distingué dans K tel que N agisse trivialement sur W. Comme K/N est fini, on peut d'après la théorie des représentations des groupes finis (voir par exemple [38]) décomposer W en une somme directe finie de représentations irréductibles de K. Ceci montre l'assertion. Le lemme A.VII permet alors de conclure.

(iv) Soit (π, V) une représentation lisse de K. Choisissons un produit hermitien défini positif $\langle .\,,. \rangle$ sur V. Posons :

$$\langle v,\, w\rangle_0 = \int_K \langle \pi(k)\cdot v,\, \pi(k)\cdot w\rangle \, d\mu_K(k), \qquad (v, w \in V)$$

où μ_K est une mesure de Haar sur K. Alors $\langle .\,,. \rangle_0$ est un produit hermitien défini positif K-invariant sur V. □

Notons $\hat{K}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations lisses irréductibles de K.

Corollaire. *La catégorie $\mathcal{M}(K)$ est semi-simple. Plus précisement, toute représentation lisse (π, V) de K se décompose de manière canonique en :*

$$V = \bigoplus_{(\sigma, V_\sigma)\in \hat{K}} V(\sigma),$$

où $V(\sigma)$ est l'image du morphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_K(V_\sigma, V) \otimes V_\sigma, \quad \phi \otimes v \mapsto \phi(v).$$

La sous-représentation $V(\sigma)$ est une somme directe de représentations irréductibles dans la classe de (σ, V_σ).

Démonstration. Soit $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ une décomposition de V en sous-représentations irréductibles. Si $V_i \simeq V_\sigma$, il existe un opérateur d'entrelacement injectif $\phi_i\,: V_\sigma \to V$ dont l'image est V_i. Donc

$V_i \subset V(\sigma)$ et l'on en déduit que $V = \sum V(\sigma)$. Soit I_σ l'ensemble des i tels que $V_i \simeq V_\sigma$. On a alors $\bigoplus_{i \in I_\sigma} V_i \subset V(\sigma)$. Pour tout morphisme $\phi \in \mathrm{Hom}_K(V_\sigma, V)$, la composée de ϕ et d'une projection $p_j : V \to V_j$ est nulle si $j \notin I_\sigma$, et donc $V(\sigma) \subset \bigoplus_{i \in I_\sigma} V_i$. □

On appelle $V(\sigma)$ la composante isotypique de type σ de V. La dimension de $\mathrm{Hom}_K(V_\sigma, V)$, que nous noterons $m(\sigma)$, s'appelle la multiplicité de σ dans V. Lorsque cette dimension est finie, on a :

$$m(\sigma) = \dim V(\sigma)/\dim V_\sigma$$

IV.1.2 Un critère d'admissibilité

On tire de ce qui précède une condition nécessaire et suffisante pour qu'une représentation lisse d'un groupe t.d. soit admissible.

Proposition. *Soit (π, V) une représentation lisse d'un groupe t.d. G. Alors (π, V) est admissible si et seulement si pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, toute classe $\sigma \in \hat{K}$ a une multiplicité finie dans $\mathrm{Res}_K^G(\pi, V)$.*

Démonstration. Supposons que pour un certain sous-groupe ouvert compact K de G, et une certaine classe $\sigma \in \hat{K}$, la multiplicité $m(\sigma)$ ne soit pas finie. Soit N un sous-groupe ouvert compact normal de K tel que $N \subset \ker \sigma$. Alors $\dim V^N$ n'est pas finie et donc (π, V) n'est pas admissible. Réciproquement si K est un sous-groupe ouvert compact de G, la représentation triviale de K étant irréductible, $\dim V^K$ est finie. □

IV.1.3 Représentations compactes

Soit G un groupe t.d. Si G n'est pas compact, la catégorie $\mathcal{M}(G)$ n'est généralement pas semi-simple. Néanmoins, il existe une classe de représentations lisses de G qui se comportent comme les représentations des groupes compacts. En particulier elles sont semi-simples.

Dans toute cette section, on suppose G unimodulaire.

Définition. Soit (π, V) une représentation lisse de G. On dit que (π, V) est compacte si pour tout $v \in V$, et pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, la fonction :

$$f_{K,v} : G \to V, \quad g \mapsto \pi(e_K)\pi(g^{-1}) \cdot v$$

est à support compact.

Il est clair que si (π, V) est compacte, tout sous-quotient de (π, V) l'est aussi.

Soit (π, V) une représentation lisse de G et soient $v \in V$, $\lambda \in \tilde{V}$. Alors le coefficient matriciel $\phi_{v,\lambda}$ est la fonction localement constante :

$$\phi_{v,\lambda} : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \lambda(\pi(g^{-1}) \cdot v).$$

Théorème. *Une représentation lisse de G est compacte si et seulement si tous ses coefficients matriciels sont à support compact.*

Démonstration. Supposons (π, V) compacte. Soient $v \in V$, $\lambda \in \tilde{V}$ et K un sous-groupe ouvert compact de G tel que $\lambda \in \tilde{V}^K$. Alors il est clair que le support de $\phi_{v,\lambda}$ est dans le support de $f_{K,v}$. Pour la réciproque, nous allons trouver un nombre fini de $\lambda_i \in \tilde{V}^K$ tels que $\operatorname{Supp} f_{K,v} \subset \bigcup_i \operatorname{Supp} \phi_{v,\lambda_i}$. L'image de $f_{K,v}$ est dans V^K. Notons E_v le sous-espace de V^K engendré par cette image. Extrayons une base $(v_i)_{i\in I}$ de E_v du système de générateurs $(\pi(e_K)\pi(g) \cdot v)_{g\in G}$ et choisissons une forme linéaire λ_0 sur V^K valant 1 sur les v_i. Etendons λ_0 en une forme linéaire $\tilde{\lambda}_0$ sur V, nulle sur $V(K)$ (on se souvient que $V = V^K \oplus V(K)$ d'après la proposition III.1.5). Alors $e_K \cdot \tilde{\lambda}_0 = \tilde{\lambda}_0$ et

$$g \mapsto \tilde{\lambda}_0(\pi(g) \cdot v) = \lambda_0(\pi(e_K)\pi(g) \cdot v)$$

est à support compact, invariant sous l'action par translation à gauche de K, et donc recouvert par un nombre fini de parties de la forme $K \cdot g_j$. Ceci montre que le sous-espace E_v est de dimension finie, disons k. Choisissons alors k éléments $\lambda_1, \dots \lambda_k$ de $\tilde{V}^K$ séparant les points de E_v. Alors $\operatorname{Supp} f_{K,v} \subset \bigcup_{i=1}^k \operatorname{Supp} \phi_{v,\lambda_i}$. □

Proposition. *Toute représentation compacte de type fini est admissible.*

Démonstration. Soit (π, V) une telle représentation. Supposons que V soit engendré par $v_1, \dots, v_l$. Si K est un sous-groupe ouvert compact de G, alors $V^K = \pi(e_K)\cdot V$ est engendré par les vecteurs de la forme $\pi(e_K)\pi(g).v_i$, $g \in G$. Il suffit donc de voir que l'espace engendré est de dimension finie pour i fixé. Or, on peut reprendre l'argument donné dans la démonstration du théorème ci-dessus, consistant à construire une forme linéaire λ fixée par K, valant 1 sur une famille libre maximale $\pi(e_K)\pi(g_j).v_i$ et 0 sur $V(K)$. La compacité du support du coefficient matriciel $\phi_{v_i,\lambda}$ montre que cet espace est de dimension finie. □

Les représentations compactes d'un groupe G n'existent pas toujours. Une condition nécéssaire est donnée dans le lemme suivant.

Lemme. *Soit G un groupe t.d. dénombrable à l'infini, et supposons qu'il existe une représentation compacte (π, V) de G. Alors le centre de G est compact.*

Démonstration. Quitte à prendre un sous-quotient irréductible, on peut supposer que (π, V) est irréductible. Alors (π, V) admet un caractère central χ_π. Soit $v \in V$ et K un sous-groupe ouvert compact de G fixant v. Alors pour tout $z \in Z(G)$,

$$f_{K,v}(z) = \pi(e_K)\pi(z^{-1}) \cdot v = \chi(z^{-1})v.$$

Donc le support de $f_{K,v}$ contient $Z(G)$, qui est donc compact. □

IV.1.4 Décomposition des représentations

On se place dans les hypothèses du paragraphe précédent et l'on suppose en plus que G est dénombrable à l'infini. Le résultat principal sur les représentations compactes est le suivant :

Théorème. *Soit (τ, W) une représentation compacte irréductible de G. Alors toute représentation (π, V) de $\mathcal{M}(G)$, V se décompose en :*

$$V = V(\tau) \oplus V(\tau)^\perp$$

où $V(\tau)$ est somme directe de représentations isomorphes à (τ, W), et aucun des sous-quotients irréductibles de $V(\tau)^\perp$ n'est isomorphe à (τ, W).

La démonstration nécessite des résultats intermédiaires et s'étendra sur plusieurs sections. Rappelons que nous avons supposé G unimodulaire. Fixons une mesure de Haar μ_G (bi-invariante, donc). Identifions $\mathcal{D}(G)$ et $\mathcal{H}(G)$ via le choix de cette mesure de Haar. Les espaces $\mathcal{D}(G)$ et $\mathrm{End}(W)$ sont munis d'une structure de représentation de $G \times G$:

$$(g_1, g_2) \cdot f(x) = f(g_1^{-1} x g_2) \quad (g_1, g_2, x \in G), \, (f \in \mathcal{D}(G)),$$

$$((g_1, g_2) \cdot \lambda)(v) = g_1 \cdot \lambda(g_2^{-1} \cdot v), \quad (g_1, g_2 \in G), \, (\lambda \in \mathrm{End}(W)), (v \in W).$$

De plus, le morphisme

$$\tau : \mathcal{D}(G) \to \mathrm{End}(W), \quad f \mapsto \tau(f)$$

entrelace ces actions de $G \times G$. Comme $\mathcal{D}(G)$ est une représentation lisse, il en découle que l'image de τ est à valeurs dans la partie lisse $\mathrm{End}(W)_0$ de $\mathrm{End}(W)$. Nous allons voir que ce morphisme est surjectif, et construire une section.

Montrons tout d'abord qu'en tant que représentation de $G \times G$:

$$W \otimes \tilde{W} \simeq \mathrm{End}(W)_0 \tag{IV.1.4.1}$$

Définissons pour cela le morphisme $\alpha : W \otimes \tilde{W} \to \mathrm{End}(W)_0$ par :

$$\alpha(w \otimes \lambda)(v) = \lambda(v) w. \tag{IV.1.4.2}$$

L'injectivité et la $G \times G$-équivariance sont claires.

Comme les représentations compactes irréductibles sont admissibles, on peut montrer la surjectivité en établissant que pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, l'application induite :

$$\alpha^K : (W \otimes \tilde{W})^{K \times K} \longrightarrow \mathrm{End}(W)^{K \times K} \tag{IV.1.4.3}$$

est surjective par un argument de dimension. L'espace $\mathrm{End}(W)^{K \times K}$ est naturellement un sous-espace de $\mathrm{End}(W^K)$, par l'application de restriction. En effet, W se décompose en $W = W^K \oplus W(K)$ (proposition III.1.3) et si $A \in \mathrm{End}(W)^{K \times K}$, on a $A = \tau(e_K) A \tau(e_K)$, et la restriction de A à $W(K) = \ker \tau(e_K)$ est nulle. Donc si la restriction de A à W^K est nulle, A aussi. On a alors :

$$\dim(\mathrm{End}(W)^{K \times K}) \leq (\dim W^K)^2 \leq \dim(W \otimes \tilde{W})^{K \times K}.$$

ce qui finit de montrer la surjectivité de (IV.1.4.3) et donc de (IV.1.4.2). Remarquons que la démonstration établit en fait (IV.1.4.1) pour toute représentation admissible W.

Soit $\phi \; : W \otimes \tilde{W} \to \mathcal{D}(G)$ l'application linéaire $v \otimes \lambda \mapsto \phi_{v,\lambda}$ et soit ψ l'unique application linéaire de $\mathrm{End}(W)_0$ dans $\mathcal{D}(G)$ telle que $\psi \circ \alpha = \phi$. Il est clair que ψ est $G \times G$-equivariante. Montrons que, à un coefficient scalaire près, c'est la section cherchée du morphisme τ. Comme $\tau \circ \psi$ est un opérateur d'entrelacement pour la représentation de $G \times G$ dans $\mathrm{End}(W)_0$, et que celle-ci est isomorphe à $W \otimes \tilde{W}$, donc irreductible d'après la proposition III.1.14, le lemme de Schur, nous dit qu'il existe un scalaire $\kappa(\tau)$ tel que $\tau \circ \psi = \kappa(\tau)\mathrm{Id}$.

Proposition. *(i) Si (ρ, E) est une représentation lisse irreductible de G non équivalente à (τ, W), alors pour tout f dans l'image de ψ, $\rho(f) = 0$*

— *(ii) le scalaire $\kappa(\tau)$ est non nul.*

Démonstration. (i) Soit $v \in E$, et considérons le morphisme de G-modules

$$W \otimes \tilde{W} \to E, \quad w \otimes \lambda \mapsto \rho(\phi(w \otimes \lambda)) \cdot v.$$

En tant que représentation de G (G agissant seulement sur le premier facteur), $W \otimes \tilde{W}$ est une somme directe de représentations irréductibles équivalentes à (τ, W). Lorsque (ρ, E) est non équivalente à (τ, W), l'image de ce morphisme est nécessairement nulle, et donc $\rho(f) \cdot v = 0$ pour tout $v \in E$, pour tout f dans l'image de ϕ (et donc de ψ). Ceci démontre (i).

Soit f un élément non nul dans l'image de ψ. On veut montrer que $\tau(f)$ est non nul. Pour cela il suffit d'invoquer le lemme de complétude (proposition III.1.11) et le (i). □

On pose $d(\tau) = \kappa(\tau)^{-1}$. On appelle ce scalaire le degré formel de τ.

Remarques. 1. Le scalaire $d(\tau)$ dépend du choix de la mesure de Haar.

— 2. Si G est compact, et que l'on normalise la mesure de Haar par $\int_G d\mu_G = 1$, alors le degré formel d'une représentation irréductible lisse de G est sa dimension.

— 3. On définira plus généralement le degré formel de toute représentation lisse irréductible de carré intégrable de G dans la section IV.3.3.

Nous continuons la démonstration du théorème principal de cette section dans les sections suivantes.

IV.1.5 Projection sur une représentation compacte

Soit (τ, W) une représentation compacte irréductible de G. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G. Les résultats du paragraphe précédent permettent d'obtenir le :

Théorème. (i) *Il existe une unique distribution $e_{K,\tau}$ dans $\mathcal{H}(G)$ telle que $\tau(e_{K,\tau}) = \tau(e_K)$ et $\rho(e_{K,\tau}) = 0$ si (ρ, E) est une représentation irréductible lisse de G non équivalente à (τ, W).*

(ii) *Si K' est un sous-groupe ouvert compact de G contenu dans K, on a :*

$$e_{K',\tau} * e_{K,\tau} = e_K * e_{K',\tau} = e_{K',\tau} * e_K = e_{K,\tau}.$$

En particulier $e_{K,\tau}$ est un idempotent.

(iii) *Si $g \in G$, alors $\delta_g * e_{K,\tau} * \delta_{g^{-1}} = e_{gKg^{-1},\tau}$.*

Démonstration. L'unicité d'une telle distribution est conséquence directe du théorème de complétude III.1.11. Posons :

$$e_{K,\tau} = d(\tau)^{-1}\psi(\tau(e_K)) \in \mathcal{H}(G).$$

Alors,

$$\tau(e_{K,\tau}) = d(\tau)^{-1}(\tau \circ \psi \circ \tau)(e_K) = \tau(e_K)$$

De même comme $\rho \circ \psi = 0$:

$$\rho(e_{K,\tau}) = d(\tau)^{-1}(\rho \circ \psi \circ \tau)(e_K) = 0.$$

Pour montrer la première assertion du (ii), il suffit d'après le théorème de complétude III.1.11 de vérifier que l'on obtient la même chose en évaluant l'une de ces distributions en ρ, pour toute représentation irreductible lisse (ρ, E) de G. Il est clair que d'après le (i), on obtient toujours 0 si (ρ, E) n'est pas équivalente à (τ, W), et toujours $\tau(e_K)$ si (ρ, E) est équivalente à (τ, W) (car $e_K * e_{K'} = e_{K'} * e_K = e_K$). La dernière assertion se démontre de la même manière. □

Soit (π, V) une représentation lisse de G, et soit $v \in V$. Si $v \in V^K$, on a $\pi(e_{K',\tau})\cdot v = \pi(e_{K,\tau})\cdot v$ pour tout $K' \subset K$. Notons ce vecteur simplement $\pi(e_\tau) \cdot v$. Ceci définit un opérateur $\pi(e_\tau)$ sur V. On allègera parfois les notations en notant simplement $e_\tau \cdot v$ et e_τ lorsque le contexte indique clairement quelle est la représentation (π, V) avec laquelle on travaille. Remarquons que malgré ce que suggère cette écriture, on ne peut pas définir d'élément e_τ dans $\mathcal{H}(G)$ induisant les opérateurs $\pi(e_\tau)$. Nous verrons plus loin que e_τ définit en fait un élément du centre de la catégorie $\mathcal{M}(G)$.

Proposition. *(i) $\pi(e_\tau)$ est un projecteur de V qui commute avec l'action de G.*

— (ii) Si (π', V') est une autre représentation lisse de G, et si $A \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$, alors $A \circ \pi(e_\tau) = \pi'(e_\tau) \circ A$.

— (iii) $V = \mathrm{Im}\,\pi(e_\tau) \oplus \ker \pi(e_\tau)$ est une décomposition de V en sous-représentations, et $\mathrm{Im}\,\pi(e_\tau)$ est somme directe de sous-représentations irréductibles équivalentes à (τ, W). Aucun des sous-quotients irréductibles de $\ker \pi(e_\tau)$ n'est équivalent à (τ, W).

Démonstration. (i) Le fait que $\pi(e_\tau)$ soit un projecteur découle immédiatement du (ii) du théorème précédent. On a, pour tout K assez petit :

$$\begin{aligned}\pi(g)\pi(e_\tau)\cdot v &= \pi(g)\pi(e_{K,\tau})\cdot v = \pi(g)\pi(e_{K,\tau})\pi(g^{-1})\pi(g)\cdot v \\ &= \pi(e_{gKg^{-1},\tau})\pi(g)\cdot v = \pi(e_\tau)\pi(g)\cdot v\end{aligned}$$

et donc $\pi(e_\tau)$ commute avec l'action de G. Le (ii) se démontre de la même manière. La décomposition du (iii) est immédiate, puisque $\pi(e_\tau)$ est un projecteur G-equivariant.

Montrons que $\mathrm{Im}\,\pi(e_\tau)$ est somme directe de sous-représentations irréductibles équivalentes à (τ, W). D'après le lemme A.VII, il suffit de démontrer que $\mathrm{Im}\,\pi(e_\tau)$ est engendré par des sous-représentations équivalentes à (τ, W). Soit $w = \pi(e_\tau)\cdot v$ dans l'image de $\pi(e_\tau)$. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G tel que $v \in V^K$. Alors $w = \pi(e_\tau)\cdot v = \pi(e_{K,\tau})\cdot v$. Dans la démonstration du théorème IV.1.4, nous avons introduit le $G \times G$-morphisme :

$$\phi : \, W \otimes \tilde{W} \to \mathcal{D}(G) \simeq \mathcal{H}(G).$$

Comme $W \otimes \tilde{W}$ est irréductible d'après la proposition III.1.14, et que ϕ est non nul, ϕ est injectif. Par définition, $e_{K,\tau}$ est dans l'image de ϕ, et donc $\mathcal{H}(G) * e_{K,\tau}$ s'injecte dans $\mathrm{Im}\,\phi$. Comme $W \otimes \tilde{W}$ est en tant que représentation de G, une somme directe de représentations irréductibles équivalentes à W, il en est de même de $\mathcal{H}(G) * e_{K,\tau}$. L'image du G-morphisme

$$\mathcal{H}(G) * e_{K,\tau} \to V, \quad h * e_{K,\tau} \mapsto \pi(h * e_{K,\tau})\cdot v$$

est donc une somme directe de représentations irréductibles équivalentes à W. Ceci termine la démonstration du fait que $\mathrm{Im}\,\pi(e_\tau)$ est une somme directe de représentations isomorphes à (τ, W).

Le foncteur :

$$\mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G), \quad V \mapsto \pi(e_\tau)\cdot V \tag{IV.1.5.1}$$

est exact. En effet, il est clairement exact à gauche. Supposons que

$$\beta : \, (\pi_1, V_1) \to (\pi_2, V_2)$$

soit un morphisme surjectif de G-modules. Pour tout $w \in V_2$, il existe $v \in V_1$ tel que $\beta(v) = \pi_2(e_\tau)\cdot w$, et donc

$$\beta(\pi_1(e_\tau)\cdot v) = \pi_2(e_\tau)\cdot\beta(v) = \pi_2(e_\tau)\circ\pi_2(e_\tau)\cdot w = \pi_2(e_\tau)\cdot w.$$

Ceci montre l'assertion.

Nous pouvons maintenant montrer la dernière assertion de la proposition. Comme $\pi(e_\tau)$ annule tout sous-quotient de $\ker \pi(e_\tau)$, grâce à l'exactitude du foncteur ci-dessus et au fait que $\tau(e_\tau)$ est l'identité, aucun sous-quotient de $\ker \pi(e_\tau)$ n'est isomorphe à (τ, W). □

Le théorème IV.1.4 est maintenant complètement démontré.

Remarques. 1. Le sous-espace $\ker \pi(e_\tau)$ est le seul supplémentaire G-invariant de $\operatorname{Im} \pi(e_\tau)$.

— 2. Si (τ', W') est une autre représentation compacte irréductible de G, non équivalente à (τ, W), alors :

$$\pi(e_\tau) \circ \pi(e_{\tau'}) = \pi(e_{\tau'}) \circ \pi(e_\tau) = 0.$$

— 3. Il est facile de vérifier que $V \mapsto \pi(e_\tau) \cdot V$ définit une transformation naturelle du foncteur d'identité de la catégorie $\mathcal{M}(G)$ vers lui-même. On peut donc interpréter e_τ comme un élément du centre de $\mathcal{M}(G)$.

IV.1.6 Semi-simplicité des représentations compactes

Tirons maintenant quelques conséquences des résultats obtenus ci-dessus.

Corollaire. *Toute représentation compacte est semi-simple.*

Démonstration. D'après le lemme A.VII, il suffit de démontrer qu'une représentation compacte est engendrée par ses sous-représentations irréductibles. Soit (ρ, W) une représentation compacte de G, et soit W^f la somme de toute les sous-représentations irréductibles de W. Il s'agit donc de montrer que W/W^f est nul. Supposons que tel ne soit pas le cas, et soit π un sous-quotient irréductible de W/W^f. C'est une représentation compacte, puisque tout sous-quotient d'une représentation compacte est une représentation compacte. On a alors $e_\pi \cdot (W/W^f) \neq 0$ et donc $e_\pi \cdot W$ n'est pas inclus dans W^f. Or ceci mène à une contradiction, car par le (*iii*) de la proposition IV.1.5, $e_\pi \cdot W \subset W^f$. □

Introduisons quelques notations :

Notations. Soit (τ, W) une représentation compacte irréductible du groupe t.d. G. Notons $\mathcal{M}(G)_\tau$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ constituée des représentations qui sont somme directe de représentations irréductibles équivalentes à (τ, W) et $[\mathcal{M}(G) \setminus \tau]$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ constituée des représentations dont aucun sous-quotient irréductible n'est isomorphe à (τ, W). Plus généralement, étant données des représentations compactes irréductibles non isomorphes (τ_i, W_i), $i = 1, \dots r$, notons $[\mathcal{M}(G) \setminus \tau_1, \dots, \tau_r]$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ constituée des représentations dont aucun sous-quotient irréductible n'est isomorphe à l'un des (τ_i, W_i).

Notons $\mathcal{M}(G)_c$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ constituée des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont des représentations compactes, et $\mathcal{M}(G)_{nc}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ constituée des représentations dont aucun sous-quotient irréductible n'est une représentation compacte. Notons $\mathbf{Irr}(G)_c$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles compactes.

La catégorie $\mathcal{M}(G)_c$ est donc semi-simple, et tout module simple y est à la fois projectif et injectif.

Proposition. *Toute representation compacte irréductible (τ, W) de G est projective et injective dans $\mathcal{M}(G)$.*

Démonstration. Soit (π, V) dans $\mathcal{M}(G)$. On a :

$$\mathrm{Hom}_G(W, V) = \mathrm{Hom}_G(W, \pi(e_\tau) \cdot V),$$

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \mathrm{Hom}_G(\pi(e_\tau) \cdot V, W).$$

Ceci nous ramène montrer que W est projectif et injectif dans $\mathcal{M}(G)_\tau$, or comme nous l'avons remarqué ci-dessus, c'est bien le cas. □

IV.1.7 Décomposition de $\mathcal{M}(G)$

Réinterprétons les résultats du paragraphe précédent en termes de décompositions de catégories (A.IX). Soit (τ, W) une représentation compacte irréductible du groupe t.d. G. La catégorie $\mathcal{M}(G)$ se décompose en :

$$\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G)_\tau \times [\mathcal{M}(G) \setminus \tau].$$

Plus généralement, étant données des représentations compactes irréductibles non isomorphes (τ_i, W_i), $i = 1, \dots r$, on a une décomposition :

$$\mathcal{M}(G) = \prod_i \mathcal{M}(G)_{\tau_i} \times [\mathcal{M}(G) \setminus \tau_1, \dots, \tau_r].$$

D'autre part $\mathcal{M}(G)_c$ se décompose en :

$$\mathcal{M}(G)_c = \prod_{\tau \in \mathbf{Irr}(G)_c} \mathcal{M}(G)_\tau.$$

Il est naturel de se demander si l'on a une décomposition de la catégorie $\mathcal{M}(G)$ en

$$\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G)_c \times \mathcal{M}(G)_{nc},$$

où $\mathcal{M}(G)_{nc}$ désigne la catégorie des représentations lisses de G dont aucun sous-quotient n'est une représentation compacte. Nous donnons un critère pour ceci.

Proposition. *La catégorie $\mathcal{M}(G)$ se scinde en un produit de catégories*

$$\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G)_c \times \mathcal{M}(G)_{nc},$$

si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

(KF) *: Pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, le nombre de classes d'isomorphisme de représentations compactes irréductibles (π, V) de G telles que $V^K \neq 0$ est fini.*

Démonstration. Supposons la condition **(KF)** vérifiée. On peut alors définir pour chaque représentation lisse (ρ, W) de G, un opérateur

$$\rho(e_c) = \sum_{\tau \in \mathbf{Irr}(G)_c} \rho(e_\tau)$$

En effet, tout vecteur $w \in W$ est fixé par un certain sous-groupe ouvert compact K de G, et lorsqu'on applique $\rho(e_c)$ à w, par hypothèse seul un nombre fini de $\rho(e_\tau) \cdot w$ sont non nuls.

Comme $\rho(e_{\pi_1})\rho(e_{\pi_2}) = 0$ si (π_1, V_1) et (π_2, V_2) sont dans $\mathbf{Irr}(G)_c$ et non équivalentes, on voit que $\rho(e_c)$ est un projecteur. Donc

$$W = \rho(e_c) \cdot W \oplus (1 - \rho(e_c)) \cdot W$$

en tant que G-modules. Comme $\rho(e_c)\rho(e_\pi) = \rho(e_\pi)\rho(e_c) = \rho(e_\pi)$ pour toute représentation $(\pi, V) \in \mathbf{Irr}(G)_c$, on a

$$\rho(e_c) \cdot W = \bigoplus_{(\pi,V)\in\mathbf{Irr}(G)_c} \rho(e_\pi) \cdot W.$$

Il en découle que $\rho(e_c)\cdot W$ est le plus grand sous-module de W dont les sous-quotients irréductibles sont des représentations compactes. D'autre part, comme

$$(1 - \rho(e_c))\rho(e_\pi) = \rho(e_\pi)(1 - \rho(e_c)) = 0$$

pour toute représentation $(\pi, V) \in \mathbf{Irr}(G)_c$, d'après la proposition IV.1.5, (iii), $(1 - \rho(e_c)) \cdot W$ n'admet aucun sous-quotient compact.

Enfin, montrons l'unicité de cette décomposition. Supposons qu'il en existe une seconde de la même forme

$$W = W'_c \oplus W'_{nc}.$$

Comme W'_c est compacte, $\rho(e_c)$ agit comme l'identité sur W'_c, et donc $W'_c \subset W_c$. D'autre part, $\rho(e_c) \cdot W'_{nc} = 0$, autrement W'_{nc} contiendrait une représentation compacte. Donc $W'_{nc} \subset W_{nc}$, ce qui montre l'unicité de la décomposition.

Réciproquement, soit K un sous-groupe ouvert compact de G et posons $(\tau, E) = \mathrm{ind}_K^G 1$ (l'induite compacte de K à G de la représentation triviale de K). Par hypothèse, (τ, E) se décompose en une composante compacte et une composante non compacte

$$E = E_c \oplus E_{nc}.$$

Soit (π, V) une représentation compacte irréductible de G telle que $V^K \neq 0$. Par réciprocité de Frobénius pour l'induction compacte (III.2.6.5)

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_K^G 1, V) \simeq \mathrm{Hom}_K(1, \mathrm{Res}_K^G V) \simeq V^K$$

et π est donc un quotient de $\mathrm{ind}_K^G 1$. Comme π est projective (proposition IV.1.6), π se réalise en fait comme une sous-représentation de $E = \mathrm{ind}_K^G 1$, et elle est par définition dans la partie compacte E_c. On en déduit que les représentations compactes irréductibles (π, V) telles que $V^K \neq 0$ apparaissent comme sous-représentations de E_c. Or E_c est de type fini car c'est un quotient de

$$(\tau, E) = \mathrm{ind}_K^G 1 = P_K^G(1) = \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(K)} \mathbb{C}$$

(voir III.2.6.5) qui est de type fini (et même monogène, engendré par $e_K \otimes 1$). Une représentation semi-simple de type fini est de longueur finie, ce qui termine la démonstration. □

IV.2 Représentations unitaires

IV.2.1 Représentations hermitiennes

Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, notons $V_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent et $\bar{V}$ l'espace vectoriel complexe obtenu à partir de V, en changeant la multiplication des scalaires : le résultat de la nouvelle multiplication d'un vecteur v de V par un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ est $\bar{\lambda}v$. En particulier, $\bar{V}_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{R}}$. Si (π, V) est une représentation de G, on définit de manière évidente une représentation $(\bar{\pi}, \bar{V})$ par $\bar{\pi}(g) \cdot v = \pi(g) \cdot v$, $g \in G$, $v \in V$. On pose aussi $(\pi^h, V^h) = (\tilde{\bar{\pi}}, \tilde{\bar{V}})$. On remarque que l'on a aussi $(\pi^h, V^h) = (\bar{\tilde{\pi}}, \bar{\tilde{V}})$.

Définition. On dit que la représentation (π, V) est hermitienne s'il existe une forme hermitienne non dégénérée $\langle .\,,.\rangle$ sur V telle que pour tous $v, w \in V$, pour tout $g \in G$

$$\langle v, w\rangle = \langle \pi(g) \cdot v, \pi(g) \cdot w\rangle.$$

Remarques. 1. Si (π^h, V^h) est isomorphe à (π, V), alors elle est hermitienne. En effet, la dualité canonique entre V et V^h donne l'existence d'une telle forme. Réciproquement, si (π, V) est admissible, le produit hermitien étant non dégénéré, il induit une injection de $\bar{V}$ dans $\tilde{V}$. En passant au dual, on obtient une surjection de $V = \tilde{\tilde{V}}$ sur $(\bar{V})\tilde{}$ (remarquons que c'est là que l'on utilise l'hypothèse V admissible). On en déduit par conjugaison une surjection de $\bar{V}$ dans $\tilde{V}$, qui est égale à l'injection $\bar{V} \hookrightarrow \tilde{V}$ obtenue précédemment. Tous ces morphismes étant G-équivariants, on obtient $\bar{V} \simeq \tilde{V}$ en tant que représentation de G, d'où $(\pi^h, V^h) \simeq (\pi, V)$.

— 2. Si (π, V) est irréductible admissible hermitienne, toute autre forme hermitienne non dégénérée G-invariante sur V est égale à $\langle .\,,.\rangle$ à multiplication par un scalaire non nul près, d'après la proposition III.1.9.

Soit H un sous-groupe fermé du groupe t.d. G et soit (τ, E) une représentation lisse de H. On suppose que $H\backslash G$ est compact, de sorte que $\mathrm{Ind}_H^G(\tau, E) = \mathrm{ind}_H^G(\tau, E)$ (voir III.2.3). On aimerait que l'induction préserve les représentations hermitiennes, mais tel n'est pas le cas, comme le montre le calcul suivant : d'après la proposition III.2.2, (ii),

$$\mathrm{ind}_H^G(\tilde{\tau}) = \mathrm{ind}_H^G(\tau \otimes \delta_{H\backslash G})\tilde{}.$$

Comme il est clair que pour toute représentation lisse ρ de H, $\overline{\mathrm{ind}_H^G \rho} = \mathrm{ind}_H^G \bar{\rho}$, on obtient

$$\mathrm{ind}_H^G(\tau^h) = \mathrm{ind}_H^G(\tau \otimes \delta_{H\backslash G})^h.$$

Pour obtenir une induction qui préserve les représentations hermitiennes, il faut normaliser celle-ci par le facteur $\delta_{H\backslash G}^{1/2}$. Comme $\delta_{H\backslash G}$ de H est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, ceci est défini sans ambiguïté. On pose donc :

$$i_H^G\,\tau = \mathrm{ind}_H^G(\tau \otimes \delta_{H\backslash G}^{1/2}). \tag{IV.2.1.1}$$

En remarquant que $\tilde{\delta}_{H\backslash G} = \delta_{H\backslash G}^{-1}$, le calcul ci-dessus montre immédiatement qu'avec cette nouvelle définition de l'induction on a maintenant

$$(i_H^G\,\tau)\tilde{} = i_H^G(\tilde{\tau}), \quad (i_H^G\,\tau)^h = i_H^G(\tau^h). \tag{IV.2.1.2}$$

IV.2.2 Représentation unitaires

Les représentations unitaires d'un groupe topologique localement compact G sont les représentations continues de G dans un espace de Hilbert qui préservent le produit hermitien. En général, pour un groupe t.d. de telles représentations ne sont pas lisses. En quelque sorte, la lissité est incompatible avec la complétude de l'espace de représentation. Nous souhaitons ici rester dans le cadre des représentations lisses, ce qui nous pousse à redéfinir quelque peu la notion de représentation unitaire. Les résultats cités dans [3], 4.21 montrent que la nuance n'est en définitive pas très importante.

Définition. Soit (π, V) une représentation lisse du groupe G. Elle est dite unitaire si l'espace vectoriel complexe V est muni d'un produit hermitien (défini positif) $\langle .\,,.\rangle_V$ G-invariant, c'est-à-dire

$$\langle \pi(g)\cdot u,\, \pi(g)\cdot v\rangle_V = \langle u,\, v\rangle_V, \quad (u, v \in V),\ (g \in G).$$

Il découle facilement de la proposition III.1.9 que si (π, V) est irréductible admissible unitaire, un produit hermitien défini positif G-invariant sur V est égal $\langle .\,,.\rangle_V$ à multiplication par un réel non nul positif près.

L hypothèse d'admissibilité va nous permettre de retrouver les propriétés habituelles des représentations unitaires dans les espaces de Hilbert.

Proposition. *Soit (π, V) une représentation lisse unitaire admissible du groupe t.d. G pour le produit hermitien $\langle .\,,\,.\rangle_V$. Si V_1 est un sous-espace G-stable de V alors*

$$V_1^{\perp} := \{v \in V \,|\, \forall v_1 \in V_1, \langle v,\, v_1\rangle_V = 0\}$$

est aussi un sous-espace G-stable de V et

$$V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$$

<u>*Démonstration*</u>. La seule partie non triviale du lemme est de montrer que si $v \in V$, alors $v \in V_1 + V_1^{\perp}$. Comme (π, V) est admissible, on peut trouver un sous-groupe compact ouvert K de G tel que $v \in V^K$. Remarquons que $V_1^K = V^K \cap V_1$, et soit W l'orthogonal de V_1^K dans V^K pour la restriction $\langle .\,,.\rangle_{V^K}$ du produit hermitien à V^K. Comme V^K est de dimension finie, on a :

$$V^K = V_1^K \oplus W.$$

Il reste à montrer que W est inclus dans $V_1^{\perp}$. Supposons que tel ne soit pas le cas. Alors il existe $w \in W$, $v_1 \in V_1$ tel que $\langle w,\, v_1\rangle_V \neq 0$. Or :

$$\langle w,\, v_1\rangle_V = \langle \pi(e_K)\cdot w,\, v_1\rangle_V = \langle w,\, \pi(e_K)\cdot v_1\rangle_V = \langle w,\, \pi(e_K)\cdot v_1\rangle_{V^K},$$

et ceci ne peut être non nul d'après la définition de W. □

Corollaire. *On suppose que G admet une base dénombrable de voisinage de l'identité. Soit (π, V) une représentation unitaire admissible de G.*

(i) $\dim \mathrm{End}_G(V) = 1$ *si et seulement si* (π, V) *est irréductible.*

(ii) (π, V) *est complètement réductible (semi-simple).*

Démonstration. Le premier point est clair : si (π, V) est irréductible, alors $\dim \mathrm{End}_G(V) = 1$ par le lemme de Schur (voir III.1.8). Réciproquement, si (π, V) n'est pas irréductible, il existe une sous-représentation V_1 de V et d'après ce qui précède $V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$ est une décomposition de V en sous-représentations. Les projections sur V_1 et $V_1^{\perp}$ engendrent un sous-espace de dimension deux de $\mathrm{End}_G(V)$.

Le second point découle de A.VII. □

IV.2.3 Induction des représentations unitaires

Soit H un sous-groupe fermé de G tel que $H\backslash G$ soit compact. Si (τ, E) est une représentation unitaire de H, on sait d'après la section précédente que $i_H^G\,\tau$ est hermitienne. Décrivons explicitement une forme sesquilinéaire G-invariante sur $i_H^G\,\tau$ induisant cette structure hermitienne. Nous montrerons ensuite qu'elle est définie positive, et donc que $i_H^G\,\tau$ est unitaire.

On pose, pour tout couple (f_1, f_2) de fonctions dans $i_H^G\,E$,

(IV.2.3.1)
$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{H\backslash G} \langle f_1(g_x), f_2(g_x)\rangle_V \, d\nu_{H\backslash G}(x),$$

où g_x est un représentant dans G de la classe $x \in H\backslash G$. Il faut montrer que ceci est bien défini, c'est-à-dire que la fonction

(IV.2.3.2)
$$g \mapsto \langle f_1(g), f_2(g)\rangle_V$$

est bien dans $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$ (voir II.3.9).

Or,
$$\langle f_1(hg), f_2(hg)\rangle_V = \langle \delta_{H\backslash G}^{\frac{1}{2}}(h)\tau(h)\cdot f_1(g), \delta_{H\backslash G}^{\frac{1}{2}}(h)\tau(h)\cdot f_2(g)\rangle_V$$
et comme $\langle .\,,.\rangle_V$ est H-invariant, et que $\delta_{H\backslash G}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on obtient
$$\langle f_1(hg), f_2(hg)\rangle_V = \delta_{H\backslash G}(h)\langle f_1(g), f_2(g)\rangle_V.$$

Les propriétés de lissité et de support étant claires, on voit que (IV.2.3.2) est dans $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$. On vérifie immédiatement que $\langle .\,,.\rangle$ définit une forme sesquilinéaire sur $i_H^G\,E$ et que cette forme est positive. D'autre part, si $\langle f, f\rangle = 0$, alors l'intégrale se ramenant à une somme finie, on voit que ceci entraine $f = 0$, et donc $\langle .\,,.\rangle$ est bien un produit hermitien.

IV.3 Représentations de carré intégrable

IV.3.1 L'espace $L^2(G, \chi, dg^*)$

Nous supposons que G est unimodulaire. Comme son centre $Z(G)$ est abélien, il est aussi unimodulaire, et donc il en est aussi ainsi du groupe quotient $G/Z(G)$. On note dg^* une mesure de Haar biinvariante sur $G/Z(G)$.

Définition. Soit χ un caractère unitaire de $Z(G)$ et soit $L^2(G, \chi, dg^*)$ l'espace des fonctions f dans $\mathcal{C}^\infty(G)$ telles que

a) $f(gz) = \chi(z)f(g), \quad (g \in g), (z \in Z(G))$

b) $\int_{G/Z(G)} |f(g)|^2 \, dg^* < \infty$.

$L^2(G, \chi, dg^*)$ est un sous-espace G stable de $\mathcal{C}^\infty(G)$ pour la représentation régulière droite, et

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{L^2,\chi} = \int_{G/Z(G)} \overline{f_1(g)} f_2(g) \, dg^*$$

définit sur $(L^2(G, \chi, dg^*), r)$ un produit hermitien invariant défini positif. La représentation $(L^2(G, \chi, dg^*), r)$ de G est donc unitaire.

IV.3.2 Admissibilité et unitarité

Nous reprenons les hypothèses du paragraphe précédent.

Définition. Soit (π, V) une représentation lisse de G. On dit que (π, V) est de carré intégrable modulo le centre, ou bien que (π, V) est une série discrète si

a) Le centre $Z(G)$ de G agit sur V par un caractère unitaire χ.

a) Tout coefficient matriciel $\phi_{v,\lambda}$ de (π, V) est dans $L^2(G, \chi, dg^*)$.

S'il existe un caractère ω de G tel que $(\pi\omega, V)$ est de carré intégrable modulo le centre, on dit que (π, V) est essentiellement de carré intégrable modulo le centre.

Remarque. Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G, dont le caractère central est unitaire. Alors, pour que (π, V) soit de carré intégrable modulo le centre, il suffit que l'un des coefficients matriciels de π soit de carré intégrable modulo le centre. Ceci est bien entendu faux si on ne suppose pas (π, V) irréductible. Comme nous n'utilisons pas ce résultat, nous laissons la démonstration (facile) au lecteur.

Proposition. *Soit (π, V) une représentation lisse irréductible, essentiellement de carré intégrable modulo le centre de G. Alors (π, V) est admissible.*

Démonstration. D'après le lemme III.1.14, on peut supposer que (π, V) est une représentation lisse de carré intégrable modulo le centre. On reprend l'idée de la démonstration du théorème IV.1.3. Supposons que (π, V) ne soit pas admissible. Alors il existe un sous-groupe compact ouvert K de G, un vecteur v non nul dans V^K et une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G tels que $\{\pi(e_K)\pi(g_n) \cdot v\}$ soit libre dans V^K (en effet, V^K est engendré par les $\{\pi(e_K)\pi(g) \cdot v\}$ d'après III.1.5). Remarquons alors que les doubles classes $Kg_nZ(G)$ sont distinctes dans $K\backslash G/Z(G)$. Choisissons $\lambda \in \tilde{V}^K$ tel que $\lambda(\pi(e_K)\pi(g_n) \cdot v) = 1$ pour tout n. Soit $\bar{K}$ l'image de K dans

$G/Z(G)$, de sorte que $\bar{K}$ est un sous-groupe ouvert compact de $G/Z(G)$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_{G/Z(G)} |\phi_{v,\lambda}(g)|^2 \, dg^* &= \int_{G/Z(G)} |\lambda(\pi(g)\cdot v)|^2 \, dg^* \\ &= \int_{G/Z(G)} |(\pi(e_K)\cdot\lambda)(\pi(g)\cdot v)|^2 \, dg^* \\ &= \int_{G/Z(G)} |\lambda(\pi(e_K)\pi(g)\cdot v)|^2 \, dg^* \\ &= \sum_{\bar{g}\in\bar{K}\backslash(G/Z(G))} |\lambda(\pi(e_K)\pi(g)\cdot v)|^2 \, \mathrm{Vol}_{dg^*}(\bar{K})\end{aligned}$$

$$\geq \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda(\pi(e_K)\pi(g_i)\cdot v)|^2 \, \mathrm{Vol}_{dg^*}(\bar{K}) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_{dg^*}(\bar{K}) = \infty$$

et nous aboutissons à une contradiction. □

Nous montrons maintenant qu'une représentation admissible de carré intégrable modulo le centre est unitaire.

Lemme. *Soit (π, V) une représentation lisse de G, admissible et de carré intégrable modulo le centre. Soit χ son caractère central (unitaire). Alors (π, V) est unitaire et semi-simple.*

Démonstration. Soit $W \subset V$ une sous-représentation de type fini, engendrée par des vecteurs $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Notons $\mathrm{Ann}(W)$ l'annulateur de W dans $\tilde{V}$, de sorte que $\tilde{W} \simeq \tilde{V}/\mathrm{Ann}(W)$. Posons, pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \tilde{W}$,

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1,\ldots,n} \int_{G/Z(G)} \overline{\langle \pi(g)\cdot w_i, \lambda_1\rangle} \langle \pi(g)\cdot w_i, \lambda_2\rangle \, dg^*.$$

Ceci définit une forme hermitienne définie positive G-invariante sur $\tilde{W}$. On en déduit que $\tilde{W}$ est unitaire, et donc que W est unitaire. D'après le corollaire IV.2.2, W est alors semi-simple. Comme V est l'union de ses sous-représentations de type fini, le lemme A.VII nous dit que V est semi-simple. Toute sous-représentation de type fini de V étant unitaire, V l'est aussi. □

IV.3.3 Orthogonalité de Schur

Rappelons que pour toute fonction f sur un groupe G, la fonction $\check{f}$ est définie par $\check{f}(g) = f(g^{-1})$.

Lemme. (i) *Soit (π, V) une représentation de G irréductible, essentiellement de carré intégrable modulo le centre. Alors il existe un réel strictement positif $d(\pi)$, appelé le degré formel de π, tel que pour tout $v_1, v_2 \in V$, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \tilde{V}$, on ait :*

$$\int_{G/Z(G)} \phi_{v_1,\lambda_1}(g)\check{\phi}_{v_2,\lambda_2}(g) \, dg^* = \frac{\lambda_1(v_2)\lambda_2(v_1)}{d(\pi)}.$$

(ii) *Soient (π_1, V_1), (π_2, V_2) deux représentations de G irréductibles, essentiellement de carré intégrable modulo le centre, non équivalentes, et de même caractère central. Alors pour tous $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $\lambda_1 \in \tilde{V}_1$, $\lambda_2 \in \tilde{V}_2$,*

$$\int_{G/Z(G)} \phi_{v_1,\lambda_1}(g)\check{\phi}_{v_2,\lambda_2}(g) \, dg^* = 0.$$

Démonstration. Soit ω un caractère lisse de G tel que $\pi\omega$ est de carré intégrable modulo le centre. Il est facile de voir que l'intégrale que l'on cherche à calculer est la même si l'on remplace π par $\pi\omega$, les contributions dues à ω se simplifiant. On peut donc supposer π de carré intégrable modulo le centre. D'après le lemme du paragraphe précédent, on peut munir V d'un produit hermitien invariant $\langle .\,,.\rangle_V$. Considérons la représentation $V \otimes \tilde{V}$ de $G \times G$: d'après la proposition III.1.14, elle est irréductible, admissible, et sa contragrédiente est naturellement isomorphe à $\tilde{V} \otimes V$.

Considérons la forme bilinéaire B sur $(V \otimes \tilde{V}) \times (\tilde{V} \otimes V)$ définie par :

$$B(v_1 \otimes \lambda_1, \lambda_2 \otimes v_2) = \int_{G/Z(G)} \phi_{v_1,\lambda_1}(g)\check{\phi}_{v_2,\lambda_2}(g)\ dg^*.$$

Il et facile de voir que cette forme bilinéaire est $G \times G$-invariante car $G/Z(G)$ est unimodulaire. D'après le lemme III.1.9, pour montrer que cette forme est non dégénérée, il suffit de montrer qu'elle est non nulle. Choisissons $v \in V$, et soit $\lambda_v \in \tilde{V}$ la forme linaire sur V définie par $\lambda_v(w) = \langle v, w\rangle_V$, $w \in V$. Comme

$$\begin{aligned}\lambda_v(\pi(g^{-1}) \cdot v) &= \langle v, \pi(g^{-1}) \cdot v\rangle_V = \langle \pi(g) \cdot v, v\rangle_V = \overline{\langle v, \pi(g) \cdot v\rangle}_V \\ &= \overline{\lambda_v(\pi(g) \cdot v)},\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}B(v \otimes \lambda_v, \lambda_v \otimes v) &= \int_{G/Z(G)} \lambda_v(\pi(g) \cdot v)\lambda_v(\pi(g^{-1}) \cdot v)\ dg^* \\ &= \int_{G/Z(G)} |\lambda_v(\pi(g) \cdot v)|^2\ dg^* > 0\end{aligned}$$

D'après le lemme III.1.9, il existe une constante complexe non nulle c telle que la forme bilinéaire B sur $(V \otimes \tilde{V}) \times (\tilde{V} \otimes V)$ soit égale à c fois la forme bilinéaire canonique sur $(V \otimes \tilde{V}) \times (\tilde{V} \otimes V) \simeq (V \otimes \tilde{V}) \times \widetilde{(V \otimes \tilde{V})}$. Celle-ci est donnée par

$$(v_1 \otimes \lambda_1, \lambda_2 \otimes v_2)_0 = \lambda_1(v_2)\lambda_2(v_1).$$

Comme

$$(v \otimes \lambda_v, \lambda_v \otimes v)_0 = \lambda_v(v)^2 = \langle v, v\rangle^2 > 0,$$

la constante c est réelle, strictement positive. On pose donc $d(\pi) = c^{-1}$.

Démontrons (ii). On fixe $\lambda_1 \in \tilde{V}_1$ et $v_2 \in V_2$. On définit un opérateur d'entrelacement entre V_1 et $(\tilde{V}_2)\tilde{} \simeq V_2$ par :

$$v_1 \mapsto \left(\lambda_2 \mapsto \int_{G/Z(G)} \phi_{v_1,\lambda_1}(g)\check{\phi}_{v_2,\lambda_2}(g)\ dg^*\right).$$

Comme V_1 et V_2 sont non équivalents, cet opérateur d'entrelacement est nul. $\square$

Corollaire. *Soient (π_i, V_i), $i = 1, \ldots, r$, des représentations de G irréductibles, essentiellement de carré intégrable modulo le centre, non équivalentes deux à deux , et de même caractère central. Pour chaque i, choisissons $v_i \in V_i$ et $\lambda_i \in \tilde{V}_i$ non nuls. Alors les coefficients matriciels ϕ_{v_i,λ_i} sont linéairement indépendants. La même conclusion prévaut si l'on considère des représentations compactes irréductibles.*

Démonstration. Supposons que $\sum_i c_i \phi_{v_i,\lambda_i} = 0$. Fixons j entre 1 et r, et choisissons $\lambda'_j \in \tilde{V}_j$ tel que $\lambda'_j(v_j) = 1$ et $v'_j \in V_j$ tel que $\lambda_j(v'_j) = 1$. Alors d'après le (ii) du lemme, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{G/Z(G)} \left(\sum_i c_i \phi_{v_i,\lambda_i} \right) \check{\phi}_{v'_j,\lambda'_j} \, dg^* = c_j \int_{G/Z(G)} \phi_{v_j,\lambda_j} \check{\phi}_{v'_j,\lambda'_j} \, dg^* \\ &= c_j \, d(\pi_j)^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $c_j = 0$. Si les représentations sont compactes, le centre de G est compact (lemme IV.1.3). Il n'y a alors pas besoin de quotienter par le centre et on adapte les démonstrations précédentes. □

Remarque. Plus généralement, si A est un sous-groupe de $Z(G)$ tel que $Z(G)/A$ est compact, on peut remplacer les intégrales sur $G/Z(G)$ par des intégrales sur G/A sans affecter la convergence de celles-ci, et les résultats obtenus ci-dessus sont toujours valides.

IV.3.4 Notes pour le chapitre IV

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [3]. Pour leur rédaction, je me suis aussi servi des notes [22] et [37]. Par exemple, la condition (**KF**) vient de [37]. La démonstration du lemme IV.3.2 est tirée de [44].

Chapitre V

Structure des groupes réductifs p-adiques

Ce chapitre est un catalogue de résultats, pas tous démontrés ici, mais dans la mesure du possible, référencés. Nous y introduisons notre objet principal d'étude, les groupes réductifs p-adiques. Notre exposition, jusqu'ici à peu près « self-contained » cesse donc de l'être, car il ne saurait être question de traiter dans ce livre de la théorie des groupes algébriques, ou même des groupes algébriques réductifs, d'autant que ceci est fort bien fait dans de nombreux ouvrages ([5],[32], [41], [6]). De même, nous ne nous sentons pas le courage (ou la compétence) d'exposer la théorie de Bruhat-Tits ([13], [14],[43]). La classe de groupes que nous étudions est celle des groupes des points rationnels d'un groupe algébrique réductif connexe défini sur un corps p-adique. La théorie de Bruhat-Tits construit l'immeuble de tels groupes, et l'action du groupe sur son immeuble. Nous ne saurions trop recommander de compléter la présentation sommaire faite ici par l'étude de deux ou trois exemples concrets de groupes classiques, en commençant par le groupe $GL(n)$. Ces exemples sont développés dans la littérature que nous indiquons.

V.1 Les corps locaux non archimédiens

Nous renvoyons le lecteur à [20] pour plus de détails concernant les corps locaux non archimédiens, ainsi que pour les démonstrations des résultats énoncés ici.

Soit $\mathbb{F}$ un corps local non archimédien muni de sa valuation discrète $v_{\mathbb{F}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z} \cup \infty$, normalisée de sorte que l'image de $v_{\mathbb{F}}$ soit $\mathbb{Z} \cup \infty$. On note $\mathfrak{O}_{\mathbb{F}}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{F}$,

$$\mathfrak{O}_{\mathbb{F}} = \{x \in \mathbb{F} |\, v_{\mathbb{F}}(x) \geq 0\}$$

et $\mathfrak{P}_{\mathbb{F}}$ son unique idéal maximal ($\mathfrak{O}_{\mathbb{F}}$ est un anneau local),

$$\mathfrak{P}_{\mathbb{F}} = \{x \in \mathbb{F} |\, v_{\mathbb{F}}(x) > 0\}.$$

On note $\mathfrak{O}_{\mathbb{F}}^{\times}$ le groupe des unités de $\mathfrak{O}_{\mathbb{F}}$. C'est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{O}_{\mathbb{F}}$ de valuation nulle. Fixons une uniformisante ϖ de $\mathbb{F}$, c'est-à-dire un élément vérifiant $v_{\mathbb{F}}(\varpi) = 1$. On peut alors écrire tout $x \in \mathbb{F}^{\times}$ de manière unique sous la forme $x = u\varpi^n$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $u \in \mathfrak{O}_{\mathbb{F}}^{\times}$.

Soit k le corps résiduel $\mathfrak{O}_\mathbb{F}/\mathfrak{P}_\mathbb{F}$. C'est un corps fini donc isomorphe à $\mathbb{F}_q$, pour une certaine puissance q d'un nombre premier p. La valeur absolue normalisée sur $\mathbb{F}$ est donnée par

$$|x|_\mathbb{F} = q^{-v_\mathbb{F}(x)}, \quad (x \in \mathbb{F})$$

Cette valeur absolue munit $\mathbb{F}$ d'une structure d'espace métrique, ce qui en fait un groupe (pour l'addition) topologique totalement discontinu. Une base de voisinages de 0 est donnée par les sous-groupes ouverts compacts $\mathfrak{P}_\mathbb{F}^n$.

Le groupe additif $(\mathbb{F}, +)$ est muni d'une mesure de Haar dx, que l'on peut normaliser par exemple en fixant le volume du compact $\mathfrak{O}_\mathbb{F}$ égal à 1. Valeur absolue et mesure de Haar sont reliées par la formule :

$$\int_\mathbb{F} f(ax)\, dx = |a|_\mathbb{F} \int_\mathbb{F} f(x)\, dx, \quad (a \in \mathbb{F}^\times), (f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{F})).$$

La clôture algébrique de $\mathbb{F}$ est notée $\bar{\mathbb{F}}$ et sa clôture séparable $\mathbb{F}^s$. Le groupe multiplicatif à une variable $\mathbf{G}_m$ est le groupe algébrique défini sur $\mathbb{F}$ dont le groupe des points sur $\mathbb{F}$ s'identifie à $\mathbb{F}^\times$.

Tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}$ est muni d'une topologie « transcendante ». C'est le cas en particulier de l'algèbre $M_n(\mathbb{F})$ des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{F}$. Le groupe $GL_n(\mathbb{F})$ des matrices inversibles dans $M_n(\mathbb{F})$ est muni de la topologie induite, ce qui en fait un groupe t.d. Une base de voisinage de l'identité est donnée par les sous-groupes ouverts compacts

$$K_n = \mathrm{Id}_n + \mathfrak{P}_\mathbb{F}^n\, M_n(\mathfrak{O}_\mathbb{F}).$$

V.2 Les groupes réductifs p-adiques

V.2.1 Groupes linéaires algébriques

On rappelle quelques éléments de la théorie des groupes linéaires algébriques. Nous renvoyons le lecteur à [41] pour les notions et les démonstrations des énoncés rappelés ici. On fixe un corps local non archimédien $\mathbb{F}$ comme dans la section précédente.

Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique linéaire connexe défini sur $\mathbb{F}$ et notons G le groupe de ses points sur $\mathbb{F}$. On identifie $\mathbb{G}$ et le groupe de ses points sur $\bar{\mathbb{F}}$. On note respectivement $R(\mathbb{G})$ et $R_u(\mathbb{G})$ le radical et le radical unipotent de $\mathbb{G}$. Le groupe $R(\mathbb{G})$ est un sous-groupe algébrique distingué connexe résoluble de $\mathbb{G}$, et maximal pour cette propriété. Il est unique. De même $R_u(\mathbb{G})$ est le sous-groupe algébrique distingué connexe unipotent de $\mathbb{G}$ et maximal pour cette propriété. Si $R_u(\mathbb{G})$ est trivial, le groupe $\mathbb{G}$ est dit réductif. Si $R(\mathbb{G})$ est trivial, le groupe $\mathbb{G}$ est dit semi-simple. Soit $\mathcal{D}\mathbb{G}$ le groupe dérivé de $\mathbb{G}$. Il est toujours défini sur $\mathbb{F}$. Si $\mathbb{G}$ est réductif, alors $R(\mathbb{G})$ est central dans $\mathbb{G}$, $\mathcal{D}\mathbb{G}$ est semi-simple, $\mathbb{G}$ est engendré par $R(\mathbb{G})$ et $\mathcal{D}\mathbb{G}$, et $R(\mathbb{G}) \cap \mathcal{D}\mathbb{G}$ est fini. Notons $Z(\mathbb{G})$ le centre de $\mathbb{G}$. Si $\mathbb{G}$ est réductif, $R(\mathbb{G})$ est la composante neutre de $Z(\mathbb{G})$ et les sous-groupes $R(\mathbb{G})$ et $Z(\mathbb{G})$ sont définis sur $\mathbb{F}$. On note respectivement $R(G)$ et $Z(G)$ leurs points sur $\mathbb{F}$.

Si $\mathbb{G}$ est réductif, un tore maximal dans $\mathbb{G}$ est son propre centralisateur. Il existe des tores maximaux de $\mathbb{G}$ définis sur $\mathbb{F}$ et si $\mathbb{F}$ est de caractéristique nulle, l'ensemble des classes de conjugaison sous G des tores maximaux de $\mathbb{G}$ définis sur $\mathbb{F}$ est fini. Tous les tores de $\mathbb{G}$ définis et déployés sur $\mathbb{F}$ et maximaux pour cette propriété sont conjugués sous G.

On appelle composante déployée de $\mathbb{G}$ un tore défini et déployé sur $\mathbb{F}$, contenu dans le radical $R(\mathbb{G})$ et maximal pour cette propriété. Si $\mathbb{G}$ est réductif, une composante déployée de $\mathbb{G}$ est alors un tore déployé maximal dans le centre de $\mathbb{G}$. Comme deux tels tores doivent être conjugués par $R(G)$ qui est central, on en déduit l'unicité de la composante déployée pour un groupe réductif.

Le groupe $\mathbb{G}$ peut être plongé algébriquement dans un groupe $GL_N(\bar{\mathbb{F}})$ pour un certain N, le plongement étant défini sur $\mathbb{F}$. Le groupe G se plonge donc dans $GL_N(\mathbb{F})$. Muni de la topologie induite, G devient un groupe topologique totalement discontinu, pour lequel s'appliquent donc les notions et résultats des chapitres II et III. Cette topologie ne dépend pas du choix du plongement dans un $GL_N(\mathbb{F})$. De plus, si $\mathbb{G}$ est réductif, G est unimodulaire.

V.2.2 Caractères rationnels

Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{F}$ et soit $X^*(\mathbb{G})$ le groupe de ses caractères algébriques (c'est-à-dire le groupe des morphismes algébriques définis sur $\bar{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{G}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$). On note $X^*(G)$ le sous-groupe de $X^*(\mathbb{G})$ des caractères définis sur $\mathbb{F}$, et on l'appelle groupe des caractères rationnels de $\mathbb{G}$ (où de G). Comme la restriction d'un tel caractère algébrique à $\mathcal{D}\mathbb{G}$ est triviale puisque $\mathbf{G}_m$ est commutatif, $X^*(\mathbb{G})$ s'identifie au groupe des caractères algébriques de $\mathbb{G}/\mathcal{D}\mathbb{G}$. Comme $\mathbb{G} = R(\mathbb{G})\mathcal{D}\mathbb{G}$, on a

$$\mathbb{G}/\mathcal{D}\mathbb{G} \simeq R(\mathbb{G})/(R(\mathbb{G}) \cap \mathcal{D}\mathbb{G}).$$

Or $R(\mathbb{G})$ est un tore, et le groupe de ses caractères algébriques $X^*(R(\mathbb{G}))$ est un groupe abélien de type fini, sans torsion (un réseau, donc isomorphe à $\mathbb{Z}^r$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$). Le groupe $R(\mathbb{G}) \cap \mathcal{D}\mathbb{G}$ étant fini, $X^*(\mathbb{G})$ est un sous-réseau de rang maximal de $X^*(R(\mathbb{G}))$. Le groupe des caractères rationnels $X^*(G)$ de G est un sous-réseau, pouvant être trivial, du réseau $X^*(\mathbb{G})$.

Soit $X_*(\mathbb{G})$ le groupe dual, $X_*(\mathbb{G}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(\mathbb{G}), \mathbb{Z})$. Notons $\langle .\, , .\rangle$ la dualité naturelle entre $X^*(\mathbb{G})$ et $X_*(\mathbb{G})$ et remarquons cette dualité induit un isomorphisme $X^*(\mathbb{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_*(\mathbb{G}), \mathbb{Z})$.

On note aussi $X_*(G)$ le réseau $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(G), \mathbb{Z})$. De même $X^*(G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_*(G), \mathbb{Z})$.

Remarques. *Cas des tores.*

—1. Si $\mathbb{T}$ est un tore algébrique défini sur $\mathbb{F}$, on peut en plus identifier $X_*(\mathbb{T})$ au groupe des morphismes de $\mathbf{G}_m$ dans $\mathbb{T}$ de sorte que si $t \in T$, $\phi \in X_*(\mathbb{T})$ et $\chi \in X^*(\mathbb{T})$,

$$\chi(\phi(t)) = t^{\langle \chi, \phi \rangle}.$$

Les éléments de $X^*(\mathbb{T})$ forment une base de l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $\mathbb{T}$. L'algèbre de groupe $\bar{\mathbb{F}}[X^*(\mathbb{T})]$ est l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{T}$, et $\mathbb{T}$ s'identifie au spectre de cette algèbre.

— 2. Un tore $\mathbb{T}$ défini sur $\mathbb{F}$ est dit anisotrope si $X^*(T) = \{0\}$ et déployé si $X^*(T) = X^*(\mathbb{T})$. Tout tore $\mathbb{T}$ défini sur $\mathbb{F}$ admet un unique sous-tore déployé maximal $\mathbb{A}$, et un unique sous tore anisotrope maximal $\mathbb{T}_{an}$ et $\mathbb{T}$ est le produit presque direct de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{T}_{an}$ (ceci veut dire qu'ils engendrent $\mathbb{T}$ et que leur intersection est finie).

V.2.3 Caractères non ramifiés

Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{F}$. Définissons un morphisme [1]

$$H_G : G \to X_*(G) \tag{V.2.3.1}$$

par la formule :

$$\langle\, \chi, H_G(g)\,\rangle = v_{\mathbb{F}}(\chi(g)), \quad g \in G, \chi \in X^*(G).$$

Soit ${}^0G$ le noyau de ce morphisme, et $\Lambda(G)$ son image. On a donc une suite exacte :

$$1 \to {}^0G \longrightarrow G \xrightarrow{H_G} \Lambda(G) \to 1$$

Il est immédiat qu'une définition équivalente de ${}^0G$ est donnée par

$${}^0G := \bigcap_{\chi\in X^*(G)} \ker|\chi|_{\mathbb{F}}.$$

Lemme. *Soit $\chi \in X^*(G)$. Alors $|\chi|_{\mathbb{F}} \;: G \to \mathbb{R}_+^*$ est un caractère lisse de G dont le noyau contient tous les sous-groupes compacts de G.*

Démonstration. Le noyau de $|\chi|_{\mathbb{F}}$ est l'image réciproque par χ de l'ouvert compact $\mathfrak{O}_{\mathbb{F}}^{\times}$ de $\mathbb{F}^{\times}$, c'est donc un ouvert de G. Par conséquent, $|\chi|_{\mathbb{F}}$ est un caractère lisse de G, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. En particulier son noyau contient des sous-groupes ouverts compacts aussi petits que l'on veut.

Pour tout sous-groupe compact K de G, prenons un sous-groupe ouvert compact $K_1 \subset K$ dans le noyau de $|\chi|_{\mathbb{F}}$. Comme K/K_1 est fini (lemme II.3.2), et que le seul sous-groupe fini de $\mathbb{R}_+^*$ est $\{1\}$, K est dans le noyau de $|\chi|_{\mathbb{F}}$. □

Proposition. *Le groupe ${}^0G$ est un sous-groupe ouvert, fermé et distingué unimodulaire de G. Tout sous-groupe compact de G est contenu dans ${}^0G$. Le groupe dérivé $\mathcal{D}G$ est contenu dans ${}^0G$.*

Démonstration. D'après le lemme, tout sous-groupe compact de G est dans ${}^0G$. D'autre part, $\ker|\chi|_{\mathbb{F}}$ est un sous-groupe distingué de G, et l'intersection de sous-groupes distingués est encore distinguée, donc ${}^0G$ est distingué dans G. Comme les caractères $|\chi|_{\mathbb{F}}$ sont lisses, les $\ker|\chi|_{\mathbb{F}}$ sont fermés dans G. Il s'ensuit que ${}^0G$ est fermé dans G. Comme ${}^0G$ contient des sous-groupes ouverts compacts, il doit être ouvert dans G. Il est donc unimodulaire car G l'est. La dernière assertion résulte du fait que tout caractère est trivial sur le groupe dérivé. □

Définition. Un caractère non ramifié de G est un morphisme de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$ trivial sur ${}^0G$. On note $\mathcal{X}(G)$ l'ensemble des caractères non ramifiés de G.

V.2.4 Structure de variété de $\mathcal{X}(G)$

Un caractère non ramifié de G est de la forme $u \circ v$ où u est un morphisme de $\Lambda(G)$ dans $\mathbb{C}^{\times}$. Les caractères non ramifiés de G s'identifient ainsi aux caractères de $\Lambda(G)$, c'est-à-dire aux éléments du groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda(G), \mathbb{C}^{\times})$. Remarquons que $\Lambda(G)$, sous-groupe de $X_*(G)$, est un

1. Le lecteur prendra garde au fait que le groupe $X_*(G)$ étant un réseau, on note sa loi additivement, alors que la loi de G est notée multiplicativement.

groupe abélien libre de type fini. Introduisons l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\Lambda(G)]$. On a un isomorphisme naturel :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda(G), \mathbb{C}^\times) \simeq \mathrm{Hom}_{alg}(\mathbb{C}[\Lambda(G)], \mathbb{C}).$$

et les objets ci-dessus s'identifient au spectre maximal de $\mathbb{C}[\Lambda(G)]$, un tore algébrique complexe que l'on note $\mathbb{U}$. On note $t \mapsto \omega_t$ l'isomorphisme entre le tore complexe $\mathbb{U}$ et le groupe des caractères non ramifiés de G. Ceci munit $\mathcal{X}(G)$ d'une structure de tore complexe. L'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathcal{X}(G)$ s'identifie explicitement à $\mathbb{C}[\Lambda(G)]$ de la manière suivante : si $f = \sum_{\bar{g}\in\Lambda(G)} a_{\bar{g}}\bar{g}$ est un élément de $\mathbb{C}[\Lambda(G)]$ et si $\chi \in \mathcal{X}(G)$, alors $f(\chi) = \sum_{\bar{g}\in\Lambda(G)} a_{\bar{g}}\chi(g)$, où les $g \in G$ relèvent les $\bar{g} \in \Lambda(G)$. Si l'on identifie $\mathbb{C}[\Lambda(G)]$ à l'espace des fonctions à support fini sur le groupe $\Lambda(G)$, le produit devient la convolution de ces fonctions.

Pour tout $g \in G$, notons $\mathbf{ev}_g$ le morphisme d'évaluation en g :

$$\mathbf{ev}_g \ : \mathcal{X}(G) \to \mathbb{C}^\times, \quad \chi \mapsto \chi(g).$$

Il est clair que $\mathbf{ev}_g$ est une fonction polynomiale sur $\mathcal{X}(G)$, qui est donné dans l'identification ci-dessus par la classe $\bar{g}$ de g dans $G/^0G$, vu comme élément de $\Lambda(G) \subset \mathbb{C}[\Lambda(G)]$. On note χ_{un} le morphisme

$$\chi_{un} : \ G \to \mathbb{C}[\Lambda(G)]^\times, \quad g \mapsto \mathbf{ev}_g.$$

Tout point $\chi \in \mathcal{X}(G)$ détermine un morphisme d'algèbres Ψ_χ de $\mathbb{C}[\Lambda(G)]$ dans $\mathbb{C}$, et l'on a la relation

$$\Psi_\chi \circ \chi_{un} = \chi. \tag{V.2.4.1}$$

Le groupe G agit sur $G/^0G$ par translation à gauche, donc il agit sur $\Lambda(G)$ et sur $\mathbb{C}[\Lambda(G)]$. Un calcul simple montre que pour tout $g \in G$, pour toute $f \in \mathbb{C}[\Lambda(G)]$, et pour tout $\chi \in \mathcal{X}(G)$,

$$(g \cdot f)(\chi) = \chi(g)f(\chi) = (\chi_{un}(g)f)(\chi). \tag{V.2.4.2}$$

L'action de G sur $\mathbb{C}[\Lambda(G)]$ est donc donnée par χ_{un}. Elle se factorise par $G/^0G$ et l'on retrouve l'action naturelle de $\Lambda(G) = G/^0G$ sur son algèbre de groupe par translation à gauche.

La variété $\mathcal{X}(G)$ est un tore complexe, donc un groupe, qui agit sur lui-même par translation à gauche. La structure de groupe est aussi bien sûr celle définie par multiplication des caractères. Le groupe $\mathcal{X}(G)$ agit donc sur l'espace de ses fonctions polynomiales F par

$$(\chi \cdot f)(\psi) = f(\chi^{-1}\psi), \quad (\chi, \psi \in \mathcal{X}(G), (f \in F).$$

V.2.5 Cas des tores

Précisons les constructions du paragraphe précédent dans cas où $\mathbb{G} = \mathbb{T}$ est un tore sur $\mathbb{F}$.

Rappelons tout d'abord que si $\mathbb{T}$ est un tore algébrique défini sur $\mathbb{F}$, si $\mathbb{A}$ est sa composante déployée, et $\mathbb{T}_{an}$ sa composante anisotrope, alors $\mathbb{T}$ est le produit presque direct $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{an}\mathbb{A}$ (*cf.* remarques V.2.2). L'application naturelle de restriction de $X^*(T)$ dans $X^*(A)$ est injective, $X^*(A) = X^*(\mathbb{A})$ et $X^*(T_{an}) = \{0\}$, et $X^*(T)$, vu comme sous-réseau de $X^*(A)$, est d'indice fini (c'est le sous-réseau des caractères dont la restriction à $\mathbb{A} \cap \mathbb{T}_{an}$ est triviale).

Soit $\mathbb{A}$ un tore déployé sur $\mathbb{F}$. On a alors :

$$A \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(A), \mathbb{F}^\times) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(A), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}^\times = X_*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}^\times,$$

les isomorphismes étant naturels. Soit $\varpi \in \mathbb{F}^\times$ une uniformisante de $\mathbb{F}$. L'ensemble de ses puissances forme un sous-groupe $\mathbb{Z}_\varpi$ de $\mathbb{F}^\times$, et comme par définition $v_\mathbb{F}(\varpi) = 1$, $v_\mathbb{F}$ réalise un isomorphisme entre $\mathbb{Z}_\varpi$ et $\mathbb{Z}$. Posons

$$C_A = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X^*(A), \mathbb{Z}_\varpi) \simeq \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X^*(A), \mathbb{Z}) = X_*(A).$$

Ceci identifie C_A à un sous-groupe de A, H_A donnant l'isomorphisme entre C_A et $X_*(A)$. En particulier, H_A est surjective, donc $\Lambda(A) = X_*(A)$ et C_A est une section de H_A.

Remarquons aussi que si $\mathbb{A}$ est un tore déployé, alors A est isomorphe à un produit de $\mathbb{F}^\times$ et le groupe ${}^0A$ est le sous-groupe compact maximal de A. En effet, on a trivialement ${}^0\mathbb{F}^\times = \mathfrak{O}_\mathbb{F}^\times$, le groupe des unités du corps $\mathbb{F}$.

Si $\mathbb{A}_1$ et $\mathbb{A}_2$ sont deux tores déployés définis sur $\mathbb{F}$, avec $\mathbb{A}_1 \subset \mathbb{A}_2$, alors $\Lambda(A_1) \subset \Lambda(A_2)$. En effet, d'après ce qui précède, on voit facilement que ${}^0A_1 = A_1 \cap {}^0A_2$. On peut aussi identifier C_{A_1} à un sous-groupe de C_{A_2}.

V.2.6 Caractères non ramifiés (suite)

On revient aux hypothèses et notations de V.2.3. Soit A_G une composante déployée de G. Les constructions faites en V.2.3 et V.2.5 fournissent des suites exactes

$$1 \to {}^0G \to G \to \Lambda(G) \to 1$$

et

$$1 \to {}^0A_G \to A_G \to \Lambda(A_G) \simeq X_*(A_G) \to 1.$$

Lemme. *On a ${}^0A_G = {}^0G \cap A_G$. Le réseau $\Lambda(A_G) = X_*(A_G)$ s'injecte dans $\Lambda(G) \subset X_*(G)$. De plus l'indice de $X_*(A_G)$ dans $\Lambda(G)$ (et même dans $X_*(G)$) est fini (ce sont des réseaux de même rang).*

Démonstration. Considérons l'application de restriction de $X^*(G)$ dans $X^*(A_G)$. Nous affirmons que c'est une injection. En effet, nous avons vu en V.2.2 que $X^*(G) = X^*(G')$ où

$$\mathbb{G}' = \mathbb{G}/\mathcal{D}\mathbb{G} = R(\mathbb{G})/(R(\mathbb{G}) \cap \mathcal{D}\mathbb{G}).$$

Posons $\mathbb{A}'_G = \mathbb{A}_G/(\mathbb{A}_G \cap \mathcal{D}\mathbb{G})$. Il est clair que $\mathbb{A}'_G$ est une composante déployée de $\mathbb{G}'$. Comme $\mathbb{G}'$ est un tore, le réseau $X^*(G) = X^*(G')$ est d'indice fini dans $X^*(A'_G)$ et donc d'indice fini dans $X^*(A_G)$. Ceci implique directement que ${}^0A_G$ est contenu dans ${}^0G \cap A_G$. Pour la réciproque, prenons $g \in {}^0G \cap A_G$ et $\chi \in X^*(A_G)$. Alors pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$, χ^m est dans $X^*(G)$. On a donc

$$|\chi^m(g)|_\mathbb{F} = |\chi(g)|_\mathbb{F}^m = 1.$$

Or $|\chi(g)|_\mathbb{F} \in \mathbb{R}_+^*$ donc $|\chi(g)|_\mathbb{F} = 1$. On en déduit que $g \in {}^0A_G$. On a maintenant un morphisme bien défini et injectif :

$$X_*(A_G) = \Lambda(A_G) \simeq A_G/{}^0A_G \to G/{}^0G = \Lambda(G) \subset X_*(G).$$

Comme $X_*(A_G)$ est de même rang que $X_*(G)$, on en déduit la dernière assertion. □

Proposition. *Le quotient $G/{}^0GA_G$ est fini, et ${}^0G \cap Z(G)$ est compact. Si $Z(G)$ est compact, alors ${}^0G = G$.*

<u>Démonstration</u>. On a
$$(G/{}^0G)/(A_G/{}^0A_G) \simeq G/{}^0GA_G.$$
La finitude du cardinal du membre de gauche de cette égalité ayant été établie dans le lemme, on en déduit que $G/{}^0GA_G$ est fini. Si $Z(G)$ est compact, on a $A_G = \{1\}$, et ${}^0G$ est alors d'indice fini dans G. Supposons $G \neq {}^0G$, et soit $g \in G \setminus {}^0G$. Alors il existe un caractère rationnel $\chi \in X^*(G)$ tel que $|\chi(g)|_{\mathbb{F}} \neq 1$. Or une certaine puissance de g est dans ${}^0G$, disons g^m. On a alors $|\chi(g^m)|_{\mathbb{F}} = 1 = |\chi(g)|_{\mathbb{F}}^m$ et l'on obtient une contradiction. Donc on a $G = {}^0G$ dans ce cas.

Le groupe $R(G)$ est d'indice fini dans $Z(G)$ ($R(\mathbb{G})$ est la composante neutre de $Z(\mathbb{G})$) et $R(G)_{an}A_G$ est d'indice fini dans $R(G)$ ($R(\mathbb{G})$ est le produit presque direct de $R(\mathbb{G})_{an}$ et $\mathbb{A}_G$), donc dans $Z(G)$, où $R(G)_{an}$ est compact. Donc $R(G)_{an} \subset {}^0G$ et comme $A_G \cap {}^0G = {}^0A_G$, on a $R(G)_{an}A_G \cap {}^0G = R(G)_{an}{}^0A_G$, qui est compact. Par conséquent ${}^0G \cap Z(G)$ est compact. □

V.2.7 Classes d'inertie de représentations irréductibles

Le groupe des caractères non ramifiés $\mathcal{X}(G)$ agit sur l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles lisses de G, $\mathbf{Irr}(G)$ par
$$(\omega, \pi) \mapsto \pi \otimes \omega, \quad (\omega \in \mathcal{X}(G)),\ (\pi \in \mathbf{Irr}(G)).$$
Le stabilisateur de $\pi \in \mathbf{Irr}(G)$ est noté $\mathcal{X}(G)(\pi)$, c'est-à-dire
$$\mathcal{X}(G)(\pi) = \{\omega \in \mathcal{X}(G) \,|\, \pi \otimes \omega \simeq \pi\}.$$

Lemme. *Soit $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$. Alors $\mathcal{X}(G)(\pi)$ est fini.*

<u>Démonstration</u>. On reprend les notations de la section précédente. En particulier nous rappelons que $\mathcal{X}(G)$ s'identifie à l'ensemble des caractères du réseau $\Lambda(G)$, que celui-ci possède un sous-réseau d'indice fini $\Lambda(A_G)$, et que l'on peut relever ce dernier en un sous-groupe C_{A_G} contenu dans A_G (donc en particulier central dans G). Le groupe $\mathcal{X}(G)$ agit sur $\mathcal{X}(A_G)$ par multiplication, via la restriction naturelle des caractères $\mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(A_G)$. De plus, pour tout $\pi \in \mathbf{Irr}(G)$, le lemme de Schur nous donne un caractère du groupe central C_{A_G} par lequel ce groupe agit dans l'espace de π. Ceci définit une application
$$\mathbf{Irr}(G) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{A_G}, \mathbb{C}^\times) \simeq \mathcal{X}(A_G)$$
dont il est facile de voir qu'elle est équivariante pour les actions de $\mathcal{X}(G)$ sur $\mathbf{Irr}(G)$ et $\mathcal{X}(A_G)$ décrites ci-dessus. Il suffit donc de montrer que l'action de $\mathcal{X}(G)$ sur $\mathcal{X}(A_G)$ admet des stabilisateurs finis. Ceci vient du fait que $\Lambda(A_G)$ est d'indice fini dans $\Lambda(G)$, et donc que le nombre de caractères de $\Lambda(G)$ qui sont triviaux sur $\Lambda(A_G)$ est fini. □

Corollaire. *Les orbites de $\mathcal{X}(G)$ dans $\mathbf{Irr}(G)$ sont isomorphes (mais de manière non canonique) à des tores algébriques complexes.*

<u>Démonstration</u>. On sait que $\mathcal{X}(G)$ est muni d'une structure de tore algébrique complexe (*cf.* section V.2.4), et le quotient d'un tel tore complexe par un sous-groupe fini est encore un tore complexe. La non canonicité vient du fait qu'il faut choisir un point de base. □

Notations. Les orbites de l'action de $\mathcal{X}(G)$ dans $\mathbf{Irr}(G)$ sont appelées des classes d'inerties. On note $[\pi]$ la classe d'inertie d'une représentation π et $[\mathbf{Irr}(G)]$ l'ensemble des classes d'inertie.

Notons F l'algèbre des fonctions polynomiales sur la variété $\mathcal{X}(G)$. Nous avons vu dans la remarque V.2.3 que $F \simeq \mathbb{C}[\Lambda(G)]$. Soient D une classe d'inertie dans $\mathbf{Irr}(G)$ et (π, V) une représentation dans cette classe d'inertie et $\mathcal{X}(G)(\pi)$ le stabilisateur de π. Alors D s'identifie à l'espace homogène $\mathcal{X}(G)/\mathcal{X}(G)(\pi)$. L'algèbre des fonctions polynomiales sur D est alors $F^{\mathcal{X}(G)(\pi)}$, l'algèbre des invariants de F sous l'action du groupe fini $\mathcal{X}(G)(\pi)$. Il est commode de dire que f est une fonction polynomiale sur D s'il existe une fonction polynomiale $\tilde{f}$ sur $\mathcal{X}(G)$ telle que

$$f(\pi \otimes \chi) = \tilde{f}(\chi).$$

De même, si U est un ouvert de Zariski de D, on dit que f est une fonction rationnelle sur U s'il existe f_1 et f_2 dans F telles que $f_2(\chi)f(\pi \otimes \chi) = f_1(\chi)$ et $f_2(\chi) \neq 0$ pour tout $\chi \in \mathcal{X}(G)$ tel que $\pi \otimes \chi \in U$.

V.3 Sous-groupes paraboliques

Nous renvoyons le lecteur à [6] ou [41] pour la démonstration des résultats énoncés dans cette section. Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique connexe, réductif, défini sur $\mathbb{F}$ et posons $G = \mathbb{G}(\mathbb{F})$. Un sous-groupe algébrique (en tant que groupes définis sur $\bar{\mathbb{F}}$) $\mathbb{P}$ de $\mathbb{G}$ est un sous-groupe parabolique si la variété $\mathbb{P}\backslash\mathbb{G}$ est projective. Un sous-groupe parabolique P de G est le groupe des points dans $\mathbb{F}$ d'un sous-groupe parabolique $\mathbb{P}$ défini sur $\mathbb{F}$. On dira « P est un sous-groupe parabolique de G »pour exprimer le fait que P est le groupe des $\mathbb{F}$-points d'un sous-groupe parabolique $\mathbb{P}$ de $\mathbb{G}$ défini sur $\mathbb{F}$. On fera de même pour d'autres sous-groupes de $\mathbb{G}$ défini sur $\mathbb{F}$.

Le radical et le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique $\mathbb{P}$ de $\mathbb{G}$ défini sur $\mathbb{F}$ sont définis sur $\mathbb{F}$.

V.3.1

Soit P un sous-groupe parabolique de G et N son radical unipotent. Alors il existe un sous-groupe réductif (non unique) M de G dans P normalisant N tel que $P = M \rtimes N$. On dit alors que M est un facteur de Levi de P et un sous-groupe de Levi de G. Les facteurs de Levi sont obtenus de la manière suivante. Soit A une composante déployée de P et posons $M = Z(G, A)$. Alors M est un facteur de Lévi de P. De plus A est la composante déployée de M. Si l'on se donne P, le choix d'une composante déployée de P est donc équivalent au choix d'un facteur de Levi. Le radical unipotent N agit transitivement par conjugaison sur l'ensemble des composantes déployées de P, et donc sur l'ensemble des facteurs de Levi de P. Les facteurs de Levi M de G sont les centralisateurs de tores déployés A dans G tels que A est la composante déployée de M. On emploiera souvent une expression du genre « $P = MN$ est un sous-groupe parabolique de G », pour résumer la situation où P est un sous-groupe parabolique de G, N est son radical unipotent, et M un facteur de Levi. Si M est un sous-groupe de Levi de G, on note $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G admettant M comme facteur de Levi. C'est un ensemble fini. Soit $P \in \mathcal{P}(M)$. On note alors $\bar{P} = M\bar{N}$ le sous-groupe parabolique opposé à P, c'est-à-dire l'unique sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{P}(M)$ tel que $P \cap Q = M$, et A_M (ou simplement A) la composante déployée de M.

V.3.2

Les sous-groupes paraboliques minimaux de G sont ceux dont les composantes déployées sont des tores déployés maximaux de G. Deux tores de G, déployés et maximaux pour cette propriété sont conjugués dans G. Deux sous-groupes paraboliques minimaux de G sont donc conjugués dans G.

V.3.3

Soient $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, et A la composante déployée de M. On pose :

$$\mathfrak{a} = X_*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \quad \mathfrak{a}^* = X^*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

La dualité parfaite entre $X_*(A)$ et $X^*(A)$ s'étend en une dualité d'espaces vectoriels entre $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^*$, ce qui est cohérent avec les notations.

V.3.4

Soient $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, et A la composante déployée de M. Notons $\Sigma'(A)$ l'ensemble des racines de A dans $\mathrm{Lie}(G)$. Alors $\Sigma'(A)$ s'identifie à une partie de $\mathfrak{a}^*$. On note $\Sigma(A)$ l'ensemble des racines réduites de $\Sigma'(A)$, c'est-à-dire les éléments α de $\Sigma'(A)$ tels que $\alpha/n \notin \Sigma'(A)$ si $n \geq 2$.

Si $P = MN \in \mathcal{P}(M)$, on note $\Sigma'(P)$ le système des racines dans $\Sigma'(A)$ positives relativement à P (les racines de A dans N) et $\Sigma(P)$ le système des racines positives réduites.

V.3.5

Soient $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, et A la composante déployée de M. Le groupe de Weyl

$$W(A) = N_G(A)/Z_G(A) = N_G(A)/M = N_G(M)/M \tag{V.3.5.1}$$

agit sur $X^*(A)$ et donc sur $X_*(A) \simeq \Lambda(A)$. Par conséquent, $W(A)$ agit aussi sur $\mathfrak{a}^*$ et $\mathfrak{a}$. L'action de $W(A)$ sur $X^*(A)$ ou sur $X_*(A) \simeq \Lambda(A)$ est fidèle.

V.3.6

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, de composante déployée A_M. Soit A_G la composante déployée de G. On a

$$A_G \subset A_M \subset M \subset G,$$

ce qui induit des morphismes, donnés par la restriction des caractères, formant un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X^*(M) \arrow[r] & X^*(A_M) \arrow[d] \\ X^*(G) \arrow[u] \arrow[r] & X^*(A_G) \end{tikzcd}$$

Tensorisons par $\mathbb{R}$. On obtient, d'après le lemme V.2.6

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_M^* = X^*(M)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} & \longrightarrow & X^*(A_M)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} = \mathfrak{a}_M^* \ , \\ \uparrow & & \downarrow \\ \mathfrak{a}_G^* = X^*(G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} & \longrightarrow & X^*(A_G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} = \mathfrak{a}_G^* \end{array}$$

les flèches horizontales étant des isomorphismes. Notons $(\mathfrak{a}_M^G)^*$ le noyau de la flèche verticale de droite. On a alors

$$\mathfrak{a}_M^* = \mathfrak{a}_G^* \oplus (\mathfrak{a}_M^G)^*.$$

De même, dualement, on obtient

$$\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{a}_M^G.$$

V.3.7

On continue avec les mêmes notations. On supposera $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_M^*$ toujours munis de produits scalaires (notés $(.,.)$, la dualité entre $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_M^*$ étant notée $\langle .\, ,.\rangle$) invariants sous l'action de $W(A_M)$.

Lorsque P est un sous-groupe parabolique minimal, $\Sigma(A_M)$ est un système de racines dans $\mathfrak{a}_M^*$ muni d'un produit scalaire comme ci-dessus ([6], cor. 5.8) et on peut par ce biais identifier $W(A_M)$ au groupe de Weyl du système de racines $\Sigma(A_M)$ ([6], 5.3). De plus, si $\alpha \in \Sigma(A_M)$, on note $\breve{\alpha}$ sa coracine, c'est-à-dire l'élément de $\mathfrak{a}_M$ vérifiant

$$\langle \breve{\alpha}, \lambda\rangle = 2\frac{(\alpha,\lambda)}{(\alpha,\alpha)}, \qquad (\lambda \in \mathfrak{a}^*).$$

L'ensemble des coracines, noté $\Sigma^\vee(A_M)$ est un système de racines dans $\mathfrak{a}_M$. Les racines (resp. les coracines) engendrent le sous-espace $(\mathfrak{a}_M^G)^*$ (resp. $\mathfrak{a}_M^G$) défini en V.3.6.

V.3.8

Fixons un tore déployé maximal $A_\emptyset$ de G et notons $M_\emptyset$ son centralisateur dans G. C'est un facteur de Levi d'un sous-groupe parabolique minimal dans G. On fixe un sous-groupe parabolique minimal $P_\emptyset = M_\emptyset N_\emptyset$, de facteur de Levi $M_\emptyset$. Si P est un sous-groupe parabolique de G, on dit que P est semi-standard si $A_\emptyset \subset P$ et standard si $P_\emptyset \subset P$. Dans ces deux cas, P possède un unique facteur de Levi M contenant $A_\emptyset$. Comme la composante déployée de M est clairement contenue dans $A_\emptyset$, on a $M_\emptyset \subset M$. On dit alors que M est un sous-groupe de Levi semi-standard de G. On dit qu'un tel M est standard s'il est facteur de Levi d'un sous-groupe parabolique standard de G. Le tore déployé $A_\emptyset$ est encore maximal pour cette propriété dans tout sous-groupe de Levi standard M, et l'on peut ainsi définir les sous-groupes de Levi et les sous-groupes paraboliques standards ou semi-standards de M en référence à ce même $A_\emptyset$.

V.3.9

Fixons un sous-groupe parabolique minimal $P_\emptyset = M_\emptyset N_\emptyset$ de G, de composante déployée $A_\emptyset$. Alors tout sous-groupe parabolique de G est conjugué à un sous-groupe parabolique standard.

V.3.10

Soient $P = MN$ et $Q = LU$ deux sous-groupes paraboliques semi-standards de G. Alors $M \cap Q$ est un sous-groupe parabolique semi-standard de M de facteur de Levi $M \cap L$ et de radical unipotent $M \cap U$. De plus $N \cap Q$ se décompose en $N \cap Q = (N \cap L)(N \cap U)$.

V.3.11

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. Il existe une bijection entre l'ensemble des sous-groupes paraboliques standards (resp. semi-standards) de M et l'ensemble des sous-groupes paraboliques standards (resp. semi-standards) $Q = LU$ de G contenus dans P, dont l'inverse s'obtient ainsi : à $Q = LU$, on associe le sous-groupe parabolique $M \cap Q = L(M \cap U)$. Le sous-groupe parabolique minimal standard de M est donc $M_\emptyset(M \cap N_\emptyset)$.

V.3.12

On fixe un sous-groupe parabolique minimal $P_\emptyset = M_\emptyset N_\emptyset$, de composante déployée $A_\emptyset$. On pose

$$\Sigma'_\emptyset = \Sigma'(A_\emptyset),\ \Sigma_\emptyset = \Sigma(A_\emptyset),\ \Sigma^+_\emptyset = \Sigma(P_\emptyset),$$

et l'on note $\Delta_\emptyset = \Delta(P_\emptyset)$ l'ensemble des racines simples dans $\Sigma^+_\emptyset$. De même, on emploie les notations ${\Sigma'_\emptyset}^\vee$, $\Sigma^\vee_\emptyset$, $(\Sigma^\vee_\emptyset)^+$ pour les coracines.

L'ensemble des racines simples $\Delta_\emptyset$ est une base de $(\mathfrak{a}^G_\emptyset)^*$ et l'ensemble des coracines simples $\Delta^\vee_\emptyset$ est une base de $\mathfrak{a}^G_\emptyset$. Soit $\widehat{\Delta}_\emptyset = \{\varpi_\alpha,\, \alpha \in \Delta_\emptyset\}$ la base de $\mathfrak{a}^*$ duale de $\Delta^\vee_\emptyset$, dont les éléments sont appelés les poids fondamentaux, et $\widehat{\Delta}^\vee_\emptyset = \{\varpi^\vee_\alpha,\ \alpha \in \Delta_\emptyset\}$ la base de $\mathfrak{a}$ duale de $\Delta_\emptyset$, dont les éléments sont appelés les co-poids fondamentaux.

Si $P = MN$ est un sous-groupe parabolique standard, on note $\Delta^M_\emptyset$ l'analogue de $\Delta_\emptyset$ lorsque l'on remplace G par M dans la définition.

V.3.13

Soient $P = MN \subset Q = LU$ deux sous-groupes paraboliques standards de G. On a alors $A_G \subset A_L \subset A_M \subset A_\emptyset$ et

$$\mathfrak{a}_G \subset \mathfrak{a}_L \subset \mathfrak{a}_M \subset \mathfrak{a}_\emptyset$$

où $\mathfrak{a}_G$ (resp. $\mathfrak{a}_M$, resp. $\mathfrak{a}_L$) est l'orthogonal des racines $\alpha \in \Delta_\emptyset$ (resp. $\Delta^M_\emptyset$, resp. $\Delta^L_\emptyset$). De même

$$\mathfrak{a}^*_G \subset \mathfrak{a}^*_L \subset \mathfrak{a}^*_M \subset \mathfrak{a}^*_\emptyset$$

sont décrits de la même manière en remplaçant les racines par les coracines. Notons $\mathfrak{a}^G_\emptyset$ (resp. $(\mathfrak{a}^G_\emptyset)^*$) le sous-espace de $\mathfrak{a}_\emptyset$ (resp. de $\mathfrak{a}^*_\emptyset$) engendré par les $\check{\alpha} \in \Delta^\vee_\emptyset$ (resp. les $\alpha \in \Delta_\emptyset$). On a alors les décompositions (voir V.3.6)

$$\mathfrak{a}_\emptyset = \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{a}^G_\emptyset, \quad \mathfrak{a}^*_\emptyset = \mathfrak{a}^*_G \oplus (\mathfrak{a}^G_\emptyset)^*.$$

Plus généralement, soit $(\mathfrak{a}^L_M)^*$ le sous-espace de $\mathfrak{a}^*_\emptyset$ engendré par les $\alpha \in \Delta^L_\emptyset \setminus \Delta^M_\emptyset$. On a alors la décomposition

$$\mathfrak{a}^*_M = \mathfrak{a}^*_L \oplus (\mathfrak{a}^L_M)^*.$$

En particulier

$$\mathfrak{a}_M^* = \mathfrak{a}_G^* \oplus (\mathfrak{a}_M^G)^*,$$

où $(\mathfrak{a}_M^G)^*$ est engendrée par les $\alpha_i \in \Delta_\emptyset \setminus \Delta_\emptyset^M$.

On obtient des décompositions similaires de $\mathfrak{a}_M$ en échangeant le rôle des racines et des coracines. Ces décompositions sont orthogonales pour le produit scalaire fixé.

On note p_M^L les projections respectivement de $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_M^*$ sur $\mathfrak{a}_M^L$ et $(\mathfrak{a}_M^L)^*$ dans les décompositions ci-dessus.

V.3.14

Soient $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, et $A = A_M$ la composante déployée de M. Choisissons un sous-groupe parabolique minimal $P_\emptyset = M_\emptyset N_\emptyset$, de composante déployée $A_\emptyset$, contenu dans P avec A contenu dans $A_\emptyset$ (ceci est possible d'après V.3.9). L'inclusion $A \subset A_\emptyset$ induit une inclusion de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}_\emptyset$. Définissons

$$\Delta(P) := \{\alpha_{|\mathfrak{a}},\ \alpha \in \Delta_\emptyset \setminus \Delta_\emptyset^M\}.$$

$$\widehat{\Delta}(P) := \{\varpi_{\alpha|\mathfrak{a}},\ \alpha \in \Delta_\emptyset \setminus \Delta_\emptyset^M\}.$$

On définit de manière duale, en remplaçant racines et poids fondamentaux par coracines et copoids fondamentaux, $\Delta^\vee(P)$ et $\widehat{\Delta}^\vee(P)$. Si $\beta = \alpha_{|\mathfrak{a}} \in \Delta(P)$, $\alpha \in \Delta_\emptyset \setminus \Delta_\emptyset^M$, on note $\check{\beta}$ la projection sur $\mathfrak{a}_M$ de la coracine $\check{\alpha}$. on note

Remarquons que ces notations ne sont pas standards car $\Delta(P)$ n'est pas un ensemble de racines simple d'un système de racines. En particulier, si $\beta \in \Delta(P)$, $\check{\beta}$ n'est pas une coracine.

De plus, $(\mathfrak{a}_M^G)^*$ est engendré par $\Delta(P)$, car les racines de $\Delta(P)$ sont les restrictions à $\mathfrak{a}_M$ des racines dans $\Delta_\emptyset \setminus \Delta_\emptyset^M$, et $\mathfrak{a}_M^G$ est engendré par les projections des coracines dans $\Delta_\emptyset^\vee \setminus (\Delta_\emptyset^\vee)^M$.

V.3.15

Continuons avec les notations du paragraphe précédent. On pose

$$^+[\mathfrak{a}^*]_P^G = \{\chi = \sum_{\alpha \in \Delta(P)} c_\alpha\, \alpha, \quad c_\alpha > 0\}$$

$$^+\overline{[\mathfrak{a}^*]}_P^G = \{\chi = \sum_{\alpha \in \Delta(P)} c_\alpha\, \alpha, \quad c_\alpha \geq 0\}$$

$${}_P^G[\mathfrak{a}^*]^+ = \{\chi \in \mathfrak{a}^* \mid \langle \chi, \check{\alpha} \rangle > 0,\ \alpha \in \Delta(P)\}$$

$${}_P^G\overline{[\mathfrak{a}^*]}^+ = \{\chi \in \mathfrak{a}^* \mid \langle \chi, \check{\alpha} \rangle \geq 0\ \alpha \in \Delta(P)\}.$$

On définit de manière similaire les parties $^+[\mathfrak{a}]_P^G$, $^+\overline{[\mathfrak{a}]}_P^G$, ${}_P^G[\mathfrak{a}]^+$, ${}_P^G\overline{[\mathfrak{a}]}^+$ en échangeant le rôle des racines et des coracines. On note aussi

$$^-[\mathfrak{a}]_P^G = -(^+[\mathfrak{a}]_P^G),\ ^-\overline{[\mathfrak{a}]}_P^G = -(^+\overline{[\mathfrak{a}]}_P^G),\ {}_P^G[\mathfrak{a}]^- = -({}_P^G[\mathfrak{a}]^+),\ {}_P^G\overline{[\mathfrak{a}]}^- = -({}_P^G\overline{[\mathfrak{a}]}^+).$$

Remarquons qu'un élément $\chi \in {}_P^G[\mathfrak{a}^*]^+$ est un élément qui s'écrit

$$\chi = \sum_{\alpha \in \Delta(P)} c_\alpha\, \varpi_\alpha\ + \mu, \quad c_\alpha > 0,\ \mu \in \mathfrak{a}_G^*,$$

(de même pour ${}^+\overline{[\mathfrak{a}^*]}_P^G$ avec les $c_\alpha \geq 0$).

V.3.16

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique standard de G. La partie ${}^G_P[\mathfrak{a}_M^*]^+$ n'est un cône (au sens strict) convexe ouvert en général, puisque si $x \in {}^G_P[\mathfrak{a}_M^*]^+$, alors $x + \mathfrak{a}_G^* \subset {}^G_P[\mathfrak{a}_M^*]^+$. En revanche, l'intersection

$$ {}^G_P[(\mathfrak{a}_M^G)^*]^+ = {}^G_P[\mathfrak{a}_M^*]^+ \cap (\mathfrak{a}_M^G)^* = \{\chi = \sum_{\alpha \in \Delta(P)} c_\alpha\, \varpi_\alpha, \quad c_\alpha > 0\} $$

est un cône convexe ouvert et son adhérence

$$ {}^G_P\overline{[(\mathfrak{a}_M^G)^*]}^+ = {}^G_P\overline{[\mathfrak{a}_M^*]}^+ \cap (\mathfrak{a}_M^G)^* = \{\chi = \sum_{\alpha \in \Delta(P)} c_\alpha\, \varpi_\alpha, \quad c_\alpha \geq 0\} $$

est un cône convexe fermé.

On a

$$ {}^G_P[\mathfrak{a}_M^*]^+ = {}^G_P[(\mathfrak{a}_M^G)^*]^+ \oplus \mathfrak{a}_G^*, $$
$$ {}^G_P\overline{[\mathfrak{a}_M^*]}^+ = {}^G_P\overline{[(\mathfrak{a}_M^G)^*]}^+ \oplus \mathfrak{a}_G^*. $$

Le cône ${}^G_P\overline{[(\mathfrak{a}_M^G)^*]}^+$ admet une décomposition cellulaire en cônes du même genre provenant des sous-groupes paraboliques standards Q contenant P :

$$ {}^G_P\overline{[(\mathfrak{a}_M^G)^*]}^+ = \coprod_{P \subset Q = LU} {}^G_Q[(\mathfrak{a}_L^G)^*]^+. $$

On en déduit une décomposition

$$ {}^G_P\overline{[\mathfrak{a}_M^*]}^+ = \coprod_{P \subset Q = LU} {}^G_Q[\mathfrak{a}_L^*]^+. $$

V.3.17

Notons le fait suivant :

Lemme. *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique standard de G et soit μ un élément de ${}^G_P[(\mathfrak{a}_M^G)^*]^+$. Alors l'ensemble des racines γ dans $\Sigma_\emptyset$ telles que $\langle \mu, \check{\gamma} \rangle > 0$ est l'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans N.*

<u>*Démonstration*</u>. Par définition, ${}^G_P[(\mathfrak{a}_M^G)^*]^+$ est l'ensemble

$$ \{x \in (\mathfrak{a}_\emptyset^G)^*,\ \alpha \in \Delta_\emptyset^M \Rightarrow \langle x, \check{\alpha} \rangle = 0,\ \alpha \in \Delta_\emptyset \setminus \Delta_\emptyset^M \Rightarrow \langle x, \check{\alpha} \rangle > 0\}. $$

Toute racine $\gamma \in \Sigma_\emptyset$ s'écrit $\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta_\emptyset} n_\alpha\, \alpha$ où tous les $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ sont de même signe. D'autre part, γ est une racine de $A_\emptyset$ dans N si et seulement s'il existe $\alpha \in \Delta_\emptyset \setminus \Delta_\emptyset^M$ tel que $n_\alpha > 0$. Comme tous les n_α sont de même signe, ceci est équivalent à $\langle \mu, \check{\gamma} \rangle > 0$. □

V.3.18 Lemme combinatoire de Langlands

Soient $P = MN$ un sous-groupe parabolique standard de G et $\mu \in \mathfrak{a}_M^*$. Le lemme combinatoire de Langlands affirme qu'il existe un unique sous-groupe parabolique standard Q contenant P tel que μ se décompose en

$$\mu = \mu_G + \mu^+ + \mu^- \tag{V.3.18.1}$$

avec $\mu_G \in \mathfrak{a}_G^*$, $\mu^+ \in {}_Q^G\overline{[(\mathfrak{a}_L^G)^*]}^+$ et $\mu^- \in -p_M^L({}^+\overline{[\mathfrak{a}_M^*]}_P^G)$. Cette décomposition est unique. De plus μ_G est la projection orthogonale de μ sur $\mathfrak{a}_G^*$, μ^+ est la projection orthogonale de μ sur le cône ${}_P^G\overline{[(\mathfrak{a}_M^G)^*]}^+$ et μ^- est la projection orthogonale de μ sur le cône ${}^-\overline{[\mathfrak{a}_M^*]}_P^G$. Les éléments μ_G, μ^+ et μ^- sont deux à deux orthogonaux. Remarquons que si l'on considère μ comme un élément de $\mathfrak{a}_\emptyset^*$, et que l'on applique le résultat ci-dessus à $(\mu, P_\emptyset)$, on trouve la même décomposition.

Nous donnons une démonstration de ce lemme, reprise de [17] à la fin du chapitre.

V.3.19

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Donnons une autre interprétation de l'espace $\mathfrak{a}^*$. Puisque

$$X_*(A) \subset \Lambda(M) \subset X_*(M)$$

sont des réseaux de même rang, on a

$$\mathfrak{a} = X_*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \Lambda(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = X_*(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}^* &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \mathbb{R}) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda(M), \mathbb{R}) \\
&= \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{R}) \mid \phi_{|^0M} \equiv 0\} \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z},lisse}(M, \mathbb{R})
\end{aligned}$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z},lisse}(M, \mathbb{R})$ est le groupe des morphismes lisses de M dans $\mathbb{R}$. Il faut prendre garde à ce que la loi de $\Lambda(M)$ est notée additivement, alors que celle de M est notée multiplicativement. Il reste à justifier la dernière égalité, en montrant que tout morphisme lisse de M dans $\mathbb{R}$ est trivial sur ${}^0M$. On sait que le groupe $R(M)\mathcal{D}M$ est d'indice fini dans M et que $\mathcal{D}M \subset {}^0M$. Le groupe $(R(M) \cap {}^0M)\mathcal{D}M$ est donc d'indice fini dans ${}^0M$. De plus, on a vu dans la démonstration de la proposition V.2.6 que $R(M) \cap {}^0M$ est compact, et donc tout morphisme lisse de ce groupe à valeurs dans $\mathbb{R}$ est nécessairement trivial (voir lemme V.2.3). Bien sûr, tout morphisme de M dans le groupe abélien $\mathbb{R}$ est trivial sur les commutateurs. Tout morphisme de M dans $\mathbb{R}$ est donc trivial sur un sous-groupe d'indice fini de ${}^0M$. Comme $\mathbb{R}$ ne contient aucun élément d'ordre fini autre que 0, on voit qu'un tel morphisme est trivial sur ${}^0M$.

Pour tout caractère χ de M, $\ln|\chi| \in \mathfrak{a}^*$.

V.3.20

Reprenons les notations du paragraphe précédent. Posons

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = X_*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \text{ et } \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} = X^*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}.$$

On a comme ci-dessus

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = X_*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \Lambda(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = X_*(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Lambda(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda(M), \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Rappelons que q désigne le cardinal du corps résiduel $\mathfrak{O}_{\mathbb{F}}/\mathfrak{P}_{\mathbb{F}}$. Le morphisme de groupes

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}^{\times}, \quad s \mapsto q^s$$

est surjectif, de noyau $\frac{2i\pi}{\ln q}\mathbb{Z}$. Il induit par composition un morphisme

$$\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda(M), \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda(M), \mathbb{C}^{\times}) \simeq \mathcal{X}(M).$$

Le groupe $\Lambda(M)$ étant un réseau, on voit facilement que ce morphisme est surjectif, en relevant dans $\mathbb{C}$ les valeurs prises sur une base de ce réseau. Le noyau de ce morphisme est

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda(M), \frac{2i\pi}{\ln q}\mathbb{Z}) = \frac{2i\pi}{\ln q}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda(M), \mathbb{Z}) = \frac{2i\pi}{\ln q}\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda(M), \mathbb{Z})$ est un sous-réseau de $\mathfrak{a}^*$.

Nous avons donc obtenu un morphisme surjectif :

$$\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} = X^*(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \to \mathcal{X}(M)$$

dont il est maintenant facile de vérifier qu'il est donné aussi par

$$\chi \otimes s \mapsto [\ g \mapsto |\chi(g)|^s_{\mathbb{F}}\ ]$$

et dont le noyau est le réseau $\frac{2i\pi}{\ln q}\mathcal{R}$. On retrouve ainsi la structure de tore algébrique de $\mathcal{X}(M)$. Si $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, on note e^{λ} le caractère non ramifié de M correspondant.

Si $\chi \in \mathcal{X}(M)$, relevons-le en un élément $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. La partie réelle $\Re(\lambda) \in \mathfrak{a}^*$ est indépendante du choix de λ. On la note $\Re(\chi)$.

Tout élément $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^{\times})$ se décompose en

$$\chi = \frac{\chi}{|\chi|}\,|\chi|.$$

Le caractère $\frac{\chi}{|\chi|}$ est unitaire, $\ln|\chi| \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{R}) = \mathfrak{a}^*$ et l'on note $\Re(\chi) = \ln|\chi| \in \mathfrak{a}^*$.

On note $\mathrm{Im}\,(\mathcal{X}(M))$ le groupe des caractères non ramifiés unitaires de M. C'est l'ensemble des $\chi \in \mathcal{X}(M)$ tels que $\Re(\chi) = 0$. C'est aussi l'image de $i\mathfrak{a}^*$ par le morphisme surjectif $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \to \mathcal{X}(M)$. C'est une sous-variété réelle du tore complexe $\mathcal{X}(M)$, et plus précisément, c'est un tore compact, isomorphe à $i\mathfrak{a}^*/\frac{2i\pi}{\ln q}\mathcal{R}$.

V.3.21

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Rappelons l'application $H_M : M \to X_*(M) \subset \mathfrak{a}_M$ définie en V.2.3. On note M^+ (resp. M^{++}) l'image inverse par H_M de ${}^G_P\overline{[\mathfrak{a}]}^+ \cap X_*(M)$ (resp ${}^G_P[\mathfrak{a}]^+ \cap X_*(M)$). Plus généralement, si H est une partie de M, on note $H^+ = H \cap M^+$ et $H^{++} = H \cap M^{++}$. Il découle directement des définitions que

$$\begin{aligned} A_M^+ &= \{a \in A_M,\ v_{\mathbb{F}}(\alpha(a)) \geq 0,\ (\alpha \in \Delta(P))\} \\ &= \{a \in A_M,\ |\alpha(a)|_{\mathbb{F}} \leq 1,\ (\alpha \in \Delta(P))\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_M^{++} &= \{a \in A_M,\ v_{\mathbb{F}}(\alpha(a)) > 0,\ (\alpha \in \Delta(P))\} \\ &= \{a \in A_M,\ |\alpha(a)|_{\mathbb{F}} < 1,\ (\alpha \in \Delta(P))\}. \end{aligned}$$

On remarque que le choix de P n'apparaît pas dans les notations, bien que les parties A_M^+ et A_M^{++} en dépendent. Nous utiliserons surtout ces notations avec des sous-groupes paraboliques standards, ce qui rendra cette ambiguïté inoffensive. Par exemple, si P est standard, la décomposition V.3.16 induit une décomposition

$$A_M^+ = \coprod_Q A_L^{++}, \tag{V.3.21.1}$$

la somme portant sur les sous-groupes paraboliques standards $Q = LU$ contenant P.

V.3.22

Posons, pour tout $\epsilon > 0$,

$$A^+(\epsilon) = \{a \in A_M,\ |\alpha(a)|_{\mathbb{F}} < \epsilon,\ (\alpha \in \Delta(P))\}, \tag{V.3.22.1}$$

et pour tout partie Ω de A, $\Omega^+(\epsilon) = \Omega \cap A^+(\epsilon)$.

V.3.23

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, de composante déployée A. Le réseau $\Lambda(M) = M/{}^0M$ n'admet en général pas de relèvement naturel en un sous-groupe de M, mais comme nous l'avons vu en V.2.5, le sous-réseau $\Lambda(A) = X_*(A)$, lui, admet un relèvement, noté C_A en un sous-groupe de A. Comme $X_*(A)$ est un sous-réseau d'indice fini de $\Lambda(M)$, il existe un ensemble fini F_M d'éléments de M tels que $\tilde{C}_A := F_M.C_A$ soit un relèvement ensembliste de $\Lambda(M)$ dans M. On peut prendre les éléments de F_M dans M^+. En effet, on peut toujours remplacer $f \in F_M$ par ft^m avec $t \in C_A^{++}$, et l'on aura alors $ft^m \in M^+$ pour m assez grand. Notons $C_A^+ = C_A \cap M^+$, $\tilde{C}_A^+ := \tilde{C}_A \cap M^+$, $C_A^+(\epsilon) = C_A \cap A^+(\epsilon)$. On peut s'arranger pour que $\tilde{C}_A^+ = F_M C_A^+$ et c'est ce que nous supposerons dans la suite. Lorsque $P = P_\emptyset = M_\emptyset N_\emptyset$, nous notons $\Lambda(M_\emptyset) = \Lambda_\emptyset$, $C_{A_\emptyset} = C_\emptyset$, $F_\emptyset = F_{M_\emptyset}$, etc.

V.3.24

Comme $A_G \subset A_\emptyset$, d'après une remarque faite en V.2.5, C_{A_G} est un sous-groupe de $C_\emptyset$. Comme $A_G \subset A_\emptyset^+$, on a $C_{A_G} \subset C_\emptyset^+$. Introduisons sur $C_\emptyset^+$ la relation d'équivalence :

$$a_1 \sim a_2 \text{ si } a_1 a_2^{-1} \in C_{A_G}. \tag{V.3.24.1}$$

Alors $S := C_\emptyset^+/C_{A_G} = C_\emptyset^+/\sim$ est isomorphe à $\mathbb{N}^d$ pour un certain entier naturel d, égal au cardinal de $\Delta_\emptyset$. On déduit de V.3.21.1 une décomposition

$$S = \coprod_Q S_L^{++},$$

la somme portant sur les sous-groupes paraboliques standards $Q = LU$ et $S_L^{++} = C_{A_L}^{++}/C_{A_G}$.

V.3.25

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, de composante déployée A. On suppose $P \neq G$, de sorte que A_G est strictement inclus dans A. D'après la remarque V.2.5, on peut voir C_{A_G} comme un sous-groupe de C_A. Comme A_G est le produit direct de ${}^0A_G$ et de C_{A_G}, et que $A_G \cap {}^0G = {}^0A_G$ (lemme V.2.6) on a :

$$C_{A_G} \cap {}^0G = C_{A_G} \cap A_G \cap {}^0G = C_{A_G} \cap {}^0A_G = \{1\}.$$

On en déduit que

$$C_A \cap {}^0GA_G = C_{A_G}(C_A \cap {}^0G)$$

et donc que l'inclusion $C_A \hookrightarrow G$ induit une inclusion

$$C_A/C_{A_G}(C_A \cap {}^0G) \hookrightarrow G/{}^0GA_G.$$

Le membre de droite étant fini d'après la proposition V.2.6, celui de gauche aussi.

Prenons un élément t dans C_A^{++}. Ses puissances t^n, $n \in \mathbb{N}^*$ sont dans C_A^{++} et l'une d'elles est dans $C_{A_G}(C_A \cap {}^0G)$. Ceci montre que $C_A^{++} \cap {}^0G$ est non vide.

V.4 Groupes de Weyl

On fixe un sous-groupe parabolique minimal $P_\emptyset = M_\emptyset N_\emptyset$ de G et l'on utilise les notations de V.3.12. Pour tout $\gamma \in \Sigma_\emptyset$, on note U_γ le sous-groupe unipotent de G normalisé par $A_\emptyset$ tel que l'action adjointe de $A_\emptyset$ sur l'algèbre de Lie de U_γ admette les seuls poids γ et 2γ et maximal pour cette propriété.

V.4.1 Décomposition de Bruhat

Le groupe de Weyl

$$W(A_\emptyset) = N_G(A_\emptyset)/Z_G(A_\emptyset) = N_G(A_\emptyset)/M_\emptyset$$

est noté W_G. On note $S_\emptyset$ l'ensemble des réflexions s_α dans W_G associées aux racines simples $\alpha \in \Delta_\emptyset$.

Proposition ([6]). *Le quadruplet $(G, P_\emptyset, N_G(A_\emptyset), S_\emptyset)$ est un système de Tits. En particulier, on a la décomposition suivante de G (décomposition de Bruhat)*

$$G = \coprod_{w \in W_G} P_\emptyset w P_\emptyset.$$

V.4.2

Soit T une partie de $\Sigma_\emptyset$. On dit que T est fermée si

$$(T+T)\cap\Sigma_\emptyset\subset T.$$

On dit que T est convexe si T est l'intersection de $\Sigma_\emptyset$ avec un cône convexe fermé de $\mathfrak{a}^*$. Une partie fermée T de $\Sigma_\emptyset$ est dite symétrique si $T=-T$. Dans ce cas, T est un système de racines, et l'on note $W_T\subset W_G$ son groupe de Weyl. Une partie fermée T de $\Sigma_\emptyset$ est dite unipotente si $T\subset w\cdot\Sigma_\emptyset^+$ pour un certain $w\in W_G$.

Pour toute partie fermée T de $\Sigma_\emptyset$, on note $G(T)$ le sous-groupe algébrique de G engendré par $M_\emptyset$ et les U_γ, $\gamma\in T$. Si T est unipotent, on note $U(T)$ le sous-groupe de G engendré par les U_γ, $\gamma\in T$.

Le résultat suivant est démontré dans [6], 3.22.

Proposition. *Soient S, T des parties fermées de $\Sigma_\emptyset$.*

(*i*) *Si S et T sont convexes, alors $G(S)\cap G(T)=G(S\cap T)$.*

(*ii*) *Si T est unipotent, alors $G(S)\cap U(T)=U(S\cap T)$.*

On appelle une partie fermée $\mathcal{P}$ de $\Sigma_\emptyset$ parabolique si $\Sigma_\emptyset^+\subset\mathcal{P}$. Dans ce cas, on pose $\mathcal{M}=\mathcal{P}\cap(-\mathcal{P})$, $\mathcal{N}=\mathcal{P}\setminus\mathcal{M}$, et l'on dit que $(\mathcal{P},\mathcal{M},\mathcal{N})$ est un triplet parabolique dans $\Sigma_\emptyset$.

Proposition ([6], 5.12-5.18)**.** *Soit Θ une partie de $\Delta_\emptyset$, et soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$ les parties fermées de $\Sigma_\emptyset$ engendrées par $\Sigma^+\cup(-\Theta)$ et $(-\Theta)\cup\Theta$ respectivement. Alors $(\mathcal{P},\mathcal{M},\mathcal{N}=\mathcal{P}\setminus\mathcal{M})$ est un triplet parabolique dans $\Sigma_\emptyset$ et $P=MN$ est un sous-groupe parabolique standard de G, où $P=G(\mathcal{P})$, $M=G(\mathcal{M})$ et $N=U(\mathcal{N})$. Tout sous-groupe parabolique standard $P=MN$ de G est obtenu ainsi. De plus, la partie Θ est uniquement déterminée par la donnée de $(\mathcal{P},\mathcal{M},\mathcal{N})$ ou de $P=MN$. En particulier, les parties $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont convexes.*

V.4.3

Pour tout sous-groupe de Levi standard M de G, de composante déployée A, posons

$$W_M=N_M(A_\emptyset)/Z_M(A_\emptyset). \tag{V.4.3.1}$$

Comme

$$Z_G(A_\emptyset)=M_\emptyset\subset M,$$

on obtient une injection canonique $W_M\hookrightarrow W_G$. Si $w\in W_G$, et si g est un relèvement de w dans G, on pose, pour tout sous-groupe de Levi standard de G, $w\cdot M=gMg^{-1}$. Comme $M_\emptyset\subset M$, il est clair que ceci ne dépend pas du relèvement choisi. Posons, pour deux sous-groupes de Levi standards M et L de G,

$$W(L,M)=\{w\in W_G\,|\,w\cdot L=M\}. \tag{V.4.3.2}$$

On a bien sûr $W_M\cdot W(L,M)\cdot W_L=W(L,M)$. Notons que

$$W(M,M)=(N_G(M)\cap N_G(A_\emptyset))/M_\emptyset,$$

et que $M_\emptyset \subset M$. Donc on a une application bien définie

$$W(M,M) \to W(A) = N_G(A)/Z_G(A) = N_G(M)/M$$

dont le noyau est W_M. Il s'ensuit que l'on a une injection

$$W(M,M)/W_M \to W(A),$$

et l'on vérifie immédiatement qu'elle est surjective car les tores déployés maximaux sont conjugués dans M. Ainsi l'on obtient

$$W(M,M)/W_M \simeq W(A). \tag{V.4.3.3}$$

V.4.4

Soit M un sous-groupe de Levi standard de G. Posons

$$W(\,*\,,M) = \bigcup_L W(L,M), \quad W(M,\,*\,) = \bigcup_L W(M,L),$$

et

$$l(M) = |W_M \backslash W(\,*\,,M)| = |W(M,\,*\,)/W_M|$$

où la somme porte sur l'ensemble des sous-groupes de Levi standards de G. Si M est un sous-groupe de Levi non standard, on pose $l(M) = l(M')$ où M' est un sous-groupe de Levi standard de G conjugué à M.

V.4.5

Notons la conséquence suivante de la décomposition de Bruhat. Nous renvoyons le lecteur à [6], 5.15-5.20 pour une démonstration.

Lemme. *Soient $P = MN$ et $Q = LU$ deux sous-groupes paraboliques semi-standards de G, où M et L sont des sous-groupes de Lévi standards. Alors l'ensemble des orbites de Q dans $X = P\backslash G$ est en bijection avec l'ensemble des doubles classes $W_M\backslash W_G/W_L$.*

On munit alors $W_M\backslash W_G/W_L$ de l'ordre de Bruhat

$$\bar{w_1} \leq_{PQ} \bar{w_2} \text{ si } P\bar{w}_1Q \subset \overline{P\bar{w}_2Q}.$$

Dans cette situation, on choisit alors un ordre total $\preceq_{PQ}$ plus fin que l'ordre de Bruhat sur $W_M\backslash W_G/W_L$.

Corollaire. *Soient $P = MN$ et $Q = LU$ deux sous-groupes paraboliques de G. Alors l'ensemble des orbites de Q dans $X = P\backslash G$ est fini.*

<u>*Démonstration*</u>. Ceci se déduit immédiatement du lemme ci-dessus et du fait que tout sous-groupe parabolique de G est conjugué à un sous-groupe parabolique standard. $\square$

V.4.6

Soient P et Q des sous-groupes paraboliques standards de G. Nous allons décrire un système explicite de représentants des doubles classes $W_M\backslash W_G/W_L$ possédant d'utiles propriétés. Posons :

(V.4.6.1) $$W^{L,M} = \{w \in W_G \,|\, w \cdot (L \cap P_\emptyset) \subset P_\emptyset,\ w^{-1} \cdot (M \cap P_\emptyset) \subset P_\emptyset\}.$$

On a alors

Lemme. (i) *Dans chaque double classe $W_M\backslash W_G/W_L$, il existe un unique élément de $W^{L,M}$. C'est l'élément dont la longueur est minimale dans cette double classe.*

(ii) *Si $w \in W^{L,M}$, alors $M \cap w \cdot Q$ est un sous-groupe parabolique standard de M, de facteur de Lévi $M \cap w \cdot L$ et de radical unipotent $M \cap w \cdot U$ et $w^{-1} \cdot P \cap L$ est un sous-groupe parabolique standard de L, de facteur de Lévi $w^{-1} \cdot M \cap L$ et de radical unipotent $w^{-1} \cdot N \cap L$. On a aussi les décompositions*

$$P \cap w \cdot Q = (P \cap w \cdot L)(P \cap w \cdot U), \quad Q \cap w^{-1} \cdot P = (Q \cap w^{-1} \cdot M)(Q \cap w^{-1} \cdot N),$$

$$N \cap w \cdot Q = (N \cap w \cdot L)(N \cap w \cdot U), \quad U \cap w^{-1} \cdot P = (U \cap w^{-1} \cdot M)(U \cap w^{-1} \cdot N).$$

(iii) $W^{L,M} \cap W(L,M) \simeq W_M\backslash W(L,M)/W_L \simeq W(L,M)/W_L$.

Démonstration. Commençons par (ii). Soient $\mathcal{P}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{Q}, \mathcal{L}, \mathcal{U}$ les parties de $\Sigma_\emptyset$ correspondant par la bijection de la proposition V.4.2 respectivement aux sous-groupes P, M, N, Q, L, U de G. Posons $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cap \Sigma_\emptyset^+$ et $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cap \Sigma_\emptyset^+$. On a clairement $W_M = W_\mathcal{M}$ et $W_L = W_\mathcal{L}$. De plus,

$$W^{L,M} = \{w \in W_G \,|\, w \cdot \mathcal{L}^+ \subset \Sigma_\emptyset^+,\ w^{-1} \cdot \mathcal{M}^+ \subset \Sigma_\emptyset^+\}.$$

Soit $w \in W^{L,M}$. Alors $\mathcal{M} \cap w \cdot \mathcal{Q}$ contient $\mathcal{M}^+$. C'est donc une partie parabolique de $\mathcal{M}$, et

$$(\mathcal{M} \cap w \cdot \mathcal{Q}, \mathcal{M} \cap w \cdot \mathcal{L}, \mathcal{M} \cap w \cdot \mathcal{U})$$

est un triplet parabolique de $\mathcal{M}$. On déduit de la proposition V.4.2 que

$$M \cap w \cdot Q = (M \cap w \cdot L)(M \cap w \cdot U)$$

est un sous-groupe parabolique standard de M. On montre de la même manière que

$$L \cap w^{-1} \cdot P = (L \cap w^{-1} \cdot M)(L \cap w^{-1} \cdot N)$$

est un sous-groupe parabolique standard de L. Les autres décompositions s'obtiennent sans difficulté.

(i) On utilise les résultats suivants, dont on trouvera une démonstration dans [42], Append. I, II :

- la longueur $l(w)$ d'un élément $w \in W_G$ est égale au nombre de racines γ dans $\Sigma_\emptyset^+$ telles que $w \cdot \gamma \in -\Sigma_\emptyset^+$.

- Si $w \in W_\mathcal{L}$, alors $w \cdot (\Sigma_\emptyset^+ \setminus \mathcal{L}^+) \subset \Sigma_\emptyset^+ \setminus \mathcal{L}^+$.

- Si $w \in W_G$ et $\gamma \in \Delta_\emptyset$, alors $l(ws_\gamma) > l(w)$ si et seulement si $w \cdot \gamma \in \Sigma_\emptyset^+$.

Il s'ensuit que

(V.4.6.2) $W^{L,M} = \{w \in W_G \,|\, \forall\gamma \in \Delta_\emptyset \cap \mathcal{L},\ l(ws_\gamma) > l(w),$
$$\forall\gamma \in \Delta_\emptyset \cap \mathcal{M},\ l(w^{-1}s_\gamma) > l(w^{-1})\}.$$

Le résultat voulu découle alors de [8], Chap. IV, §1, exercice 3. Voir aussi [18], Prop. 2.7.3.

(iii) est évident. □

V.4.7

On suppose maintenant que P et Q sont des sous-groupes paraboliques quelconques de G. Nous allons déduire du paragraphe précédent l'existence d'un système de représentants $\mathcal{W}^{Q,P}$ dans G des doubles classes $P\backslash G/Q$ vérifiant les propriétés suivantes :

Si $z \in \mathcal{W}^{Q,P}$, alors $M \cap z \cdot Q$ est un sous-groupe parabolique de M, de facteur de Lévi $M \cap z \cdot L$ et de radical unipotent $M \cap z \cdot U$, $z^{-1} \cdot P \cap L$ est un sous-groupe parabolique de L, de facteur de Lévi $z^{-1} \cdot M \cap L$ et de radical unipotent $z^{-1} \cdot N \cap L$. De plus

$$P \cap z \cdot Q = (P \cap z \cdot L)(P \cap z \cdot U), \quad Q \cap z^{-1} \cdot P = (Q \cap z^{-1} \cdot M)(Q \cap z^{-1} \cdot N),$$
$$N \cap z \cdot Q = (N \cap z \cdot L)(N \cap z \cdot U), \quad U \cap z^{-1} \cdot P = (U \cap z^{-1} \cdot M)(U \cap z^{-1} \cdot N).$$

En effet, le paragraphe précédent traite le cas où P et Q sont standards et où l'on prend pour $\mathcal{W}^{Q,P}$ un système de représentants dans G des éléments de $W^{L,M}$. Or P et Q sont conjugués respectivement à des sous-groupes paraboliques standards $P_1 = M_1N_1$ et $Q_1 = L_1U_1$, disons par des éléments g et h respectivement :

$$P_1 = g \cdot P, \quad Q_1 = h \cdot Q.$$

On suppose aussi que

$$M_1 = g \cdot M, \quad L_1 = h \cdot L.$$

De la décomposition

$$G = \coprod_{w \in \mathcal{W}^{Q_1,P_1}} P_1wQ_1$$

du paragraphe précédent, on tire

$$G = \coprod_{w \in \mathcal{W}^{Q_1,P_1}} P_1wQ_1 = \coprod_{w \in \mathcal{W}^{Q_1,P_1}} (g \cdot P)w(h \cdot Q) = \coprod_{w \in \mathcal{W}^{Q_1,P_1}} g(P(g^{-1}wh)Q)h^{-1}.$$

On a donc

$$G = \coprod_{w \in \mathcal{W}^{Q_1,P_1}} P(g^{-1}wh)Q.$$

On choisit donc $\mathcal{W}^{Q,P} = g^{-1}\mathcal{W}^{Q_1,P_1}h$. Montrons maintenant que pour tout $z =\in g^{-1}wh \in M \cap z \cdot L$, $M \cap z \cdot Q$ est bien un sous-groupe parabolique de M, de facteur de Lévi $M \cap z \cdot L$ et de radical unipotent $M \cap z \cdot U$. On a

$$M \cap z \cdot Q = (g^{-1} \cdot M_1) \cap (g^{-1}wh) \cdot (h^{-1} \cdot Q_1) = g^{-1} \cdot (M_1 \cap w \cdot Q_1),$$

et donc $M \cap z \cdot Q$ est un sous-groupe parabolique de M. De plus

$$M \cap z \cdot Q = g^{-1} \cdot ((M_1 \cap w \cdot L_1)(M_1 \cap w \cdot U_1)) = (M \cap z \cdot L)(M \cap z \cdot U).$$

Les assertions restantes se démontrent de la même manière.

V.4.8 Sous-groupe de Levi maximaux

On dit qu'un sous-groupe de Levi est maximal s'il est facteur de Levi d'un sous-groupe parabolique maximal propre de G. Les sous-groupes de Levi maximaux standard de G correspondent par la proposition V.4.2 aux parties de $\Delta_\emptyset$ de la forme

$$\Theta = \Delta_\emptyset \setminus \{\alpha\},$$

α étant une racine simple. Il n'est pas difficile de voir en utilisant les considérations de la section V.4.6 qu'un sous-groupe de Levi M est maximal si et seulement si $l(M) = 2$, où $l(M)$ est définie en V.4.4.

Supposons M standard donné par la partie $\Delta_\emptyset \setminus \{\alpha\}$. Soit w un représentant de l'élément non trivial de $W(M, *)/W_M$ dans G. Alors si $P = MN$ est le sous-groupe parabolique standard contenant M, et si P' est le sous-groupe parabolique standard contenant $M' = w \cdot M$, on a

$$w \cdot P = \bar{P}'.$$

V.5 Sous-groupes compacts

Les résultats de cette section sont démontrés dans [13].

V.5.1 Sous-groupes compacts maximaux

On fixe un sous-groupe parabolique minimal $P_\emptyset = M_\emptyset N_\emptyset$ de G comme dans la section précédente.

Théorème. *Il existe un sous-groupe compact maximal K_0 de G, ouvert, tel que*

(1) $G = K_0 P_\emptyset = P_\emptyset K_0$.

(2) *Pour tout $s \in W_G$, il existe un représentant de s dans K_0.*

(3) *Soit $P = MN$ un parabolique standard. Alors*

$$K \cap P = (K_0 \cap M)(K_0 \cap N).$$

(4) *(Décomposition de Cartan)*

$$G = \coprod_{a \in \tilde{C}_\emptyset^+} K_0 a K_0 = \coprod_{a \in C_\emptyset^+, f \in F_\emptyset} K_0 a f K_0.$$

(Voir V.3.23 pour les notations.)

(5) *Pour tout parabolique standard $P = MN$ le sous-groupe compact maximal $K_0 \cap M$ de M vérifie les propriétés* (1) *à* (4) *pour le parabolique minimal $P_\emptyset \cap M$ de M.*

Un tel sous-groupe compact maximal K_0 est dit adapté à $A_\emptyset$.

Corollaire. *Si P est un sous-groupe parabolique quelconque de G, il est conjugué sous K_0 à un sous-groupe parabolique standard. De plus G/P est compact.*

V.5.2 Décomposition d'Iwahori des sous-groupes compacts ouverts

On fixe $P_\emptyset$, $A_\emptyset$, K_0 comme dans le paragraphe précédent.

Théorème ([23], 2.1)**.** *Il existe une base de voisinages de l'identité dans G constituée de sous-groupes ouverts compacts K tels que :*

(i) K est un sous-groupe distingué de K_0.

(ii) Pour tout sous-groupe parabolique standard $P = MN$, on a une décomposition

$$K = K_{\bar{N}} K_M K_N, \quad K_{\bar{N}} = K \cap \bar{N}, \quad K_N = K \cap N, \quad K_M = K \cap M$$

dite décomposition d'Iwahori de K selon P. De plus, $\tilde{C}_A$ normalise K_M, $\tilde{C}_A^+$ normalise K_N et $\tilde{C}_A^- := (\tilde{C}_A^+)^{-1}$ normalise $K_{\bar{N}}$.

(iii) Soit $m \in \tilde{C}_A^{++}$. Alors $N = \bigcup_n m^{-n} K_N m^n$, et $\bar{N} = \bigcup_n m^n K_{\bar{N}} m^{-n}$. Le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique est donc la réunion de ses sous-groupes ouverts compacts. Plus généralement, pour toute partie compacte Γ de N (resp. $\bar{\Gamma}$ de $\bar{N}$), il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $m \in C_A^+(\epsilon)$, $\Gamma \subset m^{-1} K_N m$ (resp. $\bar{\Gamma} \subset m K_{\bar{N}} m^{-1}$).

(iv) Avec les notations de (iii), l'ensemble des $N_i := m^i K_N m^{-i}$, $i \in \mathbb{N}$, forme une base de voisinages de l'identité dans N. De même l'ensemble des $\bar{N}_i := m^{-i} K_{\bar{N}} m^i$, $i \in \mathbb{N}$, forme une base de voisinages de l'identité dans $\bar{N}$. Plus généralement, pour tout sous-groupe ouvert compact Γ de N (resp. $\bar{\Gamma}$ de $\bar{N}$), il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $m \in C_A^+(\epsilon)$, $m K_N m^{-1} \subset \Gamma$ (resp. $m^{-1} K_{\bar{N}} m \subset \bar{\Gamma}$).

V.5.3 Décomposition de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, K)$

On fixe $P_\emptyset$, $A_\emptyset$, K_0 comme dans le paragraphe précédent. Rappelons que si K est un sous-groupe ouvert compact de G, et si g est un élément de G, nous avons défini en II.3.12, remarque 2, la distribution $a_{g,K} := e_K * \delta_g * e_K$ dans $\mathcal{H}(G, K)$. Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, par exemple si K est fixé, nous noterons cette distribution simplement a_g.

Fixons un sous-groupe ouvert compact K de G, contenu et distingué dans K_0 et admettant une décomposition d'Iwahori selon les sous-groupes paraboliques standards. Choisissons un système de représentants $\{x_1, \dots, x_r\}$ des classes de K dans K_0.

Posons $\mathcal{H}_0 := \mathcal{H}(K_0, K)$. Il est clair que $\mathcal{H}_0$ est une sous-algèbre de dimension finie de $\mathcal{H}(G, K)$ dont une base est $\{a_{x_i}\}_{i=1,\dots,r}$.

Lemme. *Pour tout $g \in G$, on a :*

$$a_g a_{x_i} = a_{g x_i}, \quad a_{x_i} a_g = a_{x_i g}.$$

<u>Démonstration</u>. Comme K est distingué dans K_0, $e_K * \delta_{x_i} = \delta_{x_i} * e_K$, d'où

$$\begin{aligned} a_g a_{x_i} &= (e_K * \delta_g * e_K) * (e_K * \delta_{x_i} * e_K) = e_K * \delta_g * e_K * \delta_{x_i} * e_K \\ &= e_K * \delta_g * \delta_{x_i} * e_K = a_{g x_i}. \end{aligned}$$

De même, $a_{x_i} a_g = a_{x_i g}$. □

Lemme. *Soient $z_1, z_2 \in \tilde{C}_\emptyset^+$. Alors $a_{z_1} a_{z_2} = a_{z_1 z_2}$.*

Démonstration. Ceci n'est pas complètement trivial car les élément de $\tilde{C}_\emptyset^+$ ne normalisent pas K. Nous allons donc utiliser la décomposition d'Iwahori de K selon $P_\emptyset$ que nous écrivons simplement pour alléger les notations $K = K_{\bar{N}} K_M K_N$. Donc, nous avons l'égalité suivante dans $\mathcal{E}'(G)$ (*cf.* proposition II.3.11)

$$e_K = e_{K_{\bar{N}}} * e_{K_M} * e_{K_N} = e_{K_N} * e_{K_M} * e_{K_{\bar{N}}}.$$

La seconde égalité étant obtenue par passage à l'inverse. On a de plus

$$z_1 K_N z_1^{-1} \subset K_N \subset K, \quad z_2^{-1} K_{\bar{N}} z_2 \subset K_{\bar{N}} \subset K, \quad z_1 K_M z_1^{-1} = K_M \subset K$$

d'où :

$$e_K * e_{z_1 K_N z_1^{-1}} = e_K, \quad e_{z_2^{-1} K_{\bar{N}} z_2} * e_K = e_K, \quad e_K * e_{K_M} = e_K.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
a_{z_1} a_{z_2} &= (e_K * \delta_{z_1} * e_K) * (e_K * \delta_{z_2} * e_K) = e_K * \delta_{z_1} * e_K * \delta_{z_2} * e_K \\
&= e_K * \delta_{z_1} * e_{K_N} * e_{K_M} * e_{K_{\bar{N}}} * \delta_{z_2} * e_K \\
&= e_K * e_{z_1 K_N z_1^{-1}} * \delta_{z_1} * e_{K_M} * \delta_{z_2} * e_{z_2^{-1} K_{\bar{N}} z_2} * e_K \\
&= e_K * \delta_{z_1} * e_{K_M} * \delta_{z_2} * e_K = e_K * e_{K_M} * \delta_{z_1} * \delta_{z_2} * e_K \\
&= e_K * \delta_{z_1 z_2} * e_K = a_{z_1 z_2}.
\end{aligned}$$

□

Comme $C_\emptyset$ est un groupe abélien, on en déduit :

Corollaire. *Pour tous* $z_1, z_2 \in C_\emptyset^+$, $a_{z_1} a_{z_2} = a_{z_2} a_{z_1}$.

Soit D le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(G,K)$ engendré par les a_f, $f \in F_\emptyset$, et C le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(G,K)$ engendré par les a_z, $z \in C_\emptyset^+$. Alors C est une sous-algèbre de $\mathcal{H}(G,K)$. Rappelons que l'on a posé $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(K_0, K)$.

Théorème. *L'algèbre de Hecke* $\mathcal{H}(G,K)$ *se décompose en :*

$$\mathcal{H}(G,K) = \mathcal{H}_0 D C \mathcal{H}_0.$$

Démonstration. Partons de la décomposition de Cartan $G = K_0 F_\emptyset C_\emptyset^+ K_0$. Comme $K_0 = \bigcup_{i=1}^r K x_i = \bigcup_{i=1}^r x_i K$, on en déduit

$$G = \bigcup_{i,j=1}^{r} K x_i F_\emptyset C_\emptyset^+ x_j K.$$

Une base de $\mathcal{H}(G,K)$ est donc donnée par les

$$\{a_{x_i f z x_j}\}, i,j = 1, \ldots, r, f \in F_\emptyset, z \in C_\emptyset^+.$$

Or $a_{x_i f z x_j} = a_{x_i} a_f a_z a_{x_j}$ d'après les deux lemmes ci-dessus. □

V.5.4 Calculs de fonctions modulaires

On a fixé une mesure de Haar à gauche μ_G sur G.

Proposition. *Le groupe G est unimodulaire.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que la fonction modulaire δ_G définie en II.3.7 est identiquement égale à 1. D'après la décomposition de Cartan de G, $\bigcup_{a\in A_\emptyset} K_0 A_\emptyset K_0$ est d'indice fini dans G. Comme δ_G est un caractère à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, il est trivial sur tout groupe compact, et il suffit donc de montrer que $\delta_G(a) = 1$ pour tout $a \in A_\emptyset$. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G admettant une décomposition d'Iwahori selon $P_\emptyset$. Choisissons aussi un sous-groupe ouvert compact K_1 contenu dans $K \cap a^{-1}Ka$, admettant lui aussi une décomposition d'Iwahori selon $P_\emptyset$. Simplifions les notations en posant $P = P_\emptyset = MN$. Ecrivons ces décompositions d'Iwahori :

$$K = K_{\bar N} K_M K_N, \quad K_1 = K_{1,\bar N} K_{1,M} K_{1,N}.$$

Une formule pour $\delta_G(a)$ est donnée par l'équation (II.3.8.1) :

$$\delta_G(a) = \frac{[a^{-1}Ka : K_1]}{[K : K_1]}$$

Or,

$$\begin{aligned}[K : K_1] &= [K_{\bar N} K_M K_N : K_{1,\bar N} K_{1,M} K_{1,N}] \\ &= [K_{\bar N} : K_{1,\bar N}][K_M : K_{1,M}][K_N : K_{1,N}],\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}[a^{-1}Ka : K_1] &= [a^{-1}K_{\bar N} K_M K_N a : K_{1,\bar N} K_{1,M} K_{1,N}] \\ &= [a^{-1}K_{\bar N} a : K_{1,\bar N}][a^{-1}K_M a : K_{1,M}][a^{-1}K_N a : K_{1,N}].\end{aligned}$$

Or $a^{-1}K_M a = K_M$, d'où finalement

$$\delta_G(a) = \frac{[a^{-1}K_{\bar N} a : K_{1,\bar N}]}{[K_{\bar N} : K_{1,\bar N}]} \frac{[a^{-1}K_N a : K_{1,N}]}{[K_N : K_{1,N}]}.$$

Rappelons que $\bar N$ est engendré par les sous-groupes unipotents $U_{-\gamma}$, $\gamma \in \Sigma_\emptyset^+$. Si l'on note m_γ la multiplicité de la racine γ dans $\Sigma'_\emptyset$ et $m_{2\gamma}$ la multiplicité de la racine 2γ, on a donc

$$\frac{[a^{-1}K_{\bar N} a : K_{1,\bar N}]}{[K_{\bar N} : K_{1,\bar N}]} = \prod_{\gamma\in\Sigma_\emptyset^+} |\gamma(a)^{m_\gamma + 2m_{2\gamma}}|_{\mathbb{F}}.$$

et de même

$$\frac{[a^{-1}K_N a : K_{1,N}]}{[K_N : K_{1,N}]} = \prod_{\gamma\in\Sigma_\emptyset^+} |\gamma(a)^{-(m_\gamma + 2m_{2\gamma})}|_{\mathbb{F}}.$$

Ceci montre que $\delta_G(a) = 1$. □

Nous allons maintenant donner une autre expression pour $\delta_{P\backslash G}(a)$. Soit μ_P une mesure de Haar à gauche sur P et δ_P la fonction modulaire correspondante. On a alors, par définition

$$\int_P \chi_{K_M K_N}(apa^{-1})\, d\mu_P(p) = \delta_P(a) \int_G \chi_{K_M K_N}(p)\, d\mu_P(p),$$

c'est-à-dire $\mu_P(a^{-1}K_MK_Na) = \delta_P(a)\mu_P(K_MK_N)$.

Comme K_MK_N est un sous-groupe compact de P, l'équation (II.3.8.1) donne ici

$$\delta_P(a) = \frac{[a^{-1}K_MK_Na : K_{1,M}K_{1,N}]}{[K_MK_N : K_{1,M}K_{1,N}]}$$

De plus on a

$$[K_MK_N : K_{1,M}K_{1,N}] = [K_M : K_{1,M}][K_N : K_{1,N}],$$
$$[a^{-1}K_MK_Na : K_{1,M}K_{1,N}] = [a^{-1}K_Ma : K_{1,M}][a^{-1}K_Na : K_{1,N}].$$

Comme $a^{-1}K_Ma = K_M$, on obtient

$$\delta_P(a) = \frac{[a^{-1}K_Na : K_{1,N}]}{[K_N : K_{1,N}]}$$

Comme ci-dessus, N est engendré par les sous-groupes unipotents U_γ, $\gamma \in \Sigma(P)$. Un calcul similaire à celui fait ci-dessus montre que l'on a alors

$$\delta_P(a) = \prod_{\gamma\in\Sigma(P)} |\gamma(a)^{-(m_\gamma+2m_{2\gamma})}|_{\mathbb{F}}.$$

Remarquons que ce calcul montre au passage que

$$\delta_P(a) = \delta_N(a) = \delta_{\bar{N}}(a)^{-1}.$$

pour tout $a \in A$. Par le même raisonnement que ci-dessus utilisant la décomposition de Cartan (mais cette fois pour le groupe M plutôt que G), l'égalité ci-dessus est valable en fait pour tout $a \in M$. On déduit de tout cela le

Lemme. *Avec les notations ci-dessus, pour tout $a \in A$,*

$$\delta_{P\backslash G}(a) = \frac{\delta_G(a)}{\delta_P(a)} = \delta_P(a)^{-1} = \delta_N(a)^{-1} = \delta_{\bar{N}}(a) = \prod_{\gamma\in\Sigma(P)} |\gamma(a)^{m_\gamma+2m_{2\gamma}}|_{\mathbb{F}}.$$

V.5.5 Démonstration du lemme combinatoire de Langlands

Le lemme combinatoire de Langlands est basé sur les propriétés de la projection sur un cône dans un espace euclidien. Soit donc V un tel espace, de dimension finie, où l'on note $\langle .\,,.\rangle$ le produit scalaire. Fixons un cône ouvert C de V, et notons $\check{}C$ son dual

$$\check{}C = \{v \in V \,|\, \forall w \in C, \langle v, w\rangle > 0\}.$$

Notons $\overline{C}$ et $\overline{\check{}C}$ les adhérence respective de C et $\check{}C$.

Proposition. *Pour tout $v \in V$, il existe un unique élément $v_0 = p_{\overline{C}}(v)$ de $\overline{C}$, appelé projection de v sur de $\overline{C}$, vérifiant*

(*i*) $\forall w \in \overline{C}$, $||v - v_0|| \leq ||v - w||$.

De plus, l'élément v_0 est caractérisé par l'une des propriétés suivantes, équivalentes à (*i*),

(*ii*) $\forall w \in \overline{C}$, $\langle v - v_0, w - v_0\rangle \leq 0$,

(*iii*) *le vecteur $v_0 - v$ est dans $\overline{\check{}C}$ et* $\langle v - v_0, v_0\rangle = 0$.

L'existence de la projection est un résultat établi plus généralement pour toute partie convexe fermée d'un espace de Hilbert. L'équivalence des conditions (i), (ii) et (iii) pour les cônes est élémentaire et laissée au lecteur.

Fixons maintenant une base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de V, et notons $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ la base duale. On suppose désormais que C est le cône ouvert engendré par les vecteurs $\omega_1, \ldots, \omega_n$, c'est-à-dire :

$$C = \{v = \sum_{i=1}^{n} t_i\,\omega_i,\ t_i > 0\}.$$

On a alors

$$\check{C} = \{w = \sum_{i=1}^{n} s_i\,\alpha_i,\ s_i > 0\}.$$

Corollaire. *Pour tout $v \in V$, il existe une partie unique $F(v)$ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que*

$$v = \sum_{i \notin F(v)} t_i\,\omega_i - \sum_{j \in F(v)} s_j\,\alpha_j,$$

avec $t_i > 0$, $s_j \geq 0$. On a alors

$$v_0 = p_{\overline{C}}(v) = \sum_{i \notin F(v)} t_i\,\omega_i.$$

<u>*Démonstration*</u>. Soit $v \in V$. Sa projection v_0 sur le cône $\overline{C}$ s'écrit

$$v_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i\,\omega_i$$

où les t_i sont positifs ou nuls. Soit $F(v) = F(v_0)$ l'ensemble des i tels que t_i est nul, de sorte que

$$v_0 = \sum_{i \notin F(v)} t_i\,\omega_i, \quad t_i > 0.$$

Décomposons $v - v_0$ dans la base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$:

$$v_0 - v = \sum_{i=1}^{n} s_j\,\alpha_j.$$

D'après le (iii) de la proposition, $v_0 - v$ est dans $\overline{\check{C}}$, se qui se traduit par $s_j \geq 0$, et d'autre part $v_0 - v$ est orthogonal à v_0, ce qui donne $s_j = 0$ si $j \notin F(v)$.

Réciproquement, si $v = \sum_{i \notin F(v)} t_i\,\omega_i - \sum_{j \in F(v)} s_j\,\alpha_j$, on voit que $v_0 = p_{\overline{C}}(v) = \sum_{i \notin F(v)} t_i\,\omega_i$, ce qui montre l'unicité de $F(v)$. □

On reprend les notations de V.3.16. L'espace vectoriel V est maintenant $(\mathfrak{a}_M^G)^*$, dont une base est $\Delta(P) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, les α_i étant les restrictions à $\mathfrak{a}_M$ des racines dans $\Delta_\emptyset \setminus \Delta_\emptyset^M$. Notons $\{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$ la base duale. Le cône C ci-dessus est donc le cône noté ${}_P^G[(\mathfrak{a}_M^G)^*]^+$ en V.3.16, le cône $\check{C}$ étant celui noté ${}^+[(\mathfrak{a}_M^G)^*]_P^G$.

Soit $\mu \in (\mathfrak{a}_M^G)^*$. D'après ce qui précède, il existe une partie $F(\mu)$ de $\{1, \ldots, l\}$ telle que μ s'écrive

$$\mu = \sum_{i \notin F(\mu)} t_i\,\omega_i - \sum_{j \in F(\mu)} s_j\,\alpha_j,$$

avec $t_i > 0$ et $s_j \geq 0$. Or, une telle partie $F(\mu)$ de $\{1, \ldots, l\}$ détermine un unique sous-groupe parabolique standard $Q = LU$ de G contenant P tel que $\Delta(Q)$ soit la restriction à $\mathfrak{a}_L$ des racines α_i avec i dans $\{1, \ldots, l\} \setminus F(\mu)$.

On pose $\mu^+ = \sum_{i \notin F(\mu)} t_i \, \omega_i$ et $\mu^- = s_j \, \alpha_j$. Il est clair que $\mu^+ \in {}^G_Q[(\mathfrak{a}_L^G)^*]^+$ et $\mu^- \in -p_M^L({}^+[(a_M^G)^*]_P^G$.

Chapitre VI

Représentations des groupes réductifs p-adiques

Ce chapitre constitue le cœur du livre. Il expose la théorie du “centre de Bernstein”, qui donne une description explicite du centre de la catégorie $\mathcal{M}(G)$ des représentations lisses sur un groupe réductif p-adique G. Défini abstraitement, le centre d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est l'ensemble, muni d'une structure d'anneau, des transformations naturelles du foncteur identité de la catégorie $\mathcal{A}$ vers lui-même. Dans le cas où $\mathcal{A}$ est la catégorie des modules non-dégénérés sur une $\mathbb{C}$-algèbre à idempotents A, nous avons donné dans le chapitre I une description de ce centre comme centre de l'anneau complété $\bar{A}$. Lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{M}(G)$, la catégorie des représentations lisses sur un groupe totalement discontinu G, l'équivalence de catégorie $\mathcal{M}(G) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{H}(G))$ établie au chapitre II permet de donner une description du centre de cette catégorie comme algèbre de convolution de distributions invariantes essentiellement compactes. Cette description est d'une nature géométrique. La théorie de Bernstein en donne une autre, de nature « spectrale ». Pour mieux comprendre de quoi nous parlons, il peut être utile de rappeler ce qui se passe pour les groupes finis. Si G est un groupe fini, la catégorie des représentations de G est équivalente à la catégorie des $\mathbb{C}[G]$-modules unitaires, $\mathbb{C}[G]$ étant l'algèbre (sur $\mathbb{C}$) du groupe G, que l'on voit comme l'algèbre des fonctions sur G à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni du produit de convolution. Dans ce cas, nous savons que le centre de la catégorie s'identifie naturellement au centre de l'anneau $\mathbb{C}[G]$, c'est-à-dire à l'algèbre $\mathbb{C}[G]^G$ des fonctions constantes sur les classes de conjugaisons de G. Or il existe deux bases naturelles de $\mathbb{C}[G]^G$: une provenant de la géométrie, et constituée des fonctions caractéristiques des classes de conjugaison de G, et l'autre, spectrale, constituée des caractères des représentations irréductibles. Nous avons vu en quoi consiste l'analogue pour les groupes t.d. de la première de ces bases. La théorie du centre de Bernstein donne l'analogue pour les groupes réductifs p-adiques de la deuxième.

La structure des groupes réductifs p-adiques rappelée dans le chapitre précédent met en évidence le fait qu'un tel groupe possède des sous-groupes remarquables, les sous-groupes de Levi, qui sont encore des groupes réductifs p-adiques. L'idée qui sous-tend toute la théorie des représentation de ces groupes depuis l'origine est que l'on peut étudier les représentations du groupe G via les foncteurs d'induction parabolique, définis par les constructions générales du chapitre III, entre catégories des représentations lisses des sous-groupes de Levi et catégorie des représentations lisses de G.

Nous commençons donc par définir ces foncteurs, notés i_P^G, où $P = MN$ est un sous-groupe parabolique de G, comme composition de foncteurs étudiés au chapitre III. Nous en déduisons immédiatement l'existence d'un adjoint à gauche, noté r_P^G, donné de manière explicite (foncteur de restriction parabolique, aussi appelé foncteur de Jacquet), et l'existence d'un adjoint à droite. La détermination de cet adjoint à droite comme étant le foncteur de Jacquet $r_{\bar{P}}^G$ est un résultat profond, appelé second théorème d'adjonction de Bernstein, et viendra beaucoup plus loin dans le chapitre. Ces foncteurs sont normalisés de sorte que i_P^G préserve l'unitarité des représentations. Ces foncteurs sont d'autre part exacts, les foncteurs d'induction étant de plus fidèles.

Ayant défini les foncteurs d'induction, se dégage naturellement la notion de représentation supercuspidale. Heuristiquement ces représentations sont celles qui ne proviennent pas des sous-groupes de Levi, par les foncteurs d'induction. Plus précisément, une représentation est supercuspidale si son image par tous les foncteurs de Jacquet r_P^G est nulle, où P décrit l'ensemble des sous-groupes paraboliques propres de G. Une représentation irréductible lisse de G est soit supercuspidale, soit elle apparaît comme sous-représentation d'une représentation induite d'un sous-groupe de Levi. Ainsi une bonne partie de la théorie des représentations des groupes réductifs se ramène à deux problèmes : l'étude des représentations supercuspidales et l'étude des foncteurs d'induction parabolique.

Un premier résultat, le théorème d'Harish-Chandra, caractérise les représentations supercuspidales par une condition de support de ses coefficients matriciels : leur support est compact modulo le centre $Z(G)$ de G. On retrouve donc presque la définition des représentations compactes du chapitre IV, à cette nuance près apportée par le centre du groupe. Il est donc important de comprendre les conséquences de cette nuance, et de voir quels résultats de la théorie des représentations compactes peuvent être conservés. Tout d'abord, comme les représentations compactes, les représentations supercuspidales irréductibles sont admissibles. On en déduit l'admissibilité de toutes les représentations lisses irréductibles par le fait que les foncteurs d'induction parabolique préservent l'admissibilité. Ce résultat est une généralisation assez immédiate du cas des représentations compactes, mais on peut l'améliorer de manière cruciale en tirant partie de la structure des groupes réductifs par un théorème d'admissibilité uniforme : si G est un groupe réductif p-adique, et K un sous-groupe ouvert compact de G, il existe une constante positive c tel que la dimension de V^K, pour toute représentation irréductible lisse V de G, soit majorée par c. Ce fait est la base de tous les développements ultérieurs de la théorie de Bernstein. Il permet d'obtenir une première décomposition de la catégorie $\mathcal{M}(G)$, à partir des décompositions de catégories obtenues au chapitre IV en utilisant les représentations compactes. Il faut tenir compte du rôle joué par le centre, lorsque celui-ci est non compact, et introduire une relation d'équivalence sur les représentations supercuspidales, dont les classes sont appelées classes d'inertie : deux représentations sont dans la même classes si elles diffèrent par un caractère non ramifié de G. L'ensemble des caractères non ramifiés de G étant muni d'une structure de variété algébrique complexe (c'est un tore), et D étant isomorphe (non canoniquement, il faut choisir un point de base) à un quotient de ce tore par un sous-groupe fini, D admet aussi une structure de variété algébrique complexe, et c'est encore un tore. Ayant fixé une classe d'inertie D de représentations supercuspidales irréductibles de G, toute représentation lisse (π, V) s'écrit comme somme directe d'une représentation dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans D, et d'une représentation dont aucun sous-quotient irréductible n'est dans D. Mais le théorème d'admissibilité uniforme, par le biais du critère de finitude (**KF**) du chapitre IV, entraîne une décomposition beaucoup plus fine de $\mathcal{M}(G)$: toute représentation lisse (π, V) s'écrit comme somme directe d'une représentation supercuspidale, elle-même somme directe sur les classes d'inertie D de représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans D, et d'une représentation dont aucun sous-quotient irréductible n'est supercuspidal. Ceci constitue une première étape du théorème de décomposition de Bernstein, qui décrit $\mathcal{M}(G)$ comme produit de catégories indécomposables. Il reste à décomposer la partie non cuspidale, ce que nous ferons par l'étude fine des foncteurs d'induction parabolique. Mais avant cela, décrivons complètement les facteurs supercuspidaux de la décomposition. Fixons donc une classe d'inertie D de représentations supercuspidales irréductibles de G, et notons $\mathcal{M}(G)_D$ la sous-catégorie pleine des représentations lisses dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans D. Cette catégorie admet un petit (c'est-à-dire de type fini) progénérateur, que nous exhibons, et qui donne par des arguments généraux de théorie des catégories, une équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(G)_D$ et la catégorie des modules à droite sur l'anneau des endomorphismes de ce progénérateur. La structure de cet anneau est bien comprise : c'est une $\mathbb{C}$-algèbre de polynômes de Laurent, un peu tordue, c'est-à-dire qu'elle n'est commutative qu'à multiplication par des facteurs scalaires près. En revanche, le centre de cette algèbre est bien une algèbre de polynômes de Laurent. C'est en fait l'algèbre des fonctions polynomiales de la variété D. Un élément z du centre de $\mathcal{M}(G)_D$ est identifié à une fonction sur D, et l'évaluation de cette fonction en un point π de D est le scalaire par lequel, selon le lemme de Schur, z agit dans l'espace de la représentation π. Ceci termine l'analyse de la partie supercuspidale de $\mathcal{M}(G)$. Remarquons au passage qu'il découle de la description du centre de $\mathcal{M}(G)_D$ comme algèbre de polynômes de Laurent que c'est une algèbre noethérienne.

Le résultat clef permettant d'analyser la partie induite de $\mathcal{M}(G)$ est le lemme géométrique de restriction induction, qui analyse la composition des foncteurs $r_Q^G \circ i_P^G$ lorsque $P = MN$ et $Q = LU$ sont deux sous-groupes paraboliques de G. Ce lemme, basé sur la structure des orbites de Q dans la variété complète $P\backslash G$ donne une filtration de $r_Q^G \circ i_P^G$ dont le gradué associé est somme directe de foncteurs de la forme $i_{Q'}^L \circ w \circ r_{P'}^M$, où $P' = M'N'$ est un sous-groupe parabolique de M, w désigne à la fois un élément de G et l'automorphisme intérieur qu'il définit, et $Q' = L'U'$ est un sous-groupe parabolique de L conjugué à P' tel que $w \cdot L' = M'$. Grâce à ce résultat, il devient possible de comprendre la structure des représentations induites de représentations supercuspidales irréductibles d'un sous-groupe de Levi. En premier lieu, on obtient le fait qu'une représentation induite n'admet aucun sous-quotient supercuspidal et est de longueur finie.

Une donnée cuspidale est un couple (M, ρ) où M est un sous-groupe de Levi de G et ρ une représentation supercuspidale irréductible de M. Deux données cuspidales sont associées si elles sont conjuguées sous G. Si (M_1, ρ_1) et (M_2, ρ_2) sont deux données cuspidales, et si P_1, P_2 sont des sous-groupes paraboliques de G respectivement de facteur de Levi M_1 et N_1, alors les représentations induites $i_{P_1}^G \rho_1$ et $i_{P_2}^G \rho_2$ admettent un sous-quotient irréductible commun si et seulement si les données cuspidales (M_1, ρ_1) et (M_2, ρ_2) sont associées. Les suites de Jordan-Hölder de $i_{P_1}^G \rho_1$ et $i_{P_2}^G \rho_2$ sont alors équivalentes.

Nous poursuivons l'étude des foncteurs i_P^G, r_P^G, en établissant qu'ils préservent certaines classes de représentations. Il est élémentaire que les foncteurs i_P^G préservent l'admissibilité, et que les foncteurs r_P^G préservent le type fini. Le lemme de Jacquet, dans une première version ne s'appliquant qu'aux représentations admissibles, montre que les foncteurs r_P^G préservent aussi l'admissibilité. C'est une conséquence simple du lemme géométrique que les foncteurs i_P^G préservent les représentations de longueur finie. Le théorème de Howe établit qu'une représentation est de longueur finie si et seulement si elle est de type fini et admissible. Il en découle que les foncteurs r_P^G préservent les représentations de longueur finie.

Nous continuons ensuite l'étude de la partie induite de la catégorie $\mathcal{M}(G)$. Pour cela, il faut munir l'ensemble des classes d'équivalence (pour la conjugaison) de données cuspidales $\Omega(G)$ de G d'une structure de variété. Celle-ci est héritée du fait que les classes d'inertie de représentations supercuspidales irréductibles des facteurs de Levi de G sont munies d'une telle structure, nous avons même vu que ce sont des tores complexes. Il faut tenir compte de la conjugaison, et nous voyons alors que $\Omega(G)$ est une union disjointe (infinie) de composantes connexes, elles-mêmes étant des variétés algébriques complexes, plus précisément des quotients de tores par l'action d'un groupe fini. Nous notons $\mathcal{B}(G)$ l'ensemble des composantes connexes de $\Omega(G)$. A chaque représentation lisse irréductible de G, on peut associer, grâce aux propriétés des induites énoncées ci-dessus, un élément de $\Omega(G)$ appelé support cuspidal (ou encore, par analogie avec la théorie des groupes réels, caractère infinitésimal) de la représentation, ne dépendant que de la classe d'isomorphie de celle-ci. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de décomposition de Bernstein. Pour tout élément $\mathfrak{s}$ de $\mathcal{B}(G)$ (c'est-à-dire une composante connexe de $\Omega(G)$), soit $\mathcal{M}(G)_\mathfrak{s}$ la sous-catégorie pleine des représentations de $\mathcal{M}(G)$ dont tous les sous-quotients irréductibles ont un support cuspidal dans $\mathfrak{s}$. Alors $\mathcal{M}(G)$ est le produit sur $\mathcal{B}(G)$ des catégories $\mathcal{M}(G)_\mathfrak{s}$. La démonstration de ce théorème s'appuie sur les propriétés des foncteurs d'induction et de restriction précédemment établies. Comme corollaire, nous en déduisons une propriété de noethérianité de la catégorie $\mathcal{M}(G)$, ce qui implique que les foncteurs i_P^G préservent les représentations de type fini.

Suivant les idées ayant présidé à l'analyse de la partie cuspidale, nous souhaiterions maintenant analyser chacune des composantes $\mathcal{M}(G)_\mathfrak{s}$, en décrivant ces catégories comme catégories de modules sur une algèbre unitaire, et obtenir par ce moyen une description de leurs centres. Pour cela, comme pour les composantes cuspidales, il nous faut exhiber un petit progénérateur de ces catégories. L'idée naturelle est d'obtenir celui-ci par induction parabolique à partir du petit progénérateur d'une composante cuspidale D d'un Levi M tels que (M, D) détermine la composante connexe $\mathfrak{s}$. Nous avons vu que les foncteurs d'induction préservent le type fini, ce qui montre que l'objet obtenu ainsi est petit. Un résultat technique nous permet de voir que cet objet ne dépend pas des choix faits de M et D, et il en résulte assez facilement que c'est bien un générateur de la catégorie. Il reste à montrer que c'est aussi un objet projectif. Comme i_P^G admet un adjoint à droite, un résultat général nous dit qu'il suffit que cet adjoint soit un foncteur exact. Nous avons affirmé ci-dessus que l'adjoint à droite de i_P^G est $r_{\bar{P}}^G$, et donc est exact. La démonstration de ce résultat, le second théorème d'adjonction de Bernstein, est délicate. Elle passe par deux résultats intermédiaires, qui serviront encore par la suite. Le premier est la version forte (sans hypothèse d'admissibilité) du lemme de Jacquet, qui affirme que si K est un sous-groupe ouvert compact de G admettant une décomposition d'Iwahori $K = K_{\bar{N}} K_M K_N$ selon les sous-groupes paraboliques standards, alors pour toute représentation lisse (π, V) de G, l'application naturelle de V^K dans son module de Jacquet $r_P^G(V)$ réalise une surjection sur $r_P^G(V)^{K_M}$. De plus, on obtient une section canonique de cette surjection. De ceci, on tire le second résultat, qui est l'existence d'une dualité non dégénérée [1] M-équivariante entre les espaces $r_P^G(V)$ et $r_{\bar{P}}^G(\tilde{V})$, pour toute représentation lisse (π, V) de G, et tout sous-groupe parabolique $P = MN$ de G. La dualité de Casselman est équivalente au second théorème d'adjonction, et l'on a donc des progénérateur explicites des catégories $\mathcal{M}(G)_\mathfrak{s}$. A partir de là, on obtient comme pour les composantes cuspidales, une description du centre de la catégorie $\mathcal{M}(G)_\mathfrak{s}$ comme algèbre de fonctions polynomiales sur la variété $\mathfrak{s}$, le fait que les catégories $\mathcal{M}(G)_\mathfrak{s}$ sont indécomposables, et la description du centre de la catégorie $\mathcal{M}(G)$ toute entière comme algèbre de fonctions polynomiales sur $\Omega(G)$.

Dans toute ce chapitre, G désigne un groupe réductif p-adique au sens du chapitre précédent, dont on suit les notations.

1. Dualité de Casselman, qui l'a établie dans le cas où π est admissible. Il est nécessaire de s'affranchir de cette hypothèse pour obtenir le second théorème d'adjonction.

VI.1 Les foncteurs i_P^G et r_P^G

VI.1.1 Propriétés d'adjonction

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Particularisons à la situation présente les résultats des paragraphes III.2.9 et III.2.10. Comme M normalise N, on a d'après la remarque III.2.9, un foncteur

$$j_N : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(M), \quad (\pi, V) \mapsto (\pi_N, V_N).$$

Plus exactement, ce foncteur est la composition du foncteur d'oubli $\mathcal{F}_P^G : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(P)$ et du foncteur $j_N : \mathcal{M}(P) \to \mathcal{M}(M)$. Le fait que l'on ait deux objets mathématiques différents notés de la même façon ne devrait pas poser de problème ici.

Dans le sens opposé, si (τ, E) est une représentation lisse de M, on la prolonge trivialement à P, c'est-à-dire $\tau(mn) = \tau(m)$ pour tout $m \in M$ et tout $n \in N$ (si $\phi : P \to M$ est donnée par la composition de la projection canonique $P \to P/N$ et de l'isomorphisme $P/N \simeq M$, cette représentation de P est $\mathcal{F}_P^M(E)$ où $\mathcal{F}_P^M$ est le foncteur d'oubli associé à ϕ, mais remarquons que d'après III.2.10, c'est aussi $\check{\mathcal{F}}_P^M(E)$). En induisant ensuite de P à G, on obtient ainsi une représentation de G. Nous simplifierons les notations en écrivant simplement $\mathrm{Ind}_P^G(\tau, E)$ au lieu de $\mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{F}_P^M(\tau, E))$. Ceci définit un foncteur de $\mathcal{M}(M)$ dans $\mathcal{M}(G)$. Donnons les premières propriétés de ces foncteurs.

Théorème. *Le foncteur $j_N : (\pi, V) \mapsto (\pi_N, V_N)$ de $\mathcal{M}(G)$ dans $\mathcal{M}(M)$ est est l'adjoint à gauche du foncteur d'induction Ind_P^G. Pour toute représentation lisse (τ, E) de M et toute représentation lisse (π, V) de G, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_M((\pi_N, V_N), (\tau, E)) \simeq \mathrm{Hom}_G((\pi, V), \mathrm{Ind}_P^G(\tau, E)).$$

Les foncteurs Ind_P^G et j_N sont exacts.

<u>*Démonstration*</u>. Comme nous l'avons remarqué ci-dessus, $j_N : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(M)$ est la composition du foncteur d'oubli $\mathcal{F}_P^G : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(P)$ et du foncteur $j_N : \mathcal{M}(P) \to \mathcal{M}(M)$. Nous avons vu en III.2.10 que ce dernier est l'adjoint à gauche de $\check{\mathcal{F}}_P^M \simeq \mathcal{F}_P^M$. Comme $\mathcal{F}_P^G$ est l'adjoint à gauche de Ind_P^G, on en déduit la première assertion. En résumé :

$$\begin{aligned} j_N : &\mathcal{M}(G) \xrightarrow{\mathcal{F}_P^G} \mathcal{M}(P) \xrightarrow{j_N} \mathcal{M}(M) \\ \mathrm{Ind}_P^G : &\mathcal{M}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}_P^M \simeq \check{\mathcal{F}}_P^M} \mathcal{M}(P) \xrightarrow{\mathrm{Ind}_P^G} \mathcal{M}(G) \end{aligned}$$

sont adjoints par composition des foncteurs adjoints.

L'exactitude de $j_N : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(M)$ provient de l'exactitude du foncteur d'oubli $\mathcal{F}_P^G$ et de l'exactitude de $j_N : \mathcal{M}(P) \to \mathcal{M}(M)$ (corollaire III.2.9). L'exactitude de $\mathrm{Ind}_P^G : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(G)$ provient de l'exactitude de $\mathrm{Ind}_P^G : \mathcal{M}(P) \to \mathcal{M}(G)$ (proposition III.2.2), et du fait que le foncteur d'oubli $\mathcal{F}_P^M$ étant isomorphe au pseudo foncteur d'oubli $\check{\mathcal{F}}_P^M$, il admet un adjoint à droite et à gauche, et est donc exact.

Grâce aux propriétés des foncteurs adjoints (A.V), nous déduisons le :

Corollaire. *Le foncteur j_N préserve les colimites et le foncteur Ind_P^G préserve les limites.*

Remarque. Il se trouve que Ind_P^G admet aussi un adjoint à droite. En effet, la variété G/P étant compacte, d'après le lemme III.2.3,

$$\mathrm{Ind}_P^G = \mathrm{Ind}_P^G \circ \mathcal{F}_P^M = \mathrm{ind}_P^G \circ \mathcal{F}_P^M.$$

Or le foncteur d'oubli $\mathcal{F}_P^M$ admet un adjoint à droite, le foncteur I_P^M. D'autre part, $\mathrm{ind}_P^G = P_P^G(\bullet \otimes \delta_{P\backslash G}^{-1})$ d'après le théorème III.2.6. Or P_P^G (resp. $\bullet \otimes \delta_{P\backslash G}^{-1}$) admet le pseudo-foncteur d'oubli $\check{\mathcal{F}}_P^G$ (resp. $\bullet \otimes \delta_{P\backslash G}$, *cf.* remarque III.1.15, 3) comme adjoint à droite. Par conséquent, Ind_P^G préserve les colimites.

VI.1.2 Normalisation

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Nous normalisons le foncteur d'induction parabolique comme dans la section IV.2.1, en tenant compte du lemme V.5.4, pour obtenir un foncteur qui commute avec le foncteur $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ de la section III.1.6. Nous posons donc, pour toute représentation lisse (τ, E) de M,

$$i_P^G(\tau, E) = \mathrm{Ind}_P^G(\tau \otimes \delta_P^{-1/2}, E) \tag{VI.1.2.1}$$

De même, nous normalisons le foncteur j_N de restriction parabolique pour obtenir l'adjoint à gauche de i_P^G. Pour toute représentation lisse (π, V) de G, on pose

$$r_P^G(\pi, V) = (\pi_N \otimes \delta_P^{1/2}, V_N). \tag{VI.1.2.2}$$

Remarque. Il semble que nos conventions diffèrent de celles généralement adoptées, qui remplacent δ_P par son inverse dans les formules ci-dessus. Ceci vient de notre choix initial de la fonction modulaire en II.3.7. On remarque les calculs du lemme V.5.4 font aussi apparaître ce problème, et qu'à défaut d'être standard, nos conventions sont cohérentes.

Proposition. *Les foncteurs*

$$i_P^G : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(G), \quad r_P^G : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(M)$$

sont exacts. Le premier est l'adjoint à gauche du second.

Démonstration. Ceci résulte sans difficulté du théorème VI.1.1, puisque les effets des normalisations se compensent (*cf.* remarque III.1.15, 3). □

Les foncteur i_P^G et r_P^G seront respectivement appelé foncteur d'induction et de restriction parabolique.

Corollaire. *Le foncteur i_P^G préserve les limites. En adaptant la remarque du paragraphe précédent, on voit facilement qu'il préserve aussi les colimites. Le foncteur r_P^G préserve les colimites.*

Remarques. Comme δ_P est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sa restriction à tout sous-groupe compact de P est triviale. Comme le radical unipotent N est réunion de ses sous-groupes compacts ouverts, la restriction de δ_P à N est nulle. La représentation $i_P^G(\tau, E)$ a donc pour espace l'ensemble des fonctions $f : G \to E$ telles que pour tous $m \in M$, $n \in N$, $g \in G$,

$$f(mng) = \delta_P^{-1/2}(m)\tau(m) \cdot f(g). \tag{VI.1.2.3}$$

VI.1.3 Le foncteur r_P^G préserve le type fini

Proposition. *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Soit (π, V) une représentation lisse de type fini de G. Alors (π_N, V_N) est de type fini. Il en est de même de $r_P^G(\pi, V)$.*

Démonstration. Soit $\{v_1, \ldots, v_l\}$ un ensemble de vecteurs de l engendrant V comme représentation de G. Choisissons un sous-groupe ouvert compact K de G fixant tous les v_i, pour $i = 1, \ldots, l$. Comme $P\backslash G$ est compact, $P\backslash G/K$ est fini. Soient $\{g_1, \ldots, g_n\}$ un système de représentants de ces doubles classes. Alors V est engendré comme P-module par les vecteurs de la forme $\pi(g_j) \cdot v_i$, $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, n$. Comme N agit trivialement sur V_N, V_N est engendré comme M-module par les images des $\pi(g_j) \cdot v_i$ dans V_N. La normalisation n'y change rien, et l'on en déduit la dernière assertion. □

VI.1.4 Transitivité de r_P^G et i_P^G.

Soient $P = MN$ et $Q = LU$ deux sous-groupes paraboliques semi-standard de G avec $P \subset Q$. Alors $L \cap P = M(L \cap N)$ est un sous-groupe parabolique de L, $N = (N \cap L)U$ et $(L \cap P)U = MN = P$.

Lemme. *Soient $P = MN \subset Q = LU$ deux sous-groupes paraboliques semi-standard de G. Alors $i_P^G = i_Q^G \circ i_{P\cap L}^L$ et $r_P^G = r_{L\cap P}^L \circ r_Q^G$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que nous commettons un abus de langage, ce que nous écrivons comme des égalités de foncteurs n'étant en fait que des isomorphismes naturels. On a

$$r_{L\cap P}^L \circ r_Q^G = (\,\cdot \otimes \delta_{P\cap L}^{1/2}) \circ j_{N\cap L} \circ \mathcal{F}_{P\cap L}^L \circ (\,\cdot \otimes \delta_Q^{1/2}) \circ j_U \circ \mathcal{F}_Q^G.$$

Or, on voit facilement que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{P\cap L}^L \circ (\,\cdot \otimes \delta_Q^{1/2}) = (\,\cdot \otimes \delta_Q^{1/2}) \circ \mathcal{F}_{P\cap L}^L,\\
&\mathcal{F}_{P\cap L}^L \circ j_U = j_U \circ \mathcal{F}_{(L\cap P)U}^Q,\\
&j_{N\cap L} \circ (\,\cdot \otimes \delta_Q^{1/2}) = (\,\cdot \otimes \delta_Q^{1/2}) \circ j_{N\cap L}.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité provient du fait que $\delta_{Q\backslash G}$ est trivial sur $N \cap L$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
r_{L\cap P}^L \circ r_Q^G &= (\,\cdot \otimes \delta_{P\cap L}^{1/2}) \circ (\,\cdot \otimes \delta_Q^{1/2}) \circ j_{N\cap L} \circ j_U \circ \mathcal{F}_{(P\cap L)U}^Q \circ \mathcal{F}_Q^G\\
&= (\,\cdot \otimes \delta_{P\cap L}^{1/2}\delta_Q^{1/2}) \circ j_N \circ \mathcal{F}_P^G\\
&= (\,\cdot \otimes \delta_P^{1/2}) \circ j_N \circ \mathcal{F}_P^G\\
&= r_P^G
\end{aligned}$$

On a utilisé la transitivité des foncteurs j (lemme III.2.9) et des foncteurs d'oubli et les égalités

$$\delta_P = \delta_N, \quad \delta_Q = \delta_U$$

de la section V.5.4. L'expression de ces dernières en termes de racines montre que $\delta_{N\cap L}\delta_U = \delta_N$. On a donc montré la seconde assertion. La première en découle par adjonction des foncteurs r et i et unicité de l'adjoint (*cf.* A.V). □

VI.2 Représentations supercuspidales et admissibilité

VI.2.1 Représentations supercuspidales

Définition. Une représentation lisse (π, V) de G est dite supercuspidale si pour tout sous-groupe parabolique propre $P = MN$ de G, $r_P^G(V)$ est nul.

Remarques. 1. Une représentation lisse (π, V) de G est supercuspidale si pour tout sous-groupe parabolique standard $P = MN$ de G, $r_P^G(V)$ est nul.
— 2. Comme r_P^G est exact, tout sous-quotient d'une représentation supercuspidale est supercuspidal.

Le sous-groupe ${}^0G$ a été défini en V.2.3.

Théorème. *Soit (π, V) une représentation lisse de G. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) (π, V) est supercuspidale,

b) Les coefficients matriciels de (π, V) sont à support compact modulo le centre $Z(G)$,

c) la restriction de (π, V) à ${}^0G$ est compacte.

Démonstration. [$b) \Rightarrow c)$] Soient $v \in V$, $\lambda \in \tilde{V}$. On veut montrer que la restriction du coefficient matriciel $\phi_{v,\lambda}$ à ${}^0G$ est à support compact. Notons C le support de $\phi_{v,\lambda}$ dans G et soient ${}^0C = C \cap {}^0G$, $\overline{{}^0C}$ l'image de ${}^0C$ dans ${}^0G/({}^0G \cap Z(G))$ et $\bar{C}$ l'image de C dans $G/Z(G)$. L'inclusion naturelle ${}^0G/({}^0G \cap Z(G)) \hookrightarrow G/Z(G)$ permet de voir ${}^0G/({}^0G \cap Z(G))$ comme un sous-groupe fermé de $G/Z(G)$. Comme par hypothèse $\bar{C}$ est compact,

$$\overline{{}^0C} = \bar{C} \cap ({}^0G/({}^0G \cap Z(G)))$$

est compact.

Le théorème 2.6 de [31], affirme que si H est un sous-groupe compact d'un groupe topologique G, et si G/H est compact, alors G est compact. Soit $\bar{K}$ un sous-groupe compact de ${}^0G/({}^0G \cap Z(G))$, et K son image inverse dans ${}^0G$. En vertu de ce résultat, et du fait que ${}^0G \cap Z(G)$ est compact (V.2.6), K est un sous-groupe compact. On peut recouvrir $\overline{{}^0C}$ par un nombre fini de translaté de $\bar{K}$, et l'on peut donc recouvrir ${}^0C$ par un nombre fini de translatés de K. Ceci montre que ${}^0C$ est compact.

[$c) \Rightarrow a)$] Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique propre de G, de composante déployée A. En particulier, A_G est strictement inclus dans A. Sans perte de généralité, on peut supposer que P est standard. Soit $v \in V$. On veut montrer que $v \in V(N)$. Soit K un sous-groupe compact ouvert de G admettant une décomposition d'Iwahori selon P,

$$K = K_{\bar{N}} K_M K_N$$

(*cf.* V.5.2) et tel que $v \in V^K$.

Soit $t \in A^{++} \cap {}^0G$ (un tel élément existe d'après V.3.25). Pour toute racine $\alpha \in \Delta(P)$, $|\alpha(t)|_{\mathbb{F}} < 1$, et donc, pour toute partie compacte C de $\mathbb{R}_+^*$, il existe $m_0 \in N$ tel que si $|m| \geq m_0$, $|\alpha(t^m)|_{\mathbb{F}}$ n'est pas dans C. Il s'ensuit que pour toute partie compacte de $A \cap {}^0G$, il existe $m_0 \in N$ tel que si $|m| \geq m_0$, t^m est en dehors de cette partie compacte. Comme la restriction de (π, V) à ${}^0G$ est compacte par hypothèse, on a

$$\pi(e_K)\pi(t^m) \cdot v = 0$$

pour m assez grand. Donc, pour m assez grand,

$$\pi(e_{t^{-m}Kt^m}) \cdot v = \pi(e_{t^{-m}K_Nt^m})\pi(e_{t^{-m}K_Mt^m})\pi(e_{t^{-m}K_{\bar{N}}t^m}) \cdot v = 0.$$

Comme $t \in A$, il est central dans M et $t^{-m}K_Mt^m = K_M \subset K$. De même, $t^{-m}K_{\bar{N}}t^m \subset K_{\bar{N}} \subset K$, d'où

$$\pi(e_{t^{-m}K_Nt^m}) \cdot v = 0.$$

Comme $t^{-m}K_Nt^m$ est un sous-groupe compact de N, on a $v \in V(N)$ d'après la proposition III.2.9.

[$a) \Rightarrow b)$] Montrons que si (π, V) n'est pas compacte modulo le centre, alors il existe un parabolique $P = MN$ tel que $V_N \neq 0$. Par conjugaison, et par transitivité des foncteurs de restriction, on pourra chercher un tel parabolique qui soit standard et maximal. Soit $\phi_{v,\lambda}$ un coefficient matriciel dont le support n'est pas compact modulo le centre. La décomposition de Cartan V.5.1) $G = K_0F_\emptyset C_\emptyset^+K_0$ montre qu'il existe un $f \in F_\emptyset$ et une suite d'éléments distincts $t_n \in C_\emptyset^+$, $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\operatorname{Supp}\phi_{v,\lambda} \cap K_0ft_nK_0 \neq \emptyset,$$

et tels que l'ensemble des t_n n'est contenu dans aucune partie compacte modulo le centre de G. Il existe alors une racine $\alpha \in \Delta_\emptyset$ telle que $\{|\alpha(t_n)|_{\mathbb{F}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit contenu dans aucune partie compacte de $\mathbb{R}_+^*$, et donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha(t_n)|_{\mathbb{F}} = 0. \tag{VI.2.1.1}$$

Considérons le sous-groupe parabolique standard maximal $P = MN = P_\alpha = M_\alpha N_\alpha$, associé à la partie $\Delta_\emptyset \setminus \{\alpha\}$ de $\Delta_\emptyset$. Choisissons un sous-groupe compact ouvert K de G, ouvert et distingué dans K_0, admettant une décomposition d'Iwahori selon P, $K = K_{\bar{N}}K_MK_N$, et tel que $v \in V^K$, $\lambda \in \tilde{V}^K$. Comme $[K_0, K]$ est fini, on peut trouver k_1, k_2 dans K_0 tels que

$$\operatorname{Supp}\phi_{v,\lambda} \cap k_1Kft_nKk_2 \neq \emptyset$$

pour une infinité de n. Pour chacun de ces n, choisissons k'_n et k''_n dans K tels que

$$\phi_{v,\lambda}(k_1k'_nft_nk''_nk_2) \neq 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\phi_{v,\lambda}(k_1k'_nft_nk''_nk_2) &= \lambda(\pi(k_1k'_nk_1^{-1})\pi(k_1ft_nk_2)\pi(k_2^{-1}k''_nk_2) \cdot v) \\
&= \lambda(\pi(k_1ft_nk_2) \cdot v) = \lambda_1(\pi(t_n) \cdot v_1) \\
&= (\pi(e_{K_N}) \cdot \lambda_1)(\pi(t_n) \cdot v_1) \\
&= \lambda_1(\pi(e_{K_N})\pi(t_n) \cdot v_1) \\
&= \lambda_1(\pi(t_n)\pi(e_{t_n^{-1}K_Nt_n}) \cdot v_1) \neq 0.
\end{aligned}$$

La deuxième égalité vient du fait que K est distingué dans K_0 et que v et λ sont fixés par K. On pose ensuite $v_1 = \pi(fk_2) \cdot v$ et $\lambda_1 = \tilde{\pi}(k_1^{-1}) \cdot \lambda$ (on remarque que t_n et f commutent). Comme λ_1 est fixé par K, et donc par K_N, on arrive facilement au bout du calcul. On obtient donc que $\pi(e_{t_n^{-1}K_Nt_n}) \cdot v_1 \neq 0$. Or (VI.2.1.1) entraine que $N = \bigcup_n t_n^{-1}K_Nt_n$ et donc $v_1 \notin V(N)$. Ceci montre que V_N est non nul. $\square$

Remarques. 1. Si le centre de G est compact, une représentation est compacte si et seulement si elle est supercuspidale.

— 2. Une autre condition équivalente pour qu'une représentation (π, V) soit supercuspidale est que les fonctions $f_{K,v}$ définies en IV.1.3 soient à support compact modulo $Z(G)$. Ceci se voit facilement en adaptant la démonstration du théorème IV.1.3.

Corollaire. *Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G. Alors il existe un sous-groupe parabolique $P = MN$ de G (que l'on peut supposer standard) tel que $r_P^G(\pi, V)$ soit une représentation supercuspidale de M. Par réciprocité de Frobenius, il existe une représentation supercuspidale irréductible de (τ, E) de M telle que (π, V) soit une sous-représentation de $i_P^G(\tau, E)$.*

Démonstration. Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique standard de G, minimal pour la propriété $r_P^G(V) \neq 0$ (ceci existe car pour $P = G$, $r_P^G(V) = V \neq 0$). Rappelons (*cf.* V.3.13) que les sous-groupes paraboliques standards de M sont les traces des paraboliques standards $P' = M'N'$ de G tels que $P' \subset P$. D'après le lemme VI.1.4, on a $r_{M\cap P'}^M \circ r_P^G(V) = r_{P'}^G(V)$. Par minimalité de P, on a $r_{P'}^G(V) = 0$, et donc $r_P^G(\pi, V)$ est supercuspidale. De plus, le lemme VI.1.3 affirme que $r_P^G(\pi, V)$ est de type fini, donc admet un quotient irréductible. Soit (τ, E) un quotient irréductible de $r_P^G(\pi, V)$. Comme les foncteurs r sont exacts, (τ, E) est supercuspidale et l'on a par la réciprocité de Frobenius :

$$0 \neq \mathrm{Hom}_M(r_P^G(\pi, V), (\tau, E)) = \mathrm{Hom}_G((\pi, V), i_P^G(\tau, E)).$$

$\square$

Nous notons $\mathcal{M}(G)_{sc}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ dont les objets sont les représentations supercuspidales de G. Comme $\mathcal{M}(G)_{sc}$ est stable par passage aux sous-quotients, c'est une catégorie abélienne. Nous notons $\mathbf{Irr}(G)_{sc}$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations supercuspidales irréductibles de G.

VI.2.2 Admissibilité des représentations irréductibles

Le rapport établi entre représentations supercuspidales et représentations compactes et les propriétés de l'induction parabolique permettent de montrer le résultat suivant.

Théorème. *Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G. Alors (π, V) est admissible.*

Démonstration. D'après la proposition IV.1.3, toute représentation compacte de type fini est admissible. Or, une représentation supercuspidale irréductible à une restriction à ${}^0G$ qui est compacte, d'après le théorème VI.2.1, et de type fini, car le quotient $G/{}^0GZ(G)$ est fini (proposition V.2.6), et $Z(G)$ agit par des scalaires sur une représentation irréductible d'après le lemme de Schur III.1.8. Cette restriction est donc admissible. Tout sous-groupe compact de G étant contenu dans ${}^0G$, l'admissibilité d'une représentation ne dépend que de sa restriction à ${}^0G$. Il est donc clair qu'une représentation supercuspidale irréductible est admissible. En général, d'après le corollaire du paragraphe précédent, on peut plonger (π, V) dans une représentation de la forme $i_P^G(\tau, E)$, avec (τ, E) supercuspidale irréductible, et donc admissible. D'après le lemme III.2.3, $i_P^G(\tau, E)$ est admissible, et donc (π, V) aussi. $\square$

Corollaire. *Soit (π, V) une représentation lisse de G. Alors π est irréductible (resp. supercuspidale irréductible) si et seulement si $\tilde{\pi}$ est irréductible (resp. supercuspidale irréductible) .*

<u>Démonstration</u>. Ceci découle du théorème et du corollaire III.1.7. □

VI.2.3 Théorème d'admissibilité uniforme

Le théorème du paragraphe précédent montre que si K un sous-groupe compact ouvert de G, pour toute représentation lisse irréductible (π, V) de G, $\dim V^K$ est finie. Mais a priori, cette dimension peut devenir arbitrairement grande lorsque (π, V) varie. En fait, il n'en est rien, comme le montre le

Théorème. *Soit K un sous-groupe compact ouvert de G. Il existe une constante positive $c = c(G, K)$ telle que pour toute représentation lisse irréductible (π, V) de G, $\dim V^K \leq c$.*

<u>Démonstration</u>. On peut reformuler ce résultat en utilisant le théorème III.1.5. Il est équivalent au fait que tous les modules simples de l'algèbre $\mathcal{H}(G, K)$ sont de dimension bornée par une constante positive $c = c(G, K)$. L'ingrédient principal de la démonstration est la décomposition

$$\mathcal{H}(G, K) = \mathcal{H}_0 DC\mathcal{H}_0$$

du théorème V.5.3. Soit (ρ, W) un $\mathcal{H}(G, K)$-module simple. Le résultat d'admissibilité VI.2.2, réinterprété comme ci-dessus, nous dit qu'un tel module est de dimension finie, disons ici $\dim W = k$. Par le théorème de Burnside ([35], corollaire XVII.3.3) $\rho : \mathcal{H}(G, K) \to \mathrm{End}(W)$ est surjective. Comme $\rho(C) \subset \mathrm{End}(W)$ est commutative et engendrée par les a_z, où z parcourt une base du cône $C_\emptyset^+$, de cardinal disons l, d'après le lemme C.I, on a $\dim \rho(C) \leq k^{2-2^{1-l}}$. Posons $h = \dim \mathcal{H}_0$ et $d = \dim D$. On a alors

$$k^2 = \dim \mathrm{End}(W) = \dim \rho(\mathcal{H}(G, K)) \leq h^2 d \dim \rho(C) \leq h^2 d k^{2-2^{1-l}},$$

d'où $k \leq (h^2 d)^{2^{l-1}}$. On peut donc prendre $c = c(G, K) = (h^2 d)^{2^l}$. □

Remarque. Un résultat analogue est vrai pour les représentations lisses irréductibles du groupe ${}^0G$. On le déduit du résultat pour G de la manière suivante. D'abord, rappelons que tout sous-groupe compact K de G est inclus dans ${}^0G$. Soit (σ, E) une représentation lisse irréductible de ${}^0G$. Formons $(\pi, V) = \mathrm{ind}_{{}^0G}^G(\sigma, E)$.

La réciprocité de Frobenius pour les induites compactes s'écrit alors (*cf.* III.2.6.5) :

$$\mathrm{Hom}_G((\pi, V), (\tau, W)) \simeq \mathrm{Hom}_{{}^0G}((\sigma, E), \mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\tau, W)).$$

Comme $V = \mathrm{ind}_{{}^0G}^G(E) = P_{{}^0G}^G(E) = \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}({}^0G)} E$, il est clair que V est une représentation de type fini. En effet, si $v \in E$, $v \neq 0$, et si K est un sous-groupe ouvert compact de ${}^0G$ fixant v, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}({}^0G)} E &= \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}({}^0G)} \mathcal{H}({}^0G) \cdot v = \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}({}^0G)} v \\ &= \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}({}^0G)} e_K \cdot v = \mathcal{H}(G)(e_K \otimes v).\end{aligned}$$

La représentation (π, V) admet donc un quotient irréductible. En prenant pour (τ, W) ce quotient irréductible dans la formule de réciprocité de Frobenius ci-dessus, on voit que sa restriction à ${}^0G$ contient (σ, E), et donc $\dim E^K \leq \dim W^K \leq c(G, K)$.

VI.2.4 Conséquences de l'admissibilité uniforme

Soit K un sous-groupe compact ouvert de G. Etant donnés une représentation supercuspidale irréductible (ρ, W) de G et un vecteur $v \in W$, la fonction

$$g \mapsto f_{K,v}(g) = \rho(e_K)\rho(g^{-1}) \cdot v$$

à son support compact modulo $Z(G)$ dans G. Grâce au théorème d'admissibilité uniforme, nous allons établir le résultat suivant.

Proposition. *Etant donné un sous-groupe ouvert compact K de G, il existe une partie ouverte compacte modulo le centre Ω dans G telle que pour toute représentation supercuspidale irréductible (ρ, W) de G, pour tout $v \in W^K$, le support de $g \mapsto \rho(a_{g,K}) \cdot v$ soit inclus dans Ω.*

Démonstration. Comme $v \in W^K$, on a $\rho(a_{g,K}) \cdot v = \rho(e_K)\rho(g)\rho(e_K) \cdot v = \rho(e_K)\rho(g) \cdot v = f_{K,v}(g^{-1})$. Si $K' \subset K$ est un autre sous-groupe ouvert compact de G, comme $e_K e_{K'} = e_{K'} e_K = e_K$, on voit que $\operatorname{Supp} f_{K,v} \subset (\operatorname{Supp} f_{K',v})K$. Donc il suffit de montrer le résultat pour certains sous-groupes ouverts compacts K bien choisis. Nous supposons donc que K est distingué dans K_0 et admet une décomposition d'Iwahori le long des paraboliques standards. Le théorème d'admissibilité uniforme montre qu'il existe une constante $N \in \mathbb{N}$ telle que $\dim W^K \leq N$. Soit $z \in C_\emptyset^+$ dont la classe modulo la relation d'équivalence (V.3.24.1) est non triviale. Alors la suite des puissances successives $z, z^2, z^3, ...$ ne reste dans aucune partie compacte modulo $Z(G)$. En effet, d'après la décomposition de Cartan V.5.1, toute partie compacte de G est contenue dans une réunion finie disjointe de parties de la forme $K_0 a K_0$ où les $a \in \tilde{C}_\emptyset$. Donc toute partie compacte modulo $Z(G)$ est contenue dans une réunion finie de parties de la forme $K_0 a K_0 Z(G)$. Comme le groupe abélien $Z(G)$ admet comme sous-groupe d'indice fini $Z(G)_{an} A_G$, où $Z(G)_{an}$ est un groupe abélien compact contenu dans K_0, on voit que toute partie compacte modulo $Z(G)$ est contenue dans une réunion finie de partie de la forme $K_0 a A_G K_0$, $a \in Z(G)\tilde{C}_\emptyset$. Tel n'est pas le cas de la suite des z^n.

Pour tout $v \in W$, montrons que

$$\rho(a_{z^N,K}) \cdot v = \rho(e_K)\rho(z^N)\rho(e_K) \cdot v = 0.$$

Si $W^K = 0$, alors $\rho(e_K) \cdot v = 0$ et l'assertion est valide. Supposons donc que $W^K \neq 0$ et soit $v \in W^K$ non nul. Comme (ρ, W) est supercuspidale, la fonction

$$g \mapsto \rho(e_K)\rho(g) \cdot v = f_{K,v}(g^{-1})$$

est a support compact modulo $Z(G)$ dans G (*cf.* remarque VI.2.1). Il existe donc un entier n_0 tel que $\rho(e_K)\rho(z^{n_0-1}) \cdot v \neq 0$ et $\rho(e_K)\rho(z^{n_0}) \cdot v = 0$. On veut montrer que $n_0 \leq N$. Nous allons montrer que la famille $\{\rho(e_K)\rho(z^{j-1}) \cdot v\}_{j=1,...n_0}$ est libre dans W^K, ce qui est évidemment suffisant. Soient $c_1, \ldots c_{n_0}$ des scalaires tels que

$$\sum_{j=1}^{n_0} c_j \ \rho(e_K)\rho(z^{j-1}) \cdot v = 0.$$

Comme $\rho(e_K)\rho(z^{j-1}) \cdot v = \rho(a_{K,z^{j-1}}) \cdot v$ et que d'après le lemme V.5.3,

$$\rho(a_{z^{j'},K})\rho(a_{z^j,K}) = \rho(a_{z^{j+j'},K}),$$

on obtient successivement $c_1 = 0$, $c_2 = 0, \ldots,$ $c_{n_0} = 0$.

Identifions $C_\emptyset^+/C_{A_G}$ avec $\mathbb{N}^l$ (*cf.* (V.3.24.1)). Soit S_N l'ensemble des $z \in C_\emptyset^+$ dont la classe modulo C_{A_G} s'écrit $(a_1, \dots a_l)$ dans l'identification avec $\mathbb{N}^l$, avec $a_i \leq N$ pour tout $i = 1, \dots, l$. Soit $z \in C_\emptyset^+$ dont la classe modulo C_{A_G} n'est pas dans S_N. Il existe alors une coordonnée $a_i > N$. Posons $\bar{z}_i = (0, \dots 0, 1, 0 \dots)$ le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{Z}^l$, identifié à un élément de $C_\emptyset^+/C_{A_G}$, et soit z_i un relèvement dans $C_\emptyset^+$. Pour tout $v \in W$, et tout $f \in F_\emptyset$, on a d'après le lemme V.5.3

$$\rho(a_{fz,K}) \cdot v = \rho(a_{fzz_i^{-N},K})\rho(a_{z_i^N,K}) \cdot v = 0.$$

On utilise encore la décomposition de Cartan de G (V.5.1) : pour tout $g \in G$, il existe $k_1, k_2 \in K_0$, $f \in F_\emptyset$ et $z \in C_\emptyset^+$ tels que $a_{g,K} = a_{k_1 fzk_2,K}$. Comme K_0 normalise K, $\rho(a_{g,K}) \cdot v = 0$ si et seulement si $\rho(a_{fz,K}) \cdot \rho(k_2) \cdot v = 0$. Donc le support de $g \mapsto \rho(a_{g,K}) \cdot v$ est contenu dans

$$\coprod_{f \in F_\emptyset, z \in C_\emptyset^+ | \bar{z} \in S_N} K_0 fzK_0$$

qui est une partie compacte modulo $Z(G)$. Ceci termine la démonstration de la proposition. □

VI.3 Décomposition de $\mathcal{M}(G)$: la partie cuspidale

VI.3.1 Action de G sur $\mathbf{Irr}({}^0G)$

Nous allons utiliser les résultats du paragraphe IV.1.7 concernant les représentations compactes pour obtenir des résultats analogues sur les représentations supercuspidales, en exploitant le rapport entre représentations supercuspidales et représentations compactes établi en VI.2.1.

Comme ${}^0G$ est un sous-groupe distingué de G, G agit sur $\mathbf{Irr}({}^0G)$ par $(g, \sigma) \mapsto \sigma^g$ (notations de l'exemple III.2.1).

Lemme. (i) *Les orbites de l'action de G sur $\mathbf{Irr}({}^0G)$ sont de cardinal fini.*

— (ii) *Soient (π, V) une représentation lisse de G, (σ, W) une représentation lisse irréductible de ${}^0G$, et $V(\sigma)$ la composante σ-isotypique de la restriction de (π, V) à ${}^0G$. On a alors, pour tout $g \in G$,*

$$\pi(g) \cdot V(\sigma) = V(\sigma^g).$$

Démonstration. (i) L'action se factorise par le groupe $G/{}^0GZ(G)$, qui est fini. Les orbites sont donc de cardinal fini.

(ii) Rappelons que par définition $V(\sigma)$ est l'image de

$$\mathrm{Hom}_{{}^0G}((\sigma, W), (\pi, V)) \otimes W \to V$$

par l'application canonique $f \otimes w \mapsto f(w)$. De même $V(\sigma^g)$ est l'image de

$$\mathrm{Hom}_{{}^0G}((\sigma^g, W), (\pi, V)) \otimes W \to V.$$

Définissons, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{{}^0G}((\sigma, W), (\pi, V))$, $\tilde{f}(w) = \pi(g) \cdot f(w)$, $w \in W$. Vérifions que $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{{}^0G}((\sigma^g, W), (\pi, V))$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}((\sigma^g)(h) \cdot w) &= \tilde{f}(\sigma(g^{-1}hg) \cdot w) = \pi(g) \cdot f(\sigma(g^{-1}hg) \cdot w) \\ &= f(\sigma(g)\sigma(g^{-1}hg) \cdot w) = f(\sigma(hg) \cdot w) \\ &= \pi(h) \cdot (\pi(g) \cdot f(w)) = \pi(h) \cdot \tilde{f}(w) \end{aligned}$$

Il est clair que $f \mapsto \tilde{f}$ réalise un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{{}^0G}((\sigma, W), (\pi, V)) \simeq \mathrm{Hom}_{{}^0G}((\sigma^g, W), (\pi, V)).$$

Le résultat voulu en découle immédiatement. □

VI.3.2 Restriction à ${}^0G$

Rappelons que nous avons noté $\mathcal{X}(G)$ l'ensemble des caractères non ramifiés de G, c'est-à-dire les caractères de G triviaux sur ${}^0G$. Nous avons vu en V.2.3 que $\mathcal{X}(G)$ possède une structure de tore algébrique complexe.

Proposition. *Soit (π, V), une représentation irréductible de G.*

(i) Les éléments de $\mathbf{Irr}({}^0G)$ apparaissant dans la restriction de (π, V) à ${}^0G$ forment une seule G-orbite.

(ii) La restriction de (π, V) à ${}^0G$ est semi-simple et de longueur finie.

(iii) Soient (π_i, V_i), $i = 1, 2$, des représentations irréductibles de G. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi_1, V_1) = \mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi_2, V_2)$.

b) Il existe $\chi \in \mathcal{X}(G)$ tel que $\pi_2 = \pi_1 \otimes \chi$.

c) $\mathrm{Hom}_{{}^0G}(\mathrm{Res}_{{}^0G}^G \pi_1, \mathrm{Res}_{{}^0G}^G \pi_2) \neq 0$.

Démonstration. Fixons un ensemble Γ de représentants dans G des classes de $G/Z(G)^0G$: cet ensemble est fini (proposition V.2.6), et comme d'après le lemme de Schur, $Z(G)$ agit par des scalaires sur V (notons χ_π le caractère central de π), on en déduit que $\mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi, V)$ est de type fini et donc possède un quotient irréductible (σ, W). Soit $f \in \mathrm{Hom}_{{}^0G}(\mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi, V), (\sigma, W))$ non nul. Alors, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$f \circ \pi(\gamma) \in \mathrm{Hom}_{{}^0G}(\mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi, V), (\sigma^{\gamma^{-1}}), W)).$$

Considérons

$$\phi = \oplus_{\gamma \in \Gamma} f \circ \pi(\gamma) \in \mathrm{Hom}_{{}^0G}(\mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi, V), \oplus_{\gamma \in \Gamma}(\sigma^{\gamma^{-1}}, W)).$$

Vérifions que $\ker \phi$ est stable sous l'action de G. Soit $v \in \ker \phi$, c'est-à-dire $f \circ \pi(\gamma)(v) = 0$, pour tout $\gamma \in \Gamma$, et soit $g \in G$, que l'on écrit $g = \gamma' y z$, $\gamma' \in \Gamma$, $y \in {}^0G$, $z \in Z(G)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, posons $\gamma\gamma' = y'' z'' \gamma''$, avec $\gamma'' \in \Gamma$, $y'' \in {}^0G$, $z'' \in Z(G)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\phi(\pi(g) \cdot v) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} f \circ \pi(\gamma)(\pi(\gamma')\pi(y)\pi(z) \cdot v) \\
&= \chi_\pi(z) \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\pi(\gamma\gamma' y \gamma'^{-1}\gamma^{-1}) \cdot (\pi(\gamma\gamma') \cdot v)) \\
&= \chi_\pi(zz'') \sum_{\gamma \in \Gamma} \sigma(\gamma\gamma' y \gamma'^{-1}\gamma^{-1})\sigma(y'') \cdot f((\pi(\gamma'') \cdot v) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme ϕ est non nul, on en conclut par irréductibilité de V que le noyau de ϕ est nul. Ainsi ϕ est injective et $\mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi, V)$ est isomorphe à une sous-représentation de $\oplus_{\gamma \in \Gamma}(\sigma^{\gamma^{-1}}, W)$, qui est de longueur finie et semi-simple. On en déduit, par exemple en utilisant le critère de semi-simplicité du lemme A.VII (*iii*), qu'il en est de même de $\mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi, V)$. On obtient donc (*ii*).

Ecrivons maintenant :

$$\mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi, V) = \bigoplus_{\sigma \in \mathbf{Irr}({}^0G)} V(\sigma)$$

où $V(\sigma)$ est la composante σ-isotypique dans $\mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi, V)$. L'identité $\pi(g) \cdot V(\sigma) = V(\sigma^g)$ montre que l'ensemble des σ tels que $V(\sigma) \neq 0$ forme exactement une G-orbite, car (π, V) est irréductible. En particulier, cet ensemble est fini, d'après le lemme VI.3.1. Ceci montre (*i*).

Démontrons maintenant (*iii*). Comme tout caractère non ramifié de G est par définition trivial sur ${}^0G$, *b*) implique *a*). Comme *a*) implique trivialement *c*), il reste à montrer que *c*) implique *b*). Supposons que l'on ait *c*). D'après (*ii*) et le lemme de Schur, $\mathrm{Hom}_{{}^0G}(V_1, V_2)$ est de dimension finie. Munissons cet espace de l'action de G donnée par

$$g \cdot f := \pi_2(g) \circ f \circ \pi_1(g)^{-1}, \quad (f \in \mathrm{Hom}_{{}^0G}(V_1, V_2)),\ (g \in G).$$

Si $g \in {}^0G$, $g \cdot f = f$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{{}^0G}(V_1, V_2)$, donc cette action de G se factorise par $G/{}^0G$, qui est commutatif car ${}^0G$ contient le sous-groupe dérivé de G. Toute famille commutative d'opérateurs linéaires sur un espace vectoriel complexe de dimension finie admettant un vecteur propre commun, il existe $f \in \mathrm{Hom}_{{}^0G}(V_1, V_2)$ non nul et un caractère χ de $G/{}^0G$ (c'est-à-dire un caractère non ramifié de G) tel que $g \cdot f = \chi(g) f$, pour tout $g \in G$. Par construction, $f \in \mathrm{Hom}_G(\pi_1 \otimes \chi, \pi_2)$, et donc par irréductibilité, $\pi_1 \otimes \chi = \pi_2$. □

VI.3.3 Classes d'inertie de représentations supercuspidales

Soit (π, V) une représentation supercuspidale irréductible de G. De même que ci-dessus, introduisons la décomposition de $\mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi, V)$ en composantes isotypiques :

$$V = \bigoplus_{i=1,\dots,m} V(\sigma_i),$$

où les σ_i forment une orbite pour l'action de G dans $\mathbf{Irr}({}^0G)_c$. Remarquons que cette décomposition ne dépend en fait que de la classe d'inertie $[\pi]$. Soit (ρ, W) une représentation lisse de G. En tant que représentation de ${}^0G$ on a, d'après le théorème IV.1.5,

$$\mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\rho, W) = \rho(e_{\sigma_1}) \cdot W \oplus \rho(e_{\sigma_2}) \cdot W \oplus \cdots \oplus \rho(e_{\sigma_m}) \cdot W \oplus W'$$

où W' est l'unique supplémentaire ${}^0G$-invariant de $\rho(e_{\sigma_1}) \cdot W \oplus \cdots \oplus \rho(e_{\sigma_m}) \cdot W$. Une autre caractérisation de W' est d'être l'unique sous-représentation de ${}^0G$ dont aucun facteur de composition n'est isomorphe à l'un des σ_i.

Proposition. *Le sous-espace W' de V est G-invariant et pour tout $i = 1, \dots, m$, pour tout $g \in G$,*

$$\rho(g) \circ \rho(e_{\sigma_i}) = \rho(e_{g \cdot \sigma_i}) \circ \rho(g).$$

Démonstration. Soit $g \in G$. Si (τ, E) est un sous-quotient irréductible de (ρ, W'), alors (τ^g, E) est un sous-quotient irréductible de $\rho(g) \cdot W'$, et comme les σ_i forment une G-orbite dans $\mathbf{Irr}({}^0G)_c$, τ^g n'est équivalent à aucun des σ_i. Il s'ensuit que $\tau(e_{\sigma_i})\rho(g) \cdot W' = 0$ pour tout i. Par l'unicité de W', on a $\rho(g) \cdot W' = W'$.

Soit $w \in W$. Alors w s'écrit

$$w = w_1 + \dots w_m + w', \quad \text{avec } w_i \in \rho(e_{\sigma_i}) \cdot W,\ i = 1, \dots m,\ w' \in W'.$$

Fixons i, soit $g \in G$, et posons $\sigma_j = \sigma_i^g$. Alors, comme

$$\rho(e_{\sigma_i})(\rho(g)^{-1} \cdot w) = \rho(g)^{-1} \cdot w_j,$$

on a :

$$\rho(g)\rho(e_{\sigma_i})\rho(g)^{-1} \cdot w = w_j = \rho(e_{\sigma_j}) \cdot w.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition. □

Posons $\rho(e_{[\pi]}) = \sum_i \rho(e_{\sigma_i})\ : W \to W$. C'est un opérateur d'entrelacement de (ρ, W) dans elle-même. Comme $\rho(e_{\sigma_i})\rho(e_{\sigma_j}) = 0$ si $i \neq j$, $\rho(e_{[\pi]})$ est un idempotent, et l'on a donc une décomposition de W en sous-représentations :

$$W = \rho(e_{[\pi]}) \cdot W \oplus (1 - \rho(e_{[\pi]})) \cdot W.$$

Si l'on note $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ (resp. $(\mathcal{M}(G) \setminus [\pi])$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ dont les objets sont les représentations de G dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans $[\pi]$ (resp. aucun sous-quotient irréductible n'est dans $[\pi]$), on obtient une décomposition de $\mathcal{M}(G)$ en

$$\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G)_{[\pi]} \times (\mathcal{M}(G) \setminus [\pi]). \tag{VI.3.3.1}$$

Remarques. 1. Les classes d'inertie de représentations supercuspidales ne sont rien d'autre que les orbites de l'action de $\mathcal{X}(G)$ sur $\mathbf{Irr}(G)_{sc}$ définie en V.2.7. Nous avons vu qu'elles sont munies (non canoniquement) d'une structure de tore algébrique complexe. Si (π, V) est une représentation irréductible supercuspidale de G, la variété $\mathbf{Irr}(G)_{[\pi]}$ est isomorphe (non canoniquement, cela dépend du choix de π dans sa classe $[\pi]$) au tore complexe $\mathcal{X}(G)/\mathcal{X}(G)(\pi)$, quotient du tore $\mathcal{X}(G)$ par son sous-groupe fini $\mathcal{X}(G)(\pi)$, le stabilisateur de π. L'algèbre des fonctions sur la variété affine $\mathbf{Irr}(G)_{[\pi]}$ est donc l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[G/{}^0G]^{\mathcal{X}(G)(\pi)}$.
— 2. La restriction de G à ${}^0G$ induit une bijection entre l'ensemble $[\mathbf{Irr}(G)_{sc}]$ des classes d'inertie de représentations supercuspidales irréductibles de G et l'ensemble des orbites sous l'action de G dans $\mathbf{Irr}({}^0G)_c$.

VI.3.4 Décomposition de $\mathcal{M}({}^0G)$

Revenons aux décompositions de $\mathcal{M}({}^0G)$ et de $\mathcal{M}({}^0G)_c$ obtenues au paragraphe IV.1.7. On a vu qu'étant données des représentations compactes $\tau_1, \dots, \tau_r$ de ${}^0G$, on a une décomposition

$$\mathcal{M}({}^0G) = \prod_i \mathcal{M}({}^0G)_{\tau_i} \times [\mathcal{M}({}^0G) \setminus \tau_1, \dots, \tau_r],$$

et que d'autre part $\mathcal{M}({}^0G)_c$ se décompose en

$$\mathcal{M}({}^0G)_c = \prod_{\tau \in \mathbf{Irr}({}^0G)_c} \mathcal{M}(G)_\tau.$$

Nous allons utiliser les conséquences du théorème VI.2.3 pour combiner les deux en une décomposition plus fine de $\mathcal{M}({}^0G)$.

Théorème. *La catégorie $\mathcal{M}({}^0G)$ se décompose en*

$$\mathcal{M}({}^0G) = \prod_{\tau \in \mathbf{Irr}({}^0G)_c} \mathcal{M}({}^0G)_\tau \times \mathcal{M}({}^0G)_{nc}$$

où $\mathcal{M}({}^0G)_{nc}$ désigne la sous-catégorie pleine des représentations lisses de ${}^0G$ dont aucun sous-quotient n'est une représentation compacte.

Démonstration. D'après la proposition IV.1.7, il suffit de vérifier la condition (**KF**) donnée dans cette proposition. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G, et soit (σ, E) une représentation irréductible compacte de ${}^0G$. Comme dans la remarque VI.2.3, choisissons une représentation irréductible (π, V) de G dont la restriction à ${}^0G$ contient (σ, E). Elle est alors supercuspidale. Soient $v \in E^K \subset V^K$ et $\lambda \in \tilde{E}^K \subset \tilde{V}^K$ grâce auxquels nous formons le coefficient matriciel

$$g \mapsto \lambda(\pi(g) \cdot v) = \lambda(\pi(a_{g,K}) \cdot v).$$

D'après la proposition VI.2.4, ce coefficient matriciel est à support dans une partie compacte Ω modulo $Z(G)$. L'argument de la démonstration du théorème VI.2.1, plus précisément l'implication $[b) \Rightarrow c)]$ montre que la restriction de ce coefficient matriciel à ${}^0G$ est à support compact, disons Ω_1, et d'après le choix de v et λ, il est égal à $g \mapsto \lambda(\sigma(a_{g,K}) \cdot v)$. D'autre part, ce coefficient matriciel est K-bi-invariant, donc dans $\mathcal{D}(\Omega_1, K)$. Or cette algèbre est de dimension finie. Par orthogonalité des coefficients matriciels des représentations compactes irréductibles (corollaire IV.3.3), on en déduit que le nombre de représentations irréductibles compactes de ${}^0G$ ayant des vecteurs non nuls fixés par K est fini. $\square$

Remarque. Notons le corollaire suivant de cette démonstration et de la remarque VI.3.3 : pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, le nombre de classes d'inertie de représentations supercuspidales irréductibles de G ayant des vecteurs non nuls fixés par K est fini.

VI.3.5 Décomposition de $\mathcal{M}(G)$

Nous allons maintenant utiliser les résultats du paragraphe précédent pour en déduire une décomposition analogue de $\mathcal{M}(G)$.

Théorème. *La catégorie $\mathcal{M}(G)$ se décompose en*

$$\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G)_{sc} \times \mathcal{M}(G)_{ind} = \prod_{[\tau] \in [\mathbf{Irr}(G)_{sc}]} \mathcal{M}(G)_{[\tau]} \times \mathcal{M}(G)_{ind}$$

où $\mathcal{M}(G)_{sc}$ (resp. $\mathcal{M}(G)_{ind}$) désigne la sous-catégorie pleine des représentations lisses de G dont tous les sous-quotients sont des représentations supercuspidales (resp. aucun sous-quotient n'est supercuspidal).

Démonstration. Soit (π, V) une représentation lisse de G. Les résultats du paragraphe précédent nous donnent une décomposition

$$\mathrm{Res}_{{}^0G}^G(V) = V_c \oplus V_{nc}$$

Par unicité de cette décomposition, les deux facteurs du membre de droite sont stables sous l'action de G. D'après le théorème VI.2.1, une représentation de G est supercuspidale si sa restriction à ${}^0G$ est compacte, et donc V_c est dans $\mathcal{M}(G)_{sc}$ et V_{nc} est dans $\mathcal{M}(G)_{ind}$.

Il reste à voir que $\mathcal{M}(G)_{sc}$ se décompose à son tour en

$$\mathcal{M}(G)_{sc} = \prod_{[\tau]\in[\mathbf{Irr}(G)_{sc}]} \mathcal{M}(G)_{[\tau]}.$$

Soit $(\pi, V) \in \mathcal{M}(G)_{sc}$. Ecrivons

$$\mathrm{Res}_{{}^0G}^{G}(V) = \bigoplus_{(\sigma)\in\mathbf{Irr}({}^0G)_c/G} V^{(\sigma)}$$

où l'on somme sur les orbites de l'action de G dans $\mathrm{Irr}({}^0G)_c$ et $V^{(\sigma)}$ désigne le facteur direct de $\mathrm{Res}_{{}^0G}^{G}(V)$ dont les sous-quotients irréductibles sont dans l'orbite de σ. Alors il est clair que $V^{(\sigma)}$ est G-stable et supercuspidale, et que deux sous-quotients irréductibles de $V^{(\sigma)}$ sont dans la même classe d'inertie. □

VI.3.6 Propriété d'injectivité et de projectivité des représentations supercuspidales

Nous avons vu en IV.1.6 que toute représentation compacte est projective et injective dans $\mathcal{M}(G)$. Si ${}^0G \neq G$, on aimerait avoir un résultat analogue pour les représentations supercuspidales dans $\mathcal{M}(G)$. Or, en général, une représentation supercuspidale, même irréductible, n'est ni projective, ni injective dans $\mathcal{M}(G)$. Nous allons néanmoins établir des résultats plus faibles qui nous serviront dans la suite.

Lemme. *Soit (π, V) une représentation lisse admissible de G et soit (τ, E) une représentation supercuspidale irréductible de G. Supposons que (π, V) admette un sous-quotient isomorphe à (τ, E). Alors (τ, E) se réalise comme quotient et comme sous-représentation de (π, V). Autrement dit les espaces*

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \tau) \quad et \quad \mathrm{Hom}_G(\tau, \pi)$$

sont non triviaux.

Démonstration. D'après la décomposition (VI.3.5), on peut supposer que (π, V) est dans $\mathcal{M}(G)_{[\tau]}$. Tous les sous-quotients irréductibles de (π, V) sont alors de la forme $\tau \otimes \omega$, pour un certain $\omega \in \mathcal{X}(G)$. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G tel que $E^K \neq \{0\}$. Comme $K \subset {}^0G$, tous les sous-quotients non triviaux de (π, V) ont un sous-espace fixé par K non trivial. Puisque (π, V) est admissible, on voit qu'elle doit être de longueur finie. On veut montrer que $\mathrm{Hom}_G(\tau, \pi) \neq \{0\}$. Considérons la restriction à ${}^0G$ de ces deux représentations. Comme ces restrictions sont toutes deux compactes, donc semi-simples, on a

$$\mathrm{Hom}_{{}^0G}(\tau, \pi) \neq \{0\}.$$

et puisque (π, V) est de longueur finie, $\dim \mathrm{Hom}_{{}^0G}(\tau, \pi) < +\infty$. Soit $\Lambda = \Lambda(G) = G/{}^0G$. Ce groupe agit sur $S = \mathrm{Hom}_{{}^0G}(\tau, \pi)$ par

$$\bar{g} \cdot \phi = \pi(g) \circ \phi \circ \tau(g^{-1}),$$

où g est un représentant dans G de la classe $\bar{g} \in G/{}^0G$. On a alors $\mathrm{Hom}_G(\tau, \pi) = S^\Lambda$. Or, l'hypothèse que τ est un facteur de composition de π se traduit par le fait qu'il existe $V_1 \subset V_2$, sous-représentations de V, telles que $V_2/V_1 \simeq E$. Comme $\tau_{|{}^0G}$ est projective dans $\mathcal{M}({}^0G)$, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{{}^0G}(E, V_1) \to \mathrm{Hom}_{{}^0G}(E, V_2) \to \mathrm{Hom}_{{}^0G}(E, V_2/V_1) \to 0.$$

Le groupe Λ agit sur chacun des termes de cette suite, qui devient une suite de Λ-modules. D'autre part l'inclusion $V_2 \hookrightarrow V$ induit une injection de Λ-modules

$$\mathrm{Hom}_{{}^0G}(E, V_2) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{{}^0G}(E, V).$$

On voit donc que $T = \mathrm{Hom}_{{}^0G}(E, V_2/V_1)$ est un sous-quotient de S et que $T^\Lambda = \mathrm{Hom}_G(E, V_2/V_1) \neq \{0\}$. Il s'agit donc de démontrer que si S est un Λ-module de dimension finie (en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$) admettant un sous-quotient T tel que $T^\Lambda \neq \{0\}$, alors $S^\Lambda \neq \{0\}$. Rappelons que Λ est un groupe abélien libre de type fini, donc isomorphe à $\mathbb{Z}^l$ pour un certain entier naturel l. Se donner une structure de Λ-module sur l'espace vectoriel S revient donc a se donner l endomorphismes $a_1, \ldots, a_l$ de S qui commutent. Dire qu'il existe un sous-quotient T tel que $T^\Lambda \neq \{0\}$, c'est dire qu'il existe des sous-espaces $S_1 \subset S_2$ de S stables par $a_1, \ldots, a_l$ tels que les endomorphismes induits par $a_1, \ldots, a_l$ sur $T = S_2/S_1$ soient triviaux. On en déduit que 1 est valeur propre simultanée des $a_1, \ldots, a_l$. Autrement dit $S^\Lambda \neq \{0\}$. La démonstration du fait que $\mathrm{Hom}_G(\pi, \tau) \neq \{0\}$ est similaire. $\square$

Ce résultat admet une variante : fixons un caractère central (lisse)

$$\chi : Z(G) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

et notons $\mathcal{M}(G)_\chi$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ dont les objets sont les représentations lisses admettant le caractère central χ.

Proposition. *Soit (τ, W) une représentation supercuspidale irréductible de G de caractère central χ. Alors (τ, W) est projective et injective dans $\mathcal{M}(G)_\chi$.*

Démonstration. Démontrons la projectivité, la démonstration de l'injectivité étant similaire. Il s'agit de démontrer que si $p : (\pi, V) \to (\tau, W)$ est un G-morphisme non nul (donc surjectif puisque τ est irréductible), alors il existe une section G-équivariante $s_0 : (\tau, W) \to (\pi, V)$ telle que $p \circ s_0 = \mathrm{Id}_W$. Comme dans la démonstration du lemme, on peut supposer (π, V) dans $\mathcal{M}(G)_{[\tau]}$. Comme les restrictions de (π, V) et de (τ, W) à ${}^0G$ sont semi-simples, il existe une section ${}^0G$-équivariante $s : (\tau, W) \to (\pi, V)$ telle que $p \circ s = \mathrm{Id}_W$. Soit $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel (non nul, nous venons de le voir) de ces sections. L'action de $Z(G)$ sur V et W étant donnée par χ, s_0 est de fait ${}^0GZ(G)$-équivariante, et le groupe abélien fini $\bar{G} = G/{}^0GZ(G)$ agit sur $\mathcal{S}$ par

$$\bar{g} \cdot s = \pi(g) \circ s \circ \tau(g^{-1}).$$

Soit $s \in \mathcal{S}$ non nul. Posons $s_0 = |\bar{G}|^{-1} \sum_{\bar{g} \in \bar{G}} g \cdot s$. Il est clair que s_0 est G-équivariante et que $p \circ s = \mathrm{Id}_W$. $\square$

VI.4 Le centre de $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$

Nous allons maintenant étudier plus précisément la catégorie $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$, en particulier son centre. La définition du centre d'une catégorie se trouve en A.X.

VI.4.1 Progénérateur de $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$

Dans toute cette section, on fixe une représentation supercuspidale irréductible (π, V) de G. Notre but est de décrire la catégorie $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ comme la catégorie des modules à droite unitaires sur un certain anneau unitaire. Nous allons pour ceci exhiber un petit progénérateur (au sens de A.VIII.2) de $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$. Le théorème A.VIII.2 assure alors qu'une telle description est possible. Comme le théorème A.VIII.2 est donné sans démonstration, et que nous avons de toutes façons besoin d'une version explicite propre à notre contexte, nous démontrerons complètement tous les résultats.

Nous avons vu dans la proposition VI.3.2 que la restriction $\mathrm{Res}_{^0G}^{G}(\pi)$ est une somme directe de représentations compactes irréductibles de ^0G. Soit (ρ, W) l'une de ces représentations de ^0G, et posons

$$(\Pi, V_\Pi) = \mathrm{ind}_{^0G}^{G}(\rho, W).$$

Remarquons que la classe de Π ne dépend pas du choix de (ρ, W). Elle ne dépend en fait que de $[\pi]$. Ceci découle du fait établi dans la proposition VI.3.2 que toute les composantes irréductibles de la restriction de π à ^0G sont conjuguées.

Proposition. *La représentation* Π *est un petit progénérateur de* $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$.

Démonstration. Comme ^0G est ouvert dans G, et unimodulaire, l'adjonction (III.2.6.5) nous donne, pour toute représentation lisse (τ, E) dans $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$, un isomorphisme naturel :

$$\text{(VI.4.1.1)} \qquad \mathrm{Hom}_G(\Pi, \tau) \simeq \mathrm{Hom}_{^0G}(\rho, \mathrm{Res}_{^0G}^{G}\tau).$$

Comme ρ est projective dans $\mathcal{M}(^0G)$, d'après la proposition IV.1.6, et que d'après la proposition VI.3.2 et le corollaire IV.1.6, la restriction à ^0G de toute représentation dans $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ est semi-simple, il s'ensuit que Π est projectif. (C'est un résultat de nature générale : un adjoint à gauche d'un foncteur exact préserve les projectifs.) Montrons maintenant que $\mathrm{Hom}_G(\Pi, \tau)$ est non nul, pour tout $(\tau, E) \in \mathcal{M}(G)_{[\pi]}$. Toute composante irréductible de la restriction de τ à ^0G est isomorphe à une composante irréductible de la restriction de π à ^0G. Comme celles-ci sont toutes conjuguées sous G, et que τ est G-stable, on voit que la restriction de τ à ^0G contient une composante irréductible isomorphe à ρ. Donc, comme la restriction à ^0G de toute représentation dans $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ est semi-simple, $\mathrm{Hom}_{^0G}(\rho, \mathrm{Res}_{^0G}^{G}\tau)$ est non nul. Ceci montre que Π est un générateur d'après une remarque faite en A.VIII.2. De plus, Π est de type fini. En effet, l'espace $^0G\backslash G$ est discret puisque ^0G est ouvert dans G. Choisissons un système de représentants $(g_i)_i$ dans G de $^0G\backslash G$. L'espace $V_\Pi = \mathrm{ind}_{^0G}^{G}(W)$ est alors engendré par les fonctions $(f_{i,w})_{i,w}$ caractérisées par

$$\text{(VI.4.1.2)} \qquad f_{i,w}(g_i) = w \quad \text{et } \mathrm{Supp}\, f_{i,w} \subset {}^0Gg_i.$$

Or on a $\Pi(g_k^{-1}g_i) \cdot f_{i,w} = f_{k,w}$. L'espace $\mathrm{ind}_{^0G}^{G}(W)$ est alors engendré en tant que représentation de G par les fonctions $f_{i_0,w}$, où l'on a fixé arbitrairement un indice i_0. Il est commode de prendre i_0 tel que $^0Gg_{i_0} = {}^0G$, et bien sûr rien ne nous empêche de supposer que $g_{i_0} = \mathbf{1}_G$. Posons alors $f_{i_0,w} = f_w$. D'autre part, l'espace vectoriel engendré par les f_w, $w \in W$ est stable sous l'action de ^0G, et isomorphe à (ρ, W). Comme (ρ, W) est de type fini, on en conclut que Π est de type fini et ceci achève de démontrer la proposition. □

Remarque. Le progénérateur (Π, V_Π) n'est pas unique, d'autre choix sont possibles. Nous en donnons ici un autre qui sera utile par la suite. Posons

$$(\Pi_1, V_{\Pi_1}) = \mathrm{ind}_{^0G}^{G}(\mathrm{Res}_{^0G}^{G}(\pi, V)).$$

La démonstration du fait que c'est bien un progénérateur est similaire à celle donnée pour (Π, V_Π). Pour montrer que Π_1 est bien de type fini, on utilise le fait que $\mathrm{Res}_{^0G}^{G}(\pi, V)$ est de longueur finie. D'autre part, le deuxième isomorphisme de Mackey III.2.11, dont les hypothèses sont vérifiées grâce à la remarque finale de la section III.2.6, nous donne

$$\Pi_1 \simeq (\mathrm{ind}_{^0G}^{G}\mathrm{Triv}) \otimes \pi,$$

où Triv est la représentation triviale de ${}^0G$. Or $\mathrm{ind}_{^0G}^{G}\mathrm{Triv}$ n'est rien d'autre que l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\Lambda(G)]$, qui rappelons-le, est l'algèbre des fonctions sur la variété $\mathcal{X}(G)$ des caractères non ramifiés de G (voir V.2.3).

Posons $\mathcal{R} = \mathrm{End}_G(\Pi) = \mathrm{Hom}_G(\Pi, \Pi)$. Pour toute représentation lisse (τ, E) de G, $\mathrm{Hom}_G(\Pi, \tau)$ est un $\mathcal{R}$-module à droite. Considérons maintenant le foncteur

(VI.4.1.3) $$F_\Pi : \mathcal{M}(G)_{[\pi]} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{R})_d, \quad (\tau, E) \mapsto \mathrm{Hom}_G(\Pi, \tau).$$

Comme V_Π est naturellement un $\mathcal{R}$-module à gauche, pour tout $\mathcal{R}$-module à droite unitaire M, on peut former $M \otimes_{\mathcal{R}} V_\Pi$. Le groupe G agit sur $M \otimes_{\mathcal{R}} V_\Pi$ par $g \cdot (m \otimes f) = m \otimes \Pi(g) \cdot f$, où $g \in G$, $m \in M$, et $f \in V_\Pi$. Remarquons que cette représentation de G est dans $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$, car $M \otimes_{\mathcal{R}} V_\Pi$ est un quotient d'une somme directe de représentations isomorphes à Π. Ceci définit un foncteur

(VI.4.1.4) $$G_\Pi : \mathcal{M}(\mathcal{R})_d \longrightarrow \mathcal{M}(G)_{[\pi]}, \quad M \mapsto M \otimes_{\mathcal{R}} V_\Pi.$$

Théorème. *Le foncteur F_Π établit une équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ et $\mathcal{M}(\mathcal{R})_d$, un quasi-inverse étant donné par G_Π.*

Démonstration. Regardons tout d'abord la composition

$$\mathcal{F} : \mathcal{M}(G)_{[\pi]} \to \mathcal{M}(G)_{[\pi]}, \quad (\tau, E) \mapsto \mathrm{Hom}_G(\Pi, \tau) \otimes_{\mathcal{R}} V_\Pi$$

Construisons une transformation naturelle entre $\mathcal{F}$ et le foncteur identique de $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ en posant :

$$\mathrm{ev}_E : \mathrm{Hom}_G(\Pi, \tau) \otimes_{\mathcal{R}} V_\Pi \to E, \quad \alpha \otimes w \mapsto \alpha(w).$$

Nous laissons au lecteur la vérification (élémentaire mais fastidieuse) du fait que ceci est bien une transformation naturelle. Montrons que cette transformation naturelle est un isomorphisme. Remarquons pour cela que

$$\mathcal{F}(V_\Pi) = \mathrm{Hom}_G(\Pi, \Pi) \otimes_{\mathcal{R}} V_\Pi = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}} V_\Pi$$

et que ev_Π est le morphisme naturel $\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}} V_\Pi \simeq V_\Pi$. D'autre part, le foncteur F_Π est exact ((Π, V_Π) est projective) et commute avec les sommes directes ((Π, V_Π) est de type fini, donc petit au sens de la théorie des catégories). Le foncteur G_Π est exact à droite et commute avec les sommes directes (c'est un adjoint à gauche, *cf.* III.1.15). Il s'ensuit que le foncteur composé $\mathcal{F}$ possède aussi ces propriétés. Soit (τ, E) un objet de $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$. Comme Π est un progénérateur de cette catégorie, on peut réaliser (τ, E) comme le quotient de deux modules qui sont des sommes directes (éventuellement infinies) de modules isomorphes à V_Π (lemme A.VIII.2).

On dispose donc d'une suite exacte de la forme

$$\oplus_{i \in I} V_\Pi \to \oplus_{i \in J} V_\Pi \to E \to 0.$$

Comme $\mathcal{F}$ commute aux sommes directes et est exact à droite, on obtient un diagramme commutatif

$$\text{(VI.4.1.5)} \qquad \begin{array}{ccccccc} \oplus_{i\in I}\mathcal{F}(V_\Pi) & \longrightarrow & \oplus_{j\in J}\mathcal{F}(V_\Pi) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_E} & & \\ \oplus_{i\in I}V_\Pi & \longrightarrow & \oplus_{j\in J}V_\Pi & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Comme $\mathcal{F}(V_\Pi) \simeq V_\Pi$, les deux flèches verticales de gauche sont des isomorphismes. Il en découle que ev_E est un isomorphisme, et donc que ev est un isomorphisme naturel.

Soit maintenant $\mathcal{G}$ le foncteur

$$\mathcal{G}: \mathcal{M}(\mathcal{R})_d, \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{R})_d, \quad M \mapsto \mathrm{Hom}_G(V_\Pi, M \otimes_{\mathcal{R}} V_\Pi).$$

Pour terminer la démonstration, nous devons montrer maintenant qu'il existe un isomorphisme naturel de $\mathcal{G}$ vers l'identité de $\mathcal{M}(\mathcal{R})_d$. Pour tout module M dans $\mathcal{M}(\mathcal{R})_d$, définissons un morphisme de $\mathcal{R}$-modules à droite

$$\theta_M : M \to \mathrm{Hom}_G(V_\Pi, M \otimes_{\mathcal{R}} V_\Pi).$$

Posons, pour tout $m \in M$, et pour tout v dans V_Π, $f_m(v) = m \otimes v$ et définissons θ_M par $\theta_M(m) = f_m$. Il est clair que les θ_M définissent une transformation naturelle de l'identité de $\mathcal{M}(\mathcal{R})_d$ vers $\mathcal{G}$, et que de plus $\theta_{\mathcal{R}}$ réalise l'isomorphisme naturel entre $\mathcal{R}$ et $\mathrm{Hom}_G(V_\Pi, \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}} V_\Pi)$. Comme pour $\mathcal{F}$, on voit que $\mathcal{G}$ est exact à droite et commute avec les sommes directes, et que pour tout module M, on peut trouver une suite exacte de la forme

$$\oplus_{i\in I}\mathcal{R} \to \oplus_{i\in J}\mathcal{R} \to M \to 0.$$

On peut alors utiliser le même argument que ci-dessus qui montre que chaque θ_M est un isomorphisme. $\square$

VI.4.2 Une autre description de $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$

Nous continuons avec les notations de la section précédente. En particulier, (π, V) est une représentation supercuspidale irréductible de G, (ρ, W) est une composante irréductible (compacte) de la restriction de (π, V) à ${}^0G$ et $(\Pi, V_\Pi) = \mathrm{ind}_{{}^0G}^G(\rho, W)$.

Il est bien connu, au moins dans le cadre des groupes finis, qu'une algèbre d'opérateurs d'autoentrelacement d'une représentation induite est isomorphe à une certaine algèbre de convolution. Nous allons faire de même ici et établir un isomorphisme entre $\mathcal{R}$ et une algèbre de convolution. Notons $\mathcal{H}(G, \rho)$ l'ensemble des fonctions $\phi : G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ vérifiant :

$$\text{(VI.4.2.1)} \qquad (i) \quad \phi(hgh') = \rho(h)\phi(g)\rho(h'), \ (g \in G), \ (h, h' \in {}^0G)$$
$$(ii) \quad \mathrm{Supp}\,(\phi) \text{ est une union finie de classes à gauche modulo } {}^0G$$

Définissons sur $\mathcal{H}(G, \rho)$ le produit de convolution donné par

$$\phi * \psi(x) = \sum_{\bar{g}\in G/{}^0G} \phi(g)\psi(g^{-1}x).$$

(On somme sur un système de représentants, on vérifie que le résultat ne dépend pas du choix de ceux-ci. L'associativité du produit de convolution se vérifie par le calcul). L'élément neutre ϕ_e de cette algèbre est caractérisé par $\phi_e(\mathbf{1}_G) = \mathrm{Id}_W$ et $\phi_e(g) = 0$ si $g \notin {}^0G$ (c'est-à-dire que $\phi_e = f_{i_0,\mathrm{Id}_W}$ avec nos notations précédentes, si l'on a choisi $g_{i_0} = \mathbf{1}_G$ comme représentant de la classe ${}^0G$ dans ${}^0G\backslash G$).

Rappelons que nous avons défini en (VI.4.1.2), pour tout $w \in W$, une fonction f_w dans $V_\Pi = \mathrm{ind}_{{}^0G}^G(W)$ caractérisée par les propriétés $f_w(\mathbf{1}_G) = w$ et $\mathrm{Supp}\, f_w \subset {}^0G$.

Proposition. *Les applications :*

$$\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{H}(G,\rho), \qquad \alpha \mapsto \phi_\alpha$$
$$\textit{où} \quad \phi_\alpha(g)(w) = \alpha(f_w)(g), \quad (g \in G),\ (w \in W).$$

et

$$\mathcal{H}(G,\rho) \longrightarrow \mathcal{R}, \qquad \phi \mapsto \alpha_\phi$$
$$\textit{où} \quad \alpha_\phi(f)(x) = \sum_{\bar{g} \in {}^0G\backslash G} \phi(g)(f(g^{-1}x)), \quad (x \in G), (f \in V_\Pi).$$

sont des isomorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres inverses l'un de l'autre.

<u>Démonstration</u>. On peut vérifier que $\alpha_{\phi_\alpha} = \alpha$ et $\phi_{\alpha_\phi} = \phi$ par un calcul direct qui ne présente pas de difficultés, dès lors que l'on remarque que toute fonction $f \in V_\Pi$ peut se décomposer en

$$f = \sum_{\bar{g} \in {}^0G\backslash G} r(g^{-1}) \cdot f_{f(g)}, \tag{VI.4.2.2}$$

cette somme étant à support fini d'après la propriété du support de f. Montrons que $\alpha \mapsto \phi_\alpha$ est un morphisme d'algèbres. Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$. On calcule, pour tout $x \in G$ et tout $w \in W$,

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta}(x)(w) &= (\alpha\beta)(f_w)(x) = \alpha(\beta(f_w))(x) \\ &= \alpha\left(\sum_{\bar{g} \in {}^0G\backslash G} r(g^{-1}) \cdot f_{\beta(f_w)(g)}\right)(x) = \sum_{\bar{g} \in {}^0G\backslash G} r(g^{-1}) \cdot \alpha(f_{\beta(f_w)(g)})(x) \\ &= \sum_{\bar{g} \in {}^0G\backslash G} \alpha(f_{\beta(f_w)(g)})(xg^{-1}) \end{aligned} \tag{VI.4.2.3}$$

On a utilisé dans ce calcul, outre la finitude des sommes, la décomposition (VI.4.2.2) de $\beta(f_w)$, et le fait que α commute à l'action de G par translation à droite. On a d'autre part

$$\begin{aligned} ((\phi_\alpha * \phi_\beta)(x))(w) &= \sum_{\bar{y} \in {}^0G\backslash G} \phi_\alpha(y)(\phi_\beta(y^{-1}x)(w)) \\ &= \sum_{\bar{y} \in G/{}^0G} \alpha(f_{\phi_\beta(y^{-1}x)(w)})(y) = \sum_{\bar{y} \in {}^0G\backslash G} \alpha(f_{\beta(f_w)(y^{-1}x)})(y) \end{aligned} \tag{VI.4.2.4}$$

Un simple changement de variable dans cette somme montre qu'on a bien égalité entre (VI.4.2.3) et (VI.4.2.4). □

Posons $\mathcal{A} = \mathcal{H}(G,\rho)$ pour alléger les notations. On peut interpréter l'équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ et $\mathcal{M}(\mathcal{R})_d$ comme une équivalence entre $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ et $\mathcal{M}(\mathcal{A})_d$, grâce à l'isomorphisme $\mathcal{R} \simeq \mathcal{A}$.

Soit (τ, E) une représentation dans $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$. L'algèbre $\mathcal{R} = \mathrm{End}_G(\Pi)$ agit (à droite) sur $\mathrm{Hom}_G(\Pi, \tau)$. On obtient une structure de $\mathcal{A}$-module à droite sur $\mathrm{Hom}_G(\Pi, \tau)$ par transport de structure, c'est-à-dire

$$s \cdot \phi = s \circ \alpha_\phi, \quad (s \in \mathrm{Hom}_G(\Pi, \tau)), \ (\phi \in \mathcal{A}).$$

Il faut remarquer que ceci dépend de τ, et non pas seulement de $\mathrm{Res}_{{}^0G}^G \tau$.

D'autre part, l'algèbre $\mathcal{A}$ agit à droite sur $\mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \mathrm{Res}_{{}^0G}^G \tau)$ par

$$(\psi \cdot \phi)(w) = \sum_{\bar{g} \in G/{}^0G} \tau(g)\psi(\phi(g^{-1}) \cdot w),$$

pour tout $\psi \in \mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \mathrm{Res}_{{}^0G}^G \tau)$, pour tout $\phi \in \mathcal{A}$, et pour tout $w \in W$. L'isomorphisme naturel d'adjonction (VI.4.1.1)

$$\mathrm{Hom}_G(\Pi, \tau) \simeq \mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \mathrm{Res}_{{}^0G}^G \tau)$$

est alors un morphisme de $\mathcal{A}$-modules à droite. Ceci se vérifie sans problème en utilisant la forme explicite l'isomorphisme d'adjonction. Il est réalisé par l'application

$$\text{(VI.4.2.5)} \qquad \alpha \mapsto \psi_\alpha, \quad \psi_\alpha(w) = \alpha(f_w), \quad (w \in W)$$

où f_w est la fonction dans $\mathrm{ind}_{{}^0G}^G W$ caractérisée par $\mathrm{Supp}\, f_w = {}^0G$ et $f_w(\mathbf{1}_G) = w$. Comme le montre un calcul sans difficulté (en utilisant (VI.4.2.2)), son inverse est

$$\text{(VI.4.2.6)} \qquad \psi \mapsto \alpha_\psi, \quad \alpha_\psi(f) = \sum_{\bar{g} \in {}^0G \backslash G} \tau(g)\psi(f(g^{-1})), \quad (f \in \mathrm{ind}_{{}^0G}^G W).$$

Il en découle aisément que le foncteur

$$\mathcal{M}(G)_{[\pi]} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})_d, \quad \tau \mapsto \mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \mathrm{Res}_{{}^0G}^G \tau).$$

est une équivalence de catégories dont l'inverse est donné par

$$\mathcal{M}(\mathcal{A})_d \to \mathcal{M}(G)_{[\pi]}, \quad M \mapsto M \otimes_{\mathcal{A}} V_\Pi$$

où l'on considère V_Π comme un $\mathcal{A}$-module à gauche par transport de structure.

D'autre part, dans le cas $\tau = \Pi$, les isomorphismes (VI.4.2.5) et (VI.4.2.6) donnent

$$\mathcal{R} = \mathrm{Hom}_G(\Pi, \Pi) \simeq \mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \mathrm{Res}_{{}^0G}^G \Pi).$$

Regardons de plus près le membre de droite. Rappelons que l'espace ${}^0G\backslash G$ est discret, et fixons un système de représentants $\{g_i\}_i$. L'espace V_Π est engendré par les fonctions $f_{i,w}$ définies en (VI.4.1.2). Notons $(V_\Pi)_i$ le sous-espace de V_Π des fonctions a support dans ${}^0Gg_i$. Alors il est clair que

$$V_\Pi = \bigoplus_i (V_\Pi)_i,$$

et de plus, comme ${}^0G$ est distingué dans G, chaque $(V_\Pi)_i$ est stable sous l'action de ${}^0G$. En effet, pour tout $g_0 \in {}^0G$, $\Pi(g_0) \cdot f_{i,w}$ est encore à support dans ${}^0Gg_i$. On calcule

$$\begin{aligned}\Pi(g_0) \cdot f_{i,w}(g_i) &= f_{i,w}(g_ig_0) = f_{i,w}((g_ig_0g_i^{-1})g_i) = \rho(g_ig_0g_i^{-1}) \cdot f_{i,w}(g_i) \\ &= \rho^{g_i^{-1}}(g_0) \cdot w,\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$W \to (V_\Pi)_i, \quad w \mapsto f_{i,w}$$

entrelace les représentations $(W, \rho^{g_i^{-1}})$ et $(\mathrm{Res}_{{}^0G}^G \Pi, (V_\Pi)_i)$.

En tant qu'espace vectoriel, on voit donc que

$$\mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \mathrm{Res}_{{}^0G}^G \Pi) = \mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \oplus_i (V_\Pi)_i)) = \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \rho^{g_i^{-1}}).$$

Si $\rho^{g_i^{-1}} \simeq \rho$ alors $\mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \rho^{g_i^{-1}})$ est de dimension 1, nulle sinon.

Plaçons nous dans le cas où $\rho^{g_i^{-1}} \simeq \rho$. Un opérateur d'entrelacement entre ρ et $\rho^{g_i^{-1}}$ est un endomorphisme A de W tel que, pour tout $g_0 \in {}^0G$

$$\rho(g_i g_0 g_i^{-1}) \circ A = A \circ \rho(g_0) \tag{VI.4.2.7}$$

Si A est un tel opérateur, définissons la fonction

$$f_{i,A} : G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W),$$

à support dans ${}^0Gg_i$, et caractérisée par

$$f_{i,A}(g_i) = A \quad \text{ et } f_{i,A}(g_0 g_i g_1) = \rho(g_0) \circ A \circ \rho(g_1)$$

quelques soient $g_0, g_1 \in {}^0G$. La relation (VI.4.2.7) montre que $f_{i,A}$ est bien définie. Réciproquement, une telle fonction $f_{i,A}$ définit un opérateur d'entrelacement A entre ρ et $\rho^{g_i^{-1}}$. Ce qui précède permet de voir apparaître naturellement l'algèbre de convolution $\mathcal{A} = \mathcal{H}(G, \rho)$, et l'isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \mathrm{Res}_{{}^0G}^G \Pi)$ et $\mathcal{A} = \mathcal{H}(G, \rho)$.

VI.4.3 Structure de $\mathcal{A}$

Nous continuons avec les notations des sections précédentes. Pour tout $x \in G$, notons $\mathcal{F}_x(\rho)$ l'espace des fonctions ϕ de $\mathcal{A}$ dont le support est contenu dans ${}^0Gx$. Soit $\phi \in \mathcal{F}_x(\rho)$. On a alors :

$$\phi(x)\rho(x^{-1}gx) = \phi(gx) = \rho(g)\phi(x), \quad (g \in {}^0G),$$

et donc on a pour tout $x \in G$ un isomorphisme linéaire

$$\phi \mapsto \phi(x), \quad \mathcal{F}_x(\rho) \simeq \mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho^x, \rho).$$

On en déduit que $\dim \mathcal{F}_x(\rho) \leq 1$ pour tout $x \in G$ et que $\dim \mathcal{F}_x(\rho) = 1$ si et seulement si x est dans le stabilisateur $N = N_G(\rho)$ de ρ (c'est-à-dire que N est l'ensemble des $g \in G$ tels que $\rho^g \simeq \rho$, avec les notations de III.2.4). En particulier, on a $\mathcal{A} = \mathcal{H}(N, \rho)$.

Soient $\phi, \psi \in \mathcal{A}$ avec $\mathrm{Supp}\, \phi = {}^0Gx$ et $\mathrm{Supp}\, \psi = {}^0Gy$, x, y dans N. Un calcul direct montre que

$$\mathrm{Supp}\, \phi * \psi = {}^0Gxy \quad \text{ et } \phi * \psi(xy) = \phi(x)\psi(y). \tag{VI.4.3.1}$$

On en déduit que si ϕ est non nul, il est inversible dans $\mathcal{A}$, son inverse étant donné par un élément dont le support est dans ${}^0Gx^{-1}$. D'autre part, comme ${}^0G\backslash G$ est abélien (V.2.6), ${}^0Gxy = {}^0Gyx$, et donc si ϕ et ψ sont comme ci-dessus,

$$\phi * \psi = c\, \psi * \phi \ \text{ pour un certain } c \in \mathbb{C}^\times.$$

Comme N contient ${}^0GZ(G)$ et que ce dernier est d'indice fini dans G (proposition V.2.6), ${}^0G\backslash N$ est un groupe abélien libre de même rang que $\Lambda(G) = {}^0G\backslash G$. Choisissons alors une base ${}^0Gx_1, \dots {}^0Gx_n$ du réseau ${}^0G\backslash N$ et fixons des éléments ϕ_i, $i = 1, \dots n$ non nuls tels que $\phi_i \in \mathcal{F}_{x_i}(\rho)$. Pour chaque couple (i, j) d'indices, on a un nombre complexe c_{ij} tel que

$$\phi_i * \phi_j = c_{ij}\ \phi_j * \phi_i. \tag{VI.4.3.2}$$

L'algèbre $\mathcal{A}$ est engendrée par les ϕ_i, $i = 1, \dots n$, et les relations (VI.4.3.2) permettent d'écrire tout élément de $\mathcal{A}$ comme une combinaison linéaire de monômes en les ϕ_i et leurs inverses. En d'autre termes, $\mathcal{A}$ est en tant qu'algèbre une algèbre de polynômes de Laurent « tordue » à n variables. Il est alors facile de voir que le groupe des inversibles $\mathcal{A}^\times$ est constitué des monômes

$$c\ \phi_1^{e_1} * \cdots * \phi_n^{e_n}, \quad c \in \mathbb{C}^\times, e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z}. \tag{VI.4.3.3}$$

Lemme. *Pour tout $\mathcal{A}$-module à droite M, notons*

$$\mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M), \quad \phi \mapsto \phi_M$$

le morphisme donnant la structure de $\mathcal{A}$-module. Fixons un système de représentants des classes d'isomorphismes de $\mathcal{A}$-modules à droite simples, et considérons le morphisme

$$\mathcal{A} \to \prod \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M), \quad (\phi \mapsto \phi_M)$$

où le produit porte sur ce système de représentants. Alors ce morphisme est injectif.

Démonstration. Le lemme de séparation B.III montre qu'un élément ϕ du noyau de ce morphisme est nécessairement nilpotent. Il en découle immédiatement que $u = \mathbf{1}_{\mathcal{A}} + \phi$ est inversible. De même, $u' = \mathbf{1}_{\mathcal{A}} - \phi^2$ est inversible et $u' = 2u - u^2$. La forme des inversibles de $\mathcal{A}$ étant donné par (VI.4.3.3), on en déduit que u doit être un scalaire. Ainsi ϕ est un scalaire, et alors nécessairement $\phi = 0$. □

Corollaire. (i) *L'algèbre $\mathcal{A}$ est intègre donc sans élément nilpotent non nul.*

(ii) *L'algèbre $\mathcal{A}$ est commutative si et seulement si la restriction de π à ${}^0G$ est sans multiplicité.*

Démonstration. Le point (i) est immédiat, d'après le lemme. Soit m la multiplicité de ρ dans $\mathrm{Res}_{{}^0G}^G \pi$. L'équivalence de catégories $\mathcal{M}(G)_{[\pi]} \simeq \mathbf{mod} - \mathcal{A}$ montre que les $\mathcal{A}$-modules à droite simples sont isomorphes à

$$\mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi \otimes \omega))$$

pour un certain caractère non ramifié ω de G. Bien sûr [2], $\mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi \otimes \omega) = \mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi)$ et donc chaque $\mathcal{A}$-module à droite simple est de dimension m. Si $m = 1$, le lemme montre alors que $\mathcal{A}$ est commutative. Réciproquement, si $\mathcal{A}$ est commutative, chaque $\mathcal{A}$-module à droite simple est de dimension 1. □

2. Attention, l'égalité qui suit est une égalité de ${}^0G$-modules, mais pas de $\mathcal{A}$-modules

VI.4.4 Le centre de $\mathcal{A}$

Nous continuons avec les mêmes notations que dans les sections précédentes. Nous commençons par quelques remarques préliminaires. Nous avons déjà introduit la notation $N = N_G(\rho)$ pour le stabilisateur dans G de ρ. L'espace W de la représentation ρ est un sous-espace ${}^0G$-stable de V.

Posons
$$H = \{g \in G \,|\, \pi(g) \cdot W = W\}$$
et soit ρ_H la représentation de H sur W obtenue par restriction de π. Comme ρ_H étend ρ, elle est irréductible. D'autre part H contient ${}^0GZ(G)$, et le groupe $G/{}^0GZ(G)$ est abélien, donc H est distingué dans G et d'indice fini dans G. Pour tout $g \in G$, le sous-espace $\pi(g) \cdot W$ est alors stable sous l'action de ${}^0G$. Notons $(\pi_{|\pi(g)\cdot W}, \pi(g) \cdot W)$ cette représentation de ${}^0G$. Ainsi par exemple, avec $g = \mathbf{1}_G$, $(\pi_{|W}, W) = (\rho, W)$. L'application $\pi(g)$ entrelace (ρ^g, W) et $(\pi_{|\pi(g)\cdot W}, \pi(g) \cdot W)$. Il est alors clair que $H \subset N$. De plus, les espaces $\pi(g) \cdot W$ sont stables par H, et isomorphes à ρ_H^g comme représentation de H.

De plus, comme V est irréductible, on a

$$V = \sum_{\bar{g} \in G/H} \pi(g) \cdot W. \qquad \text{(VI.4.4.1)}$$

Introduisons le groupe
$$\bar{H} = \{g \in G \,|\, \rho_H^g \simeq \rho_H\},$$
le normalisateur dans G de la représentation ρ_H de H. Si $H = \bar{H}$, les représentations $\{\pi(g) \cdot W\}$, où g varie dans un système de représentants de $\bar{G}/H$, sont inéquivalentes deux à deux. En effet, si pour $g_1, g_2 \in G$,
$$\pi(g_1) \cdot W \simeq \pi(g_2) \cdot W$$
comme représentation de H, on a
$$\pi(g_1^{-1} g_2) \cdot W \simeq W,$$
d'où $g_1^{-1} g_2 \in \bar{H} = H$. On en déduit que les composantes $\pi(g) \cdot W$ sont linéairement indépendantes et donc que la somme (VI.4.4.1) est directe.

Si $H \neq \bar{H}$, soit $H_1 \neq H$, $H_1 \subset \bar{H}$ tel que H_1/H soit cyclique (rappelons que $\bar{H}/H$ est abélien fini). Alors (ρ_H, W) admet une extension (ρ_{H_1}, W) à H_1 : si $h_0 \in H_1$ est tel que son image dans H_1/H soit un générateur de ce groupe, on fixe un opérateur d'entrelacement non nul $\phi : (\rho_H, W) \to (\rho_H^{h_0}, W)$, bijectif par irréductibilité, et si $h_1 = h_0^j h$, $h_1 \in H_1$, $h \in H$, on pose

$$\rho_{H_1}(h_1) = \phi^j \rho_H(h),$$

ce qui définit ρ_{H_1}.

Posons $E = \sum_{\bar{g} \in H_1/H} \pi(g) \cdot W$. C'est une représentation de H_1, dont la restriction à H est somme directe de représentations isomorphes à ρ_H. Soit (ρ_1, W_1) une représentation irréductible de H_1, $W_1 \subset E$. On a donc
$$\mathrm{Hom}_H(W, W_1) \neq 0.$$
De plus, H_1 agit sur cet espace par

$$h \cdot \phi = \rho_1(h) \circ \phi \circ \rho_{H_1}(h)^{-1}, \quad h \in H_1,\ \phi \in \mathrm{Hom}_H(W, W_1).$$

Cette action se factorise par le groupe cyclique H_1/H, et donc il existe un vecteur propre ϕ non nul simultané pour tous les $h \in H_1/H$, c'est-à-dire qu'il existe $\chi \in \widehat{H_1/H}$ et $\phi \in \mathrm{Hom}_H(W, W_1)$ tel que $h \cdot \phi = \chi(h)\phi$ pour tout $h \in H_1/H$, ce que l'on peut traduire par

$$\phi \in \mathrm{Hom}_{H_1}(\rho_{H_1}, \rho_1 \otimes \chi^{-1}).$$

Comme ρ_{H_1} et ρ_1 sont irréductibles, ϕ est un isomorphisme, et l'on en déduit que la restriction de ρ_1 à H est irréductible. En remplaçant W par W_1, on remplace H par un groupe contenant H_1, et en réitérant le procédé, on peut supposer finalement que l'on a choisi W de sorte que $H = \bar{H}$ (ce que nous ferons dans la suite), et qu'ainsi

$$V = \bigoplus_{\bar{g} \in G/H} \pi(g) \cdot W. \tag{VI.4.4.2}$$

On a alors $\pi \simeq \mathrm{ind}_H^G(\rho_H)$. Plus précisément, la décomposition (VI.4.4.2) est une décomposition en sous-représentations irréductibles de H, et π est isomorphe à l'induite de n'importe quelle de ces composantes. Il s'ensuit que m, la multiplicité de ρ dans $\mathrm{Res}_{{}^0G}^G \pi$ est égale à $[N : H]$.

Introduisons maintenant un autre sous-groupe de G contenant ${}^0G$. Rappelons pour cela quelques éléments de la dualité entre tore complexes et réseaux. Si $\mathbb{U}$ est un tore complexe, le groupe de ses caractères algébriques $X^*(\mathbb{U})$ est un réseau (un $\mathbb{Z}$-module libre de rang la dimension de $\mathbb{U}$) et $\mathbb{C}[X^*(\mathbb{U})]$ est l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{U}$. Si J est un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$, le quotient $\mathbb{U}/J$ est encore un tore complexe, et $X^*(\mathbb{U}/J)$ s'identifie au sous-réseau L de $X^*(\mathbb{U})$ des caractères triviaux sur J. L'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{U}/J$ est $\mathbb{C}[L] \simeq \mathbb{C}[X^*(\mathbb{U})]^J$.

Appliquons ceci à $\mathcal{X}(G)$, qui d'après V.2.4 est un tore dont le groupe des caractères algébriques est $\Lambda(G) = G/{}^0G$ et à son sous-groupe fini (voir V.2.7)

$$\mathcal{X}(G)(\pi) = \{\omega \in \mathcal{X}(G) \mid \pi \otimes \omega \simeq \pi\}.$$

Le groupe des caractères algébriques du tore $\mathcal{X}(G)/\mathcal{X}(G)(\pi)$ est donc un sous-réseau de $\Lambda(G) = G/{}^0G$, que nous pouvons voir comme un sous-groupe de G contenant ${}^0G$. Plus explicitement, il s'agit du groupe :

$$T = \bigcap_{\omega \in \mathcal{X}(G)(\pi)} \ker \omega.$$

Si $\omega \in \mathcal{X}(G)(\pi)$ alors la restriction de ω à $Z(G)$ est triviale, d'où ${}^0GZ(G) \subset T$ et donc T est d'indice fini dans G.

Remarque. La dualité entre tores et réseaux montre que $\mathcal{X}(G)(\pi)$ consiste exactement en les éléments de $\mathcal{X}(G)$ dont la restriction à T est triviale. De plus l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathcal{X}(G)/\mathcal{X}(G)(\pi)$ est alors $\mathbb{C}[T/{}^0G] \simeq \mathbb{C}[\Lambda(G)]^{\mathcal{X}(G)(\pi)}$. D'autre part, rappelons (remarques VI.3.3) que le tore $\mathcal{X}(G)/\mathcal{X}(G)(\pi)$ s'identifie à la variété $\mathbf{Irr}(G)_{[\pi]}$. L'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbf{Irr}(G)_{[\pi]}$ s'identifie donc à $\mathbb{C}[T/{}^0G]$.

Lemme. *On a $T \subset H \subset N$ avec $[N : H] = [H : T] = m$. Soit ρ_T la restriction de ρ_H à T. Alors, toute composante irréductible de $\mathrm{Res}_T^G(\pi)$ dont la restriction à ${}^0G$ contient ρ est isomorphe à ρ_T. Le morphisme de restriction*

$$\mathrm{Hom}_T(\rho_T, \mathrm{Res}_T^G(\pi)) \to \mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi)) \tag{VI.4.4.3}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Nous avons déjà vu que $H \subset N$ avec $[N : H] = m$. Montrons que $T \subset H$: soit $\omega \in \mathcal{X}(G)$. On a alors

$$\pi \otimes \omega \simeq (\mathrm{ind}_H^G \rho_H) \otimes \omega \simeq \mathrm{ind}_H^G(\rho_H \otimes \omega_{|H}).$$

Par conséquent, si $\omega_{|H}$ est trivial, $\pi \otimes \omega \simeq \pi$, donc $\omega \in \mathcal{X}(G)(\pi)$ et $\omega_{|T} = 1$. La dualité entre tore et réseaux montre alors que $T \subset H$.

Soit (τ, E) une composante irréductible de la restriction de π à T dont la restriction à ${}^0G$ possède une composante ρ-isotypique non triviale. Comme ρ est aussi égale à la restriction de ρ_T à ${}^0G$, ceci signifie que l'on a

$$\mathrm{Hom}_{{}^0G}(\mathrm{Res}_{{}^0G}^T \rho_T, \mathrm{Res}_{{}^0G}^T \tau) \neq \{0\}.$$

D'après la proposition VI.3.2 (*iii*) (plus précisément, il s'agit de constater que la démonstration du point *c*) $\Rightarrow$ *b*) s'adapte sans difficulté à notre contexte), il existe un caractère η de T, trivial sur ${}^0G$ tel que

$$\tau \simeq \rho_T \otimes \eta.$$

La représentation τ est contenue dans la restriction à T d'une composante irréductible, disons $\tilde{\tau}$, de la restriction de π à H. On a

$$\tilde{\tau} \simeq \rho_H \otimes \tilde{\eta}$$

pour un certain caractère $\tilde{\eta}$ de H prolongeant η (on applique encore le point *c*) $\Rightarrow$ *b*) de la proposition VI.3.2, (iii)). On en déduit que $\pi \simeq \mathrm{ind}_H^G(\rho_H \otimes \tilde{\eta})$, puisque $\rho_H \otimes \tilde{\eta}$ est isomorphe à l'une des composantes de la décomposition (VI.4.4.2). Prolongeons à nouveau $\tilde{\eta}$ en un caractère $\hat{\eta}$ de G. Alors $\hat{\eta}_{|T} = \eta$ et

$$\pi \simeq \mathrm{ind}_H^G(\rho_H \otimes \tilde{\eta}) \simeq (\mathrm{ind}_H^G \rho_H) \otimes \hat{\eta} = \pi \otimes \hat{\eta}.$$

Ceci montre que $\hat{\eta} \in \mathcal{X}(G)(\pi)$ donc $\hat{\eta}_{|T} = 1$. Par conséquent, $\eta = 1$ et $\tau \simeq \rho_T$.

Utilisons maintenant l'isomorphisme d'adjonction

$$\mathrm{Hom}_T(\rho_T, \mathrm{Res}_T^G(\pi)) = \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_T^G(\rho_T), \pi). \tag{VI.4.4.4}$$

Montrons que ce qui précède implique que le membre de gauche est de dimension m. En effet, la restriction à ${}^0G$ définit une application naturelle de $\mathrm{Hom}_T(\rho_T, \mathrm{Res}_T^G(\pi))$ vers $\mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \mathrm{Res}_{{}^0G}^G \pi)$, puisque les espaces de ρ et de ρ_T sont les mêmes. Réciproquement, on vient de montrer que tout morphisme de $\mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \mathrm{Res}_{{}^0G}^G(\pi))$ se prolonge de manière unique en un morphisme T-équivariant. Les deux espaces sont donc isomorphes (en tant qu'espaces vectoriels), et ceci démontre que (VI.4.4.3) est un isomorphisme. Intéressons nous maintenant au membre de droite de l'isomorphisme d'adjonction. On a, comme H/T est abélien, fini,

$$\mathrm{ind}_T^H(\rho_T) \simeq \bigoplus_{\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H/T, \mathbb{C}^\times)} \rho_H \otimes \xi.$$

Chaque $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H/T, \mathbb{C}^\times)$ se prolonge en un caractère non ramifié $\hat{\xi}$ de G trivial sur T, et par conséquent dans $\mathcal{X}(G)(\pi)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_T^G(\rho_T) &\simeq \mathrm{ind}_H^G(\mathrm{ind}_T^H(\rho_T)) \simeq \mathrm{ind}_H^G(\oplus_\xi \rho_H \otimes \xi) \\
&\simeq \bigoplus_\xi \mathrm{ind}_H^G(\rho_H \otimes \xi) = \bigoplus_\xi \mathrm{ind}_H^G(\rho_H) \otimes \hat{\xi} \\
&= [H : T]\, \pi.
\end{aligned}$$

Le membre de droite de (VI.4.4.4) est donc de dimension $[H:T]$, et donc $[H:T]=m$. □

Nous allons maintenant décrire le centre $\mathcal{Z}$ de l'algèbre $\mathcal{A}$.

Théorème. *Le centre de $\mathcal{A}=\mathcal{H}(N,\rho)$ est $\mathcal{Z}=\mathcal{H}(T,\rho)$. En particulier, $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{Z}$-module libre de rang m^2.*

Démonstration. Soit $\phi\in\mathcal{A}$. Ecrivons le support de ϕ comme une union disjointe de classes à droite ${}^0Gg_i$, $i=1,\dots r$ et ϕ comme une somme $\phi=\phi_1+\dots+\phi_r$ où $\operatorname{Supp}\phi_i={}^0Gg_i$. Nous avons décrit dans la section VI.4.3 l'algèbre $\mathcal{A}$ comme une algèbre de polynômes de Laurent tordue. La décomposition de ϕ ci-dessus correspond à une décomposition d'un polynôme en monômes. Il est alors clair que ϕ est dans $\mathcal{Z}$ si et seulement si chaque ϕ_i est dans $\mathcal{Z}$. On peut donc supposer que le support de ϕ est constitué d'une seule classe ${}^0Gg$.

Supposons que $\phi\in\mathcal{Z}$ et montrons que $\phi\in\mathcal{H}(T,\rho)$, c'est-à-dire que $g\in T$. Pour tout $\omega\in\mathcal{X}(G)$, ϕ agit sur le $\mathcal{A}$-module simple $\operatorname{Hom}_{{}^0G}(\rho,\pi\otimes\omega)$ par un certain scalaire, que nous allons noter $\lambda_\omega(\phi)$. L'inclusion $\iota: W\to V$ définit un élément de $\operatorname{Hom}_{{}^0G}(\rho,\pi\otimes\omega)$. On a alors, d'après la définition de l'action de $\mathcal{A}$ sur $\operatorname{Hom}_{{}^0G}(\rho,\pi\otimes\omega)$,

$$\text{(VI.4.4.5)}\qquad \lambda_\omega(\phi)w=(\iota\cdot\phi)(w)=\pi(g^{-1})\omega(g^{-1})(\phi(g)w),\quad (w\in W).$$

En particulier, si ω est trivial, $\lambda_{triv}(\phi)\pi(g)=\phi(g)$. Comme ϕ est inversible, $\lambda_{triv}(\phi)\neq 0$ et donc $g\in H$. Supposons maintenant que $\pi\otimes\omega\simeq\pi$. Alors $\lambda_\omega(\phi)=\lambda_{triv}(\phi)$ et ceci entraîne que $\omega(g)=1$, pour tout $\omega\in\mathcal{X}(G)(\pi)$, d'où $g\in T$.

Notre but est maintenant de montrer la réciproque, c'est-à-dire que si $g\in T$, alors $\phi\in\mathcal{Z}$. Soit n un élément de N. D'après le lemme précédent, $\rho_T^n\simeq\rho_T$. Soit T_n un opérateur d'entrelacement entre ρ_T et ρ_T^n et $F_n=\pi(n)T_n$. On a alors pour tout $w\in W$ et tout $h\in{}^0G$:

$$\text{(VI.4.4.6)}\qquad \begin{aligned}F_n\circ\rho(h)(w)&=\pi(n)\circ T_n\circ\rho(h)(w)=\pi(n)\circ\rho(n^{-1}hn)\circ T_n(w)\\&=\pi(hn)\circ T_n(w)=\pi(h)\circ F_n(w)\end{aligned}$$

et donc F_n est dans $\operatorname{Hom}_{{}^0G}(\rho,\pi)$. On peut montrer facilement grâce à (VI.4.4.2) que lorsque n varie dans un système de représentants $\mathcal{T}$ de N/H, l'ensemble des F_n ainsi obtenus est une base de $\operatorname{Hom}_{{}^0G}(W,V)$. Pour $g\in T$, $\phi(g)$ est égal, à un facteur scalaire non nul près, à $\rho_T(g)$. On peut renormaliser ϕ pour avoir $\phi(g)=\rho_T(g)$, ce que l'on suppose dans la suite. On a, pour tout $w\in W$, pour tout $n\in\mathcal{T}$, et tout $\omega\in\mathcal{X}(G)$, par définition de l'action à droite de $\mathcal{A}$ sur $\operatorname{Hom}_{{}^0G}(\rho,\pi\otimes\omega)$,

$$\text{(VI.4.4.7)}\qquad \begin{aligned}(F_n\cdot\phi)(w)&=\omega(g^{-1})\pi(g^{-1})\circ F_n(\phi(g)\cdot w)\\&=\omega(g^{-1})\pi(g^{-1})\circ\pi(n)\circ T_n(\rho_T(g)\cdot w)\\&=\omega(g^{-1})\pi(g^{-1})\circ\pi(n)\circ\rho_T(n^{-1}gn)T_n(w)\\&=\omega(g^{-1})\pi(n)\circ T_n(w)=\omega(g^{-1})F_n(w)\end{aligned}$$

et donc ϕ agit sur $\operatorname{Hom}_{{}^0G}(\rho,\pi\otimes\omega)$ par multiplication par $\omega(g^{-1})$. En particulier, ϕ agit par multiplication par un scalaire sur tout $\mathcal{A}$-module à droite simple. On en déduit que $\phi\in\mathcal{Z}$. En effet, l'image de ϕ par l'injection du lemme VI.4.3 est centrale. On sait que $[N:T]=m^2$. Choisissons un système de représentants $n_1,\dots,n_{m^2}$ des classes à droite de T dans N et pour chaque i, $1\le i\le m^2$, une fonction non nulle ϕ_i dans $\mathcal{A}=\mathcal{H}(N,\rho)$ de support ${}^0Gn_i$. On vérifie facilement grâce aux propriétés des supports (VI.4.3.1) que $(\phi_i)_{1\le i\le m^2}$ est une base de $\mathcal{A}$ sur son centre $\mathcal{H}(T,\rho)$. □

Nous pouvons tirer une autre conséquence importante des résultats ci-dessus :

Corollaire. *La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A}$ est noethérienne.*

Démonstration. En effet, $\mathcal{Z}$ est isomorphe à une algèbre de polynômes de Laurent à plusieurs variables, donc noethérienne ([24], 3.6.2). D'autre part, $\mathcal{A}$ est un module de type fini sur $\mathcal{Z}$. On conclut grâce à ([24], 3.6.1). La catégorie $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ est donc équivalente à la catégorie des modules à droite sur une algèbre noethérienne.

Proposition. *Pour tout $g \in T$, notons ψ_g l'élément de $\mathcal{Z}$ dont le support est ${}^0Gg^{-1}$ normalisée comme ci-dessus, c'est-à-dire que $\psi_g(g^{-1}) = \rho_T(g^{-1})$. Alors l'application $g \mapsto \psi_g$ induit un isomorphisme $\mathbb{C}[T/{}^0G] \simeq \mathcal{Z}$. Ceci montre que $\mathcal{Z}$ est isomorphe à l'algèbre des fonctions de la variété $\mathbf{Irr}(G)_{[\pi]}$.*

Démonstration. Le fait que $g \mapsto \psi_g$ induise un isomorphisme $\mathbb{C}[T/{}^0G] \simeq \mathcal{Z}$ résulte facilement de (VI.4.3.2). Nous avions remarqué en VI.4.4 que l'algèbre des fonctions sur $\mathbf{Irr}(G)_{[\pi]}$ est $\mathbb{C}[T/{}^0G]$. La dernière assertion en découle. $\square$

Pour conclure cette section, récapitulons les résultats obtenus sur le centre de $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$. L'équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ et $\mathcal{M}(\mathcal{A})_d$ montre que le centre de $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ est isomorphe à $\mathcal{Z}$, le centre de $\mathcal{A}$. D'autre part, $\mathcal{Z}$ est isomorphe à l'algèbre des fonctions polynomiales sur la variété $\mathbf{Irr}(G)_{[\pi]}$. On obtient donc une description du centre de $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ comme algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbf{Irr}(G)_{[\pi]}$. Les isomorphismes ci-dessus ne sont pas canoniques : $\mathbf{Irr}(G)_{[\pi]}$ est décrit comme espace homogène pour $\mathcal{X}(G)$, et ceci dépend du choix d'un point de base (ici π) dans la classe d'inertie $[\pi]$. D'autre part, nous avons choisi un progénérateur particulier de $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$, dont dépend la définition de l'algèbre $\mathcal{R}$, et donc celle de $\mathcal{A}$. Dans la section suivante, nous verrons comment rendre cette description indépendante des choix.

VI.4.5 Le centre de $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$: conclusion

Soit M un $\mathcal{A}$-module à droite simple. Le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{A}$ agit par un caractère $\lambda_M : \mathcal{Z} \to \mathbb{C}$. Posons $I_M = \ker \lambda_M$, de sorte que $I_M\mathcal{A}$ soit contenu dans l'annulateur de M. Le morphisme de structure

$$\phi_M : \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$$

induit un morphisme d'algèbres, surjectif d'après le théorème de Burnside ([35], corollaire XVII.3.3) :

$$\tilde{\phi}_M : \ I_M\mathcal{A}\backslash\mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M).$$

Remarquons que $I_M\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}$ est de dimension m^2 sur $\mathbb{C}$ car $\mathcal{A}$ est libre sur $\mathcal{Z}$ de rang m^2, et $I_M\backslash\mathcal{Z} \simeq \mathbb{C}$. Comme $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ est aussi de dimension m^2, on en déduit que $\tilde{\phi}_M$ est un isomorphisme d'algèbres. De plus $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ est isomorphe en tant que $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$-module à droite à une somme de m copies de M. On en déduit qu'il en est de même de $I_M\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}$. Il s'ensuit que M est déterminé entièrement par l'action de $\mathcal{Z}$, où plus précisément par l'idéal I_M de $\mathcal{Z}$. Réciproquement, pour tout idéal maximal I de $\mathcal{Z}$, le $\mathcal{A}$-module à droite de type fini $I\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}$ admet un quotient simple M, $I = I_M$ et $I\mathcal{A}\backslash\mathcal{A} \simeq mM$. En résumé, si M_I désigne l'unique facteur de composition simple du $\mathcal{A}$-module à droite semi-simple $I\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}$, alors

$$I \mapsto M_I, \quad \mathrm{SpecMax}(\mathcal{Z}) \to \mathbf{Irr}(\mathcal{A}).$$

définit une bijection entre l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{Z}$ et l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathcal{A}$-modules à droite simples. Ceci munit $\mathbf{Irr}(\mathcal{A})$ d'une structure de variété algébrique affine sur $\mathbb{C}$, d'algèbre de fonctions $\mathcal{Z}$.

L'équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(\mathcal{A})_d$ et $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ induit donc un isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{Z}$ et le centre $\mathcal{Z}_{[\pi]}$ de la catégorie $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$, que nous notons $\phi \mapsto z_\phi$. Cette équivalence induit aussi une bijection entre $\mathbf{Irr}(\mathcal{A})$ et $\mathbf{Irr}(G)_{[\pi]}$.

Pour tout $I \in \mathrm{SpecMax}(\mathcal{Z})$, le module $I\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})_d$ correspond au module

$$(I\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Pi \simeq \Pi/I\Pi.$$

Il existe une unique représentation irréductible (à isomorphisme près) π_I dans $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ telle que $\Pi/I\Pi \simeq m\pi_I$. Notons λ_I le morphisme d'algèbres de $\mathcal{Z}$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\ker \lambda_I = I$. Soit $\phi \in \mathcal{Z}$. Alors ϕ agit sur M_I par multiplication par $\lambda_I(\phi)$. On en déduit que z_ϕ agit sur π_I par ce même scalaire $\lambda_I(\phi)$.

Proposition. *Soient $z \in \mathcal{Z}_{[\pi]}$ et soit $\tau \in \mathbf{Irr}(G)_{[\pi]}$. Interprétons z comme un élément de l'algèbre des fonctions de la variété algébrique affine $\mathbf{Irr}(G)_{[\pi]}$. Alors l'évaluation de z au point τ est le scalaire $z(\tau)$ par lequel z agit sur τ.*

Démonstration. Soient $\omega \in \mathcal{X}(G)$ et $x \in T$. Il suffit de démontrer l'assertion dans le cas où $z = z_{\psi_x}$, ψ_x étant l'élément de $\mathcal{Z}$ défini dans la proposition VI.4.4. D'après (VI.4.4.5), la fonction ψ_x agit sur le module à droite simple $\mathrm{Hom}_{{}^0G}(\rho, \pi \otimes \omega)$ par le scalaire $\omega(x)$. Ainsi, l'élément z_{ψ_x} agit par le scalaire $\omega(x)$ sur $\pi \otimes \omega$. □

Notons une autre conséquence de tout ceci :

Corollaire. *La catégorie $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ est indécomposable.*

Démonstration. Lorsqu'un catégorie abélienne se scinde en une somme directe de deux catégories, les projections sur l'un et l'autre des facteurs sont des idempotents dans le centre de la catégorie. Comme $\mathcal{Z}$ est un anneau intègre (d'après le lemme VI.4.3), il ne contient aucun élément idempotent non trivial. □

VI.5 Représentation induites

On fixe dans tout ce qui suit un sous-groupe parabolique minimal $P_\emptyset = M_\emptyset N_\emptyset$ de G. On adopte les notations du chapitre V, en particulier

$$W_G = W(A_\emptyset) = N_G(A_\emptyset)/Z_G(A_\emptyset) = N_G(A_\emptyset)/M_\emptyset.$$

VI.5.1 Le lemme géométrique

Dans cette section, nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème. *Soient $P = MN$ et $Q = LU$ des sous-groupes paraboliques de G et soit (τ, E) une représentation lisse de $\mathcal{M}(M)$. La représentation*

$$r_Q^G\, i_P^G(\tau, E)$$

de L admet une filtration dont les composantes du gradué associé sont isomorphes à

$$(i^L_{L\cap w^{-1}\cdot P}\circ\ w\circ r^M_{w\cdot Q\cap M})(\tau,E),$$

où w décrit la partie $\mathcal{W}^{Q,P}$ de G définie en V.4.7.

Remarques. 1. L'ensemble $\mathcal{W}^{Q,P}$ est un système de représentants dans G des doubles classes $P\backslash G/Q$. D'après les propriétés de $\mathcal{W}^{Q,P}$ établies en V.4.7, $L\cap w^{-1}\cdot P$ est un sous-groupe parabolique de L de décomposition de Levi

$$L\cap w^{-1}\cdot P=(L\cap w^{-1}\cdot M)(L\cap w^{-1}\cdot N),$$

et $w\cdot Q\cap M$ est un sous-groupe parabolique de M de décomposition de Levi

$$w\cdot Q\cap M=(w\cdot L\cap M)(w\cdot U\cap M).$$

— 2. On a noté simplement w le foncteur d'oubli

$$\sigma\mapsto {}^w\sigma,\quad \mathcal{M}(w\cdot L\ \cap M)\to\mathcal{M}(L\cap w^{-1}\cdot M)$$

associé à l'isomorphisme $L\cap w^{-1}\cdot M\to w\cdot L\cap M$ induit par la conjugaison par w (*cf.* l'exemple III.2.1). Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que de nombreux auteurs préfèrent le noter w^{-1}.

Nous allons d'abord formuler ce résultat de manière plus précise. Considérons l'espace quotient t.d. $X=P\backslash G$ muni de l'action de G par translation à droite :

$$G\times X\to X,\quad (g,Ph)\mapsto Phg^{-1}.$$

Le sous-groupe parabolique Q agit sur X avec un nombre fini d'orbites $Z_1,\dots,Z_k$ (corollaire V.4.3). D'après la proposition II.3.3, ces orbites sont toutes localement fermées dans X. De plus, on peut supposer que cette numérotation des orbites est telle que les ensembles

$$Y_1=Z_1,\ Y_2=Z_1\cup Z_2,\ \dots,Y_k=Z_1\cup Z_2\cup\ldots\cup Z_k=X$$

sont des ouverts de X. On supposera que tel est le cas dans la suite.

Fixons une Q-orbite Z dans X, et un point Pz de cette orbite, avec $z\in\mathcal{W}^{Q,P}$. Notons pour abréger ι l'automorphisme $\mathrm{Int}(z)$ de G. Posons

$$M'=M\cap\iota(L),\quad L'=L\cap\iota^{-1}(M),\quad N'=M\cap\iota(U),\quad U'=L\cap\iota^{-1}(N).$$

Alors $P'=M'N'$ est un sous-groupe parabolique de M, $Q'=L'U'$ est un sous-groupe parabolique de L et $M'=\iota(L')$. Posons aussi $U''=\iota^{-1}(N')$, de sorte que $Q''=L'U''$ soit un sous-groupe parabolique de $\iota^{-1}(M)$. Nous avons à notre disposition les foncteurs

$$r^M_{P'}:\mathcal{M}(M)\to\mathcal{M}(M'),\quad i^L_{Q'}:\mathcal{M}(L')\to\mathcal{M}(L).$$

Définissons alors le foncteur Φ_Z par

$$\Phi_Z:\mathcal{M}(M)\to\mathcal{M}(L),\quad \Phi_Z=i^L_{Q'}\circ\iota\circ r^M_{P'}.$$

Nous notons ici encore ι le foncteur d'oubli associé à l'isomorphisme $\iota:\ L'\to M'$. c'est-à-dire le foncteur qui a toute représentation (σ,E) de $\mathcal{M}(M')$ associe la représentation $({}^\iota\sigma,E)$ de L' avec les notations de l'exemple III.2.1.

On peut maintenant reformuler le théorème de la manière (plus précise) suivante. Les notations sont les mêmes que ci-dessus.

Théorème. *(reformulation) Le foncteur*

$$F = r_Q^G\, i_P^G : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(L)$$

admet une filtration par des sous-foncteurs

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_k = F$$

telle que $F_i/F_{i-1} \simeq \Phi_{Z_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

Précisons qu'un sous-foncteur d'un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ à valeurs dans une catégorie de modules $\mathcal{D}$ est un foncteur G de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ tel que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $G(X)$ est un sous-module de $F(X)$.

Démonstration. Soit Y une partie ouverte Q-invariante de X. Pour toute représentation lisse (σ, E) de M, réalisons comme en III.2.2 l'espace de la représentation induite $i_P^G(\sigma, E)$ comme un espace de fonctions sur G, et considérons le sous-espace $i_Y(E)$ de $i_P^G(E)$ constitué des fonctions f à support dans PY où

$$PY = \{g \in G \,|\, Pg \in Y\}.$$

Remarquons au passage que PY est une partie ouverte de G, en tant qu'image réciproque d'une partie ouverte par une application continue, en l'occurrence la projection canonique de G dans X. Il est clair que $i_Y(E)$ est stable sous l'action de Q obtenue sur $i_P^G(E)$ par restriction de l'action de G. On peut donc appliquer à $i_Y(E)$ le foncteur $r_U = j_U \otimes \delta_U^{1/2}$, et former

$$F_Y(E) = r_U(i_Y(E)).$$

Comme le foncteur r_U est exact, $r_U(i_Y(E))$ est une sous-représentation de $F(E) = r_U(i_P^G(E))$. Autrement dit, F_Y est un sous-foncteur de F.

Proposition. *Soient Y et Y' deux parties ouvertes Q-invariantes de X. On a alors, avec les notations évidentes*

$$F_{Y\cap Y'} = F_Y \cap F_{Y'}, \quad F_{Y\cup Y'} = F_Y + F_{Y'}, \quad F_\emptyset = 0, \quad F_X = F.$$

Démonstration. Comme d'après la proposition VI.1.2, le foncteur r_U est exact, il suffit de montrer que

$$i_{Y\cap Y'} = i_Y \cap i_{Y'}, \quad i_{Y\cup Y'} = i_Y + i_{Y'}, \quad i_\emptyset = 0, \quad i_X = i_P^G.$$

Les deux dernières égalités sont triviales. De plus, on a

$$P(Y \cup Y') = PY \cup PY', \quad P(Y \cap Y') = PY \cap PY'.$$

Ceci montre que $i_{Y\cap Y'} = i_Y \cap i_{Y'}$ et $i_Y + i_{Y'} \subset i_{Y\cup Y'}$. Il reste à montrer que $i_{Y\cup Y'} \subset i_Y + i_{Y'}$. Soit f dans $i_{Y\cup Y'}$. Soit W une partie compacte de G tel que $\operatorname{Supp} f \subset PW$, et soit $\bar{W}$ l'image de W dans $P\backslash G$. On a donc $\bar{W} \subset Y \cup Y'$. Or il existe deux fonctions g_1 et g_2 respectivement dans $\mathcal{C}^\infty(Y)$ et $\mathcal{C}^\infty(Y')$ telles que $g_1 + g_2 \equiv 1$ sur $\bar{W}$. On a alors $f = f(g_1 \circ p) + f(g_2 \circ p)$, avec $f(g_1 \circ p) \in i_Y$ et $f(g_2 \circ p) \in i_{Y'}$. Construisons ces fonctions g_1 et g_2. Recouvrons $\bar{W}$ par des ouverts $(U_x)_{x\in\bar{W}}$ tel que $x \in U_x \subset Y$ si $x \in Y$ et $x \in U_x \subset Y'$ si $x \in Y'$. Extrayons de ce recouvrement de $\bar{W}$ par les $(U_x)_{x\in\bar{W}}$, un recouvrement fini subordonné par des ouverts compacts disjoints (U_i) (*cf.* lemme II.1.1). Prenons pour g_1 la somme des fonctions caractéristiques des ouverts $U_i \subset Y$ et pour g_2 la somme des fonctions caractéristiques des ouverts $U_i \subset Y'$ moins la somme des fonctions caractéristiques des ouverts $U_i \subset Y \cap Y'$. Ces fonctions ont alors les propriétés voulues. $\square$

Grâce à cette proposition, nous pouvons étendre la définition du foncteur F_Y au cas où Y est seulement une partie localement fermée Q-invariante de X de la manière suivante : écrivons

$$Y = T \cap V$$

où T est fermé dans X et V est ouvert. En remplaçant T par $\bigcap_{g \in Q} g \cdot T$ et V par $\bigcup_{g \in Q} g \cdot V$, on voit que l'on peut supposer T et V invariants sous l'action de Q. Posons $Y_1 = (X \setminus T) \cap V$. On a $Y \cap Y_1 = \emptyset$, $Y \cup Y_1$ est ouvert dans X, et Y_1 est Q-invariante. Posons alors $F_Y = F_{Y \cup Y_1}/F_{Y_1}$. La proposition montre que les foncteurs ainsi construits pour différents choix de Y_1 sont naturellement isomorphes.

D'autre part, le foncteur F_Y peut-être décrit comme la composition

$$F_Y = r_U \circ i_Y = r_U \circ \Gamma_c \circ \mathcal{R}^{X,G}_{Y,Q} \circ \mathcal{I}^G_P \circ \delta_N^{-1/2} \circ \mathcal{F}^M_P \tag{VI.5.1.1}$$

où

$$\mathcal{I}^G_P : \mathcal{M}(P) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{X,G} - \mathcal{M}od,$$
$$\mathcal{R}^{X,G}_{Y,Q} : \mathcal{C}^\infty_{X,G} - \mathcal{M}od \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{Y,Q} - \mathcal{M}od$$
$$\Gamma_c : \mathcal{C}^\infty_{Y,Q} - \mathcal{M}od \longrightarrow \mathcal{M}(Q)$$

sont les foncteurs définis en III.3.2. En effet, que F_Y soit égal à cette composition est clair si Y est une partie ouverte Q-invariante de X, et le cas d'une partie localement fermée découle alors de la proposition ci-dessus et de la proposition II.2.

Avec les notations du théorème, nous voyons maintenant que le foncteur F admet une filtration

$$0 = F_0 \subset F_{Y_1} \subset F_{Y_2} \subset \ldots \subset F_{Y_k} = F$$

et que pour tout $i = 1, \ldots, k$, $F_i/F_{i-1} = F_{Z_i}$. Il s'agit donc de montrer que pour toute Q-orbite Z dans X, on a un isomorphisme naturel $\Phi_Z \simeq F_Z$.

Posons $\hat{P} = \iota^{-1}(P)$, $\hat{M} = \iota^{-1}(M)$, $\hat{N} = \iota^{-1}(N)$. Exprimons les foncteurs Φ_Z et F_Z en termes de foncteurs similaires définis en remplaçant P, M, N par $\hat{P}$, $\hat{M}$, $\hat{N}$. L'automorphisme ι de G induit des équivalences de catégories (que l'on notera toutes encore ι)

$$\iota : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G), \quad \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(\hat{M}), \quad \mathcal{M}(M') \to \mathcal{M}(L').$$

Il est clair que l'on a

$$\iota^{-1} \circ r^{\hat{M}}_{Q''} \circ \iota = r^M_{P'},$$

d'où,

$$\Phi_Z = i^L_{Q'} \circ \iota \circ r^M_{P'} = i^L_{Q'} \circ \iota \circ \iota^{-1} \circ r^{\hat{M}}_{Q''} \circ \iota = i^L_{Q'} \circ r^{\hat{M}}_{Q''} \circ \iota.$$

Posons $\hat{Z} = \hat{P}Q \in \hat{P}\backslash G/Q$ et définissons le foncteur $\Phi_{\hat{Z}} = i^L_{Q'} \circ r^{\hat{M}}_{Q''} : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(L)$. On a alors

$$\Phi_Z = \Phi_{\hat{Z}} \circ \iota.$$

De même, ι induit un homéomorphisme

$$\iota : \hat{P}\backslash G \to P\backslash G, \quad \hat{P}g \mapsto P \cdot zg.$$

Appelons encore ι le foncteur d'image inverse

$$\iota : \mathcal{C}^\infty_{P\backslash G} - \mathcal{M}od \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{\hat{P}\backslash G} - \mathcal{M}od$$

pour cet homéomorphisme. Remarquons que l'orbite PzQ a pour image réciproque la partie $\hat{P}Q$ de $\hat{P}\backslash G$.

Il est clair qu'avec ces notations, on a $\iota \circ \mathcal{I}^G_P \circ \iota^{-1} = \mathcal{I}^G_{\hat{P}}$, d'où

$$F_Z = r_U \circ \Gamma_c \circ \mathcal{R}^{X,G}_{Z,Q} \circ \iota^{-1} \circ \mathcal{I}^G_{\hat{P}} \circ \iota \circ \delta_N^{-1/2} \circ \mathcal{F}^M_P.$$

D'autre part, on a aussi évidemment $\iota \circ \mathcal{F}^M_P = \mathcal{F}^{\hat{M}}_{\hat{P}} \circ \iota$ et $\iota \circ \delta_N^{-1/2} = \delta_{\hat{N}}^{-1/2} \circ \iota$ d'où finalement :

$$F_Z = r_U \circ \Gamma_c \circ \mathcal{R}^{X,G}_{Z,Q} \circ \iota^{-1} \circ \mathcal{I}^G_{\hat{P}} \circ \delta_{\hat{N}}^{-1/2} \circ \mathcal{F}^{\hat{M}}_{\hat{P}} \circ \iota.$$

Notons $F_{\hat{Z}} = r_U \circ \Gamma_c \circ \mathcal{R}^{X,G}_{Z,Q} \circ \iota^{-1} \circ \mathcal{I}^G_{\hat{P}} \circ \delta_{\hat{N}}^{-1/2} \circ \mathcal{F}^{\hat{M}}_{\hat{P}}$, de sorte que $F_Z = F_{\hat{Z}} \circ \iota$. Posons aussi $\mathcal{I}_{\hat{Z}} = \Gamma_c \circ \mathcal{R}^{X,G}_{Z,Q} \circ \iota^{-1} \circ \mathcal{I}^G_{\hat{P}}$, de sorte que $F_{\hat{Z}} = r_U \circ \mathcal{I}_{\hat{Z}} \circ \delta_{\hat{N}}^{-1/2} \circ \mathcal{F}^{\hat{M}}_{\hat{P}}$. L'on s'est ainsi ramené à montrer que $F_{\hat{Z}}$ est naturellement isomorphe à $\Phi_{\hat{Z}}$. Pour cela, nous allons analyser le diagramme de foncteurs suivant.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & G \arrow[drr, dotted, "\mathcal{F}_Q^G"] & & & & \\
 & & \hat{P} = \hat{M}\hat{N} \arrow[urr, dotted, "\mathrm{Ind}_{\hat{P}}^G"] \arrow[rrrr, "\mathcal{I}_{\hat{Z}}"] \arrow[drr, "\mathcal{F}_{\hat{P}\cap Q}^{\hat{P}}"] & & & & Q = LU \arrow[drr, "r_U"] & & \\
\hat{M} \arrow[urr, "\mathcal{F}_{\hat{P}}^{\hat{M}} \otimes \delta_{\hat{N}}^{-1/2}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}_{\hat{M}\cap Q}^{\hat{M}}"'] & & & & \hat{P}\cap Q \arrow[urr, "\mathrm{ind}_{\hat{P}\cap Q}^{Q}"] \arrow[dr, "r_{\hat{P}\cap U}"] & & & & L \\
 & \hat{M}\cap Q \arrow[rr, "\epsilon_1"] & & \hat{M}\cap Q \arrow[ur, "\mathcal{F}_{\hat{P}\cap Q}^{\hat{M}\cap Q} \otimes \delta_{\hat{N}\cap Q}^{-1/2}"] \arrow[dr, "r_{\hat{M}\cap U}"'] & & L\cap\hat{P} \arrow[rr, "\epsilon_2"] & & L\cap\hat{P} \arrow[ur, "\mathrm{Ind}_{L\cap\hat{P}}^{L}"'] & \\
 & & & & \hat{M}\cap L \arrow[ur, "\mathcal{F}_{L\cap\hat{P}}^{\hat{M}\cap L} \otimes \delta_{\hat{N}\cap L}^{-1/2}"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

Les catégories de départ et d'arrivée des foncteurs sont représentées par les sommets de ce graphe. Le sommet indicé par un groupe H représente la catégorie des représentations lisses $\mathcal{M}(H)$. Les flèches représentent les foncteurs. Celles en pointillés n'interviennent pas directement dans ce qui suit et doivent être considérées comme décoratives. Le foncteur $F_{\hat{Z}}$ est obtenu en suivant le chemin « du haut »menant de M à L, et le foncteur $\Phi_{\hat{Z}}$ est obtenu en suivant le chemin « du bas », à ceci près que nous avons introduit une torsion par les caractères $\epsilon_1 = \delta_{\hat{N}}^{-1/2}\delta_{\hat{N}\cap Q}^{1/2}$ de $\hat{M}\cap Q$ et $\epsilon_2 = \delta_U^{-1/2}\delta_{U\cap\hat{P}}^{1/2}$ de $\hat{P}\cap L$. Pour montrer que ces foncteurs sont naturellement isomorphes, nous allons montrer que chaque petit sous-diagramme à quatre (ou trois pour celui du haut) sommets est commutatif à isomorphisme naturel près, puis que les effets de ϵ_1 et ϵ_2 se compensent. Ceci est évidemment suffisant. Nous expliquerons les notations non encore introduites de ce diagramme au cours de la démonstration.

Commençons par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & \hat{P}=\hat{M}\hat{N} \arrow[drr, "\mathcal{F}^{\hat{P}}_{\hat{P}\cap Q}"] & & \\
\hat{M} \arrow[urr, "\mathcal{F}^{\hat{M}}_{\hat{P}}\otimes\delta_{\hat{N}}^{-1/2}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}^{\hat{M}}_{\hat{M}\cap Q}"'] & & & & \hat{P}\cap Q \\
 & \hat{M}\cap Q \arrow[rr, "\epsilon_1"] & & \hat{M}\cap Q \arrow[ur, "\mathcal{F}^{\hat{M}\cap Q}_{\hat{P}\cap Q}\otimes\delta_{\hat{N}\cap Q}^{-1/2}"] &
\end{tikzcd}$$

On a, grâce aux propriétés des représentants choisis (*cf.* V.4.7),

$$\hat{P}\cap Q = (\hat{M}\cap L)(\hat{N}\cap L)(\hat{M}\cap U)(\hat{N}\cap U).$$

Comme les groupes $\hat{N}$, U sont réunions de leur sous-groupes ouverts compacts, tous les caractères modulaires intervenant dans ce diagramme sont triviaux sur ces groupes. Il suffit donc de voir comment agit un élément l de $\hat{M}\cap L$ sur les représentations obtenues à partir d'une représentation lisse (σ, E) de $\hat{M}$, d'une part en suivant le chemin du haut, et d'autre part celui du bas. Pour la première, l agit par $\delta_{\hat{N}}^{-1/2}(l)\sigma(l)$ et pour la seconde par $\epsilon_1(l)\delta_{\hat{N}\cap Q}^{-1/2}(l)\sigma(l)$. Or

$$\epsilon_1\delta_{\hat{N}\cap Q}^{-1/2} = \delta_{\hat{N}}^{-1/2}\delta_{\hat{N}\cap Q}^{1/2}\delta_{\hat{N}\cap Q}^{-1/2} = \delta_{\hat{N}}^{-1/2},$$

ce qui prouve la commutativité du diagramme.

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{P}\cap Q \arrow[dr, "r_{\hat{P}\cap U}"] & \\
\hat{M}\cap Q \arrow[ur, "\mathcal{F}^{\hat{M}\cap Q}_{\hat{P}\cap Q}\otimes\delta_{\hat{N}\cap Q}^{-1/2}"] \arrow[dr, "r_{\hat{M}\cap U}"'] & & L\cap\hat{P} \\
 & \hat{M}\cap L \arrow[ur, "\mathcal{F}^{\hat{M}\cap L}_{L\cap\hat{P}}\otimes\delta_{\hat{N}\cap L}^{-1/2}"'] &
\end{tikzcd}$$

Le foncteur $r_{\hat{P}\cap U}$ est le foncteur $j_{\hat{P}\cap U}$ tordu par le caractère $\delta_{\hat{P}\cap U}^{1/2}$ et le foncteur $r_{\hat{M}\cap U}$ est le foncteur $j_{\hat{M}\cap U}$ tordu par le caractère $\delta_{\hat{M}\cap U}^{1/2}$. Soit (σ, E) une représentation lisse de $\hat{M}\cap Q$.

Vérifions tout d'abord que les représentations π_1 et π_2 de $L \cap \hat{P}$ obtenues respectivement en suivant le chemin du haut et celui du bas dans le diagramme agissent bien dans le même espace. L'espace de π_1 est E quotienté par l'espace engendré par les vecteurs de la forme

$$\sigma(u)\delta_{\hat{N}\cap Q}^{-1/2}(u) \cdot v - v,\ (v \in E),\ (u \in \hat{P} \cap U).$$

Mais comme $\hat{P} \cap U = (\hat{M} \cap U)(\hat{N} \cap U)$ et que $\hat{N} \cap U$ agit trivialement, cet espace est en fait l'espace engendré par les vecteurs de la forme

$$\sigma(u)\delta_{\hat{N}\cap Q}^{-1/2}(u) \cdot v - v,\ (v \in E),\ (u \in \hat{M} \cap U).$$

D'autre part, $\hat{M} \cap U$ étant réunion de ses sous-groupe ouverts compacts, $\delta_{\hat{N}\cap Q}^{-1/2}(u) = 1$ pour tout $u \in \hat{M} \cap U$. Finalement, l'espace de π_1 est le quotient de E par l'espace engendré par les vecteurs de la forme

$$\sigma(u) \cdot v - v,\ (v \in E),\ (u \in \hat{M} \cap U),$$

et ceci est aussi l'espace de π_2. Il s'agit maintenant de calculer dans les deux cas le caractère tordant l'action induite par σ sur ce quotient. Pour π_1, c'est $\delta_{\hat{N}\cap Q}^{-1/2}\delta_{\hat{P}\cap U}^{1/2}$ et pour π_2 c'est $\delta_{\hat{N}\cap L}^{-1/2}\delta_{\hat{M}\cap U}^{1/2}$. Comme $\delta_{\hat{N}\cap Q} = \delta_{\hat{N}\cap U}\delta_{\hat{N}\cap L}$ et $\delta_{\hat{P}\cap U}^{1/2} = \delta_{\hat{M}\cap U}^{1/2}\delta_{\hat{N}\cap U}^{1/2}$, on voit que l'on a bien $\pi_1 = \pi_2$.

Passons maintenant à

(VI.5.1.2)

$$\begin{tikzcd}
 & Q = LU \arrow[drr, "r_U"] & & \\
\hat{P} \cap Q \arrow[ur, "\mathrm{ind}_{\hat{P}\cap Q}^{Q}"] \arrow[dr, "r_{\hat{P}\cap U}"] & & & L \\
 & L \cap \hat{P} \arrow[r, "\epsilon_2"] & L \cap \hat{P} \arrow[ur, "\mathrm{Ind}_{L\cap\hat{P}}^{L}"'] &
\end{tikzcd}$$

Nous allons nous placer dans un contexte un peu plus général, qui par spécialisation entraînera la commutativité d'une version sans les twists du diagramme ci-dessus. On adopte localement de nouvelles notations :

Soient J un groupe t.d., H un sous-groupe fermé et N un sous-groupe fermé distingué réunion de ses sous-groupes ouverts compacts (donc en particulier N est unimodulaire) et supposons que HN soit fermé. Soit (σ, E) une représentation lisse de H. Considérons la représentation

$$(j_{H\cap N}, E_{H\cap N}) \quad \text{de} \quad L' = H/H \cap N \simeq HN/N \subset J/N.$$

Nous affirmons qu'on a alors un isomorphisme naturel

$$j_N \circ \mathrm{ind}_H^J(\sigma, E) \simeq \mathrm{ind}_{HN/N}^{J/N}(j_{H\cap N}(\sigma, E) \otimes \delta^{-1}), \tag{VI.5.1.3}$$

où δ est le caractère modulaire de H sur $H \cap N \backslash N$.

Nous allons maintenant prouver (VI.5.1.3) en donnant la forme explicite de l'isomorphisme naturel.

Pour tout $v \in E$, notons $\bar{v}$ son image dans $j_{H\cap N}(E)$. Comme toute fonction $f \in \mathrm{ind}_H^J(E)$ est à support compact modulo H, pour tout $j \in J$, la fonction $(r(j)\cdot f)_{|N}$ est à support compact modulo $H \cap N$. De plus, quels que soient $h \in H \cap N$, $n \in N$ et $j \in J$, on a

$$\overline{f(hnj)} = \overline{\sigma(h)\cdot f(nj)} = \overline{f(nj)},$$

et donc $\overline{(r(j)\cdot f)_{|N}} \in \mathcal{D}(N, H\cap N, \delta_{H\cap N\backslash N} = 1)$. Ainsi, ayant fixé une mesure invariante sur $H\cap N\backslash N$ au sens de la section II.3.9 l'intégrale

$$\bar{f}(j) := \int_{H\cap N\backslash N} \overline{f(nj)}\, d\nu_{H\cap N\backslash N}(n)$$

est bien définie.

On a pour tout $u \in N$, pour tout $j \in J$, en utilisant l'invariance à droite de la mesure $\nu_{H\cap N\backslash N}$,

$$\bar{f}(uj) = \int_{H\cap N\backslash N} \overline{f(nuj)}\, d\nu_{H\cap N\backslash N}(n) = \int_{H\cap N\backslash N} \overline{f(nj)}\, d\nu_{H\cap N\backslash N}(n) = \bar{f}(j).$$

On peut ainsi considérer $\bar{f}$ comme une fonction sur $N\backslash J = J/N$ (N est distingué).

Pour tout $h \in H$, pour tout $j \in J$,

$$\begin{aligned}\bar{f}(hj) &= \int_{H\cap N\backslash N} \overline{f(nhj)}\, d\nu_{H\cap N\backslash N}(n) = \int_{H\cap N\backslash N} \overline{f(h(h^{-1}nh)j)}\, d\nu_{H\cap N\backslash N}(n)\\ &= \int_{H\cap N\backslash N} \overline{\delta^{-1}(h)\sigma(h)\cdot f(nj)}\, d\nu_{H\cap N\backslash N}(n) = \delta^{-1}(h)\sigma_{H\cap N}(h)\cdot \bar{f}(j).\end{aligned}$$

La fonction $\bar{f}$ est clairement à support compact modulo HN dans J. Il découle de ce qui précède que $f \mapsto \bar{f}$ définit une application de $\mathrm{ind}_H^J(\sigma, E)$ dans $\mathrm{ind}_{HN/N}^{J/N}(j_{H\cap N}(\sigma,E)\otimes\delta^{-1})$. C'est clairement un J-morphisme, et il se factorise en un J/N-morphisme

(VI.5.1.4) $$j_N(\mathrm{ind}_H^J(\sigma,E)) \to \mathrm{ind}_{HN/N}^{J/N}(j_{H\cap N}(\sigma,E)\otimes\delta^{-1}) \quad j_N(f)\mapsto \bar{f}.$$

Montrons maintenant la surjectivité de $f \mapsto \bar{f}$. Rappelons que

$$\mathrm{ind}_{HN/N}^{J/N}(j_{H\cap N}(E)\otimes\delta^{-1})$$

est l'ensemble des fonctions

$$\phi :\ J/N \to j_{H\cap N}(E)$$

lisses à support compact modulo HN/N dans J/N telles que, si $\bar{x}$ désigne l'image de $x \in J$ dans J/N,

$$\phi(\bar{h}\bar{n}\bar{j}) = \delta^{-1}(h)\sigma_{H\cap N}(\bar{h}\bar{n})\phi(\bar{j}), \quad (\bar{j}\in J/N), (\bar{h}\bar{n} \in HN/N)$$

que l'on peut donc identifier à l'ensemble des fonctions

$$\phi :\ J \to j_{H\cap N}(E)$$

lisses à support compact modulo HN dans J telles que

$$\phi(hnj) = \delta^{-1}(h)\sigma_{H\cap N}(\bar{h})\phi(j), \quad (j\in J), (h\in H), (n \in N).$$

De telles fonctions sont obtenues de la manière suivante : fixons un élément v de E et un élément x de J. Alors il existe un sous-groupe ouvert compact K_0 de J tel que la formule

$$\phi(hnxk) = \delta^{-1}(h)\sigma_{H\cap N}(h)\cdot\bar{v}, \quad (h \in H), (n \in N), (k \in K_0) \tag{VI.5.1.5}$$

définisse bien une fonction ϕ de $\mathrm{ind}_{HN/N}^{J/N}(j_{H\cap N}(E)\otimes\delta^{-1})$ à support dans l'ouvert $HNxK_0$. Pour cela, il faut s'assurer que si

$$h_1n_1xk_1 = h_2n_2xk_2, \quad (h_1, h_2 \in H), (n_1, n_2 \in N), (k_1, k_2 \in K_0) \tag{VI.5.1.6}$$

alors

$$\delta^{-1}(h_1)\sigma_{H\cap N}(h_1)\cdot\bar{v} = \delta^{-1}(h_2)\sigma_{H\cap N}(h_2)\cdot\bar{v} \tag{VI.5.1.7}$$

Or (VI.5.1.6) équivaut à

$$\begin{aligned} h_2^{-1}h_1 &= n_2xk_2k_1^{-1}x^{-1}n_1^{-1} \\ &= xk_2k_1^{-1}x^{-1}((xk_2k_1^{-1}x^{-1})^{-1}n_2(xk_2k_1^{-1}x^{-1}))n_1^{-1}. \end{aligned} \tag{VI.5.1.8}$$

Donc $h = h_2^{-1}h_1$ s'écrit $h = xkx^{-1}n$ pour un certain k in K_0 et un certain $n \in N$.

Comme v est fixé par un certain sous-groupe ouvert compact de H, il existe un sous-groupe ouvert K de J tel que $xKx^{-1} \cap H$ fixe v. Projetons $xKx^{-1} \cap H$ dans $H/H \cap N$. L'image inverse de cette partie dans H est $(xKx^{-1} \cap H)(H \cap N)$. Prenons alors $K_0 \subset K$ de sorte que

$$(xK_0x^{-1})N \cap H \subset (xKx^{-1} \cap H)(H \cap N).$$

Alors d'après (VI.5.1.8),

$$h = h_2^{-1}h_1 = xkx^{-1}n \in (xKx^{-1} \cap H)(H \cap N)$$

vérifie

$$\sigma_{H\cap N}(h)\cdot\bar{v} = \bar{v}.$$

D'autre part le caractère modulaire δ est trivial sur les sous-groupes ouvert compacts de H et sur $H \cap N$, donc $\delta(h) = 1$. Ceci montre (VI.5.1.7) pour un tel choix de K_0.

L'espace $\mathrm{ind}_{HN/N}^{J/N}(j_{H\cap N}(E)\otimes\delta^{-1})$ est engendré par les fonctions ϕ construites de la sorte. Il suffit donc de trouver $f \in \mathrm{ind}_H^J(E)$ telle que $\bar{f} = \phi$ pour ϕ, x, v, K_0 comme en (VI.5.1.5). Prenons f à support dans HxK_0 telle que

$$f(hxk) = \sigma(h)\cdot v, \quad (h \in H), (k \in K_0).$$

Ceci est bien défini, car si $h_1xk_1 = h_2xk_2$,

$$h_2^{-1}h_1 = xk_2k_1^{-1}x^{-1} \in xK_0x^{-1} \cap H \subset xKx^{-1} \cap H$$

fixe v. Il est alors clair que

$$\bar{f}(j) = \int_{H\cap N\backslash N} \overline{f(nj)}\, d\nu_{H\cap N\backslash N}(n) \tag{VI.5.1.9}$$

n'est non nulle que si $j \in NHxK_0 = HNxK_0$. Il suffit donc de vérifier que $\bar{f}(x) = \phi(x) = \bar{v}$. Or

$$\bar{f}(x) = \int_{H\cap N\backslash N} \overline{f(nx)}\, d\nu_{H\cap N\backslash N}(n) \tag{VI.5.1.10}$$

et si $nx = hxk$, avec $h \in H$, $k \in K_0$, on a

$$h = nxk^{-1}x^{-1} \in (xK_0x^{-1})N \cap H \subset (xKx^{-1} \cap H)(N \cap H)$$

et ainsi $\overline{f(nx)} = \overline{f(hxk)} = \overline{\sigma(h) \cdot v} = \bar{v}$, donc

$$\bar{f}(x) = c\,\bar{v},$$

où c est la mesure d'un certain ouvert compact dans $H \cap N\backslash N$ pour la mesure $\nu_{H\cap N\backslash N}$. On trouve donc que $\bar{f}$ est égal à un multiple scalaire non nul de ϕ, ce qui suffit évidemment.

Montrons maintenant l'injectivité de (VI.5.1.4). Pour cela, montrons tout d'abord l'assertion suivante :

- Si N_0 est un sous-groupe compact de N et si K est un sous-groupe compact de J, alors il existe un sous-groupe compact N_1 de N contenant N_0 normalisé par K.

En effet, l'ensemble $\bigcup_{k\in K} kN_0k^{-1}$ est compact puisque K et N_0 le sont, il est donc contenu dans un sous-groupe compact ouvert N_2 de N par hypothèse sur N. Le groupe $N_1 = \bigcap_{k\in K} kN_2k^{-1}$ contient N_0, et est donc ouvert. Il est aussi clairement compact et stable par conjugaison sous K.

D'après la proposition III.2.9, un élément $f \in \mathrm{ind}_H^J(E)$ est d'image nulle dans $j_N(\mathrm{ind}_H^J(\sigma, E))$ si et seulement s'il existe un sous-groupe ouvert compact N_0 de N tel que f soit annulé par e_{N_0}, c'est-à-dire

(VI.5.1.11) $$\int_{N_0} f(jn)\, dn = 0 \quad (j \in J).$$

On en déduit que $f \in \mathrm{ind}_H^J(E)$ est d'image nulle dans $j_N(\mathrm{ind}_H^J(\sigma, E))$ si et seulement si pour tout $j \in J$, il existe un sous-groupe ouvert compact N_j de N tel que

(VI.5.1.12) $$\int_{N_j} f(nj)\, dn = 0.$$

En effet, cette condition est nécessaire, puisque $N_j = jN_0j^{-1}$ convient. Montrons qu'elle est suffisante. Si N_j vérifie (VI.5.1.12), et si K est un sous-groupe ouvert compact de J tel que K fixe f, alors d'après l'assertion démontrée ci-dessus, pour tout $j \in J$, on peut trouver un sous-groupe ouvert compact N'_j de N contenant N_j et tel que K normalise $j^{-1}N'_jj$. Comme $e_{N'_j}e_{N_j} = e_{N'_j}$, on a, pour tout $k \in K$,

$$\begin{aligned}
0 = e_{N'_j}e_{N_j} \cdot f = e_{N'_j} \cdot f &= \int_{N'_j} f(nj)\, dn = \int_{j^{-1}N'_jj} f((jnj^{-1})j)\, dn \\
&= \int_{j^{-1}N'_jj} f((jnk)\, dn = \int_{j^{-1}N'_jj} f((jk(k^{-1}nk))\, dn \\
&= \int_{j^{-1}N'_jj} f(jkn)\, dn.
\end{aligned}$$

Comme f est à support compact modulo H, il existe une partie compacte X de J telle que $\mathrm{Supp}\,(f) \in HX$, et X est recouvert par un nombre fini de parties de la forme j_lK, $j_l \in J$, $l = 1, \ldots, m$. D'après l'hypothèse sur N, il existe un sous-groupe ouvert compact N_0 de N tel que

$$\bigcap_{j=1,\ldots,l} j_l^{-1}N'_{j_l}j_l \subset N_0.$$

On a alors
$$\int_{N_0} f(xn)\,dn = 0 \quad (x \in X).$$
Si l'on pose
$$f_{N_0}(j) = (e_{N_0}\cdot f)(j) = \int_{N_0} f(xn)\,dn \quad (j \in J),$$
on voit que f_{N_0} est à support dans HXN_0. Mais par construction de N_0, pour tout $x \in X$, tout $h \in H$ et tout $n_1 \in N_0$,
$$\int_{N_0} f(hxn_1n)\,dn = \sigma(h)\cdot \int_{N_0} f(xn_1n)\,dn = 0$$
et donc $f_{N_0} = 0$. Ainsi (VI.5.1.12) implique (VI.5.1.11).

Supposons maintenant $\bar{f} = 0$, en particulier $\bar{f}(1) = 0$, c'est-à-dire
$$\int_{H\cap N\backslash N} \overline{f(n)}\,d\nu_{H\cap N\backslash N}(n) = 0.$$
Comme f est à support compact modulo H, $f_{|N}$ est à support compact modulo $H\cap N$. Choisissons maintenant un sous-groupe ouvert compact N_0 de N suffisamment grand, de sorte que le support de $f_{|N}$ soit inclus dans $(H \cap N)N_0$. On a alors
$$\begin{aligned}
\int_{N_0} \overline{f(n)}\,dn &= \int_{N_0\cap H\backslash N_0}\int_{N_0\cap H} \overline{f(n_1n_2)}\,dn_1\,dn_2\\
&= \int_{N_0\cap H\backslash N_0}\int_{N_0\cap H} \overline{f(n_2)}\,dn_1\,dn_2\\
&= \mathrm{Vol}(N_0\cap H)\int_{N_0\cap H\backslash N_0} \overline{f(n_2)}\,d\nu_{N_0\cap H\backslash N_0}(n_2)\\
&= \mathrm{Vol}(N_0\cap H)\int_{H\cap N\backslash N} \overline{f(n)}\,d\nu_{H\cap N\backslash N}(n) = 0
\end{aligned}$$
On a ainsi obtenu que $\int_{N_0} f(n)\,dn$ est d'image nulle dans $j_{H\cap N}(E)$, et donc il existe un sous-groupe ouvert compact N_1 de $H \cap N$ tel que
$$e_{N_1}\cdot \int_{N_0} f(n)\,dn = 0.$$
Prenons alors un sous-groupe ouvert compact N_0' dans N contenant N_1N_0. On a $\int_{N_0'} f(n)\,dn = 0$.

Cet argument s'applique aussi à $r(j)\cdot f$ pour tout $j \in J$, ce qui montre que pour tout $j \in J$, il existe un sous-groupe ouvert compact N_j' de N tel que
$$\int_{N_j'} f(nj)\,dn = 0.$$
La condition (VI.5.1.12) est donc vérifiée, et ainsi $j_N(f) = 0$, ce qui montre l'injectivité de (VI.5.1.4).

Revenons au diagramme (VI.5.1.2) en appliquant ce qui précède à $J = Q$, $H = \hat{P}\cap Q$, $N = U$, $J/N = Q/U \simeq L$, $L' = H/H\cap N \simeq HN/N = \hat{P}\cap Q/\hat{P}\cap U \simeq \hat{P}\cap L$. Les effets des caractères modulaires se compensent car $\delta_{\hat{P}\cap U}^{1/2} \otimes \epsilon_2 = \delta^{-1}\delta_U^{1/2}$. L'isomorphisme naturel entre $r_U \circ \mathrm{ind}_{\hat{P}\cap Q}^Q(E)$ et $\mathrm{ind}_{L\cap\hat{P}}^L(r_{\hat{P}\cap U}(E) \otimes \epsilon_2)$ est obtenu, par passage au quotient, de

$$f \mapsto \bar{f}, \quad \mathrm{ind}_{\hat{P}\cap Q}^Q(E) \to \mathrm{ind}_{L\cap\hat{P}}^L(r_{\hat{P}\cap U}(E) \otimes \epsilon_2)$$

$$\bar{f}(l) = \delta_U(l)^{1/2} \int_{\hat{P}\cap U\backslash U} \overline{f(ul)}\, d\nu_{\hat{P}\cap U\backslash U}(u). \tag{VI.5.1.13}$$

Vérifions maintenant la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
\hat{P} = \hat{M}\hat{N} \arrow[rr, "\mathcal{I}_{\hat{Z}}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}_{\hat{P}\cap Q}^{\hat{P}}"'] & & Q = LU \\
& \hat{P}\cap Q \arrow[ur, "\mathrm{ind}_{\hat{P}\cap Q}^Q"'] &
\end{tikzcd}$$

Or $\mathcal{I}_{\hat{Z}} = \Gamma_c \circ \mathcal{R}_{Z,Q}^{X,G} \circ \iota^{-1} \circ \mathcal{I}_{\hat{P}}^G$ et $\mathrm{ind}_{\hat{P}\cap Q}^Q = \Gamma_c \circ \mathcal{I}_{\hat{P}\cap Q}^Q$. Remarquons que le stabilisateur dans Q de l'orbite $Z = PzQ$ n'est autre que $\hat{P}\cap Q$, de sorte que $(\hat{P}\cap Q)\backslash Q \simeq Z$. Il s'agit donc de montrer que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\hat{P}) \arrow[r, "\mathcal{I}_{\hat{P}}^G"] \arrow[d, "\mathcal{F}_{\hat{P}\cap Q}^{\hat{P}}"] & \mathcal{C}_{\hat{P}\backslash G,G}^\infty - \mathcal{M}od \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{C}_{P\backslash G,G}^\infty - \mathcal{M}od \arrow[r, "\mathcal{R}_{Z,Q}^{X,G}"] & \mathcal{C}_{Z,Q}^\infty - \mathcal{M}od \arrow[d] \\
\mathcal{M}(\hat{P}\cap Q) \arrow[rrr, "\mathcal{I}_{\hat{P}\cap Q}^Q"] & & & \mathcal{C}_{(\hat{P}\cap Q)\backslash Q,Q}^\infty - \mathcal{M}od
\end{tikzcd}$$

commute.

Prenons une représentation (σ, E) dans $\mathcal{M}(\hat{P})$. Le faisceau qui lui correspond dans $\mathcal{C}_{\hat{P}\backslash G,G}^\infty - \mathcal{M}od$ par l'équivalence de catégories du III.3.2 a donc pour fibre E au-dessus de $\hat{P} \in \hat{P}\backslash G$. Soit X la variété des sous-groupes paraboliques conjugués à $\hat{P}$ (ou P). On a

$$\hat{P}\backslash G \simeq X \simeq P\backslash G.$$

Ces isomorphismes sont obtenus en choisissant respectivement $\hat{P} = Pz$ (attention, ceci est une égalité de points dans X, l'égalité de sous-groupes paraboliques de G qui lui correspond est $\hat{P} = z^{-1}Pz$) et P comme point de base dans X, l'isomorphisme entre le terme de gauche et celui de droite étant réalisé par ι. Le faisceau qui correspond à (σ, E) dans $\mathcal{C}_{\hat{P}\backslash G,G}^\infty - \mathcal{M}od$ a donc pour fibre E au-dessus de Pz. Sa restriction à $Z = PzQ$ de même, donc en identifiant Z et $(\hat{P}\cap Q\backslash Q)$, on obtient un faisceau sur $\mathcal{C}_{\hat{P}\cap Q\backslash Q,Q}^\infty - \mathcal{M}od$, de fibre E au-dessus du point de base $\hat{P}\cap Q$. L'action de Q étant transitive, cette fibre caractérise le faisceau. D'autre part, il est maintenant clair que c'est aussi la fibre au dessus de ce point du faisceau $\mathcal{I}_{\hat{P}\cap Q} \circ \mathcal{F}_{\hat{P}\cap Q}^{\hat{P}}(\sigma, E)$. Ceci montre la commutativité du diagramme.

Il reste à se débarrasser des caractères ϵ_1 et ϵ_2. Comme ces caractères sont triviaux respectivement sur $\hat{M}\cap U$ et $\hat{N}\cap L$ on a $\epsilon_1 \circ r_{\hat{M}\cap U} = r_{\hat{M}\cap U} \circ \epsilon_1$ et $\epsilon_2 \circ \mathcal{F}_{L\cap\hat{P}}^{L\cap\hat{M}} = \mathcal{F}_{L\cap\hat{P}}^{L\cap\hat{M}} \circ \epsilon_2$. Il s'agit donc de voir que le caractère

$$\epsilon = \epsilon_1\epsilon_2 = \delta_{\hat{N}}^{-1/2}\delta_{\hat{N}\cap Q}^{1/2}\delta_U^{-1/2}\delta_{U\cap\hat{P}}^{1/2}$$

est trivial sur $L' = \hat{M} \cap L$. On peut supposer, en se ramenant à ce cas par conjugaison, que les sous-groupes paraboliques P et Q sont standards. Ecrivons la décomposition de Cartan de L' sous la forme $L' = K_0' A_\emptyset K_0'$. Comme le caractère ϵ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ est trivial sur les sous-groupes compacts de L', donc sur K_0', il suffit de vérifier que ϵ est trivial sur $A_\emptyset$.

On reprend les notations de V.4. Pour toute partie unipotente S de $\Sigma_\emptyset$, on a

$$\delta_{U(S)}(a) = \prod_{\gamma \in S} |\gamma(a)^{m_\gamma + 2m_{2\gamma}}|, \quad (a \in A_\emptyset).$$

Notons ceci simplement δ_S. On a alors

$$\epsilon^2 = \delta_{\hat{\mathcal{N}}}^{-1} \delta_{\hat{\mathcal{N}} \cap \mathcal{Q}} \delta_{\mathcal{U}}^{-1} \delta_{\hat{\mathcal{U}} \cap \hat{\mathcal{P}}}$$

Or,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{N}} \setminus (\hat{\mathcal{N}} \cap \mathcal{Q}) &= \hat{\mathcal{N}} \cap (\Sigma_\emptyset \setminus \mathcal{Q}) = \hat{\mathcal{N}} \cap (-\mathcal{U}) \\ \mathcal{U} \setminus (\mathcal{U} \cap \hat{\mathcal{P}}) &= \mathcal{U} \cap (\Sigma_\emptyset \setminus \hat{\mathcal{P}}) = \mathcal{U} \cap (-\hat{\mathcal{N}}),\end{aligned}$$

d'où

$$\epsilon^2 = \delta_{\hat{\mathcal{N}} \cap (-\mathcal{U})}^{-1} \delta_{\mathcal{U} \cap (-\hat{\mathcal{N}})}^{-1} = 1.$$

Comme ϵ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\epsilon = 1$. □

Il sera utile par la suite d'avoir une forme un peu plus explicite de l'isomorphisme naturel du théorème VI.5.1. Reprenons les notations du début de cette section : $P = MN$ et $Q = LU$ sont deux sous-groupes paraboliques de G, Z est une orbite de Q dans $P \backslash G$, et Y, Y' sont deux parties ouvertes de $P \backslash G$, union de Q-orbites, telles que Y est l'union disjointe de Y' et de Z. Soit (σ, E) une représentation lisse de M. Le foncteur F_Z est un quotient du foncteur i_Y : on quotiente d'abord par le sous-foncteur $i_{Y'}$, puis on applique le foncteur r_U qui est lui aussi un passage au quotient. L'isomorphisme naturel entre

$$F_Z(\sigma, E) = r_U(i_Y(\sigma, E))/r_U(i_{Y'}(\sigma, E))$$

et

$$\Phi_Z = i^L_{L \cap \iota^{-1}(P)} \circ \iota \circ r^M_{M \cap \iota(Q)}$$

est induit par l'application

$$f \mapsto \bar{f}, \quad i_Y(E) \to i^L_{L \cap \iota^{-1}(P)} \circ \iota \circ r^M_{M \cap \iota(Q)}(E)$$

où

$$\text{(VI.5.1.14)} \qquad \bar{f}(l) = \delta_U(l)^{1/2} \int_{U \cap \iota^{-1}(P) \backslash U} j_{M \cap \iota(U)}(f(\iota(ul)))\, d\nu_{U \cap \iota^{-1}(P) \backslash U}(u).$$

Ceci s'obtient à partir de (VI.5.1.13) et des autres isomorphismes naturels du diagramme.

VI.5.2 Données cuspidales

Nous allons déduire du lemme géométrique VI.5.1 des renseignements sur les suites de Jordan-Hölder des représentations induites à partir de représentations supercuspidales. Plus précisément, soient $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, et (ρ, W) une représentation supercuspidale irréductible de M. On veut étudier l'induite $\pi = i_P^G \rho$.

Définition. Une donnée cuspidale est un couple $(M, (\rho, W))$ où M est un facteur de Levi d'un parabolique $P = MN$ de G et (ρ, W) est une représentation irréductible supercuspidale de M.

On dit que deux données cuspidales $(M_1, (\rho_1, W_1))$ et $(M_2, (\rho_2, W_2))$ sont associées s'il existe $g \in G$ tel que

$$gM_1g^{-1} = M_2 \quad \text{et} \quad \rho_2 \simeq \rho_1^g$$

Ceci définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des données cuspidales. On note $(M, (\rho, W))_G$ la classe de $(M, (\rho, W))$ et $\Omega(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Rappelons que d'après le corollaire VI.2.1, pour toute représentation lisse irréductible (π, V) de G, on peut trouver un sous-groupe parabolique $P = MN$ de G et une représentation irréductible supercuspidale (τ, E) de M tels que

$$\text{(VI.5.2.1)} \qquad \mathrm{Hom}_M(r_P^G(\pi, V), (\tau, E)) \neq \{0\}.$$

De manière équivalente, par la réciprocité de Frobenius

$$\text{(VI.5.2.2)} \qquad \mathrm{Hom}_G((\pi, V), i_P^G(\tau, E)) \neq \{0\}.$$

Le résultat qui suit « sépare »les représentations induites et les représentations supercuspidales :

Lemme. *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique propre de G et soit (ρ, W) une représentation lisse de M. Posons $(\pi, V) = i_P^G(\rho, W)$. Alors aucun sous-quotient irréductible de (π, V) n'est supercuspidal.*

Démonstration. Soit π_{sc} la partie supercuspidale de π dans la décomposition du théorème VI.3.5. On a

$$\mathrm{Hom}_G(\pi_{sc}, \pi) = \mathrm{Hom}_M(r_P^G(\pi_{sc}), \rho) = 0$$

et ceci implique que π_{sc} est nulle. □

VI.5.3 Conséquences du lemme géométrique

Le lecteur se reportera à la section V.4 pour certaines notations concernant les groupes de Weyl. On tire facilement du lemme géométrique VI.5.1 les résultats suivants :

Proposition. *Soient $P = MN$ et $Q = LU$ des sous-groupe paraboliques de G, (ρ, W) une représentation supercuspidale de M et posons $\tau = r_Q^G i_P^G \rho$. Alors*

(i) si L n'admet aucun sous-groupe de Levi conjugué à M dans G, alors $\tau = 0$,

(ii) si M n'est pas conjugué à L dans G, alors τ n'a aucun sous-quotient supercuspidal,

(iii) supposons M et L standards et conjugués, alors τ admet une filtration par des sous-représentations dont les quotients successifs sont de la forme ${}^w\rho$, $w \in W(L, M)/W_L$. En particulier τ est supercuspidale.

Démonstration. (i) Comme ρ est supercuspidale, $r_{P'}^{M}(\rho) = 0$ pour tout sous-groupe parabolique propre $P' = M'N'$ de M. Donc, τ est nulle sauf si $P' = M' = M$ avec $M' = M \cap w \cdot L$, pour un certain $w \in \mathcal{W}^{Q,P}$. Le groupe M est alors un sous-groupe de Levi de $w \cdot L$.

(ii) C'est une conséquence immédiate de (i) et du lemme VI.5.2.

(iii) Ceci découle du lemme V.4.6, (iii). □

VI.5.4 Suites de Jordan-Hölder des induites de supercuspidales

Soit M un sous-groupe de Levi standard de G. Rappelons que

$$W(*, M) = \bigcup_{L} W(L, M), \quad l(M) = |W_M \backslash W(*, M)|$$

où la somme porte sur l'ensemble des sous-groupes de Levi standards de G (voir V.4.3 et V.4.4 pour les notations). Si M est un sous-groupe de Levi non standard, on pose $l(M) = l(M')$ où M' est un sous-groupe de Levi standard de G conjugué à M.

Théorème. *Soient $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, (ρ, W) une représentation supercuspidale irréductible de M et $(\pi, V) = i_P^G(\rho, W)$. Alors la représentation π est de longueur finie, plus petite que $l(M)$. D'autre part si $P' = M'N'$ est un autre sous-groupe parabolique de G si (ρ', W') est une représentation supercuspidale irréductible de M', et si l'on pose $\pi' = i_{P'}^G \rho'$ alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe $g \in G$ tel que $gMg^{-1} = M'$ et $\rho^g = \rho'$, ie. les données cuspidales $(M, (\rho, W))$ et $(M', (\rho', W'))$ sont associées,*

(ii) $\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi') \neq 0$,

(iii) *les suites de Jordan-Hölder de π' et de π sont équivalentes,*

(iv) *les suites de Jordan-Hölder de π' et de π ont au moins un élément commun.*

Enfin si l'on suppose P et P' standards, et que l'on pose

$$W(\rho, \rho') = \{w \in W_G \mid w \cdot M = M', {}^w\rho' = \rho\},$$

alors $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi') \leq |W_M \backslash W(\rho, \rho')|$.

Démonstration. On peut, par conjugaison, supposer P et P' standards, ce que nous ferons dans la suite de la démonstration. Soit (π_0, V_0) un sous-quotient irréductible de (π, V). Le corollaire VI.2.1 affirme qu'il existe un sous-groupe parabolique $Q = LU$ de G tel que $r_Q^G \pi_0$ est supercuspidale, non nulle. La proposition VI.5.3 (ii) montre alors que M et L sont conjugués. De plus, il existe une sous-représentation supercuspidale irréductible (ρ_0, W_0) de $r_Q^G(\pi_0, V_0)$ telle que $(L, (\rho_0, W_0))$ et $(M, (\rho, W))$ définissent des données cuspidales associées. En effet, le foncteur r_Q^G étant exact, (ρ_0, W_0) est un sous-quotient de $r_Q^G \pi = r_Q^G i_P^G \rho$ et l'assertion découle alors de la proposition VI.5.3, (iii).

Définissons une fonction de $\mathcal{M}(G)$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par

$$l'(\tau, E) = \sum_{L \sim M,\, Q = LU} l(r_Q^G \tau)$$

où la somme porte sur les sous-groupes de Levi standards de G conjugués à M, $Q = LU$ est le sous-groupe parabolique standard de facteur de Levi L, et l est la fonction sur $\mathcal{M}(G)$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ donnant la longueur d'une représentation. Comme les foncteurs r_Q^G sont exacts, l' est additive, c'est-à-dire que si (τ_1, E_1) est une sous-représentation de (τ, E), alors $l'(E) = l'(E_1) + l'(E/E_1)$. D'après ce qui précède, on voit que $1 = l(\pi_0) \leq l'(\pi_0)$. Par additivité, et récurrence sur la longueur, on voit que $l(\pi, V) \leq l'(\pi, V)$. Or

$$l'(\pi, V) = \sum_{L \sim M,\, Q = LU} |W_M \backslash W(L, M)| = |W_M \backslash W(*, M)| = l(M)$$

d'après VI.5.3, (iii). On en déduit la première assertion du théorème. Ceci permet de parler de suite de Jordan-Hölder (*cf.* A.VI.3, 10) et en particulier, assure l'existence de sous-représentations irréductibles.

Il est clair que $(ii) \Rightarrow (iv)$ et que $(iii) \Rightarrow (iv)$. Montrons que $(iv) \Rightarrow (i)$. Soit (π_0, V_0) un sous-quotient irréductible commun à (π, V) et (π', V'). On a vu ci-dessus comment attacher à (π_0, V_0) une donnée cuspidale $(L, (\rho_0, W_0))$, qui est alors associée à $(M, (\rho, W))$. Le même raisonnement s'applique à $(M', (\rho', W'))$. Ceci montre que les données cuspidales $(M, (\rho, W))$ et $(M', (\rho', W'))$ sont associées.

Montrons $(i) \Rightarrow (ii)$. D'après l'adjonction des foncteurs $i_{P'}^G$ et $r_{P'}^G$, on a :

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi') \simeq \mathrm{Hom}_{M'}(r_{P'}^G i_P^G \rho, \rho'). \tag{VI.5.4.1}$$

Or d'après la proposition VI.5.3 (iii), ρ' est un facteur de composition de $r_{P'}^G i_P^G \rho$. D'après le lemme VI.3.6, ρ' apparaît comme quotient de $r_{P'}^G i_P^G \rho$ et donc (VI.5.4.1) est non nul.

De plus (VI.5.4.1) montre que l'on a aussi, toujours en utilisant la proposition VI.5.3 (iii)

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi') = \dim \mathrm{Hom}_{M'}(r_{P'}^G i_P^G \rho, \rho') \leq |W_M \backslash W(\rho, \rho')|,$$

ce qui prouve la dernière assertion du théorème.

Il reste à montrer $(i) \Rightarrow (iii)$. On suppose dans un premier temps que M soit un sous-groupe de Levi maximal, c'est-à-dire $l(M) = 2$ (voir V.4.8). Puisque l'on a montré que $(i) \Rightarrow (ii)$, considérons des opérateurs d'entrelacement non nuls $A : V \to V'$ et $A' : V' \to V$. On a alors $l'(\pi) = l'(\pi') = 2$ et donc $l(\pi) = 1$ ou 2 (idem pour $l(\pi')$). Supposons $l(\pi) = 1$, c'est-à-dire π irréductible. Alors A est injectif, et comme

$$l'(V'/A(V)) = l'(V') - l'(A(V)) = l'(V') - l'(V) = 0$$

on obtient $V' = A(V)$ et π' est irréductible. Ceci termine la démonstration dans ce cas, et par symétrie, dans le cas où π' est irréductible. Supposons donc que $l(\pi) = l(\pi') = 2$ et soient (π_0, V_0) , (π_0', V_0') des sous-représentations irréductibles respectivement de (π, V) et (π', V'). On a alors $l'(V/V_0) = l'(V'/V_0') = l(V/V_0) = l(V'/V_0') = 1$. Le cas où $M = M'$ et $\rho \simeq \rho'$ étant trivial, on suppose aussi que l'on ne se trouve pas dans ce cas. Comme

$$\mathrm{Hom}_G(\pi_0, \pi) = \mathrm{Hom}_M(r_P^G \pi_0, \rho) \neq \{0\}$$

et que $l'(\pi_0) = 1$, on a

$$\mathrm{Hom}_G(\pi_0, \pi') = \mathrm{Hom}_{M'}(r_{P'}^G \pi_0, \rho') = \{0\}$$

et donc $A(V_0) = 0$. De même $A'(V_0') = 0$. Il s'ensuit que V_0 est l'unique sous-représentation irréductible de V (sinon on aurait $A = 0$) et de même V_0' est l'unique sous-représentation irréductible de V'. Il en découle que $V/V_0 \simeq V_0'$, $V'/V_0' \simeq V_0$, et les facteurs de composition de V et V' sont donc V_0 et V_0'. Ceci termine la démonstration dans le cas $l(M) = 2$.

Soit $w \in W(L, M)$. On dit que w est élémentaire s'il existe un sous-groupe parabolique standard $T = SV$ de G contenant P et Q, tel que $w \in W_S$ et tel que $l(M) = 2$ en tant que sous-groupe de Levi standard de S. Comme $r_Q^G = r_{Q\cap S}^S \circ r_T^G$ et $i_P^G = i_T^G \circ i_{P\cap S}^S$, on en déduit (iii) dans le cas où w est élémentaire et $\rho = {}^w\rho'$.

On peut conclure la démonstration grâce au lemme suivant [4], lemme 2.17.

Lemme. *Soient M et L des sous-groupes de Levi standards de G et $w \in W(L, M)$. Alors il existe une suite de sous-groupes de Levi standards de G*

$$L = L_0, L_1, \dots L_m = M$$

et pour chaque $i = 1, \dots, m$, $w_i \in W(L_{i-1}, L_i)$ élémentaire, tels que $w = w_l w_{l-1} \dots w_1$.

Ceci termine la démonstration du théorème. □

Corollaire. *Soit (ρ, W) une représentation irréductible supercuspidale d'un sous-groupe de Levi M de G.*

(i) Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques de G de facteur de Levi M. Alors les suites de Jordan-Hölder de $i_P^G\rho$ et $i_Q^G\rho$ sont équivalentes.

(ii) Il existe toujours un opérateur d'entrelacement non nul entre $i_P^G\rho$ et $i_Q^G\rho$.

(iii) Soient $P \in \mathcal{P}(M)$ et (π, V) un sous-quotient irréductible de $i_P^G\rho$. Alors il existe $Q \in \mathcal{P}(M)$ tel que (π, V) soit une sous-représentation de $i_Q^G(\rho, W)$.

Démonstration. Seul le troisième point mérite une petite explication. On sait d'après le corollaire VI.2.1 qu'il existe un sous-groupe parabolique $Q' = L'U'$ de G et une représentation supercuspidale irréductible (τ, E) de L' telle que (π, V) soit une sous-représentation de $i_{Q'}^G(\tau, E)$. D'après le théorème, les données cuspidales $(L', (\tau, E))$ et $(M, (\rho, W))$ sont associées, c'est-à-dire qu'il existe $g \in G$ tel que $g \cdot L' = M$ et $\tau^g = \rho$. On prend alors $Q = g \cdot Q'$. □

VI.6 Théorèmes de finitude

Dans cette section, nous montrons que les foncteurs i_P^G et r_P^G préservent certaines propriétés des représentations. Nous savons déjà d'après le lemme III.2.3 que i_P^G préserve l'admissibilité et d'après la proposition VI.1.3 que r_P^G préserve le type fini. Nous allons montrer que r_P^G préserve l'admissibilité et la longueur finie et que i_P^G préserve la longueur finie. Nous montrerons plus tard (VI.7.5) que i_P^G préserve le type fini.

VI.6.1 Lemme de Jacquet

Le ≪ lemme de Jacquet ≫(ici promu au rang de théorème) est démontré sous une hypothèse d'admissibilité. Cette hypothèse sera levée plus tard (voir section VI.9.1), et la démonstration sera considérablement plus difficile. La version faible démontrée ici suffit pour obtenir comme corollaire le fait que les foncteurs r_P^G préservent l'admissibilité. La notion de décomposition d'Iwahori d'un sous-groupe ouvert compact et les notations afférentes ont été introduites en V.5.2.

Théorème. *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, de composante déployée A, et soit (π, V) une représentation lisse admissible de G. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G admettant une décomposition d'Iwahori selon P. Alors l'application de projection $V \to V_N$ envoie surjectivement V^K sur $(V_N)^{K_M}$.*

Démonstration. Notons $j : V \to V_N$ l'application de projection pour la structure de P-module. Si $v \in V^K$, alors pour tout $k \in K_M$ on a :

$$\pi_N(k)j(v) = j(\pi(k) \cdot v) = j(v)$$

et donc l'image de V^K par j est bien dans $(V_N)^{K_M}$. On choisit alors $t \in C_A^{++}$. L'ensemble $\{t^{-m}K_{\bar{N}}t^m | \, m \in \mathbb{N}\}$ forme une base de voisinages de l'élément neutre dans $\bar{N}$ (Théorème V.5.2). Soit $v \in V^K$. Comme

$$t^{-1}K_{\bar{N}}t \subset K_{\bar{N}}, \quad t^{-1}K_M t = K_M,$$

on a :

$$\pi(e_{K_{\bar{N}}})\pi(t) \cdot v = \pi(e_{K_M})\pi(t) \cdot v = \pi(t) \cdot v,$$

et donc :

$$\begin{aligned} j(a_{t,K} \cdot v) &= j(e_K * \delta_t * e_K \cdot v) = j(\pi(e_K)\pi(t) \cdot v) \\ &= j(\pi(e_{K_N} * e_{K_M} * e_{K_{\bar{N}}})\pi(t) \cdot v) \\ &= j(\pi(e_{K_N})\pi(t) \cdot v) = \pi_N(e_{K_N})\pi_N(t) \cdot j(v) \\ &= \pi_N(t) \cdot j(v). \end{aligned} \tag{VI.6.1.1}$$

La dernière égalité provient du fait que N, et donc K_N, agit trivialement sur V_N. Ceci montre que $\pi_N(t) \cdot j(V^K) \subset j(V^K)$. En fait, il y a égalité, car $\pi_N(t)$ est inversible sur V_N et $j(V^K)$ est de dimension finie. Il s'ensuit que $\pi_N(t^m) \cdot j(V^K) = j(V^K)$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Soit $\bar{v} \in (V_N)^{K_M}$, soit v' un relèvement quelconque de $\bar{v}$ dans V, et soit $v = \pi(e_{K_M}) \cdot v'$. On a $v \in V^{K_M}$ et $j(v) = \bar{v}$. Fixons $m \in \mathbb{N}$ tel que v soit fixé par $t^{-m}K_{\bar{N}}t^m$, de telle sorte que $K_{\bar{N}}$ fixe $\pi(t^m) \cdot v$. Comme précédemment, on a

$$j(\pi(e_K)\pi(t^m) \cdot v) = \pi_N(e_{K_N})\pi_N(t^m) \cdot j(v) = \pi_N(t^m) \cdot \bar{v},$$

et donc $\bar{v} \in \pi_N(t^{-m})j(V^K) = j(V^K)$. □

Corollaire. *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, et soit (π, V) une représentation lisse admissible de G. Alors la représentation (π_N, V_N) de M est admissible. Il en est de même de $r_P^G(\pi, V)$.*

Démonstration. Ceci provient du théorème et fait qu'il existe une base de voisinages de l'unité dans G constituée de sous-groupes compacts ouverts admettant une décomposition d'Iwahori selon P. □

Nous allons maintenant construire une section s_P^K du morphisme surjectif $j : V^K \to V_N^{K_M}$. Pour tout $v \in V^K \cap \ker j = V^K \cap V(N)$, il existe d'après la proposition III.2.9, un sous-groupe compact ouvert Γ de N tel que $e_\Gamma \cdot v = 0$. Comme V^K est de dimension finie, on peut même choisir Γ de telle sorte que $e_\Gamma \cdot v = 0$ pour tout $v \in V^K \cap \ker j$. D'après le théorème V.5.2 (iv), il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in C_A^+(\epsilon)$, $\Gamma \subset t^{-1}K_N t$. Pour un tel t, et pour tout $v \in V^K \cap \ker j$ on a :

$$a_{t,K} \cdot v = e_K * \delta_t * e_K \cdot v = e_{K_{\bar{N}}} * e_{K_M} * e_{K_N} * \delta_t \cdot v = e_{K_{\bar{N}}} * e_{K_M} * \delta_t * e_{t^{-1}K_N t} \cdot v = 0.$$

Ceci montre que pour un tel t :

(VI.6.1.2) $$V^K \cap \ker j = V^K \cap V(N) \subset \ker \pi(a_{t,K}).$$

Montrons maintenant que j induit un isomorphisme de $\operatorname{Im} \pi(a_{t,K}) \subset V^K$ sur $V_N^{K_M}$. Montrons d'abord l'injectivité. Supposons que $v \in V^K$ soit tel que $j(a_{t,K} \cdot v) = 0$. D'après (VI.6.1.1), on a $\pi_N(t) \cdot j(v) = 0$, d'où $j(v) = 0$ car $\pi_N(t)$ est inversible, et l'on conclut d'après (VI.6.1.2) que $a_{t,K} \cdot v = 0$. Montrons maintenant la surjectivité. Soit $\bar{v} \in V_N^{K_M}$. Comme t est dans le centre de M, on a $\pi_N(t^{-1}) \cdot \bar{v} \in V_N^{K_M}$. D'après le lemme de Jacquet, il existe $v \in V^K$ tel que $j(v) = \pi_N(t^{-1}) \cdot \bar{v}$. Posons $v' = a_{t,K} \cdot v \in \operatorname{Im} \pi(a_{t,K})$. D'après (VI.6.1.1), $j(v') = j(a_{t,K} \cdot v) = \pi_N(t) \cdot j(v) = \bar{v}$.

On déduit de ce qui précède que :

$$\dim V^K = \dim \ker j_{|V^K} + \dim V_N^{K_M} = \dim \ker \pi(a_{t,K}) + \dim \operatorname{Im} \pi(a_{t,K}),$$

et $\dim \operatorname{Im} \pi(a_{t,K}) = \dim V_N^{K_M}$, d'où $\ker j_{|V^K} = \ker \pi(a_{t,K})$ et

$$V^K = \ker \pi(a_{t,K}) \oplus \operatorname{Im} \pi(a_{t,K}).$$

Posons $V_0^K = \ker \pi(a_{t,K})$, $V_*^K = \operatorname{Im} \pi(a_{t,K})$.

Proposition. *La décomposition $V^K = V_0^K \oplus V_*^K$ obtenue ci-dessus ne dépend pas du choix de $t \in C_A^+(\epsilon)$. On obtient en inversant la restriction de j à V_*^K une section, ne dépendant que de P et K,*

$$s_P^K : V_N^{K_M} \to V_*^K \subset V^K.$$

Démonstration. Soit t' un autre élément satisfaisant les mêmes hypothèses que t. Alors tt' vérifie encore ces hypothèses, et comme d'après le lemme V.5.3, $a_{t,K}a_{t',K} = a_{tt',K} = a_{t',K}a_{t,K}$, on voit que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} a_{tt',K} &\subset \operatorname{Im} a_{t,K}, \\ \operatorname{Im} a_{tt',K} &\subset \operatorname{Im} a_{t',K}, \\ \ker a_{t,K} &\subset \ker a_{tt',K}, \\ \ker a_{t',K} &\subset \ker a_{tt',K} \end{aligned}$$

Par égalité des dimensions, on voit que toutes ces inclusions sont en fait des égalités. □

VI.6.2 Induction et longueur finie

Nous allons maintenant montrer que le foncteur d'induction i_P^G préserve les modules de longueur finie. La démonstration utilise de manière cruciale le théorème VI.5.4, qui découle du lemme géométrique d'induction-restriction. Ceci sera utilisé dans la démonstration de la proposition VI.7.1.

Lemme. *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G et soit (τ, E) une représentation irréductible de M. Alors $i_P^G(\tau, E)$ de G est de longueur finie.*

Démonstration. Supposons que (τ, E) soit une représentation supercuspidale de M. Alors $i_P^G(\tau, E)$ est de longueur finie d'après le théorème VI.5.4. Le cas général s'en déduit car (τ, E) est une sous-représentation d'une représentation de la forme $i_{P'}^M(\rho, W)$, où (ρ, W) est une représentation supercuspidale irréductible d'un facteur de Levi M' de M (corollaire VI.2.1), le foncteur i_P^G est exact et donc $i_P^G(\tau, E)$ est une sous-représentation de $i_{P'}^G = i_P^G i_{P'}^M(\rho, W)$ qui est de longueur finie d'après ce qui précède. □

VI.6.3 Un théorème de Howe

Nous voulons maintenant montrer le résultat suivant :

Théorème. *Soit (π, V) une représentation lisse de G. Alors (π, V) est de longueur finie si et seulement si elle est de type fini et admissible.*

Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin de préparation.

Lemme. *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique standard de G et K un sous-groupe ouvert compact de G, inclus et distingué dans K_0. Si (π, V) est engendré par V^K, alors V_N est engendré par $V_N^{K\cap M}$.*

Démonstration. Comme $G = K_0 P$ et que K est distingué dans K_0, il est clair que V est engendré comme espace vectoriel par les vecteurs de la forme $\pi(p) \cdot v$, où $v \in V^K$ et $p \in P$. De cela, on déduit que V_N est engendré par les vecteurs de la forme $j_N(\pi(p) \cdot v)$, $v \in V^K$ et $p \in P$, où j_N est la projection de V sur V_N. Ecrivons $p = mn$, $m \in M$, $n \in N$. Alors

$$j_N(\pi(p) \cdot v) = \pi_N(m) \cdot j_N(v).$$

Comme $j_N(v) \in V_N^{K\cap M}$, le lemme est démontré. $\square$

Proposition. *Soit K un sous-groupe ouvert compact de G, inclus et distingué dans K_0 et soit (π, V) une représentation lisse de G. Si V^K engendre V, alors tout sous-quotient supercuspidal de V contient des vecteurs fixés par K.*

Démonstration. Soit (τ, E) une représentation irréductible supercuspidale de G. On utilise (VI.3.3.1) pour décomposer V en somme directe de sous-représentations $V = V(\tau) \oplus W$, où $V(\tau)$ est une représentation dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans la classe d'inertie $[\tau]$, et où aucun sous-quotient irréductible de W n'est dans $[\tau]$. Comme V est engendré par V^K, il en est de même de $V(\tau)$. Considérons la restriction de (τ, E) à ${}^0G$. C'est une somme directe finie de représentations compactes irréductibles de ${}^0G$. Appelons celles-ci (τ_i, E_i). La restriction de $V(\tau)$ à ${}^0G$ est donc une somme directe de représentations isomorphes à l'une des (τ_i, E_i). Comme $V(\tau)$ est engendré par $V(\tau)^K$, si $V(\tau) \neq \{0\}$, nécessairement l'un des E_i contient un vecteur fixé par K. Comme $K \subset {}^0G$, ceci montre alors que E contient un vecteur fixé par K.

Soit maintenant (ρ, W) un sous-quotient supercuspidal de (π, V). Alors tout sous-quotient irréductible (τ, E) de (ρ, W) est aussi un sous-quotient irréductible de (π, V), et d'après ce qui vient d'être établi, il contient un vecteur fixé par K. Comme le foncteur $V \mapsto V^K$ est exact (proposition III.1.5), on en déduit que (ρ, W) contient un vecteur fixé par K. $\square$

Corollaire. *Soit K un sous-groupe ouvert compact de G, inclus et distingué dans K_0 et admettant une décomposition d'Iwahori selon les sous-groupes paraboliques standards. Soit (π, V) une représentation lisse admissible de G telle V^K engendre V. Alors tout sous-quotient de V est engendré par ses vecteurs fixés par K.*

Démonstration. Soit (π', V') un sous-quotient de (π, V). Si la représentation (π', V') est supercuspidale, la proposition montre que $V^K \neq \{0\}$. Sinon, on peut trouver un sous-groupe parabolique standard $P = MN$ tel que V'_N est supercuspidale (corollaire VI.2.1). D'après le lemme, V_N est engendré par ses vecteurs fixes sous $K \cap M$. Comme V'_N est un sous-quotient de V_N, on déduit de la proposition que V'_N contient des vecteurs fixes sous $K \cap M$. D'après le Lemme de Jacquet

(VI.6.1), la projection $j_N : V' \to V'_N$ envoie surjectivement $(V')^K$ sur $(V'_N)^{K\cap M}$. Il s'ensuit que $(V')^K$ est non nul. Il reste à montrer que $(V')^K$ engendre V'. Soit W le sous-module de V' engendré par $(V')^K$. On veut montrer que $W = V'$. Comme $W^K = (V')^K$, et que le foncteur j_K est exact (proposition III.1.5), aucun sous-quotient de V'/W ne contient un vecteur non nul fixe par K. Comme tout sous-quotient de V'/W est aussi un sous-quotient de V, ce qui précède implique que $V' = W$. $\square$

Démonstration du théorème. Supposons V engendré par $v_1, \ldots, v_m$ et admissible. Il existe un sous-groupe ouvert K compact de G, inclus et distingué dans K_0 et admettant une décomposition d'Iwahori selon les sous-groupes paraboliques standards tel que $v_i \in V^K$ pour tout $i = 1, \ldots, m$. Donc V est engendré par V^K. Comme V est admissible $\dim V^K$ est finie. Si

$$\{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_s = V$$

est une filtration par des sous-modules, d'après le corollaire ci-dessus,

$$\{0\} \subsetneq V_1^K \subsetneq V_2^K \subsetneq \cdots \subsetneq V_s^K = V^K,$$

et donc la longueur de V est au plus $\dim V^K$.

Réciproquement, si (π, V) est de longueur finie, un raisonnement par récurrence sur la longueur montre facilement que (π, V) est admissible. En effet, si (π, V) est irréductible, l'assertion est le théorème VI.2.2. Pour une longueur $n \geq 2$, on utilise l'exactitude du foncteur $V \mapsto V^K$ et l'hypothèse de récurrence. D'autre part, il est facile de voir (par exemple par récurrence) qu'une représentation de longueur finie est de type fini. $\square$

VI.6.4 r_P^G préserve les représentations de longueur finie

C'est une conséquence du théorème de Howe VI.6.3, du théorème VI.1.3 et du corollaire VI.6.1

VI.7 Décomposition de Bernstein

VI.7.1 Structure de variété de $\Omega(G)$

Nous commençons par reformuler légèrement une partie du théorème VI.5.4.

Lemme. *Soient $P_i = M_iN_i$, $i = 1, 2$, des sous-groupes paraboliques de G, $(M_i, (\rho_i, W_i))$ des données cuspidales et (π, V) une représentation lisse irréductible de G, telle que (ρ_i, W_i) soit un facteur de composition de $r_{P_i}^G(\pi, V)$. Alors les données cuspidales (ρ_1, W_1) et (ρ_2, W_2) sont associées.*

Démonstration. Tout d'abord, $r_{P_i}^G(\pi, V)$ est de longueur finie d'après VI.6.4 et admissible d'après le corollaire VI.6.1. D'après le lemme VI.3.6, pour chaque i, (ρ_i, W_i) est un quotient de $r_{P_i}^G(\pi, V)$, et la réciprocité de Frobenius donne

$$\{0\} \neq \mathrm{Hom}_{M_i}(r_{P_i}^G(\pi, V), (\rho_i, W_i)) \simeq \mathrm{Hom}_G((\pi, V), i_{P_i}^G(\rho_i, W_i)).$$

Tous les $i_{P_i}^G(\rho_i, W_i)$ ont donc un facteur de composition en commun, et l'on peut alors conclure grâce au théorème VI.5.4. $\square$

Ce lemme permet de définir une application

$$\text{(VI.7.1.1)} \qquad \begin{aligned} \mathbf{Sc} : \mathbf{Irr}(G) &\to \Omega(G) \\ (\pi, V) &\mapsto (M, (\rho, W))_G. \end{aligned}$$

où $(M, (\rho, W))$ est une donnée cuspidale pour laquelle il existe $P \in \mathcal{P}(M)$, de sorte que (ρ, W) soit facteur de composition de $r_P^G(\pi, V)$(**Sc** pour « support cuspidal ».

Proposition. *L'application* **Sc** *est une surjection à fibres finies.*

Démonstration. Le fait que **Sc** soit une surjection est une reformulation du corollaire VI.2.1. Soient $P \in \mathcal{P}(M)$ et $(M, (\rho, W))$ une donnée cuspidale. On veut montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de représentations (π, V) dans $\mathbf{Irr}(G)$ telles que (ρ, W) soit un facteur de composition de $r_P^G(\pi, V)$. Comme $r_P^G(\pi, V)$ est admissible (théorème VI.6.1), on peut d'après le lemme VI.3.6, réaliser (ρ, W) comme un quotient de $r_P^G(\pi, V)$, et donc

$$\mathrm{Hom}_M((r_P^G(\pi, V), (\rho, W)) = \mathrm{Hom}_G((\pi, V), i_P^G(\rho, W)) \neq \{0\}.$$

Or $i_P^G(\rho, W)$ est de longueur finie, d'après le lemme VI.6.2. □

On définit une relation d'équivalence plus faible que le fait d'être associées sur l'ensemble des données cuspidales. On dit que deux données cuspidales $(M_1, (\rho_1, W_1))$ et $(M_2, (\rho_2, W_2))$ définissent le même support d'inertie s'il existe $g \in G$ et un caractère non ramifié ω de M_2 tels que

$$gM_1g^{-1} = M_2 \quad \text{ et } \quad \rho_2 \simeq \rho_1^g \otimes \omega$$

On note $[M, (\rho, W)]_G$ la classe de $(M, (\rho, W))$ pour cette relation d'équivalence, et $\mathcal{B}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Exemple. Les classes d'inertie de représentations supercuspidales de G définissent des supports d'inertie. Avec les notations de VI.3.3, si (π, V) est une représentation supercuspidale de G, on a $[\pi] = [G, (\pi, V)]_G = \mathbf{Irr}(G)_{[\pi]}$. On a vu que cet ensemble est muni d'une structure de variété algébrique affine. Nous allons étendre ceci aux autres supports d'inertie.

Théorème. *L'ensemble des données cuspidales* $\Omega(G)$ *est muni d'une structure de variété algébrique, dont les composantes connexes, indexées par* $\mathcal{B}(G)$*, sont des quotients de tores complexes par l'action de groupes finis.*

Démonstration. La première étape de la démonstration consiste à remarquer que pour tout facteur de Levi M de G, l'ensemble $\mathbf{Irr}(M)_{sc}$ est une variété algébrique. En effet, c'est l'union disjointe de ses classes d'inertie, dont on sait qu'elles admettent une structure de variété algébrique étudiée en détail en VI.4.5. Ecrivons ceci

$$\mathbf{Irr}(M)_{sc} = \coprod_i D_i, \quad D_i = [\rho_i],$$

d'algèbre de fonctions $\prod_i \mathcal{Z}_{[\rho_i]}$. Le groupe $W(A) = N_G(M)/M$ agit naturellement sur cette variété.

Le quotient de $\mathbf{Irr}(M)_{sc}$ par l'action de $W(A)$ est obtenu tout d'abord en identifiant deux classes d'inertie D_1 et D_2 (c'est à dire deux composantes connexes) de $\mathbf{Irr}(M)_{sc}$ lorsqu'il existe

$w \in W(A)$ tel que $w \cdot D_1 = D_2$. Soit D une classe d'inertie de $\mathbf{Irr}(M)_{sc}$, et soit $W(D)$ le stabilisateur de D dans $W(A)$. Soit (ρ, W) une représentation supercuspidale de M dans la classe d'inertie D. Décrivons maintenant la structure de variété de la composante connexe de $\Omega(G)$ contenant $(M, (\rho, W))_G$: c'est le quotient de la variété D (un tore complexe) par l'action de $W(D)$. C'est donc encore une variété algébrique. Remarquons que dans cette description, le choix de D n'est pas unique. Considérons maintenant un système de représentants $M_1, \dots, M_r$ des classes de conjugaison des sous-groupes de Levi de G. Posons $W_i = N_G(M_i)/M_i$, $i = 1, \dots r$. Il est évident d'après les définitions que

$$\Omega(G) = \coprod_{i=1}^{r} \mathbf{Irr}(M_i)_{sc}/W_i.$$

On peut paramétrer les composantes connexes de $\Omega(G)$ d'une autre manière. Considérons la projection canonique de $\Omega(G)$ dans $\mathcal{B}(G)$. Il est alors clair d'après ce qui précède que les composantes connexes de $\Omega(G)$ sont les fibres de cette projection. $\square$

Définissons l'application

$$\mathbf{Si} : \mathbf{Irr}(G) \to \mathcal{B}(G)$$

obtenue en composant $\mathbf{Sc}$ avec la projection de $\Omega(G)$ dans $\mathcal{B}(G)$ (**Si** pour « support d'inertie »). Les fibres de cette application fournissent une partition de $\mathbf{Irr}(G)$. Notons $\mathbf{Irr}(G)_{\mathfrak{s}}$ la fibre au-dessus d'un élément $\mathfrak{s}$ de $\mathcal{B}(G)$. Si Ω est la composante connexe de $\Omega(G)$ correspondant à $\mathfrak{s}$, on note aussi $\mathbf{Irr}(G)_{\mathfrak{s}} = \mathbf{Irr}(G)_{\Omega}$.

VI.7.2 Le théorème de décomposition de Bernstein

Nous allons maintenant montrer que la décomposition $\mathbf{Irr}(G) = \coprod \mathbf{Irr}(G)_{\Omega}$ du paragraphe précédent induit une décomposition de la catégorie $\mathcal{M}(G)$.

Si Ω est une composante connexe de $\Omega(G)$ et si (π, V) est une représentation lisse, on note $V(\Omega)$ la sous-représentation maximale de V telle que tous les sous-quotients irréductibles de $V(\Omega)$ soient dans $\mathbf{Irr}(G)_{\Omega}$. On dit que (π, V) est scindée selon $\Omega(G)$ si $V = \bigoplus_{\Omega} V(\Omega)$ (voir A.IX).

Théorème. *Toute représentation (π, V) dans $\mathcal{M}(G)$ est scindée selon $\Omega(G)$. La catégorie $\mathcal{M}(G)$ se décompose en un produit de catégories :*

$$\mathcal{M}(G) = \prod_{\Omega} \mathcal{M}(G)_{\Omega}.$$

où $\mathcal{M}(G)_{\Omega}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans $\mathbf{Irr}(G)_{\Omega}$.

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Lemme. *Si V' est une sous-représentation de V, et que V est scindée selon $\Omega(G)$, alors V' est scindée selon $\Omega(G)$.*

Démonstration. C'est un cas particulier du lemme A.IX □

La démonstration du théorème consiste maintenant à montrer que toute représentation de $\mathcal{M}(G)$ se plonge dans une représentation scindée selon $\Omega(G)$. On peut alors utiliser le lemme pour conclure.

Définissons Cusp(G) comme le produit sur les sous-groupes paraboliques standards $P = MN$ de G des catégories $\mathcal{M}(M)_{sc}$. Définissons alors les foncteurs

$$I : \operatorname{Cusp}(G) \to \mathcal{M}(G), \quad (\rho_M, W_M)_P \mapsto \bigoplus_P i_P^G(\rho_M, W_M)$$

et

$$R : \mathcal{M}(G) \to \operatorname{Cusp}(G), \quad (\pi, V) \mapsto (r_P^G(\pi, V)_{sc})_P$$

où par $r_P^G(\pi, V)_{sc}$ on entend la partie cuspidale de la représentation $r_P^G(\pi, V)$.

Lemme. (i) *Le foncteur R est l'adjoint à gauche du foncteur I.*

(ii) *R est exact, fidèle, et préserve les représentations de type fini. Le foncteur I est exact et fidèle.*

(iii) *Pour toute représentation (π, V) dans $\mathcal{M}(G)$, le morphisme d'adjonction $\alpha_V : (\pi, V) \to IR(\pi, V)$ est une injection.*

Démonstration. Calculons, pour tout objet $(\rho_M, W_M)_P$ de Cusp(G), et toute représentation (π, V) de $\mathcal{M}(G)$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\operatorname{Cusp}(G)}(R(\pi, V), (\rho_M, W_M)_P) &\simeq \prod_P \operatorname{Hom}_M(r_P^G(\pi, V)_{sc}, (\rho_M, W_M)) \\
\simeq \prod_P \operatorname{Hom}_M(r_P^G(\pi, V), (\rho_M, W_M)) &\simeq \prod_P \operatorname{Hom}_G((\pi, V), i_P^G(\rho_M, W_M)) \\
\simeq \operatorname{Hom}_G((\pi, V), \oplus_P i_P^G(\rho_M, W_M)) &\simeq \operatorname{Hom}_G((\pi, V), I((\rho_M, W_M)_P))
\end{aligned}$$

On a utilisé l'adjonction des foncteurs i_P^G et r_P^G pour tout sous-groupe parabolique P de G, et le fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes paraboliques standards. Comme tout ces isomorphismes sont naturels, ceci montre (i). De même, l'exactitude de R et I découle de l'exactitude des foncteurs i_P^G et r_P^G, et du fait que la projection $\mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(M)_{sc}$ définit aussi un foncteur exact.

Pour montrer que R est fidèle, il suffit de montrer que si (π, V) dans $\mathcal{M}(G)$, alors $R(\pi, V) \neq 0$ (voir A.VI.2, 9). Prenons P minimal parmi les sous-groupes paraboliques standards de G tel que $r_P^G(\pi, V) \neq 0$. Alors $r_P^G(\pi, V)$ est cuspidal (l'argument a été utilisé dans la démonstration du corollaire VI.2.1), et donc $R(\pi, V) \neq 0$. La démonstration du fait que I est fidèle est similaire. En effet, chaque foncteur i_P^G est fidèle, puisque clairement, si (ρ, W) est une représentation non nulle de M, $i_P^G(\rho, V)$ est non nulle. Si (π, V) est une représentation de type fini de $\mathcal{M}(G)$, nous avons vu que $r_P^G(\pi, W)$ est de type fini (proposition VI.1.3). L'assertion sur R s'en déduit.

Montrons (iii). Notons V' le noyau de α_V et i l'inclusion de V' dans V. Comme le morphisme d'adjonction est naturel, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha_{V'}"'] & V \arrow[d, "\alpha_V"'] \\
IR(V') \arrow[r, "IR(i)"] & IR(V)
\end{tikzcd}$$

Comme $0 = \alpha_V \circ i = IR(i) \circ \alpha_{V'}$, et que par exactitude des foncteurs I et R, $IR(i)$ est un monomorphisme, on a $\alpha_{V'} = 0$. Or le morphisme $\alpha_{V'}$ correspond par l'isomorphisme d'adjonction à l'identité de $R(V')$. Ceci montre que $R(V') = 0$, et donc que $V' = 0$, le foncteur R étant fidèle. $\square$

Ce lemme montre que pour toute représentation (π, V) dans $\mathcal{M}(G)$, on peut plonger (π, V) dans une représentation de la forme

$$\bigoplus_P i_P^G(\rho_M, W_M),$$

où la somme porte sur les sous-groupes paraboliques standards $P = MN$ de G et (ρ_M, W_M) est une représentation supercuspidale du Levi M. Pour finir la démonstration du théorème, il s'agit donc de montrer que les représentations $i_P^G(\rho_M, W_M)$ sont scindées selon $\Omega(G)$. On ne travaille désormais qu'avec un seul indice M, et l'on allège les notations en posant $(\rho, W) = (\rho_M, W_M)$. Comme (ρ, W) est supercuspidale, on peut l'écrire $W = \bigoplus_D W_D$, où D décrit les classes d'inerties de représentations supercuspidales de M. Or,

$$i_P^G(\oplus_D W_D) \simeq \bigoplus_D i_P^G(W_D). \tag{VI.7.2.1}$$

Remarquons que si l'on restreint la somme à un nombre fini d'indices, l'isomorphisme est évident. Ceci montre en particulier que le membre de droite s'injecte dans celui de gauche. Réalisons le membre de gauche de la manière usuelle comme un espace fonctionnel sur lequel G agit par translation à droite. Soit f une fonction dans cet espace. Alors f est fixée par un certain sous-groupe ouvert compact K de G, et donc f est complètement déterminée par ses valeurs sur un système de représentants des doubles classes $P\backslash G/K$. Comme cet ensemble est fini, il s'ensuit que l'image de f est contenue dans une somme finie de sous-espaces W_D. Ceci montre que l'injection du membre de droite dans le membre de gauche est aussi une surjection, donc un isomorphisme.

Il reste à voir que $i_P^G(W_D)$ est scindée selon $\Omega(G)$, mais ceci est tautologique. En effet, soit Ω la composante de $\Omega(G)$ qui est un quotient de la variété D. Si (σ, E) est un facteur de composition de $i_P^G(W_D)$, alors $r_P^G(\sigma, E)$ est un sous-quotient de $r_P^G i_P^G(W_D)$ par exactitude du foncteur r_P^G. D'après le lemme VI.5.3 (*iii*) et (V.4.3.3), $r_P^G i_P^G(W_D)$ admet une filtration dont les quotients successifs sont de la forme ${}^w(W_D)$, $w \in W(A) = N_G(M)/M$. Tout sous-quotient irréductible de $r_P^G(\sigma, E)$ est donc sous-quotient d'un ${}^w(W_D)$, $w \in W(A) = N_G(M)/M$, ce qui signifie que le support cuspidal de (σ, E) est dans Ω.

Les composantes connexes de $\Omega(G)$ étant paramétrées par les classes d'inerties de données cuspidales, on peut reformuler la première assertion du théorème en disant que toute représentation (π, V) de $\mathcal{M}(G)$ se scinde en une somme directe

$$V = \bigoplus_{\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)} V_{\mathfrak{s}}, \tag{VI.7.2.2}$$

où chaque $V_{\mathfrak{s}}$ est une représentation de lisse G dont tous les sous-quotients irréductibles s'envoient sur $\mathfrak{s}$ par l'application **Sc**. Si $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$ sont des éléments distincts de $\mathcal{B}(G)$, on en déduit que quels que soient (π, V) et (ρ, W) dans $\mathcal{M}(G)$, $\mathrm{Hom}_G(V_{\mathfrak{s}}, W_{\mathfrak{t}}) = 0$. Ceci montre que tout G-morphisme de V dans W doit envoyer $V_{\mathfrak{s}}$ dans $W_{\mathfrak{s}}$, et donc on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \bigoplus_{\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)} \mathrm{Hom}_G(V_{\mathfrak{s}}, W_{\mathfrak{s}}).$$

La décomposition (VI.7.2.2) des objets de $\mathcal{M}(G)$ est préservée par les morphismes, ce qui montre que l'on a une décomposition de catégories

$$\mathcal{M}(G) = \prod_{\mathfrak{s}\in\mathcal{B}(G)} \mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}}. \tag{VI.7.2.3}$$

Ceci termine la démonstration du théorème de décomposition de Bernstein. □

Soit Ω une composante connexe de $\Omega(G)$. De la démonstration qui précède, nous pouvons tirer d'autres caractérisations des représentations de la sous-catégorie $\mathcal{M}(G)_\Omega$ de $\mathcal{M}(G)$. Remarquons au passage que comme $\mathcal{M}(G)_\Omega$ est stable par passage aux sous-quotients, c'est une catégorie abélienne. Fixons un sous-groupe de Levi (standard) M de G et $D = [\rho]$ une classe d'inertie de représentations irréductibles supercuspidales de M tels que $(M,\rho)_G \in \Omega$. Soit P le sous-groupe parabolique standard de G contenant M.

Proposition. *Une représentation (π,V) est dans $\mathcal{M}(G)_\Omega$ si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

(i) (π,V) se plonge dans une somme de représentations de la forme $i_P^G(\tau,E)$, avec $(\tau,E)\in \mathcal{M}(M)_D$.

(ii) (π,V) est sous-quotient d'une somme de représentations comme en (i).

(iii) $r_P^G(\pi,V)$ est dans la somme des catégories $\mathcal{M}(M)_{D'}$ où D' est conjuguée à D sous G.

(iv) Quels que soient le sous-groupe parabolique $Q = LU$ standard de G et la classe d'inertie D' de représentations irréductibles supercuspidales de L, tels que (M,D) et (L,D') ne soient pas conjuguées, la composante dans $\mathcal{M}(L)_{D'}$ de $r_Q^G(\pi,V)$ est nulle.

Démonstration. Comme nous l'avons dit, à part (ii), ceci est une reformulation de la démonstration du théorème. En effet, la décomposition d'une représentation $(\pi,V)\in\mathcal{M}(G)$ a été obtenue de la manière suivante : on a construit un plongement

$$(\pi,V)\to IR(\pi,V),$$

où $R(\pi,V)$ est la somme sur les sous-groupes paraboliques standards $Q = LU$ des composantes supercuspidales de $r_Q^G(\pi,V)$. Chacune de ces composantes, se décompose à son tour en une somme directe de composantes selon les classes d'inerties de représentations supercuspidales D' de L. On a donc $R(\pi,V)$ de la forme

$$R(\pi,V) = \bigoplus_Q \bigoplus_{D'} (\tau_{Q,D'}, E_{Q,D'})$$

où $(\tau_{Q,D'}, E_{Q,D'}) \in \mathcal{M}(L)_{D'}$. De ceci on tire que (π,V) est une sous-représentation de

$$\bigoplus_Q i_Q^G(\oplus_{D'}(\tau_{Q,D'}, E_{Q,D'})) = \bigoplus_Q \bigoplus_{D'} i_Q^G(\tau_{Q,D'}, E_{Q,D'})$$

(l'égalité entre les deux membres a été vue en VI.7.2.1). On regroupe alors les couples (Q,D') conjugués sous G, c'est-à-dire ceux définissant la même composante connexe Ω de $\Omega(G)$. On obtient ainsi un plongement

$$(\pi,V)\hookrightarrow \bigoplus_\Omega \left(\bigoplus_{(Q,D')|[L,D']_G=\Omega} i_Q^G(\tau_{Q,D'}, E_{Q,D'})\right).$$

Le membre de droite est une représentation scindée selon $\Omega(G)$, la décomposition apparaissant explicitement. La décomposition de (π, V) est obtenue en prenant la somme des intersections de V avec les facteurs du membre de droite. Un facteur

$$\bigoplus_{(Q,D')|[L,D']_G=\Omega} i_Q^G(\tau_{Q,D'}, E_{Q,D'})$$

peut se réécrire $i_P^G(\tau, E)$ avec $(\tau, E) \in \mathcal{M}(M)_D$ car les données (M, D) et (L, D') sont conjuguées sous G. Cette discussion montre que (π, V) est dans une seule composante $\mathcal{M}(G)_\Omega$ si et seulement si (i), (iii) ou (iv) est vérifiée.

Montrons l'équivalence avec (ii). Il est clair que $(i) \Rightarrow (ii)$. Supposons que (π, V) vérifie (ii). Comme le foncteur r_P^G est exact, $r_P^G(\pi, V)$ est sous-quotient d'une représentation de la forme $r_P^G(\oplus i_P^G(\tau, E))$, où les (τ, E) sont dans $\mathcal{M}(M)_D$. On utilise alors la proposition VI.5.3 pour conclure que (π, V) vérifie (iii). $\square$

VI.7.3 Décomposition de Bernstein, induction et restriction

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Une donnée cuspidale $(L, (\sigma, E))$ de M est aussi une donnée cuspidale pour G, puisqu'un sous-groupe de Levi de M est aussi un sous-groupe de Levi de G, et l'on a donc une application :

$$i_{MG} : \Omega(M) \to \Omega(G), \quad (L, (\sigma, E))_M \mapsto (L, (\sigma, E))_G$$

Cette application en induit une autre, notée de la même façon, entre ensembles de supports d'inertie :

$$i_{MG} : \mathcal{B}(M) \to \mathcal{B}(G), \quad [L, (\sigma, E)]_M \mapsto [L, (\sigma, E)]_G$$

Proposition. *Soit* $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(M)$ *et soit* (ρ, W) *dans* $\mathcal{M}(M)_\mathfrak{s}$. *Alors* $i_P^G(\rho, W)$ *est dans* $\mathcal{M}(G)_{i_{MG}(\mathfrak{s})}$. *Soit* $\mathfrak{t} \in \mathcal{B}(G)$ *et soit* (π, V) *dans* $\mathcal{M}(G)_\mathfrak{t}$. *Alors* $r_P^G(\pi, V)$ *est dans* $\prod_{\mathfrak{s} \in i_{MG}^{-1}(\mathfrak{t})} \mathcal{M}(M)_\mathfrak{s}$.

Démonstration. Ceci découle directement des caractérisations des représentations de $\mathcal{M}(M)_\mathfrak{s}$ et $\mathcal{M}(G)_{i_{MG}(\mathfrak{s})}$ obtenues dans la section précédente. $\square$

VI.7.4 Idempotents centraux

Le théorème de décomposition permet d'écrire la catégorie $\mathcal{M}(G)$ comme un produit de catégories plus petites, paramétrées par les composantes connexes de la variété algébrique $\Omega(G)$. Pour toute composante connexe Ω de $\Omega(G)$, la projection

$$e_\Omega : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G)_\Omega$$

définit un idempotent du centre de la catégorie $\mathcal{M}(G)$ et

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{M}(G)} = \sum_\Omega e_\Omega.$$

Si le support d'inertie de Ω est $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$, on note aussi $e_\mathfrak{s} = e_\Omega$.

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G)$ se décompose donc en

$$\mathcal{H}(G) = \bigoplus_{\mathfrak{s}\in\mathcal{B}(G)} e_{\mathfrak{s}} * \mathcal{H}(G) * e_{\mathfrak{s}}.$$

Chaque $e_{\mathfrak{s}} * \mathcal{H}(G) * e_{\mathfrak{s}}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{H}(G)$. La catégorie $\mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}}$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{M}(e_{\mathfrak{s}} * \mathcal{H}(G) * e_{\mathfrak{s}})$ des $e_{\mathfrak{s}} * \mathcal{H}(G) * e_{\mathfrak{s}}$-modules non dégénérés.

Remarque. L'idempotent $e_{\mathfrak{s}}$ n'est pas un élément de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G)$, mais de son complété (*cf.* I.1.3) $\overline{\mathcal{H}(G)}$.

Il reste à décrire le centre de chaque catégorie $\mathcal{M}(G)_{\Omega}$. Lorsque l'on prend une composante connexe Ω de $\Omega(G)$ donnée par une classe d'inertie de représentations supercuspidales de G, on a pu décrire la catégorie correspondante comme une catégorie de modules unitaires sur une algèbre unitaire, et décrire le centre de cette catégorie (c'est-à-dire le centre de l'algèbre unitaire en question), comme l'algèbre des fonctions sur Ω. Il s'agit maintenant d'obtenir des résultats semblables pour une composante connexe Ω quelconque. La première étape consiste à trouver pour ces catégories un progénérateur. Supposons que Ω soit donnée par un sous-groupe de Levi M et une classe d'inertie D de représentations supercuspidales de M. L'idée naïve est d'obtenir ce progénérateur en induisant de M à G le progénérateur de $\mathcal{M}(M)_D$. La difficulté qui apparaît dans cette approche est de montrer que l'on obtient bien ainsi un objet projectif de type fini. La démonstration de ce fait est délicate, et utilise la généralisation du lemme de Jacquet aux représentations non admissibles, ainsi que les propriétés de noethérianité de la catégorie $\mathcal{M}(G)$.

VI.7.5 Noethérianité de $\mathcal{M}(G)$

Dans cette section, nous montrons le résultat suivant qui complète ceux obtenus en VI.6 : soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, alors le foncteur i_P^G préserve les représentations de type fini. Ceci passe par des propriétés de noethérianité de la catégorie $\mathcal{M}(G)$ provenant du théorème de décomposition VI.7.2.

Dans une catégorie abélienne, un objet est noethérien si toute suite croissante de sous-objets est stationnaire (*cf.* Annexe A.I.2). Une catégorie abélienne telle que tout objet de type fini est noethérien sera dite noethérienne. Par exemple, la catégorie $A - \mathbf{mod}$, où A est un anneau noethérien, est noethérienne.

Proposition. *La catégorie $\mathcal{M}(G)$ est noethérienne.*

Démonstration. Considérons tout d'abord une composante supercuspidale $\mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}}$ de la décomposition VI.7.2, disons $\mathfrak{s} = [G, (\rho, W)]_G$ où (ρ, W) est donc une représentation supercuspidale irréductible de G. On a vu dans le corollaire VI.4.4 que la catégorie $\mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}} = \mathcal{M}(G)_{[\rho]}$ est équivalente à la catégorie des modules unitaires à droite sur une certaine $\mathbb{C}$-algèbre noethérienne. C'est donc une catégorie noethérienne.

Reprenons le foncteur $R : \mathcal{M}(G) \to \mathrm{Cusp}(G)$ de la section VI.7.2. Comme chaque catégorie $\mathcal{M}(M)_{sc}$ qui compose Cusp(G) se décompose (au sens de A.IX) d'après VI.3.5 en un produit $\mathcal{M}(M)_{sc} = \prod_D \mathcal{M}(M)_D$ où D décrit les classes d'inertie de représentations supercuspidales de M, on peut voir R comme un foncteur $R : \mathcal{M}(G) \to \prod_{(M,D)} \mathcal{M}(M)_D$ où M décrit les sous-groupes de Levi standard de G et D les classes d'inertie de représentations supercuspidales de

M. Comme chaque catégorie $\mathcal{M}(M)_D$ est noethérienne d'après ce qui précède, il en est de même de leur produit : en effet, un objet de type fini n'a qu'un nombre fini de composantes non nulles dans $\prod_{(M,D)} \mathcal{M}(M)_D$ puisque par définition, tel est le cas d'un système de générateurs fini, et l'assertion en découle facilement. Supposons que (π, V) soit une représentation de type fini de G et soit

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset \cdots$$

une suite de sous-représentations de V. Comme R est fidèle et exact (VI.7.2), si cette suite n'est pas stationnaire,

$$R(V_1) \subset R(V_2) \subset \cdots \subset R(V_n) \subset \cdots$$

ne l'est pas non plus. Mais comme on sait d'autre part que $R(V)$ est de type fini, ceci ne peut pas se produire puisque $\mathrm{Cusp}(G)$ est noethérienne. □

Théorème. *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Alors le foncteur i_P^G préserve les représentations de type fini.*

Démonstration. On peut bien sûr sans perte de généralité supposer que P est un sous-groupe parabolique standard de G Soit (ρ, W) dans $\mathcal{M}(M)$ une représentation de type fini. D'après la proposition ci-dessus, (ρ, W) est noethérienne. Nous allons montrer que la représentation $i_P^G(\rho, W)$ est noethérienne. Ceci implique bien entendu que $i_P^G(\rho, W)$ est de type fini.

Supposons dans un premier temps que (ρ, W) est supercuspidale. Appliquons le foncteur R à $i_P^G(\rho, W)$. D'après la la proposition VI.5.3, ne contribuent que les sous-groupe paraboliques standard $Q = LU$ tels que L et M soient conjugués. Pour un tel sous-groupe parabolique standard Q, la même proposition affirme que $r_Q^G \circ i_P^G(\rho, W)$ possède une filtration dont les quotients successifs sont les $w \cdot (\rho, W)$, $w \in W(L, M)/W_L$, qui sont des représentations supercuspidales de type fini donc noethériennes. Il s'ensuit que $r_Q^G \circ i_P^G(\rho, W)$ est noethérienne, et donc de même pour $R(i_P^G(\rho, W))$. Comme le foncteur R est exact et fidèle, il n'annule aucun de ces sous-quotients $w \cdot (\rho, W)$. On en déduit par un argument donné dans la démonstration de la proposition ci-dessus que $i_P^G(\rho, W)$ est noethérienne.

Dans le cas général, le lemme VI.7.2 exhibe un plongement

$$(\rho, W) \hookrightarrow IR(\rho, W) = \bigoplus_L i_{P'}^M(\rho_{M'})$$

où la somme porte sur les sous-groupes paraboliques standards $P' = M'N'$ de M et les $\rho_{M'}$ sont des représentations supercuspidales. On obtient donc par l'exactitude du foncteur i_P^G et la propriété de transitivité VI.1.4 un plongement

$$i_P^G(\rho, W) \hookrightarrow IR(\rho, W) = i_P^G(\oplus_L i_{P'}^M \rho_{M'}) = \bigoplus_L i_{P'}^G(\rho_{M'}).$$

Chaque facteur du membre de droite est noethérien, d'après ce qui précède, et l'on en déduit facilement que $i_P^G(\rho, W)$ aussi. □

VI.8 Familles algébriques de représentations

VI.8.1 (G, B)-modules

Soit B une $\mathbb{C}$-algèbre commutative noethérienne réduite (*i.e.* sans éléments nilpotents). Nous renvoyons le lecteur à [7] pour la notion de module plat.

Définition. Un (G, B)-module est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V muni d'une représentation lisse (π, V) de G et d'une structure de B-module plat, où les deux actions commutent. Notons $\mathcal{M}(G, B)$ la catégorie des (G, B)-modules. Si K est un sous-groupe compact ouvert de G, l'espace V^K est encore un B-module. Un (G, B)-module V est admissible si pour tout sous-groupe compact ouvert K de G, V^K est de type fini sur B.

Proposition. *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V muni d'une représentation lisse (π, V) de G et d'une structure de B-module, où les deux actions commutent. Alors V est un (G, B)-module admissible si et seulement si pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, V^K est un B-module projectif de type fini.*

<u>*Démonstration*</u>. D'après le corollaire A.X.5 et la proposition 5, A.X.4 de [12], il y a équivalence entre modules plats de présentation finie et modules projectifs de type fini. Comme B est noethérienne, un module de type fini est de présentation finie ([12], proposition 5 de A.X.4), donc un B-module de type fini est plat si et seulement s'il est projectif. D'autre part, pour tout B-module E, le morphisme naturel

$$E \otimes_B V^K \to (E \otimes_B V)^K$$

est un isomorphisme dont l'inverse est donné par

$$e \otimes v \mapsto e \otimes e_K \cdot v.$$

Enfin, le foncteur $j_K : V \mapsto V^K$ est exact, donc si V est un B-module plat, c'est-à-dire si le foncteur $\bullet \otimes_B V$ est exact, alors le foncteur

$$j_K(\bullet \otimes_B V) \simeq \bullet \otimes_B V^K$$

est exact, ce qui entraîne que V^K est plat. Ceci montre que si V est un (G, B)-module admissible, alors V^K est un module projectif de type fini. Réciproquement, si le foncteur

$$\bullet \otimes_B V^K$$

est exact pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, alors pour toute suite exacte courte de (G, B)-modules

$$0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0,$$

on a encore une suite exacte

$$0 \to E_1 \otimes_B V^K \to E_2 \otimes_B V^K \to E_3 \otimes_B V^K \to 0.$$

En prenant K de plus en plus petit, on obtient, comme les représentations E_i de G sont lisses

$$0 \to E_1 \otimes_B V \to E_2 \otimes_B V \to E_3 \otimes_B V \to 0,$$

ce qui montre que V est plat. $\square$

Remarque. A la fin de la démonstration, nous avons utilisé l'argument suivant, qui nous sera encore utile : si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V muni d'une représentation lisse (π, V) de G et d'une structure de B-module, où les deux actions commutent, alors V est plat en tant que B-module si et seulement si tous les V^K le sont, lorsque K décrit l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G.

Une $\mathbb{C}$-algèbre commutative noethérienne réduite B est l'algèbre des fonctions polynomiales d'une variété algébrique affine S (S s'identifie au spectre maximal $\mathrm{SpecMax}(B)$ de B). Rappelons que par définition le spectre maximal de B est l'ensemble des morphismes d'algèbres unitaires $\chi : B \to \mathbb{C}$. Si $\chi \in S$, on note $\Psi_\chi \in \mathrm{SpecMax}(B)$ le morphisme d'algèbre correspondant, I_χ son noyau (un idéal maximal de B), et l'on définit

$$V_\chi = V \otimes_B B/I_\chi$$

la spécialisation de V en χ. Cela reste une représentation lisse du groupe G. On peut voir le (G, B)-module (π, V) comme une famille algébrique (indexée par $S \simeq \mathrm{SpecMax}(B)$) de représentations lisses de G. On note $\mathbf{sp}_\chi$ le morphisme canonique de V dans V_χ. Comme $B/I_\chi \simeq \mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel, on note aussi $\mathbb{C}_{\Psi_\chi}$ le B-module $\mathbb{C}$ muni de l'action

$$b \cdot z = \Psi_\chi(b)z, \quad (b \in B,\, z \in \mathbb{C}).$$

Ainsi $V_\chi = V \otimes_B \mathbb{C}_{\Psi_\chi}$.

Lemme. *Si V est un (G, B)-module admissible, alors pour tout $\chi \in S$, V_χ est une représentation admissible de G.*

Démonstration. Si V^K est engendré par $v_1, \ldots, v_r$ en tant que B-module, alors $(V \otimes_B \mathbb{C}_\chi)^K = V^K \otimes_B \mathbb{C}_\chi$ est engendré par $v_1 \otimes 1, \ldots, v_r \otimes 1$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. □

Exemple. Soit (π, V) une représentation lisse de G. Notons $B = \mathbb{C}[\Lambda(G)]$ l'algèbre des polynômes sur la variété des caractères non ramifiés $\mathcal{X}(G)$ de G. Rappelons que l'évaluation en les points g de G définit un morphisme

$$\chi_{un} : G \to B^\times.$$

(Pour tout ceci voir V.2.4.)

Posons, pour tous $v \in V$, $b \in B$, $g \in G$

$$V_B = V \otimes_{\mathbb{C}} B, \quad \pi_B(g)(v \otimes b) = \pi(g) \cdot v \otimes \chi_{un}(g)b.$$

Vérifions que c'est un (G, B)-module, B agissant par multiplication sur le second facteur. D'une part, l'action de G et celle de B commutent : quels que soient $v \in V$, $b, b' \in B$, $g \in G$,

$$b' \cdot (\pi_B(g) \cdot (v \otimes b)) = b' \cdot (\pi(g) \cdot v \otimes \chi_{un}(g)b) = \pi(g) \cdot v \otimes b'\chi_{un}(g)b,$$

et

$$\pi_B(g) \cdot (b' \cdot (v \otimes b)) = \pi_B(g) \cdot (v \otimes b'b) = \pi(g) \cdot v \otimes \chi_{un}(g)b'b.$$

D'autre part $V \otimes_{\mathbb{C}} B$ est un B-module libre, donc plat.

Si g est dans ${}^0G$, $\chi_{un}(g) = 1$, donc l'action de g sur B est triviale. Ceci est vrai en particulier pour tout élément d'un sous-groupe compact K de G. Il s'ensuit que $V_B^K = V^K \otimes_{\mathbb{C}} B$, et donc V_B est un (G, B)-module admissible dès que V est admissible.

Si $\chi \in \mathcal{X}(G)$, la spécialisation de π_B en χ est isomorphe à $\pi \otimes \chi$:

$$V_B \otimes_B B/I_\chi = (V \otimes B) \otimes_B \mathbb{C}_{\Psi_\chi} = V \otimes \mathbb{C}_\chi,$$

où $\mathbb{C}_\chi$ est $\mathbb{C}$ vu comme espace de la représentation χ de G. En effet l'action de G est donnée par

$$\begin{aligned} g \cdot (v \otimes b \otimes z) &= \pi_B(g) \cdot (v \otimes b) \otimes z = \pi(g) \cdot v \otimes \chi_{un}(g)b \otimes z \\ &= \pi(g) \cdot v \otimes b \otimes \Psi_\chi(\chi_{un}(g))z = \pi(g) \cdot v \otimes b \otimes \chi(g)z \\ &= (\pi \otimes \chi)(g) \cdot v \otimes b \otimes z. \end{aligned}$$

On a utilisé (V.2.4.1) pour l'avant dernière égalité.

VI.8.2 (G, B)-modules et induction

Si $P = MN$ est un sous-groupe parabolique de G, et si (σ, E) est un (M, B)-module, alors $i_P^G(E)$ est muni d'une structure de B-module (on fait agir B sur l'espace d'arrivée E des fonctions dans $i_P^G(E)$). Il est évident que l'action du groupe, par translation à droite des fonctions, commute à cette action de B. Pour montrer que $i_P^G(\sigma, E)$ est un (G, B)-module, il reste à montrer que c'est un B-module plat. On utilise pour cela la remarque VI.8.1 : il suffit de montrer que pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, $i_P^G(E)^K$ est un B-module plat. Or nous avons décrit $i_P^G(E)^K$ en III.2.2. Soit Ω un système de représentants dans G des doubles classes $P\backslash G/K$, et pour tout $g \in \Omega$, soit K_M^g la projection de $P \cap gKg^{-1}$ sur $M \simeq P/N$. Rappelons que comme $P\backslash G$ est compact, Ω est un ensemble fini. On a alors

$$i_P^G(E)^K \simeq \bigoplus_{g\in\Omega} E^{K_M^g} \tag{VI.8.2.1}$$

et cet isomorphisme est un isomorphisme de B-modules. Comme E est un B-module plat, tous les $E^{K_M^g}$ sont plats, ce qui montre que $i_P^G(E)^K$ est plat. Ceci nous montre que nous avons un foncteur

$$i_P^G : \mathcal{M}(M, B) \to \mathcal{M}(G, B).$$

Il est alors facile de généraliser le lemme III.2.3 :

Lemme. *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Alors le foncteur*

$$i_P^G : \mathcal{M}(M, B) \to \mathcal{M}(G, B)$$

envoie les modules admissibles sur des modules admissibles.

Soit C une autre $\mathbb{C}$-algèbre commutative noethérienne réduite, et supposons que C soit un B-module. Les considérations de la section I.2.3, appliquées ici au cas de B et C qui sont commutatives et unitaires, nous donnent d'une part un pseudo foncteur d'oubli (isomorphe au foncteur d'oubli dans ce cas)

$$\mathcal{M}(C) \longrightarrow \mathcal{M}(B), \quad E \mapsto \mathrm{Hom}_C(C, E) \simeq E$$

et son adjoint à gauche

$$\mathcal{M}(B) \longrightarrow \mathcal{M}(C), \quad W \mapsto C \otimes_B W,$$

que l'on appelle dans ce cadre foncteur de changement de base de B à C. Si V est un B-module plat, alors pour tout C-module E,

$$E \otimes_C (C \otimes_B V) \simeq (E \otimes_C C) \otimes_B V.$$

Comme le foncteur d'oubli de C à B est trivialement exact, on voit que $C \otimes_B V$ est un C-module plat. Ceci montre que l'on a un foncteur de changement de base

$$\mathcal{M}(G, B) \longrightarrow \mathcal{M}(G, C), \quad V \mapsto V \otimes_B C.$$

Proposition. *Le changement de base commute à l'induction. Plus précisément, si E est un (B, M)-module, alors $i_P^G(E) \otimes_B C$ est naturellement isomorphe (comme (G, C)-module) à $i_P^G(E \otimes_B C)$.*

Démonstration. Démontrons d'abord que pour tout sous-groupe ouvert compact K de G,

$$(i_P^G(E) \otimes_B C)^K \quad \text{et} \quad i_P^G(E \otimes_B C)^K$$

sont naturellement isomorphes comme espaces vectoriels. On utilise la description des K-invariants d'une induite parabolique rappelée ci-dessus (VI.8.2.1) :

$$(i_P^G(E) \otimes_B C)^K \simeq i_P^G(E)^K \otimes_B C \simeq \bigoplus_{g \in \Omega} E^{K_M^g} \otimes_B C$$

et d'autre part

$$i_P^G(E \otimes_B C)^K \simeq \bigoplus_{g \in \Omega} (E \otimes_B C)^{K_M^g} \simeq \bigoplus_{g \in \Omega} E^{K_M^g} \otimes_B C.$$

Tous les isomorphismes apparaissant dans les deux équations ci-dessus sont naturels, et en passant à la limite lorsque K devient de plus en plus petit, on obtient $i_P^G(E) \otimes_B C \simeq i_P^G(E \otimes_B C)$. Donnons maintenant une formule pour cet isomorphisme :

$$\text{(VI.8.2.2)} \qquad i_P^G(E) \otimes_B C \to i_P^G(E \otimes_B C), \quad f \otimes c \mapsto \tilde{f}$$

où la fonction $\tilde{f} : G \to E \otimes_B C$ est donnée par

$$\tilde{f}(g) = f(g) \otimes c.$$

Il est clair que (VI.8.2.2) est un isomorphisme de (G, C)-modules. □

On peut appliquer ceci dans le cas particulier de la spécialisation :

Corollaire. *La spécialisation commute à l'induction. Plus précisément, si E est un (B, M)-module, alors pour tout $\chi \in S$, $\mathbf{sp}_\chi(i_P^G(E))$ est naturellement isomorphe à $i_P^G(\mathbf{sp}_\chi(E)) = i_P^G(E_\chi)$, l'isomorphisme étant induit par $f \mapsto \tilde{f}$, $f \in i_P^G(E)$, où*

$$\tilde{f}(g) = \mathbf{sp}_\chi(f(g)).$$

VI.8.3 (G, B)-modules et restriction

Si $P = MN$ est un sous-groupe parabolique de G, et si (π, V) est un (G, B)-module, alors $r_P^G(\pi, V)$ est muni d'une structure de B-module. Il est évident que l'action de M sur $r_P^G(V)$ commute à cette action de B. Montrons que $r_P^G(V)$ est un B-module plat. Soit E un B-module quelconque. Comme, en tant qu'espace vectoriel

$$r_P^G(V) = V_N = V/V(N) = V \otimes_{\mathcal{H}(N)} \mathbb{C}$$

où $\mathbb{C}$ est le $\mathcal{H}(N)$-module trivial, on a

$$E \otimes_B r_P^G(V) = E \otimes_B (V \otimes_{\mathcal{H}(N)} \mathbb{C}) \simeq (E \otimes_B V) \otimes_{\mathcal{H}(N)} \mathbb{C}.$$

Or V est un B-module plat, donc le foncteur $\bullet \otimes_B V$ est exact. D'autre part le foncteur de restriction $\bullet \otimes_{\mathcal{H}(N)} \mathbb{C}$ est aussi exact. Ceci montre que $r_P^G(V)$ est un B-module plat. Ainsi nous obtenons un foncteur

$$r_P^G : \mathcal{M}(G, B) \longrightarrow \mathcal{M}(M, B)$$

La proposition VI.1.3 se généralise alors aux (G, B)-modules :

Proposition. *Le foncteur $r_P^G : \mathcal{M}(G,B) \longrightarrow \mathcal{M}(M,B)$ préserve les B-modules de type fini.*

Là encore, le point crucial est la compacité de $P\backslash G$, et donc la finitude de $P\backslash G/K$ pour tout sous-groupe ouvert compact K de G.

VI.8.4 Utilisation de la platitude

Comme dans les sections précédentes, B est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative noethérienne réduite, et S la variété algébrique affine qui lui correspond. Dans les applications, nous aurons besoin de nous ramener au cas où, lorsque (π, V) est un (G,B)-module admissible, et K est un sous-groupe groupe ouvert compact quelconque de G, le B-module V^K est libre de type fini (ce qui est bien sûr une condition plus forte que projectif de type fini, tout module projectif étant facteur direct d'un module libre). Or un module projectif de type fini est localement libre . Plus précisément, si $f \in B$ est non nul, notons T_f la partie multiplicative de B constituées des puissances de f, B_f le localisé de B en T_f, pour tout module M, M_f le localisé de M (voir A.III.1, exemple 3 et 4) et S_f l'ouvert de Zariski de S des idéaux maximaux ne contenant pas f.

Théorème. *Un B-module M est projectif de type fini si et seulement s'il existe des éléments $(f_i)_{i=1,\dots,r}$ de B engendrant B sur lui-même, tels que pour tout $i = 1, \dots, r$ la localisation M_{f_i} soit un B_{f_i}-module libre de type fini.*

Démonstration. Voir [7], chapitre II, §5, Théorème 1.

Nous allons maintenant voir des applications de ce résultat. Soit (π, V) un (G,B)-module admissible, et soit ϕ un morphisme de (G,B)-module de V dans lui-même, et pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, soit

$$\phi_K : V^K \to V^K$$

le morphisme de B-modules induit. Comme V^K est projectif de type fini, on trouve une famille finie $(f_i)_{i=1,\dots,r}$ d'élément de B engendrant B sur lui-même, tels que pour tout $i = 1, \dots, r$ la localisation $V^K_{f_i}$ soit un B_{f_i} module libre de type fini. Soit f l'un des f_i et pour tout point x dans S_f, notons

$$\mathbf{sp}_x(\phi) : \mathbf{sp}_x(V) \to \mathbf{sp}_x(V)$$
$$\mathbf{sp}_x(\phi_K) : \mathbf{sp}_x(V^K) \to \mathbf{sp}_x(V^K)$$

les morphismes obtenus par spécialisation.

Remarquons au passage que l'on a bien sûr $\mathbf{sp}_x(V^K_f) = \mathbf{sp}_x(V^K)$.

Proposition. *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, et soit (ρ, W) une représentation irréductible de M. Pour tout ψ dans $\mathcal{X}(M)$, posons $\pi_\psi = i_P^G(\rho \otimes \psi)$. Si π_{ψ_0} est irréductible pour un certain ψ_0 dans $\mathcal{X}(M)$, alors π_ψ est irréductible pour tout ψ dans un ouvert de Zariski de la variété algébrique $\mathcal{X}(M)$.*

Démonstration. Posons $B = \mathbb{C}[\Lambda(M)]$. C'est l'algèbre des fonctions de la variété algébrique $\mathcal{X}(M)$. Considérons le (M,B)-module

$$(\rho_B, W_B) = (\rho \otimes \chi_{un}, W \otimes_{\mathbb{C}} B)$$

de l'exemple VI.8.1, et le (G, B)-module induit (*cf.* VI.8.2)

$$(\pi_B, V_B) = i_P^G(\rho_B, W_B).$$

Soit K un sous-groupe ouvert compact de G. L'espace V_B^K est un B-module, mais possède aussi une structure de module pour l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, K)$, héritée de l'action de $\mathcal{H}(G)$. Les actions de B et $\mathcal{H}(G, K)$ sur V_B^K commutent.

Spécialisons maintenant en $\psi \in \mathcal{X}(M)$. On a, d'après le corollaire VI.8.2

$$\mathbf{sp}_\psi(\pi_B, V_B) = \mathbf{sp}_\psi(i_P^G(\rho_B, W_B)) = i_P^G(\rho \otimes \psi).$$

Notons V_ψ l'espace de cette représentation. On a alors

$$V_\psi^K = i_P^G(\rho \otimes \psi)^K \simeq \mathbf{sp}_\psi(V_B)^K = \mathbf{sp}_\psi(V_B^K).$$

Pour tout $h \in \mathcal{H}(G, K)$, notons $\pi_B(h)$ l'action de h sur V_B^K et $\pi_\psi(h)$ l'action de h sur $\mathbf{sp}_\psi(V_B^K)$. Ceci définit des morphismes

$$\pi_B^K : \mathcal{H}(G, K) \to \mathrm{End}_B(V_B^K),$$

$$\pi_\psi^K : \mathcal{H}(G, K) \to \mathrm{End}(V_\psi^K).$$

D'après le théorème III.1.5, on voit que $i_P^G(\rho \otimes \psi)$ est irréductible si et seulement si pour tout sous-groupe ouvert compact K de G suffisamment petit, V_ψ^K est un $\mathcal{H}(G, K)$-module irréductible. D'après le théorème de Burnside (voir [29] 3.1.3) tel est le cas exactement lorsque π_ψ^K est surjective. Le théorème III.1.5 montre même en fait que $i_P^G(\rho \otimes \psi)$ est irréductible s'il existe un sous-groupe ouvert compact K de G tel que V_ψ^K soit un $\mathcal{H}(G, K)$-module non nul et irréductible.

Supposons que $\pi_{\psi_0}^K$ soit surjective, pour un tel K, de sorte que $V_{\psi_0}^K$ soit un $\mathcal{H}(G, K)$-module irréductible, et constatons que la description des K-invariants (VI.8.2.1) dans la représentation induite V_ψ montre que le fait que V_ψ^K soit non nul est indépendant de ψ (ce qui dépend de ψ bien sûr est la structure de $\mathcal{H}(G, K)$-module de V_ψ^K). Il s'agit de montrer que π_ψ^K est surjective pour tout ψ dans un ouvert de Zariski de la variété algébrique $\mathcal{X}(M)$.

Reprenons la discussion précédant l'énoncé de la proposition (donc ici $S = \mathcal{X}(M)$). Ce ψ_0 est dans l'un des ouverts principaux S_f, où le localisé $V_{B,f}^K$ est libre sur B_f. Notons encore

$$\pi_B^K : \mathcal{H}(G, K) \to \mathrm{End}_{B_f}(V_{B,f}^K),$$

et choisissons une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{End}_{B_f}(V_{B,f}^K)$ sur B_f. Spécialisons en $\psi \in S_f$: $\mathcal{B}_\psi = \mathbf{sp}_\psi(\mathcal{B})$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$\mathbf{sp}_\psi(\mathrm{End}_{B_f}(V_{B,f}^K)) = \mathrm{End}(V_\psi^K).$$

Choisissons une famille libre $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}(G, K)$ telle que l'image de $\mathcal{F}$ par π_{ψ_0} soit exactement la base $\mathcal{B}_{\psi_0}$. Appelons F le sous-espace de $\mathcal{H}(G, K)$ engendré par $\mathcal{F}$, et notons $M = (m_{ij})_{ij}$ la matrice de la restriction de π_B^K à F : c'est une matrice à coefficients dans B_f, et $\Psi_\psi(m_{ij})$ est une matrice à coefficients complexes, à savoir la matrice de la restriction de π_ψ^K à F dans les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}_\psi$. Le déterminant de cette matrice est un polynôme en les m_{ij}, qui vaut 1 en ψ_0. Il est donc non nul sur un ouvert de Zariski de S_f. Sur cet ouvert, π_ψ^K est donc surjective.

VI.8.5 Irréductibilité générique des induites

En utilisant le lemme géométrique et la proposition VI.8.4 nous allons montrer le théorème suivant.

Théorème. *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, et soit (ρ, W) une représentation supercuspidale irréductible de M. Pour tout ψ dans $\mathcal{X}(M)$, posons $\pi_\psi = i_P^G(\rho \otimes \psi)$. Alors π_ψ est irréductible pour tout ψ dans un ouvert de Zariski non vide de la variété algébrique $\mathcal{X}(M)$.*

Démonstration. D'après la proposition VI.8.4, il suffit de montrer que π_{ψ_0} est irréductible pour un certain ψ_0 dans $\mathcal{X}(M)$.

Soit A la composante déployée de M. Soit χ le caractère central de ρ. La restriction du caractère $|\chi|$ de $Z(M)$ à A est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et donc est trivial sur ${}^0A$. Il définit donc un caractère de $\Lambda(A) = A/{}^0A$. Comme ce réseau s'injecte avec un indice fini dans $\Lambda(M)$ (*cf.* V.2.6), on peut prolonger $|\chi|$ en un caractère $\psi \in \mathcal{X}(M)$. On obtient $|\psi^{-1}\chi| = 1$ sur A, donc $|\psi^{-1}\chi|$ se factorise en un caractère du groupe compact $Z(M)/A$ et comme tout caractère d'un groupe compact est unitaire, $|\psi^{-1}\chi| = 1$ sur $Z(M)$. Comme $\rho\otimes\psi^{-1}$ est supercuspidale à caractère central unitaire, elle est unitaire. En effet, une représentation supercuspidale est compacte modulo le centre d'après le théorème VI.2.1, donc essentiellement de carré intégrable modulo le centre, et l'on peut alors conclure par le lemme IV.3.2. Quitte à translater par un tel caractère ψ^{-1}, on peut donc supposer, dans l'énoncé du théorème, que ρ est unitaire. De plus, pour tout $\psi \in \mathcal{X}(M)$ unitaire, $\rho \otimes \psi$ est alors unitaire, et donc aussi $i_P^G(\rho \otimes \psi, W)$. En particulier, cette dernière représentation est complètement réductible.

La représentation $r_P^G i_P^G(\rho \otimes \psi, W)$ admet d'après VI.5.3 (*iii*) une filtration dont les quotients sont de la forme $w \cdot (\rho \otimes \psi)$ pour $w \in W(M)/W_M$. Nous allons montrer que pour tout ψ en dehors d'un fermé de Zariski de la variété réelle $\mathrm{Im}\,(\mathcal{X}(M))$, les caractères centraux de $\rho \otimes \psi$ et de $w \cdot (\rho \otimes \psi)$ sont différents si w est non trivial. Comme ci-dessus, notons χ le caractère central de ρ. Le caractère central de $\rho \otimes \psi$ est donc $\chi\psi_{|Z(M)}$ et celui de $w \cdot (\rho \otimes \psi)$ est $w \cdot (\chi\psi_{|Z(M)})$. Comme le réseau $\Lambda(A)$ s'injecte avec un indice fini dans $\Lambda(M)$, il suffit de montrer que $\chi\alpha$ est différent de $w \cdot (\chi\alpha)$ pour tout α en dehors d'un fermé de Zariski de $\mathcal{X}(A)$. Mais ceci découle du fait que $W(M)/W_M \simeq W(A)$ (V.4.3.3) qui agit fidèlement sur $\mathfrak{a}^*$ (V.3.5) et de la description de $\mathrm{Im}\,(\mathcal{X}(M))$ en V.3.20. Nous allons conclure grâce au

Lemme. *Soit (π, V) une représentation de G admettant une filtration*

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

dont les quotients successifs $V_i' = V_i/V_{i-1}$ ont des caractères centraux distincts. Alors

$$V \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} V_i'.$$

Démonstration. Il est clair que le résultat est vrai pour les représentations restreintes à $Z(G)$. Mais comme G et $Z(G)$ commutent, l'action de G préserve la décomposition en caractères distincts de $Z(G)$. □

On déduit de ce qui précède que $r_P^G i_P^G(\rho \otimes \psi, W)$ se décompose en une somme directe de modules de la forme $w \cdot (\rho \otimes \psi)$, $w \in W(M)/W_M$ dont les caractères centraux sont deux à deux distincts, pour tout ψ en dehors d'un fermé de Zariski de $\mathrm{Im}\,(\mathcal{X}(M))$. On a alors en utilisant la réciprocité de Frobenius

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(\pi_\psi,\pi_\psi) &= \mathrm{Hom}_M(r_P^G(\pi_\psi),\rho\psi)\\ &= \bigoplus_{w\in W(M)/W_M} \mathrm{Hom}_M(w\cdot(\rho\psi),\rho\psi) = \mathrm{Hom}_M(\rho\psi,\rho\psi)\end{aligned}$$

qui est clairement de dimension 1 puisque $\rho\psi$ est irréductible. On en déduit que π_ψ est irréductible. Ceci termine la démonstration du théorème. □

VI.8.6 Une autre application

On se replace dans la situation de VI.8.4, avant l'énoncé de la proposition. Dans ce contexte, soit Ξ un ensemble de points Zariski dense dans S (comme B est réduite, les $x\in\Xi$ séparent les éléments de B).

Fixons une base de V_f^K et soit $(m_{kl})_{k,l}$ la matrice de l'endomorphisme

$$\phi_{K,f}:\ V_f^K \to V_f^K$$

dans cette base. Comme Ξ est Zariski dense dans S, son intersection avec l'ouvert S_f est encore Zariski dense, et pour tout $x\in S_f\cap\Xi$, la matrice $(\Psi_x(m_{k,l}))_{k,l}$ est une matrice à coefficients complexes. C'est la matrice de $\mathbf{sp}_x(\phi_K)$

Proposition. *Supposons que pour tout $x\in\Xi$, la spécialisation en x de V soit irréductible. Alors ϕ est l'action d'un élément $b\in B$.*

Démonstration. D'après le lemme de Schur, pour tout $x\in\Xi$, $\mathbf{sp}_x(\phi)$ est un opérateur scalaire, donc il en est de même de $\mathbf{sp}_x(\phi_K)$. Ainsi la matrice $(\Psi_x(m_{k,l}))_{k,l}$ vérifie-t-elle $\Psi_x(m_{k,l})=0$ si $k\neq l$ et $\Psi_x(m_{k,k})=\Psi_x(m_{l,l})$ pour tous k,l. Comme Ξ est Zariski dense, on en déduit que $(m_{kl})_{k,l}$ est scalaire. On voit donc que $\phi_{K,f}$ est un donné par l'action d'un $b\in B_f$. Ceci valant pour tout sous-groupe ouvert compact K de G et pour tous les f_i, on en déduit que ϕ est donné par l'action d'un $b\in B$. □

Exemple. Soit $P=MN$ un sous-groupe parabolique de G, et soit (ρ,W) une représentation supercuspidale irréductible de M. On reprend les notations de la démonstration de la proposition VI.8.4. Soit

$$\phi:\ V_B\to V_B$$

un morphisme de (G,B)-modules. Grâce au théorème d'irréductibilité générique, les hypothèses de la proposition ci-dessus sont satisfaites, et l'on en conclut qu'il existe un $b\in B$ tel que ϕ est l'action de b.

Considérons maintenant le cas $M=P=G$. Soit z un élément du centre de la catégorie $\mathcal{M}(G)_{[\rho]}$. C'est par définition une transformation naturelle du foncteur identique qui donne en particulier un endomorphisme G-équivariant de $W_B=W\otimes B$. On obtient donc que l'action de z dans $W_B=W\otimes B$ est donnée par l'action d'un élément $b\in B$ et l'on retrouve ainsi les résultats de VI.4.5.

VI.9 Le second théorème d'adjonction

VI.9.1 Lemme de Jacquet généralisé

L'énoncé du théorème qui suit ne diffère du théorème VI.6.1 que part le fait que l'on fait plus d'hypothèse d'admissibilité sur la représentation. La démonstration en devient beaucoup plus délicate

Théorème. *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, de composante déployée A, et soit (π, V) une représentation lisse de G. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G admettant une décomposition d'Iwahori selon P. Alors l'application de projection $j : V \to V_N$ envoie surjectivement V^K sur $(V_N)^{K_M}$.*

Démonstration. On reprend les points de la démonstration du théorème VI.6.1 qui n'utilisent pas l'hypothèse d'admissibilité de (π, V). Tout d'abord on vérifie que l'image de V^K par j est bien dans $(V_N)^{K_M}$. On choisit alors $t \in C_A^{++}$. L'ensemble $\{t^{-m}K_{\bar{N}}t^m | \, m \in \mathbb{N}\}$ forme une base de voisinages de l'identité dans $\bar{N}$, et la réunion des $t^{-m}K_N t^m$, $m \in \mathbb{N}$ est égale à N (Théorème V.5.2).

Soit $v \in V^K$, et soit $m \in \mathbb{N}$. On a encore, comme en VI.6.1

$$j(\pi(e_K)\pi(t^m) \cdot v) = \pi_N(t^m) \cdot j(v). \tag{VI.9.1.1}$$

Ceci montre que

$$\pi_N(t^m) \cdot j(V^K) \subset j(V^K) \tag{VI.9.1.2}$$

Bien que $\pi_N(t^m)$ soit inversible sur $j(V) = V_N$, sans l'hypothèse d'admissibilité, l'inclusion ci-dessus peut être stricte.

Soit $\bar{v} \in V_N^{K_M}$, toujours sans utiliser l'hypothèse d'admissibilité, on a montré qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\pi_N(t^m) \cdot \bar{v} \in j(V^K), \tag{VI.9.1.3}$$

c'est-à-dire que l'on a

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \pi(t^{-m}) \cdot j(V^K) = V_N^{K_M}. \tag{VI.9.1.4}$$

Considérons la distribution $a_{t,K} = e_K * \delta_t * e_K \in \mathcal{H}(G, K)$, et notons A l'endomorphisme de V^K donné par l'action de $a_{t,K}$.

Lemme. *On a*

$$V(N) \cap V^K = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \ker \pi(a_{t^i,K}) \right) \cap V^K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \ker A^i.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que d'après le lemme V.5.3, on a $a_{t^i,K} = (a_{t,K})^i$. Posons $N_i = t^{-i}K_N t^i$ et rappelons que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i = N$. D'après la proposition III.2.9 , on a alors $V(N) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \ker e_{N_i}$, d'où

$$V(N) \cap V^K = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \ker e_{N_i} \right) \cap V^K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \ker e_{N_i | V^K}.$$

$$\begin{aligned}\text{Or } a_{t^i,K} &= e_K * \delta_{t^i} * e_K = e_{K_N} * e_{K_M} * e_{K_{\bar N}} * \delta_{t^i} * e_K \\ &= e_{K_N} * e_{K_M} * \delta_{t^i} * e_{t^{-i}K_{\bar N}t^i} * e_K = e_{K_N} * \delta_{t^i} * e_{t^{-i}K_M t^i} * e_K \\ &= \delta_{t^i} * e_{t^{-i}K_N t^i} * e_K = \delta_{t^i} * e_{N_i} * e_K. \end{aligned} \tag{VI.9.1.5}$$

On en déduit que la restriction à V^K de $a_{t^i,K}$ coïncide avec la restriction de $\delta_{t^i} * e_{N_i}$. Comme δ_{t^i} est inversible, $\ker \pi_K(a_{t^i,K}) = \ker A^i = \ker e_{N_i|V^K}$. □

Nous avons maintenant besoin de la notion de localisé d'un espace vectoriel en un endomorphisme de cet espace et d'endomorphisme finalement stable. Les définitions et les résultats utilisés sont développés dans les annexes, en A.I, exemple 5 et C.II.

Lemme. *Le localisé de V^K en A est naturellement isomorphe à*

$$(V_N^{K_M}, \pi_N(t)),$$

le morphisme canonique $\iota : (V^K, A) \to (V_N^{K_M}, \pi_N(t))$ étant donné par j.

Démonstration. Reprenons les résultats du lemme A.III.1 qui décrivent le localisé. Le localisé de V^K en A est d'après ce lemme, (naturellement) isomorphe au localisé de $V^K/(\cup_{n\in\mathbb{N}} \ker A^i)$ en A', où A' est l'endomorphisme induit par A. D'après le lemme ci-dessus

$$V^K/(\cup_{n\in\mathbb{N}} \ker A^i) = V^K/(V(N) \cap V^K) \simeq j(V^K)$$

et l'endomorphisme A' est donné par $\pi_N(t)$ (ceci résulte de (VI.9.1.1). Il reste maintenant à voir que $(V_N^{K_M}, \pi_N(t))$ est bien ce localisé. D'après le lemme A.III.1, il suffit de vérifier que $\pi_N(t)$ est inversible sur $(V_N)^{K_M}$ et que

$$V_N^{K_M} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_N(t)^{-i} j(V^K). \tag{VI.9.1.6}$$

Tout d'abord, comme $\pi(e_{K_M})\pi(t) = \pi(t)\pi(e_{t^{-1}K_M t}) = \pi(t)\pi(e_{K_M})$, on a $\pi_N(e_{K_M})\pi_N(t) = \pi_N(t)\pi_N(e_{K_M})$ et donc $\pi_N(t)$ définit bien un endomorphisme de $V_N^{K_M}$, et de même pour $\pi_N(t^{-1})$. L'égalité (VI.9.1.6) est une reformulation de (VI.9.1.4). □

Proposition. *Le morphisme A est finalement stable. Plus précisément, il existe une constante $b = b(G, K)$ ne dépendant que de G et K telle que pour toute représentation lisse (π, V), A^b est un endomorphisme stable de V^K. Posons $V_0^K = \ker A^b$, $V_*^K = \operatorname{Im} A^b$. On a alors*

$$V^K = V_0^K \oplus V_*^K.$$

Le localisé de V^K en A est alors aussi (naturellement) isomorphe à $(V_*^K, A_{|V_*^K})$, le morphisme canonique ι étant donné par la projection sur V_*^K parallèlement à V_0^K. De plus la constante b peut être choisie plus petite que la constante $c(G, K)$ du théorème d'admissibilité uniforme VI.2.3.

Avant de passer à la démonstration de cette proposition, qui occupera plusieurs paragraphes, finissons la démonstration du théorème. On déduit des deux lemmes et de la proposition que j réalise un isomorphisme (naturel) de V_*^K dans $V_N^{K_M}$ et que le noyau de j sur V^K est V_0^K. Nous avons fait plus que simplement montrer la surjectivité dans l'énoncé du théorème, car la démonstration fournit une section de $j : V^K \to V_N^{K_M}$, en l'occurrence le sous-espace V_*^K. □

Remarques. 1. La décomposition $V^K = V_0^K \oplus V_*^K$ ne dépend pas du choix de t dans C_A^{++}. Si (π, V) est admissible, on retrouve la décomposition de la proposition VI.6.1.

— 2. Il existe des sous-groupes ouverts compacts C de N et $\bar{C}$ de $\bar{N}$ tels que pour tout $(\pi, V) \in \mathcal{M}(G)$,

$$V_0^K = V^K \cap \ker e_C, \quad V_*^K = e_K * e_{\bar{C}} \cdot V$$

— 3. Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in A^+(\epsilon)$,

$$V_0^K = \ker \pi(a_{t,K}), \quad V_*^K = \operatorname{Im} \pi(a_{t,K}).$$

Démonstration. Le premier point est la généralisation de la proposition VI.6.1. Il se démontre de la même manière en utilisant le fait que pour tout autre élément s de C_A^{++}, d'après le corollaire V.5.3, on a pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$a_{s^n,K} a_{t^n,K} = a_{(st)^n,K}.$$

Il découle aussi du second point.

Pour le second point, il suffit de choisir C tel que $t^{-b} K_N t^b \subset C$ et $t^b K_{\bar{N}} t^{-b} \subset \bar{C}$. On a alors d'après (VI.9.1.5), pour tout $v \in V_0^K = \ker \pi(a_{t^b,K})$,

$$0 = \pi(a_{t^b,K}) \cdot v = e_K * \delta_{t^b} * e_K \cdot v = \delta_{t^b} * e_{N_b} \cdot v.$$

Comme l'action de δ_{t^b} est inversible, on voit que $v \in \ker e_{N_b}$, et comme $N_b \subset C$, on a $e_C = e_C * e_{N_b}$, et donc $v \in \ker e_C \cap V^K$. Réciproquement, si $v \in \ker e_C$, alors $v \in V(N)$ (proposition III.2.9).

Pour montrer $V_*^K = e_K * e_{\bar{C}} \cdot V$, on utilise l'égalité

$$a_{t^b,K} = e_K * e_{\bar{N}_b} * \delta_{t^b},$$

où $\bar{N}_b = t^b \bar{K}_N t^{-b}$, qui se montre comme (VI.9.1.5). Comme $\bar{N}_b \subset \bar{C}$ par hypothèse, on a $e_{\bar{N}_b} * e_{\bar{C}} = e_{\bar{C}}$, et l'on obtient

$$V_*^K = a_{t^b,K} \cdot V = e_K * e_{\bar{N}_b} * \delta_{t^b} \cdot V = e_K * e_{\bar{N}_b} \cdot V \supset e_K * e_{\bar{C}} \cdot V.$$

Réciproquement, comme A^b est stable, $V_*^K = \pi(a_{t^{bm},K}) \cdot V^K$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, et pour m assez grand

$$\bar{C} \subset \bar{N}_{bm} = t^{bm} \bar{K}_N t^{-bm},$$

ce qui donne l'inclusion dans l'autre sens.

Le troisième point résulte assez facilement du deuxième. En effet, on sait (théorème V.5.2) qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, C et $\bar{C}$ étant comme ci-dessus, pour tout $t \in A^+(\epsilon)$,

$$C \subset t^{-1} K_N t, \quad \bar{C} \subset t K_{\bar{N}} t^{-1}.$$

On a alors comme ci-dessus, pour tout $v \in V^K$,

$$\pi(a_{t,K} \cdot v = \delta_t * e_{t^{-1} K_N t} \cdot v,$$

et l'on en déduit que $\ker \pi(a_{t,K})_{|V^K} = \ker \pi(e_{t^{-1}K_N t})_{|V^K} \subset V^K \cap V(N) = V_0^K$ (voir la démonstration du lemme ci-dessus). Comme $C \subset t^{-1} K_N t$, $e_{t^{-1}K_N t} = e_{t^{-1}K_N t} * e_C$, tout $v \in V_0^K = V^K \cap \ker e_C$ est dans $\ker \pi(e_{t^{-1}K_N t})_{|V^K}$, donc dans $\ker \pi(a_{t,K})_{|V^K}$. De même

$$V_*^K = e_K * e_{\bar{C}} \cdot V \supset e_K * e_{\bar{C}} * e_{t K_{\bar{N}} t^{-1}} \cdot V = e_K * e_{t K_{\bar{N}} t^{-1}} \cdot V = \pi(a_{t,K}) \cdot V.$$

La réciproque vient de

$$V_*^K = \pi(a_{t^b,K}) \cdot V \subset \pi(a_{t,K}) \cdot V.$$

□

Les paragraphes suivants sont consacrés à la démonstration de la proposition.

VI.9.2 Un cas particulier

Soit D une classe d'inertie de représentations irréductibles supercuspidales d'un sous-groupe de Levi L de G, et (ρ, W) une représentation supercuspidale dans cette classe d'inertie. Rappelons que nous avons introduit dans la remarque VI.4.1 un progénérateur $(\Pi_1, V_{\Pi_1}) = \mathrm{ind}_{{}^0L}^L(\mathrm{Res}_{{}^0L}^L(\rho, W))$ de $\mathcal{M}(L)_D$. D'autre part, il a été remarqué que

$$V_{\Pi_1} \simeq \mathrm{ind}_{{}^0L}^L(\mathrm{Triv}) \otimes W \simeq F \otimes W = W_F,$$

où F est l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathcal{X}(L)$. En effet, $\mathrm{ind}_{{}^0L}^L(\mathrm{Triv})$ est isomorphe à $\mathbb{C}[\Lambda(L)]$, l'algèbre du groupe $\Lambda(L) = L/{}^0L$. Notons simplement $(\Pi_1, V_{\Pi_1}) = (\Pi_1, V_1)$ pour alléger les notations. Clairement, V_1 est un (L, F)-module admissible (un cas particulier de l'exemple VI.8.1). D'après le lemme VI.8.2, si Q est un sous-groupe parabolique de facteur de Levi L, alors

$$(\Pi, V_\Pi) = i_Q^G(\Pi_1, V_1)$$

est un (G, F)-module admissible.

Le corollaire VI.8.2 affirme que la spécialisation de V_Π en $\chi \in \mathcal{X}(L)$ est

$$\mathbf{sp}_\chi(\Pi, V_\Pi) = \mathbf{sp}_\chi(i_Q^G(\Pi_1, V_1)) = i_Q^G(\mathbf{sp}_\chi(\Pi_1, V_1)) = i_Q^G(\rho \otimes \chi, W). \tag{VI.9.2.1}$$

Nous allons maintenant démontrer le lemme de Jacquet dans le cas particulier de la représentation $(\Pi, V_\Pi) = i_Q^G(\Pi_1, V_1)$. Fixons un sous-groupe parabolique $P = MN$ et un sous-groupe ouvert compact K comme dans l'énoncé du lemme de Jacquet de la section précédente, dont on reprend d'ailleurs toutes les notations. Comme Π_1 est supercuspidale, d'après la proposition VI.5.3, $r_P^G i_Q^G(\Pi_1, V_1)$ admet une filtration dont les quotients sont de la forme $i_{w \cdot L}^M({}^w\Pi_1)$ si L est conjugué à un sous-groupe de Levi de M, nuls sinon. Il s'ensuit que $r_P^G i_Q^G(\Pi_1, V_1)$ est un (M, F)-module admissible. Grâce au second lemme de la section VI.9.1, on voit que l'endomorphisme A de $V_\Pi^K = (i_Q^G V_1)^K$ vérifie les hypothèses de la proposition C.II. On en déduit qu'il est finalement stable, c'est-à-dire qu'il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que

$$V_\Pi^K = (V_\Pi)_0^K \oplus (V_\Pi)_*^K \tag{VI.9.2.2}$$

avec $A^b((V_\Pi)_0^K) = 0$ et A^b inversible sur $(V_\Pi)_*^K$. Nous voulons maintenant montrer que l'on peut prendre $b \leq c(G, K)$, la constante d'admissibilité uniforme du théorème VI.2.3. Pour cela, d'après le lemme C.II, (iv), il suffit de voir que A^c annule $(V_\Pi)_0^K$.

D'après le théorème VI.8.5, la représentation $\mathbf{sp}_\chi(\Pi, V_\Pi) = i_Q^G(\rho \otimes \chi)$, $\chi \in \mathcal{X}(L)$, est irréductible pour tout χ en dehors d'un fermé de Zariski de $\mathcal{X}(L)$. En particulier, pour tout ces χ,

$$\dim \mathbf{sp}_\chi(V_\Pi)^K = \dim(i_Q^G(W \otimes \mathbb{C}_\chi))^K \leq c = c(G, K), \tag{VI.9.2.3}$$

où $c(G, K)$ est la constante d'admissibilité uniforme VI.2.3.

Le F-module V_Π^K est aussi un $\mathcal{H}(G,K)$-module. Les actions de F et $\mathcal{H}(G,K)$ commutent, et la décomposition (VI.9.2.2) est une somme directe de F-modules. Pour tout $h \in \mathcal{H}(G,K)$, on note $\Pi(h)$ l'action de h sur V_Π^K et $\Pi_\chi(h)$ l'action de h sur $\mathbf{sp}_\chi(V_\Pi)^K$. La situation est similaire à celle rencontrée en VI.8.4. L'image par $\mathbf{sp}_\chi$ de $(V_\Pi)_0^K \subset (V_\Pi)^K$ est annulé par l'opérateur $\Pi_\chi(A^c)$, pour tout χ tel que (VI.9.2.3) soit vérifié.

On utilise la même technique qu'en VI.8.4. On se place sur l'un des ouverts principaux S_f de $\mathcal{X}(L)$, où le localisé $V_{\Pi,f}^K$ est libre sur F_f. Notons encore $\Pi(h)$ l'action d'un élément $h \in \mathcal{H}(G,K)$ sur $V_{\Pi,f}^K$. On déduit de (VI.9.2.2) que

$$V_{\Pi,f}^K = (V_{\Pi,f})_0^K \oplus (V_{\Pi,f})_*^K$$

et choisissons une base $\mathcal{B}$ de $V_{\Pi,f}^K$ sur F_f, union des bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ de $(V_{\Pi,f})_0^K$ et $(V_{\Pi,f})_*^K$ respectivement. Spécialisons en $\chi \in S_f$: $\mathcal{B}_\chi = \mathbf{sp}_\chi(\mathcal{B})$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $i_Q^G(W \otimes \mathbb{C}_\chi)^K$. La matrice de $\pi(A^c)$ dans la base $\mathcal{B}$ est à coefficients dans F_f, et son image par Ψ_χ est la matrice (à coefficients complexes) de $\Pi_\chi(A^c)$. Comme $\Pi_\chi(A^c)$ annule $\mathcal{B}_0$ pour tout χ dans un ouvert de Zariski de S_f, et que F est réduite, on en déduit (par un argument déjà utilisé dans VI.8.6) que $\Pi(A^c)$ annule $\mathcal{B}_0$ et donc $(V_{\Pi,f})_0^K$. Comme ceci vaut pour tout les ouverts principaux S_f du théorème VI.8.4, on obtient que $\Pi(A^c)$ annule $(V_\Pi)_0^K$, et donc que $b \leq c(G,K)$.

Ceci termine la démonstration du lemme de Jacquet dans le cas particulier de la représentation $i_Q^G(\Pi_1, V_1)$.

VI.9.3 Fin de la démonstration du lemme de Jacquet

Nous allons maintenant étendre le résultat de la proposition VI.9.1 à toutes les représentations lisses de G. Nous commençons par les représentations induites. Soit $Q = LU$ un sous-groupe parabolique de G, D une classe d'inertie de représentations irréductibles supercuspidales de L, et (ρ, W) une représentation de $\mathcal{M}(L)_D$. Nous voulons montrer que $i_Q^G(\rho, W)$ vérifie la proposition VI.9.1. Dans la section précédente, nous avons établi celle-ci pour la représentation $i_Q^G(\Pi_1, V_1)$, où (Π_1, V_1) est un petit progénérateur de $\mathcal{M}_D(L)$. D'après le lemme A.VIII.2, la représentation (ρ, W) est quotient de deux représentations qui sont des sommes directes de représentations isomorphes à (Π_1, V_1), c'est-à-dire que l'on a une suite exacte de la forme

$$\bigoplus_\alpha V_1 \to \bigoplus_\beta V_1 \to W \to 0.$$

Comme les foncteurs i_Q^G et j_K sont exacts et préservent les produits (corollaire VI.1.2), on obtient une suite exacte

$$\bigoplus_\alpha (i_Q^G V_1)^K \to \bigoplus_\beta (i_Q^G V_1)^K \to (i_Q^G W)^K \to 0.$$

Comme A^b est stable sur $(i_Q^G V_1)^K$, l'endomorphisme induit par $a_{t^b,K}$ sur $(\bigoplus_\alpha i_Q^G V_1)^K$ est stable (idem pour la seconde somme), pour la même constante $b \in \mathbb{N}$ que précédemment. Le résultat pour $(i_Q^G W)^K$ s'en déduit immédiatement (lemme C.II, (ii)). Ceci établit le lemme de Jacquet pour $i_Q^G(\rho, W)$.

Passons maintenant à une représentation quelconque (π, V) de $\mathcal{M}(G)$. Le théorème de décomposition VI.7.2 permet d'écrire

$$V = \bigoplus_{\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)} V_{\mathfrak{s}},$$

et l'on se ramène donc à montrer la proposition pour chaque composante $V_{\mathfrak{s}}$. Pour les composantes supercuspidales, ceci est trivial par définition. Il reste les composantes induites. D'après le lemme VI.7.2, (*iii*), chaque $V_{\mathfrak{s}}$ se plonge dans une somme directe finie de représentations induites de la forme

$$\bigoplus_{i\in I} i_Q^G(\rho_i, W_i).$$

Considérons le conoyau C de cette injection. De la même manière, C s'injecte dans une somme de la même forme. On en déduit une suite exacte de la forme

$$0 \to V_{\mathfrak{s}} \to \bigoplus_{i\in I} i_Q^G(\rho_i, W_i) \to \bigoplus_{i\in J} i_Q^G(\rho_j, W_j)$$

qui réalise $V_{\mathfrak{s}}$ comme le noyau d'un G-morphisme entre deux représentations pour lesquelles la proposition est établie. On utilise alors l'exactitude du foncteur j_K, le fait qu'il préserve les sommes directes finies pour obtenir une suite exacte

$$0 \to V_{\mathfrak{s}}^K \to \bigoplus_{i\in I} i_Q^G(\rho_i, W_i)^K \to \bigoplus_{i\in J} i_Q^G(\rho_j, W_j)^K.$$

Le lemme C.II (*iii*) nous permet de conclure. □

VI.9.4 Une conséquence

Une première conséquence du lemme de Jacquet généralisé est que le corollaire VI.6.3 est maintenant valide sans l'hypothèse d'admissibilité. Redonnons l'énoncé :

Corollaire. *Soit K un sous-groupe ouvert compact de G, inclus et distingué dans K_0 et admettant une décomposition d'Iwahori selon les sous-groupes paraboliques standards. Soit (π, V) une représentation lisse de G telle V^K engendre V. Alors tout sous-quotient de V est engendré par ses vecteurs fixés par K.*

On en déduit, en vertu du théorème I.3.2 :

Proposition. *Soit K est un sous-groupe ouvert compact de G, inclus et distingué dans K_0 et admettant une décomposition d'Iwahori selon les sous-groupes paraboliques standards. Alors la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ des représentations engendrées par leurs vecteurs K-invariants est équivalente à la catégorie des modules unitaires sur l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, K)$.*

VI.9.5 Une autre conséquence

Plaçons-nous dans les hypothèses de la section VI.8.3. Le foncteur de restriction

$$r_P^G : \mathcal{M}(G, B) \longrightarrow \mathcal{M}(M, B)$$

préserve la B-admissibilité. L'argument est le même que celle du corollaire VI.6.1.

VI.9.6 Le second théorème d'adjonction de Bernstein

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Le foncteur r_P^G est l'adjoint à gauche du foncteur i_P^G, mais ce dernier admet aussi un adjoint à droite. Ce fait n'est pas particulièrement profond, car le foncteur i_P^G est la composition du foncteur d'oubli de M à P, qui admet un adjoint à droite, d'un foncteur de normalisation qui ne joue aucun rôle, et du foncteur d'induction parabolique Ind_P^G, qui, comme G/P est compact, s'identifie au foncteur d'induction compacte ind_P^G et admet donc un adjoint à droite (cf. III.2.6).

Ce qui est en revanche beaucoup plus profond est la détermination explicite de cet adjoint à droite. Soit $\bar{P} = M\bar{N}$ le parabolique opposé à P.

Théorème. *le foncteur $r_{\bar{P}}^G$ est l'adjoint à droite du foncteur i_P^G. C'est-à-dire que pour toute représentation (π, V) dans $\mathcal{M}(G)$ et pour toute représentation (τ, E) dans $\mathcal{M}(M)$, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_G(i_P^G(\tau, E), (\pi, V)) \simeq \mathrm{Hom}_M((\tau, E), r_{\bar{P}}^G(\pi, V)). \tag{VI.9.6.1}$$

Ce résultat est connu sous le nom de second théorème d'adjonction de Bernstein. Nous allons voir qu'il découle du lemme de Jacquet. Montrons tout d'abord qu'il est équivalent à l'énoncé suivant

Théorème. *Pour toute représentation lisse (π, V) de G,*

$$r_{\bar{P}}^G \tilde{\pi} = (r_P^G \pi)\tilde{}. \tag{VI.9.6.2}$$

<u>*Démonstration*</u>. On a, pour toute représentation lisse (τ, E) de M et toute représentation lisse (π, V) de G,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_G(i_P^G\tau, \tilde{\pi}) &\simeq \mathrm{Hom}_G(\pi, (i_P^G\,\tau)\tilde{}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_G(\pi, i_P^G\,\tilde{\tau}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_M(r_P^G(\pi), \tilde{\tau}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_M(\tau, (r_P^G(\pi)\tilde{}), \qquad \text{(VI.9.6.3)}
\end{aligned}$$

La première égalité est le lemme I.4.2.1. La seconde est le fait que l'induction normalisée commute avec la dualité. La troisième est l'adjonction des foncteurs i_P^G et r_P^G et la dernière est à nouveau le lemme I.4.2.1. Si l'on suppose que $r_{\bar{P}}^G\tilde{\pi} = (r_P^G\pi)\tilde{}$, on obtient alors (VI.9.6.1) avec $\tilde{\pi}$ au lieu de π. Pour obtenir (VI.9.6.1) avec π qui n'est pas de la forme $\tilde{\sigma}$, nous raisonnons de la façon suivante. La représentation π s'injecte dans $\tilde{\tilde{\pi}}$, et le conoyau π_1 de cette injection s'injecte dans $\tilde{\tilde{\pi}}_1$. On obtient ainsi une suite exacte

$$0 \hookrightarrow \pi \hookrightarrow \tilde{\tilde{\pi}} \hookrightarrow \tilde{\tilde{\pi}}_1.$$

Ce qui nous donne par exactitude à gauche des foncteurs $\mathrm{Hom}_G(X, \bullet)$ et $r_{\bar{P}}^G$, un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes et les flèches verticales sont les isomorphismes (VI.9.6.1) établis ci-dessus pour $\tilde{\tilde{\pi}}$ et $\tilde{\tilde{\pi}}_1$:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(i_P^G\tau, \pi) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(i_P^G\tau, \tilde{\tilde{\pi}}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(i_P^G\tau, \tilde{\tilde{\pi}}_1) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_M(\tau, r_{\bar{P}}^G\pi) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_M(\tau, r_{\bar{P}}^G\tilde{\tilde{\pi}}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_M(\tau, r_{\bar{P}}^G\tilde{\tilde{\pi}}_1).
\end{array}$$

On en déduit facilement que $\mathrm{Hom}_G(i_P^G\tau, \pi)$ et $\mathrm{Hom}_M(\tau, r_{\bar{P}}^G\pi)$ sont isomorphes et que cet isomorphisme est naturel.

Réciproquement, si l'on suppose que le second théorème d'adjonction est établi, alors on obtient

$$\mathrm{Hom}_M(\tau, r_{\bar{P}}^G(\tilde{\pi})) \simeq \mathrm{Hom}_G(i_P^G(\tau), \tilde{\pi}) \simeq \mathrm{Hom}_M(\tau, (r_P^G(\pi))\tilde{}),$$

le second isomorphisme étant (VI.9.6.3). Comme ceci est vrai pour tout $\tau \in \mathcal{M}(M)$, le principe A.III.3 nous donne l'existence d'un isomorphisme naturel $r_{\bar{P}}^G\tilde{\pi} \simeq (r_P^G\pi)\tilde{}$. $\square$

Démontrons maintenant ce théorème. Nous le reformulons sous la forme suivante :

Proposition. *Il existe une dualité M-équivariante*

$$\langle .,. \rangle_P : r_P^G(V) \times r_{\bar{P}}^G(\tilde{V})$$

vérifiant, pour tout $v \in V$, pour tout $\lambda \in \tilde{V}$, pour tout $t \in C_A^{++}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ assez grand,

$$\text{(VI.9.6.4)} \qquad \langle r_P^G(\pi)(t^m).\bar{v}, \bar{\lambda}\rangle_P = \delta_P^{1/2}(t^m)\lambda(\pi(t^m)\cdot v),$$

où $\bar{v} = j_N(v)$, $\bar{\lambda} = j_{\bar{N}}(\lambda)$.

Cette dualité induit un isomorphisme $r_{\bar{P}}^G(\tilde{V}) \simeq r_P^G(V)\tilde{}$.

Pour tout $v \in V$, pour tout $\lambda \in \tilde{V}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in C_A^+(\epsilon)$,

$$\text{(VI.9.6.5)} \qquad \langle r_P^G(\pi)(t).\bar{v}, \bar{\lambda}\rangle_P = \delta_P^{1/2}(t)\lambda(\pi(t)\cdot v).$$

Démonstration. Il s'agit d'abord de trouver une dualité entre $r_P^G\pi$ et $r_{\bar{P}}^G\tilde{\pi}$. Les espaces respectifs de ces représentations sont V_N et $\tilde{V}_{\bar{N}}$. Soit un sous-groupe ouvert compact K de G admettant une décomposition d'Iwahori selon P. Nous avons, dans la démonstration du lemme de Jacquet, établi une décomposition $V^K = V_0^K \oplus V_*^K$ de telle sorte que $V_*^K \simeq V_N^{K_M}$, et de la même manière, nous disposons d'une décomposition $\tilde{V}^K = \tilde{V}_0^K \oplus \tilde{V}_*^K$ avec $\tilde{V}_*^K \simeq \tilde{V}_{\bar{N}}^{K_M}$. Remarquons que V_*^K est orthogonal à $\tilde{V}_0^K$ et que V_0^K est orthogonal à $\tilde{V}_*^K$. En effet, soient $v \in V_*^K$, $\lambda \in \tilde{V}_0^K$, et écrivons $v = a_{t^m,K}\cdot v'$, avec les notations de la section VI.9.1, où m est un entier suffisamment grand. On a alors

$$\lambda(v) = \lambda(a_{t^m,K}\cdot v') = ((a_{t^m,K})\check{} \cdot \lambda)(v') = (a_{t^{-m},K}\cdot\lambda)(v').$$

Ici, l'élément t est dans C_A^{++}, partie définie relativement au sous-groupe parabolique P, et plus précisément à son radical unipotent N. La partie qui correspond au sous-groupe parabolique $\bar{P} = M\bar{N}$ est

$$C_A^{--} := \{a^{-1} |\, a \in C_A^{++}\}.$$

Le sous-espace $\tilde{V}_0^K$ de $\tilde{V}^K$ est donc le noyau de $a_{t^{-m},K}$, pour m suffisamment grand. On a donc $a_{t^{-m},K}\cdot\lambda = 0$, ce qui montre que V_*^K est orthogonal à $\tilde{V}_0^K$. L'autre assertion se démontre de la même manière.

La restriction de j à V_*^K est un isomorphisme sur $V_N^{K_M}$. Notons s_P^K son inverse. De même, notons $s_{\bar{P}}^K$ l'isomorphisme de $\tilde{V}_{\bar{N}}^{K_M}$ sur $\tilde{V}_*^K$ inverse de j. Soient $\bar{v} \in V_N^{K_M}$ et $\bar{\lambda} \in \tilde{V}_{\bar{N}}^{K_M}$, et notons $v = s_P^K(\bar{v})$ et $\lambda = s_{\bar{P}}^K(\bar{\lambda})$. Posons

$$\langle \bar{v}, \bar{\lambda}\rangle = \langle v, \lambda\rangle,$$

où le second crochet de dualité est la dualité naturelle entre V et $\tilde{V}$. Il est clair que ceci définit bien une dualité entre $V_N^{K_M}$ et $\tilde{V}_{\bar{N}}^{K_M}$. En effet, on a d'après le lemme III.1.6 $(\tilde{V})^K = (V^*)^K = (V^K)^*$

et donc ceci découle du fait que V_0^K est orthogonal à $\tilde{V}_*^K$ et que V_*^K est orthogonal à $\tilde{V}_0^K$. Ceci montre aussi que $(\tilde{V})_{\bar{N}}^{K_M}$ est bien tout le dual de $V_N^{K_M}$, c'est-à-dire que $(V_N^{K_M})^* = \tilde{V}_{\bar{N}}^{K_M}$.

Lorsque K décrit la famille des sous-groupes ouverts compacts de G admettant une décomposition d'Iwahori selon P, la famille des K_M décrit une base de voisinage de l'identité dans M. On a donc $V_N = \bigcup_K V_N^{K_M}$ et $\tilde{V}_{\bar{N}} = \bigcup_K \tilde{V}_{\bar{N}}^{K_M}$. Nous devons vérifier que les dualités définies plus haut sont compatibles, et peuvent ainsi s'étendre en une dualité entre V_N et $(\tilde{V})_{\bar{N}}$. Pour cela, il suffit de regarder ce qui se passe pour deux sous-groupes ouverts compacts $K' \subset K$ de G. On a bien sûr dans ce cas $V^K \subset V^{K'}$. Soit $v \in V_0^{K'} \cap V^K$. On a donc pour m suffisamment grand,

$$a_{t^m,K} \cdot v = e_K * \delta_{t^m} * e_K \cdot v = e_K * e_{K'} * \delta_{t^m} * e_{K'} * e_K \cdot v = e_K * a_{t^m,K'} \cdot v = 0.$$

Ceci montre que $V_0^{K'} \cap V^K \subset V_0^K$. De même, si $v \in V_*^K$, écrivons $v = a_{t^m,K} \cdot v'$ pour un certain $v' \in V^K$. On a alors

$$v = e_K * \delta_{t^m} * e_K \cdot v' = e_K * e_{K'} * \delta_{t^m} * e_{K'} * e_K \cdot v' = e_K * a_{t^m,K'} \cdot v',$$

d'où $V_*^K \subset e_K \cdot V_*^{K'}$. On veut montrer que ces inclusions sont des égalités. Soit n un entier plus grand que b, la constante de la proposition VI.9.1. En supposant que n soit assez grand, de telle sorte que $t^{-n} K_{\bar{N}} t^n \subset K'$ et $t^n K_N t^{-n} \subset K'$ et en calculant comme dans la démonstration du lemme V.5.3, on obtient

$$a_{t^n,K} * a_{t^n,K'} = e_K * a_{t^{2n},K'}, \quad a_{t^n,K'} * a_{t^n,K} = a_{t^{2n},K'} * e_K$$

ce qui montre facilement que l'on a

$$V_0^{K'} \cap V^K = V_0^K, \quad V_*^K = e_K \cdot V_*^{K'}.$$

Montrons que sur $V_N^{K_M}$,

$$e_K \circ s_P^{K'} \circ i = s_P^K, \tag{VI.9.6.6}$$

où i est l'inclusion de $V_N^{K_M}$ dans $V_N^{K'_M}$. Soit donc $\bar{v} \in V_N^{K_M}$, et écrivons

$$\bar{v} = j_N(\pi(a_{t^n,K}) \cdot v)$$

pour un certain $v \in V^K$, de sorte que

$$s_P^K(\bar{v}) = \pi(a_{t^n,K}) \cdot v.$$

On a d'après (VI.9.1.1),

$$j_N(\pi(a_{t^n,K}) \cdot v) = \pi_N(t^n) j_N(v) = j_N(\pi(a_{t^n,K'}) \cdot v)$$

d'où

$$\begin{aligned} e_K \circ s_P^{K'}(\bar{v}) &= e_K \circ s_P^{K'}(j_N(\pi(a_{t^n,K'}) \cdot v)) = e_K \cdot (\pi(a_{t^n,K'}) \cdot v) \\ &= \pi(e_K * a_{t^n,K'} * e_K) \cdot v = \pi(a_{t^n,K}) \cdot v = s_P^K(\bar{v}). \end{aligned}$$

Ceci montre (VI.9.6.6).

Nous allons aussi utiliser que pour tout $\bar{v} \in V_N^{K_M}$

$$(1 - e_K) s_P^{K'}(\bar{v}) \in V_0^{K'} = V^{K'} \cap \ker j_N. \tag{VI.9.6.7}$$

En effet, d'après (VI.9.6.6),

$$(1-e_K)s_P^{K'}(\bar v) = s_P^{K'}(\bar v) - e_K s_P^{K'}(\bar v) = s_P^{K'}(\bar v) - s_P^{K}(\bar v).$$

Or,

$$j_N(s_P^{K'}(\bar v) - s_P^{K}(\bar v)) = \bar v - \bar v = 0,$$

ce qui démontre l'assertion.

Nous pouvons maintenant calculer :

$$\begin{aligned}
&\langle s_P^K(\bar v), s_{\bar P}^K(\bar\lambda)\rangle - \langle s_P^{K'}(\bar v), s_{\bar P}^{K'}(\bar\lambda)\rangle\\
=&\langle e_K\cdot s_P^{K'}(\bar v), e_K\cdot s_{\bar P}^{K'}(\bar\lambda)\rangle - \langle s_P^{K'}(\bar v), s_{\bar P}^{K'}(\bar\lambda)\rangle\\
=&\langle s_P^{K'}(\bar v), e_K\cdot s_{\bar P}^{K'}(\bar\lambda) - s_{\bar P}^{K'}(\bar\lambda)\rangle + \langle e_K\cdot s_P^{K'}(\bar v) - s_P^{K'}(\bar v), e_K\cdot s_{\bar P}^{K'}(\bar\lambda)\rangle\\
=&\langle s_P^{K'}(\bar v), (e_K-1)\cdot s_{\bar P}^{K'}(\bar\lambda)\rangle + \langle (e_K-1)\cdot s_P^{K'}(\bar v), e_K\cdot s_{\bar P}^{K'}(\bar\lambda)\rangle
\end{aligned}$$

Or $\langle (e_K-1)\cdot s_P^{K'}(\bar v), e_K\cdot s_{\bar P}^{K'}(\bar\lambda)\rangle = \langle e_K*(e_K-1)\cdot s_P^{K'}(\bar v), s_{\bar P}^{K'}(\bar\lambda)\rangle = 0$ et $\langle s_P^{K'}(\bar v), (e_K-1)\cdot s_{\bar P}^{K'}(\bar\lambda)\rangle = 0$ d'après (VI.9.6.7) et l'orthogonalité de $\tilde V_0^{K'}$ et $V_*^{K'}$.

Ceci montre que la dualité $\langle .\,,.\rangle_P$ est en fait définie indépendamment du choix de K.

Vérifions maintenant que cette dualité est M-équivariante. Soient $\bar v \in V_N$ et $\bar\lambda \in \tilde V_{\bar N}$, et $m\in M$. Montrons que

$$\langle \pi_N(m)\cdot\bar v, \tilde\pi_{\bar N}(m)\cdot\bar\lambda\rangle_P = \langle\bar v,\bar\lambda\rangle_P.$$

Choisissons un sous-groupe ouvert compact comme ci-dessus tel que K_M fixe $\bar v$ et $\bar\lambda$ et soient $v\in V_*^K$, $\lambda\in\tilde V_*^K$ relevant respectivement $\bar v\in V_N$ et $\bar\lambda$, de sorte que $\langle\bar v,\bar\lambda\rangle_P = \langle v,\lambda\rangle$. Comme $\pi_N(m)\cdot\bar v = \overline{\pi(m)\cdot v}$, $\tilde\pi_{\bar N}(m)\cdot\bar\lambda = \overline{\tilde\pi(m)\cdot\lambda}$, on voit que l'on aura l'égalité voulue si $\pi(m)\cdot v\in V_*^{K'}$, et $\tilde\pi(m)\cdot\lambda\in\tilde V_*^{K'}$, pour un autre sous-groupe compact ouvert K' de G vérifiant les mêmes conditions que K, puisque l'on a montré que la dualité ne dépend pas du choix de K. En effet, on a alors

$$\langle\pi_N(m)\cdot\bar v, \tilde\pi_{\bar N}\cdot\bar\lambda\rangle_P = \langle\pi(m)\cdot v, \tilde\pi(m)\cdot\lambda\rangle = \langle v,\lambda\rangle_P.$$

Or on a aussi, en prenant $K' = mKm^{-1}$, et en utilisant le fait que t est central dans M,

$$\begin{aligned}
\delta_m * a_{K,t} &= \delta_m * e_K * \delta_t * e_K = e_{K'} * \delta_m * \delta_t * e_K = e_{K'} * \delta_t * \delta_m * e_K\\
&= e_{K'} * \delta_t * e_{K'} * \delta_m = a_{K',t} * \delta_m.
\end{aligned}$$

Ceci entraîne facilement que $\pi(m)\cdot v\in V_*^{K'}$, et $\tilde\pi(m)\cdot\lambda\in\tilde V_*^{K'}$. On en déduit immédiatement que

$$\langle r_P^G(\pi)(m)\cdot\bar v, r_{\bar P}^G(\tilde\pi)(m)\cdot\bar\lambda\rangle_P = \langle\bar v,\bar\lambda\rangle_P.$$

En effet, les normalisations par $\delta_P^{1/2}(m)$ et $\delta_{\bar P}^{1/2}(m)$ se compensent (lemme V.5.4).

Il reste à vérifier (VI.9.6.4) et (VI.9.6.5). Fixons un sous-groupe ouvert compact K de G admettant une décomposition d'Iwahori selon les sous-groupes paraboliques standards et fixant v et λ. On a alors

$$\begin{aligned}
\delta_P^{1/2}(t^m)\lambda(\pi(t^m)\cdot v) &= \delta_P^{1/2}(t^m)(e_K\cdot\lambda)(\pi(t^m)\cdot e_K\cdot v)\\
&= \delta_P^{1/2}(t^m)\lambda(a_{t^m,K}\cdot v)\\
&= \delta_P^{1/2}(t^m)\langle a_{t^m,K}\cdot v,\lambda\rangle\\
&= \delta_P^{1/2}(t^m)\langle a_{t^m,K}\cdot v, s_{\bar P}^K(j_{\bar N}(\lambda))\rangle\\
&= \delta_P^{1/2}(t^m)\langle s_P^K(j_N(a_{t^m,K}\cdot v)), s_{\bar P}^K(j_{\bar N}(\lambda))\rangle
\end{aligned}$$

Pour les deux dernières égalités, on utilise le fait que pour m assez grand, $a_{t^m,K} \cdot v \in V_*^K$, l'orthogonalité de $\tilde{V}_0^K$ et V_*^K (resp. de V_0^K et $\tilde{V}_*^K$) et le fait que s_P^K soit une section de j_N sur V^K (resp. $s_{\bar{P}}^K$ une section de $j_{\bar{N}}$ sur $\tilde{V}^K$). D'après la définition de la dualité $\langle.\,,.\rangle_P$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\delta_P^{1/2}(t^m)\lambda(\pi(t^m)\cdot v) = \delta_P^{1/2}(t^m)\langle j_N(a_{t^m,K}\cdot v), j_{\bar{N}}(\lambda)\rangle_P \\
&= \langle \delta_P^{1/2}(t^m)\pi_N(t^m)\cdot \bar{v}, \bar{\lambda})\rangle_P \\
&= \langle r_P^G(\pi)(t^m)\cdot \bar{v}, \bar{\lambda})\rangle_P
\end{aligned}$$

On a utilisé (VI.9.1.1), une égalité démontrée en (VI.6.1). La démonstration de (VI.9.6.5) est identique, en utilisant le fait (remarque 3, VI.9.1) que pour $t \in C_A^+(\epsilon)$, $V^K = V_0^K \oplus V_*^K = \ker a_{t,K} \oplus \operatorname{Im} a_{t,K}$. Ceci termine la démonstration de la proposition. □

VI.9.7 Seconde adjonction et complétion

Nous donnons ici une interprétation du second théorème d'adjonction en terme de complétion de modules (*cf.* section I.1.4).

Théorème. *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G et soit $\bar{P} = M\bar{N}$ le sous-groupe parabolique opposé. Alors, pour toute représentation (π, V) de $\mathcal{M}(G)$, on a un isomorphisme naturel*

$$\phi : \bar{V}^N \simeq \overline{V_{\bar{N}}}.$$

Pour tout $v \in \bar{V}^N$, $\phi(v)$ est caractérisé par la propriété suivante :

— pour tout sous-groupe ouvert compact K de G admettant une décomposition d'Iwahori selon P, $\phi(e_K \cdot v) = e_{K_M} \cdot \phi(v)$.

Démonstration. Par définition, le module $\overline{V_{\bar{N}}}$ est la limite projective des $e \cdot V_{\bar{N}}$, où e décrit l'ensemble des idempotents de $\mathcal{H}(M)$. Comme les e_{K_M} forment un système filtrant d'idempotents de $\mathcal{H}(M)$ lorsque K décrit l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G admettant une décomposition d'Iwahori selon P, on a

$$\overline{V_{\bar{N}}} = \varprojlim_K e_{K_M} \cdot V_{\bar{N}} = \varprojlim_K V_{\bar{N}}^{K_M}.$$

Dans la section précédente (il faut inverser les rôles de $\bar{P}$ et P), nous avons exhibé un sous-espace V_*^K de V_K tel que $j_{\bar{N}}$ réalise un isomorphisme $V_{\bar{N}}^{K_M} \simeq V_*^K$. On obtient ainsi

$$\overline{V_{\bar{N}}} = \varprojlim_K V_{\bar{N}}^{K_M} \simeq \varprojlim_K V_*^K \subset \varprojlim_K V^K = \bar{V}.$$

Ceci nous donne une identification de $\overline{V_{\bar{N}}}$ avec l'espace :

$$\overline{V_*} := \{v \in \bar{V} \,|\, e_K \cdot v \in V_*^K, (\forall K)\}.$$

D'après la seconde remarque de VI.9.1, pour tout sous-groupe ouvert compact C de N suffisamment gros, on a $V_*^K = e_K e_C \cdot V$. On en déduit que $v \in \overline{V_*}$ si et seulement pour tout K comme ci-dessus et pour tout sous-groupe ouvert compact C de N suffisamment gros (dépendant explicitement de K, voir la remarque VI.9.1), $e_K \cdot v \in e_K e_C \cdot V$. Ceci est encore équivalent à :

- Pour tout sous-groupe ouvert compact C de N, pour tout K comme ci-dessus suffisamment petit (dépendant explicitement de C et normalisé par C (ceci fournit encore un système filtrant d'idempotents), $e_K \cdot v \in e_K e_C \cdot V = e_C e_K \cdot V$.

Ainsi : $v \in \overline{V_*}$ si et seulement pour tout sous-groupe ouvert compact C de N, $v \in e_C \cdot \bar{V}$, et comme N est union de ses sous-groupes compacts, on obtient $\overline{V_{\bar{N}}} = \overline{V_*} \simeq \bar{V}^N$. $\square$

Nous avons obtenu ce théorème comme conséquence du lemme de Jacquet VI.9.1. Soit $(\pi, V) \in \mathcal{M}(G)$. En appliquant le résultat à $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$, on obtient un isomorphisme

$$\phi : \bar{\tilde{V}}^N \to \overline{\tilde{V}_{\bar{N}}}.$$

Or $\bar{\tilde{V}}^N \simeq (V^*)^N \simeq (V_N)^*$ (*cf.* I.4.3), et donc $\tilde{V}_{\bar{N}}$ s'identifie à la partie lisse de $(V_N)^*$ (*cf.* I.1.5), qui par définition est $\widetilde{V_N}$. On retrouve donc l'isomorphisme canonique :

$$r_{\bar{P}}^G \tilde{\pi} \simeq (r_P^G \pi)\check{}.$$

La démonstration donnée ici est bien sûr essentiellement équivalente à celle donnée en VI.9.6, mais le formalisme des complétions de modules permet une rédaction plus rapide. Il permet aussi d'obtenir le théorème de seconde adjonction de manière un peu plus élégante. En effet, pour toute représentation (τ, E) dans $\mathcal{M}(M)$ et pour toute représentation (π, V) dans $\mathcal{M}(G)$, on a, en écrivant le signe d'égalité pour des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_G(i_P^G(E), V) = \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_P^G(\mathcal{F}_P^M(\delta_P^{-1/2} \otimes E)), V)\\
&= \mathrm{Hom}_G(P_P^G(\mathcal{F}_P^M(\delta_P^{1/2} \otimes E)), V)\\
&= \mathrm{Hom}_P(\mathcal{F}_P^M(\delta_P^{1/2} \otimes E), \check{\mathcal{F}}_P^G(V))\\
&= \mathrm{Hom}_P(\mathcal{F}_P^M(\delta_P^{1/2} \otimes E), \mathrm{Hom}_G(\mathcal{H}(G), V)_{\mathcal{H}(P)})\\
&= \mathrm{Hom}_P(\mathcal{F}_P^M(\delta_P^{1/2} \otimes E), \bar{V}_{\mathcal{H}(P)}) = \mathrm{Hom}_P(\mathcal{F}_P^M(\delta_P^{1/2} \otimes E), \bar{V})\\
&= \mathrm{Hom}_M(\delta_P^{1/2} \otimes E, \bar{V}^N) = \mathrm{Hom}_M(E, \delta_P^{-1/2} \otimes \bar{V}^N)\\
&= \mathrm{Hom}_M(E, \delta_P^{-1/2} \otimes \overline{V_{\bar{N}}}) = \mathrm{Hom}_M(E, \delta_{\bar{P}}^{1/2} \otimes V_{\bar{N}})\\
&= \mathrm{Hom}_M(E, r_{\bar{P}}^G V)
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé successivement l'identité entre foncteur d'induction compacte et foncteur P (III.2.6), l'adjonction de P et du pseudo foncteur d'oubli et l'expression du pseudo foncteur d'oubli en terme de complété (I.2.3), le fait qu'un morphisme d'un module non dégénéré dans un module quelconque est toujours à valeurs dans la partie non dégénérée, l'adjonction entre foncteur d'oubli $\mathcal{F}_P^M$ et le foncteur qui consiste à prendre les N-invariants (qui se vérifie facilement), et enfin l'isomorphisme $\bar{V}^N \simeq \overline{V_{\bar{N}}}$ démontré ci-dessus.

VI.10 Le centre de $\mathcal{M}(G)_\Omega$

VI.10.1 Un progénérateur de $\mathcal{M}(G)_\Omega$

Soit Ω une composante connexe de $\Omega(G)$ et soit $(M, (\rho, W))$ une donnée cuspidale dont la classe est dans Ω. On peut supposer que M est un sous-groupe de Levi standard de G, facteur de Levi du sous-groupe parabolique standard $P = MN$. Soit D la classe d'inertie dans M de (ρ, W), c'est-à-dire $D = [M, (\rho, W)]_M$. Notre but est de trouver un petit progénérateur de la catégorie $\mathcal{M}(G)_\Omega$. Soit Π_D le progénérateur de la catégorie $\mathcal{M}(M)_D$ construit en VI.4.1. Un candidat naturel est $\Pi_\Omega = i_P^G(\Pi_D)$. La première étape consiste à voir que Π_Ω est indépendant des choix faits. Pour cela, nous allons utiliser un résultat qui ne sera démontré qu'en VII.1.3 (où le lecteur est aussi invité à se référer pour certaines notations).

Lemme. *On suppose M maximal (voir VII.1.3), et soit w l'élément non trivial de $\mathcal{W}(M, *)$. On pose $M' = w \cdot M$ et $\rho' = w \cdot \rho$, $D' = [M', \rho']_{M'}$. On note P' le sous-groupe parabolique standard de Levi M'. Alors*

$$i_P^G(\Pi_D) \simeq i_{P'}^G(\Pi_{D'}).$$

Il est important de remarquer que l'isomorphisme ci-dessus n'est pas canonique. D'autre part, l'assertion serait évidente avec $w \cdot P$ à la place de P'. Or ici, $w \cdot P = \bar{P}'$.

Démonstration. Si $w \cdot (M, D) = (M, D)$, ceci est trivial. Dans le cas contraire, nous sommes alors dans les hypothèses du corollaire VII.1.3. L'équivalence de catégories de ce corollaire montre qu'il s'agit de vérifier que $r_D i_{P'}^G(\Pi_{D'}) = \Pi_D$, mais ceci est immédiat d'après le lemme géométrique VI.5.3. $\square$

On peut maintenant s'affranchir de l'hypothèse de maximalité de M.

Proposition. *Soit (M, D) comme ci-dessus, et soit $w \in \mathcal{W}(M, *)$. Posons $M' = w \cdot M$, $D' = w \cdot D$. Alors*

$$i_P^G(\Pi_D) \simeq i_{P'}^G(\Pi_{D'}).$$

Démonstration. On utilise le fait que w peut s'écrire comme produit de transformations élémentaires (lemme VI.5.4). Ceci nous ramène au cas où w est lui-même élémentaire. Il existe alors un sous-groupe de Levi L de G contenant M comme sous-groupe de Levi maximal. Soit $Q = LU$ le sous-groupe parabolique standard de facteur de Levi L. D'après le lemme ci-dessus

$$i_{P\cap L}^L(\Pi_D) \simeq i_{P'\cap L}^L(\Pi_{D'}).$$

On en déduit

$$i_P^G(\Pi_D) = i_Q^G i_{P\cap L}^L(\Pi_D) \simeq i_Q^G i_{P'\cap L}^L(\Pi_{D'}) = i_{P'}^G(\Pi_{D'}).$$

$\square$

Corollaire. *Soit (M, D) comme ci-dessus, et soit $P' \in \mathcal{P}(M)$. Alors $i_P^G(\Pi_D) \simeq i_{P'}^G(\Pi_D)$.*

Démonstration. En effet, $P' = w^{-1} \cdot P$ pour un certain $w \in W(M, M)$, et l'on a alors

$$i_{P'}^G(\Pi_D) = i_{w^{-1}\cdot P}^G(\Pi_D) \simeq i_P^G(\Pi_D^w) = i_P^G(\Pi_{D'})$$

où $D' = w \cdot D$. $\square$

La conséquence de tout ceci est que la (classe d'isomorphie de la) représentation Π_Ω est en fait indépendante de la donnée (M, D) choisie pour la construire. Nous pouvons maintenant démontrer le résultat voulu :

Théorème. *La représentation Π_Ω est un progénérateur de type fini de $\mathcal{M}(G)_\Omega$.*

<u>*Démonstration*</u>. Le second théorème d'adjonction de Bernstein affirme que i_P^G est adjoint à droite du foncteur $r_{\bar{P}}^G$. Celui-ci étant exact, on en déduit immédiatement que i_P^G préserve les projectifs. Ceci montre que Π_Ω est projectif. On a aussi démontré en VI.7.5 que i_P^G préserve les représentations de type fini. On voit donc que Π_Ω est de type fini. Or un objet projectif de type fini est petit au sens de la théorie des catégories (A.VIII.2). Il reste à montrer que Π_Ω est un générateur de $\mathcal{M}(G)_\Omega$, et pour ceci, il suffit de voir que toute représentation irréductible (π, V) de $\mathcal{M}(G)_\Omega$ est un quotient de Π_Ω. En effet, nous voulons montrer que pour toute représentation (π', V') dans $\mathcal{M}(G)_\Omega$, $\mathrm{Hom}_G(\Pi_\Omega, V')$ n'est pas nul. Mais on sait que (π', V') admet un sous-quotient irréductible (π, V), disons que (π, V) est quotient d'une sous-représentation (π_1, V_1). Si l'on sait que $\mathrm{Hom}_G(\Pi_\Omega, \pi)$ n'est pas nul, par projectivité de Π_Ω, $\mathrm{Hom}_G(\Pi_\Omega, \pi_1)$ n'est pas nul, et a fortiori $\mathrm{Hom}_G(\Pi_\Omega, \pi')$. Supposons donc (π, V) irréductible dans $\mathcal{M}(G)_\Omega$. Soit M' un sous-groupe de Levi standard de G tel que $r_{\bar{P}'}^G(\pi)$ soit supercuspidal. Le foncteur $i_{P'}^G$ est l'adjoint à gauche de $r_{\bar{P}'}^G$, et nous disposons du morphisme d'adjonction associé à l'identité de $r_{\bar{P}'}^G(\pi)$:

$$\beta_\pi : i_{P'}^G r_{\bar{P}'}^G(\pi) \to \pi.$$

Comme π est irréductible, ce morphisme est surjectif (car non nul) et par exactitude du foncteur $i_{P'}^G$ il existe un facteur de composition ρ' de $r_{\bar{P}'}^G(\pi)$ tel que $i_{P'}^G(\rho')$ s'envoie surjectivement sur π. Soit D' la classe d'inertie de ρ'. Par définition, Ω est aussi la composante connexe de $\Omega(G)$ associée à (M', D'). Comme $\rho' \in D'$, et que $\Pi_{D'}$ est un progénérateur de $\mathcal{M}(M')_{D'}$, il existe un morphisme surjectif $\Pi_{D'} \to \rho'$. Le foncteur $i_{P'}^G$ étant exact, le morphisme image $i_{P'}^G(\Pi_{D'}) \to i_{P'}^G \rho'$ reste surjectif, et par composition, nous obtenons le morphisme surjectif $i_{P'}^G(\Pi_{D'}) \to \pi$ voulu. La proposition ci-dessus permet de conclure. □

VI.10.2 L'équivalence $\mathcal{M}(G)_\Omega \simeq \mathcal{M}(\mathcal{R}_\Omega)_d$

Nous reprenons les notations de la section précédente. Posons

$$\mathcal{R}_\Omega = \mathrm{End}_G(\Pi_\Omega).$$

Exactement comme en VI.4.1, on introduit les foncteurs

$$F_{\Pi_\Omega} : \mathcal{M}(G)_\Omega \to \mathcal{M}(\mathcal{R}_\Omega)_d, \quad (\pi, V) \mapsto \mathrm{Hom}_G(\Pi_\Omega, \pi),$$

$$G_{\Pi_\Omega} : \mathcal{M}(\mathcal{R}_\Omega)_d \to \mathcal{M}(G)_\Omega, \quad M \mapsto M \otimes_{\mathcal{R}_\Omega} \Pi_\Omega.$$

La démonstration du théorème VI.4.1 peut être recopiée mot pour mot et l'on obtient :

Théorème. *Les foncteurs sont quasi-inverses et réalisent une équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(G)_\Omega$ et $\mathcal{M}(\mathcal{R}_\Omega)_d$.*

VI.10.3 Une estimation de la longueur des induites de supercuspidales

Soit $(M, (\rho, W))$ une donnée cuspidale de G, où M est un sous-groupe de Levi standard de G. Soit P le parabolique standard de G de facteur de Levi M et comme dans la section précédente, posons

$$[M, (\rho, W)]_M = D, \quad [M, (\rho, W)]_G = \mathfrak{s}.$$

Soit Π_D le progénérateur de $\mathcal{M}(M)_D$ construit en VI.4.1, et soit $\Pi_\Omega = \imath_P^G \Pi_D$, dont nous venons de montrer que c'est un progénérateur de la catégorie $\mathcal{M}(G)_\mathfrak{s}$. Notons r_D la composition du foncteur r_G de $\mathcal{M}(G)$ dans $\mathcal{M}(M)$ et de la projection sur la composante $\mathcal{M}(M)_D$ de $\mathcal{M}(M)$.

Proposition. *Le foncteur $r_D : \mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}} \longrightarrow \mathcal{M}(M)_D$ envoie les objets non nuls sur des objets non nuls.*

Démonstration. Soit π une représentation lisse (non nulle) de $\mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}}$. Comme $i_P^G \Pi_D$ est un progénérateur de $\mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}}$ (corollaire VI.10.1), on a d'après le théorème de seconde adjonction,

$$\{0\} \neq \mathrm{Hom}_G(i_P^G \Pi_D, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_M(\Pi_D, r_P^G \pi) = \mathrm{Hom}_M(\Pi_D, r_D \pi)$$

et donc $r_D \pi \neq 0$.

Corollaire. *La longueur de $i_P^G(\rho)$ est au plus $|W(D)|$, où $W(D) = \{w \in W(M,M), w \cdot D = D\}/W_M$. En particulier, si $|W(D)| = 1$, $i_P^G(\rho)$ est irréductible.*

Démonstration. La proposition et l'exactitude du foncteur r_D montre que la longueur de $i_P^G(\rho)$ est plus petite que la longueur de $r_D i_P^G(\rho)$. Mais le lemme géométrique montre que cette dernière représentation est de longueur au plus $|W(D)|$. □

VI.10.4 Le centre de $\mathcal{M}(G)_\Omega$

Les notations sont celles des sections précédentes. Posons $\mathcal{R}_D = \mathrm{End}_M(\Pi_D)$. Pour tout $\phi \in \mathcal{R}_D$, $i_P^G(\phi)$ est dans

$$\mathrm{End}_G(i_P^G(\Pi_D)) = \mathrm{End}_G(\Pi_\Omega) = \mathcal{R}_\Omega.$$

Ceci définit par fonctorialité un morphisme d'algèbres

$$i_P^G : \mathcal{R}_D \to \mathcal{R}_\Omega.$$

Ce morphisme d'algèbres est injectif, puisque le foncteur i_P^G est fidèle. On peut donc identifier $\mathcal{R}_D$ à une sous-algèbre de $\mathcal{R}_\Omega$. En particulier $\mathcal{R}_\Omega$ est un $\mathcal{R}_D$-bimodule.

La structure de $\mathcal{R}_D$-bimodule de $\mathcal{R}_\Omega$ donne un foncteur d'induction :

(VI.10.4.1) $$\mathcal{M}(\mathcal{R}_D)_d \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{R}_\Omega)_d, \quad M \mapsto M \otimes_{\mathcal{R}_D} \mathcal{R}_\Omega.$$

Nous allons maintenant montrer que ce foncteur, au travers des équivalences de catégories

(VI.10.4.2) $$\mathcal{M}(\mathcal{R}_D)_d \simeq \mathcal{M}(M)_D \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(\mathcal{R}_\Omega)_d \simeq \mathcal{M}(G)_\Omega,$$

est isomorphe au foncteur d'induction i_P^G.

Soit (π, V) dans $\mathcal{M}(G)_\Omega$. D'après le second théorème d'adjonction de Bernstein, on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_G(\Pi_\Omega, \pi) = \mathrm{Hom}_G(i_P^G(\Pi_D), \pi) \simeq \mathrm{Hom}_M(\Pi_D, r_P^G(\pi))$$

Le membre de gauche est un $\mathcal{R}_D$-module à droite unitaire via l'injection de $\mathcal{R}_D$ dans $\mathcal{R}_\Omega$ et le membre de droite aussi. La naturalité de l'isomorphisme d'adjonction entraîne que cet isomorphisme est un isomorphisme de $\mathcal{R}_D$-modules à droite. En d'autres termes, le foncteur d'oubli

$$\mathcal{M}(\mathcal{R}_\Omega)_d \to \mathcal{M}(\mathcal{R}_D)_d$$

induit par $\mathcal{R}_D \hookrightarrow \mathcal{R}_\Omega$ correspond via les équivalences de catégories (VI.10.4.2) au foncteur r_P^G. Or le foncteur d'induction (VI.10.4.1) est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli, et i_P^G est l'adjoint à gauche de r_P^G. Par unicité à isomorphisme près de l'adjoint, ceci montre l'assertion.

Notons $W(D)$ le sous-groupe de $W(A_M) = N_G(M)/M$ stabilisant la classe d'inertie supercuspidale D.

Lemme. *Le $\mathcal{R}_D$-module à droite $\mathcal{R}_\Omega$ est libre de rang $|W(D)|$. Il est donc libre de rang fini sur le centre $\mathfrak{Z}_D$ de $\mathcal{R}_D$.*

Démonstration. D'après le théorème de seconde adjonction de Bernstein, on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{R}_\Omega = \mathrm{Hom}_G(i_P^G(\Pi_D), i_P^G(\Pi_D)) \simeq \mathrm{Hom}_M(\Pi_D, r_{\bar{P}}^G i_P^G(\Pi_D)).$$

En notant r_D la composition du foncteur $r_{\bar{P}}^G$ avec la projection sur la composante $\mathcal{M}(M)_D$ de $\mathcal{M}(M)$, on obtient un isomorphisme naturel

$$\mathcal{R}_\Omega \simeq \mathrm{Hom}_M(\Pi_D, r_D i_P^G(\Pi_D)). \tag{VI.10.4.3}$$

Nous avons vu ci-dessus que (VI.10.4.3) est un isomorphisme de $\mathcal{R}_D$-modules à droite.

D'après l'équation (V.4.3.3), la proposition VI.5.3 (*iii*), et la définition de $W(D)$, il existe une filtration de $r_D i_P^G(\Pi_D)$ dont les quotients successifs sont les $w \cdot \Pi_D$, $w \in W(D)$. Comme tous ces $w \cdot \Pi_D$ sont projectifs, puisque Π_D l'est, cette filtration se scinde en une somme directe

$$r_D i_P^G(\Pi_D) = \bigoplus_{w \in W(D)} w \cdot \Pi_D.$$

Or, si $w \in W(D)$, $w \cdot \Pi_D \simeq \Pi_D$.

On obtient ainsi

$$\mathcal{R}_\Omega \simeq \mathrm{Hom}_M(\Pi_D, \bigoplus_{w \in W(D)} \Pi_D) = \prod_{w \in W(D)} \mathrm{Hom}_M(\Pi_D, \Pi_D) = \mathcal{R}_D^{|W(D)|}.$$

Remarquons que cet isomorphisme est un isomorphisme de $\mathcal{R}_D$-modules à droite, mais que la structure à gauche, elle, est perdue. La deuxième assertion découle du théorème VI.4.4 $\square$

Notons $\mathfrak{Z}_D$ et $\mathfrak{Z}_\Omega$ respectivement le centre de $\mathcal{R}_D$ et $\mathcal{R}_\Omega$. Reprenons les résultats des sections VI.4.4 et VI.4.5. Pour tout idéal maximal I de $\mathfrak{Z}_D$, $\Pi_D/I\Pi_D$ est isomorphe à $m\sigma_I$, pour un unique objet (à isomorphisme près) irréductible $\sigma_I \in \mathcal{M}(M)_D$ (l'entier m est une certaine multiplicité définie en VI.4.5). D'autre part $I \mapsto \sigma_I$ est une bijection entre $\mathrm{SpecMax}(\mathfrak{Z}_D)$ et $\mathbf{Irr}(M)_D$, munissant ainsi $\mathbf{Irr}(M)_D$ d'une structure de variété affine complexe dont l'algèbre des polynômes est $\mathfrak{Z}_D$. L'équivalence de catégories VI.10.4.2 envoie $\mathcal{R}_D/I\mathcal{R}_D$ sur

$$\mathcal{R}_D/I\mathcal{R}_D \otimes_{\mathcal{R}_D} \Pi_D \simeq \Pi_D/I\Pi_D$$

et donc, puisque i_P^G correspond au foncteur d'induction (VI.10.4.1), la représentation $i_P^G(\Pi_D/I\Pi_D)$ correspond au $\mathcal{R}_\Omega$-module à droite

$$\mathcal{R}_D/I\mathcal{R}_D \otimes_{\mathcal{R}_D} \mathcal{R}_\Omega \simeq \mathcal{R}_\Omega/I\mathcal{R}_\Omega.$$

Soit $z \in \mathfrak{Z}_\Omega$. Supposons que $i_P^G(\sigma_I)$ soit irréductible, de sorte que z agisse dessus par un certain scalaire. Comme

$$i_P^G(\Pi_D/I\Pi_D) \simeq i_P^G(m\sigma_I) \simeq m\, i_P^G(\sigma_I),$$

on voit que z agit par ce même scalaire sur $i_P^G(\Pi_D/I\Pi_D)$. Par ce qui précède, z agit par ce même scalaire sur $\mathcal{R}_\Omega/I\mathcal{R}_\Omega$. D'après le lemme ci-dessus, $\mathcal{R}_\Omega$ est un module libre de type fini sur $\mathfrak{Z}_D$. Fixons une base de $\mathcal{R}_\Omega$ sur $\mathfrak{Z}_D$. Alors l'action de z sur $\mathcal{R}_\Omega$ s'exprime dans cette base par une certaine matrice (z_{ij}). La base choisie nous donne pour tout idéal maximal I de $\mathfrak{Z}_D$, une base sur

$\mathbb{C}$ de $\mathcal{R}_\Omega/I\mathcal{R}_\Omega$ et l'action de z sur $\mathcal{R}_\Omega/I\mathcal{R}_\Omega$ s'exprime dans cette base par une certaine matrice $(\bar{z}_{ij})$, où $\bar{z}_{ij} = \Psi_I(z_{ij})$, Ψ_I étant l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-alg}(\mathfrak{Z}_D, \mathbb{C})$ de noyau I.

Rappelons que d'après le théorème VI.8.5, $i_P^G(\sigma_I)$ est irréductible pour tout I dans un ouvert de Zariski dense de $\mathrm{SpecMax}(\mathcal{Z}_D)$. Pour ces I, la matrice $(\bar{z}_{ij})$ est scalaire, et il s'ensuit que la matrice (z_{ij}) est scalaire. Ceci montre que $z \in \mathfrak{Z}_D$. Nous avons donc obtenu

Lemme. *Le centre $\mathfrak{Z}_\Omega$ de $\mathcal{R}_\Omega$ est inclus dans le centre $\mathfrak{Z}_D$ de $\mathcal{R}_D$.*

En fait, on obtient même un peu mieux à peu de frais. Le groupe $W(D)$ agit sur la variété $\mathbf{Irr}(G)_D$ et donc sur son algèbre de polynômes $\mathfrak{Z}_D$. En effet, si $\sigma \in D$, on a vu ci-dessus que $z \in \mathfrak{Z}_\Omega$ agit sur $i_P^G\sigma$ exactement par le même scalaire que son action sur σ. Le corollaire VI.5.4 affirme que les facteurs de composition de $i_P^G\sigma$ sont les mêmes que ceux de $i_{P'}^G\sigma$ pour tout autre sous-groupe parabolique P' de G admettant M comme facteur de Levi. Ceci est vrai en particulier pour $P' = w \cdot P$, $w \in W(D)$. Il s'ensuit que z agit sur $i_P^G(w \cdot \sigma)$ par le même scalaire que celui par lequel il agit sur $i_P^G(\sigma)$. On a donc

$$\mathfrak{Z}_\Omega \subset \mathfrak{Z}_D^{W(D)}.$$

En particulier

$$\mathfrak{Z}_\Omega = \mathcal{C}_{\mathfrak{Z}_D}(\mathcal{R}_\Omega)$$

où $\mathcal{C}_{\mathfrak{Z}_D}(\mathcal{R}_\Omega) = \{r \in \mathfrak{Z}_D \,|\, ar = ra \ (\forall a \in \mathcal{R}_\Omega)\}$ est définie grâce à la structure de $\mathfrak{Z}_D$-bimodule de $\mathcal{R}_\Omega$.

Il s'agit maintenant de voir que l'inclusion ci-dessus est en fait une égalité. Comme $\mathcal{R}_\Omega$ est un $\mathcal{R}_D$-bimodule, le centre $\mathfrak{Z}_\Omega$ de $\mathcal{R}_\Omega$ se caractérise en utilisant seulement cette structure :

$$\mathfrak{Z}_\Omega \simeq \mathcal{C}_{\mathcal{R}_D}(\mathcal{R}_\Omega) = \{r \in \mathcal{R}_D \,|\, ar = ra, \ (\forall a \in \mathcal{R}_\Omega)\}.$$

Regardons de plus près la structure de $\mathcal{R}_D$-module à gauche de $\mathcal{R}_\Omega \simeq \mathrm{Hom}_M(\Pi_D, r_D i_P^G(\Pi_D))$. L'action sur $\mathrm{Hom}_M(\Pi_D, r_D i_P^G(\Pi_D))$ provient de celle sur $r_D i_P^G(\Pi_D)$ obtenue par fonctorialité.

Reprenons la filtration de $r_D i_P^G \Pi_D$ dont les quotients successifs sont les $w \cdot \Pi_D$, $w \in W(D)$. Comme tous ces $w \cdot \Pi_D$ sont projectifs, cette filtration en induit une sur l'espace $\mathrm{Hom}_M(\Pi_D, r_D i_P^G(\Pi_D))$, compatible avec la structure de $\mathcal{R}_D$-bimodule dont les quotients sont isomorphes à $\mathrm{Hom}_M(\Pi_D, w \cdot \Pi_D)$. Cet espace admet une structure naturelle de $\mathcal{R}_D$-module à gauche, obtenue de l'action, tordue par w, de $\mathcal{R}_D$ sur $w \cdot \Pi_D$.

Nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme. *Soit A un anneau commutatif unitaire, et $\mathcal{C}$ la catégorie des A-bimodules (unitaires). Pour tout $M \in \mathcal{C}$, on note*

$$\mathcal{C}_A(M) = \{a \in A \,|\, ma = am, \ (\forall m \in M)\}.$$

Supposons que $M \in \mathcal{C}$ admette une filtration

$$0 = M_{n+1} \subset M_n \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_1 \subset M_0 = M$$

dont les quotients successifs $Q_i = M_i/M_{i+1}$, $i = 0, \ldots n$, vérifient

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_i, Q_j) = 0 \quad (i \neq j).$$

Alors $\mathcal{C}_A(M) = \bigcap_{i=0}^n \mathcal{C}_A(Q_i)$.

<u>*Démonstration*</u>. On raisonne par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant trivial. On peut donc supposer que $\mathcal{C}_A(M_1) = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{C}_A(Q_i)$. De la suite exacte courte

$$0 \to M_1 \to M \to Q_0 \to 0$$

on tire facilement que $\mathcal{C}_A(M) \subset \mathcal{C}_A(M_1) \cap \mathcal{C}_A(Q_0)$. Réciproquement, si $\beta \in \mathcal{C}_A(M_1) \cap \mathcal{C}_A(Q_0)$, alors on peut définir

$$Q_0 = M/M_1 \to M_1, \quad m \mapsto \beta m - m\beta,$$

un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_0, M_1)$. Or notre hypothèse entraîne que ce morphisme est nul. □

Il s'agit maintenant d'appliquer ceci à la catégorie $\mathcal{C}$ des $\mathfrak{Z}_D$-bimodules unitaires, ce que l'on fait en observant que si $w \neq w'$ dans $W(D)$, alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Hom}_M(\Pi_D, w \cdot \Pi_D), \mathrm{Hom}_M(\Pi_D, w' \cdot \Pi_D)) = \{0\},$$

ce qui est clair. On obtient alors

$$\mathfrak{Z}_\Omega = \bigcap_{w \in W(D)} \mathcal{C}_{\mathfrak{Z}_D}(\mathrm{Hom}_M(\Pi_D, w \cdot \Pi_D)) = \mathfrak{Z}_D^{W(D)}.$$

De ceci, il est maintenant aisé de déduire le

Théorème. *Soit Ω une composante connexe de la variété $\Omega(G)$. Alors le centre de la catégorie $\mathcal{M}(G)_\Omega$ est isomorphe à l'algèbre des fonctions polynomiales sur la variété Ω. De même, le centre $\mathfrak{Z}(G)$ de la catégorie $\mathcal{M}(G)$, produit des $\mathfrak{Z}_\Omega$, s'identifie à l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\Omega(G)$.*

<u>*Démonstration*</u>. Notons $\mathcal{O}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur Ω. Avec les notations qui précèdent, la variété Ω est le quotient de la variété D sous l'action du groupe $W(D)$ (voir VI.7.1). Or l'algèbre des fonctions polynomiales sur D est isomorphe à $\mathfrak{Z}_D$, et donc $\mathcal{O}(\Omega) \simeq \mathfrak{Z}_D^{W(D)}$. Or $\mathfrak{Z}_D^{W(D)} \simeq \mathfrak{Z}_\Omega$. L'assertion sur le centre de $\mathcal{M}(G)$ s'en déduit immédiatement. □

Corollaire. *Le centre $\mathfrak{Z}_\Omega$ de la catégorie $\mathcal{M}(G)_\Omega$ est une $\mathbb{C}$-algèbre noethérienne (isomorphe à l'algèbre des fonctions régulières du quotient d'un tore algébrique complexe par l'action d'un groupe fini).*

Remarques. 1. Il peut être utile de donner de manière explicite ce qui n'apparaît que de façon implicite ci-dessus : la valeur en un point $(M, (\rho, W))_G$ de $\Omega(G)$ de la fonction $z \in \mathfrak{Z}(G)$ est le scalaire par lequel z agit sur $i_P^G(\rho, W)$, où P est un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M.

— 2. Les idempotents centraux e_Ω de VI.7.4 sont les fonctions caractéristiques des composantes connexes Ω de $\Omega(G)$.

—3. Le corollaire VI.4.5 se généralise : les catégories $\mathcal{M}(G)_\Omega$ sont indécomposables.

VI.10.5 Homomorphismes de Harish-Chandra

La terminologie employée provient de l'analogie suivante avec la théorie des groupes réductifs réels [30] :

- centre de $\mathcal{M}(G) \leftrightarrow$ centre de l'algèbre enveloppante,

- support cuspidal des représentations $\leftrightarrow$ caractère infinitésimal.

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Rappelons l'application définie en VI.7.3, dont on voit maintenant facilement qu'elle est morphisme fini de variétés algébriques :

$$i_{MG} : \Omega(M) \to \Omega(G)$$

Ceci induit un morphisme entre algèbres de fonctions polynomiales :

$$i_{MG}^* : \mathfrak{Z}(G) \to \mathfrak{Z}(M)$$

appelé homomorphisme de Harish-Chandra. Puisque le morphisme i_{MG} est fini, $\mathfrak{Z}(M)$ est un $\mathfrak{Z}(G)$-module de type fini. Les résultats de VI.7.3 et la remarque 1 de la section précédente montrent que :

Proposition. *Soit $z \in \mathfrak{Z}(G)$ et posons $z_M = i_{MG}^*(z)$. Alors, pour toute représentation (σ, E) de $\mathcal{M}(M)$, $i_P^G(z_M)$ est un endomorphisme G-équivariant de $i_P^G(\sigma, E)$ qui coïncide avec l'endomorphisme défini par z, vu comme élément du centre de la catégorie. Pour toute représentation (π, V) de $\mathcal{M}(G)$, $r_P^G(z)$ est un endomorphisme M-équivariant de $r_P^G(\pi, V)$ qui coïncide avec celui défini par z_M.*

VI.10.6 Centre de Bernstein et sous-groupes ouverts compacts

Le résultat suivant est implicite dans la démonstration du théorème de décomposition VI.7.2.

Théorème. *Soit (π, V) une représentation dans $\mathcal{M}(G)$, et écrivons*

$$V = \bigoplus_{\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)} V_{\mathfrak{s}}$$

sa décomposition de Bernstein. Soit K un sous-groupe compact ouvert de G. Alors $V_{\mathfrak{s}}^K = 0$ sauf pour un nombre fini de composantes $V_{\mathfrak{s}}$.

Plus précisément, pour un tel K, notons $\mathbf{Irr}(G)_K$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de G admettant des vecteurs fixés par K non nuls, et $\Omega(G)_K$ l'ensemble de leurs supports cuspidaux. Alors $\Omega(G)_K$ est un nombre fini de composantes connexes de $\Omega(G)$ (que l'on note $\mathcal{B}(G)_K$).

Démonstration. Tout d'abord, rappelons que le nombre de classes d'inertie de représentations irréductibles supercuspidales de G admettant des vecteurs fixés par K non nuls est fini (remarque VI.3.4) et que ce fait est crucial dans la démonstration du théorème de décomposition. Soit maintenant $\mathfrak{s} = [M, (\rho, W)]_G \in \mathcal{B}(G)$ et soit D la classe d'inertie de (ρ, W) dans M. Pour tout $\psi \in \mathcal{X}(M)$, on peut identifier $i_P^G(\rho\psi, W)^K$ a un espace ne dépendant pas de ψ. En effet, d'après le lemme III.2.2,

$$i_P^G(\rho\psi, V)^K \simeq \bigoplus_{\bar{g} \in P \backslash G / K} W^{p(K_g)},$$

où $K_g = P \cap gKg^{-1}$ et p désigne la projection de P sur $P/N \simeq M$. Rappelons que $P\backslash G/K$ est fini (lemme III.2.3). Pour tout support cuspidal $\theta = (M, (\rho\psi, W))_G$, la fibre $\mathbf{Sc}^{-1}(\theta) \subset \mathbf{Irr}(G)$ est l'ensemble des facteurs de composition de $i_P^G(\rho\psi, W)$, et donc $\theta \in \Omega(G)_K$ si et seulement si $\bigoplus_{\bar{g}\in P\backslash G/K} W^{p(K_g)} \neq \{0\}$. Donc, soit $\mathfrak{s}$ est contenu dans $\Omega(G)_K$, soit $\mathfrak{s}$ n'intersecte pas $\Omega(G)_K$, c'est-à-dire que $\Omega(G)_K$ est une union de composantes connexes de $\Omega(G)$. De plus $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)_K$ si et seulement si $D \in \mathcal{B}(M)_{p(K_g)}$ pour un certain $\bar{g} \in P\backslash G/K$. Ceci nous ramène au cas des représentations supercuspidales traité dans la remarque VI.3.4. □

Proposition. *Soit K est un sous-groupe ouvert compact de G, inclus et distingué dans K_0 et admettant une décomposition d'Iwahori selon les sous-groupes paraboliques standards.*

(i) La sous-catégorie $\mathcal{M}(G)_K$ de $\mathcal{M}(G)$ des représentations engendrées par leur vecteurs K-invariants est stable par passage aux sous-quotients et

$$\mathcal{M}(G)_K \simeq \prod_{\mathfrak{s}\in\mathcal{B}(G)_K} \mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}}.$$

(ii) Le foncteur $V \mapsto V^K$ réalise une équivalence de catégories de $\mathcal{M}(G)_K$ avec $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G,K))$, dont l'inverse est

$$M \mapsto \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(G,K)} M.$$

(iii) Pour tout $(\pi, V) \in \mathcal{M}(G)$, $(\pi, V) \in \mathcal{M}(G)_K$ si et seulement si $(\tilde{\pi}, \tilde{V}) \in \mathcal{M}(G)_K$.

(iv) L'algèbre $\mathcal{H}(G,K)$ est noethérienne.

Démonstration. La première assertion de (i) est établie dans la proposition VI.9.4. De ce qui précède, on déduit la décomposition de $\mathcal{M}(G)_K$.

(ii) découle du théorème I.3.2.

(iii) Soit $(\pi, V) \in \mathcal{M}(G)$. Décomposons $\tilde{V}$ en $\tilde{V} = W_1 + W_2$, où W_1 est la sous-représentation engendrée par $\tilde{V}^K$, donc dans

$$\mathcal{M}(G)_K \simeq \prod_{\mathfrak{s}\in\mathcal{B}(G)_K} \mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}}$$

et W_2 est dans $\prod_{\mathfrak{s}\notin\mathcal{B}(G)_K} \mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}}$. On a alors $W_2^K = \tilde{\pi}(e_K)W_2 = 0$. On veut montrer que W_2 est nul. Supposons que $w \in W_2$ soit non nul. Alors il existe $v \in V$ tel que $w(v) \neq 0$, et comme V est engendré par V^K, il existe $g_1, \ldots g_l \in G$, $v_1, \ldots, v_l \in V^K$ tels que $v = \sum_i \pi(g_i) \cdot v_i$. On a alors

$$0 \neq w(v) = \sum_i (\tilde{\pi}(g_i^{-1}) \cdot w)(v_i)$$

et donc l'un des facteurs $(\tilde{\pi}(g_i^{-1}) \cdot w)(v_i)$ est non nul. Or

$$0 \neq (\tilde{\pi}(g_i^{-1}) \cdot w)(v_i) = (\tilde{\pi}(g_i^{-1}) \cdot w)(\pi(e_K) \cdot v_i) = (\tilde{\pi}(e_K)\tilde{\pi}(g_i^{-1}) \cdot w)(v_i),$$

et l'on obtient une contradiction puisque $(\tilde{\pi}(e_K)\tilde{\pi}(g_i^{-1}) \cdot w) \in W_2^K = 0$. Réciproquement, si $(\tilde{\pi}, \tilde{V}) \in \mathcal{M}(G)_K$, $V \hookrightarrow \tilde{\tilde{V}}$ est dans $\mathcal{M}(G)_K$.

(iv) On a vu que chaque composante $\mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}}$ est une catégorie noethérienne, donc il en est de même de $\mathcal{M}(G)_K$, et donc de $\mathcal{M}(\mathcal{H}(G,K))$. Or l'algèbre $\mathcal{H}(G,K)$ est de type fini sur elle-même, donc noethérienne. □

Le problème inverse, consistant à réaliser pour tout $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$ la catégorie $\mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}}$ comme une catégorie de la forme $\mathcal{M}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hecke de la forme $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, K)$ (en fait des algèbres de Hecke un peu plus générales sont admises) s'appelle la théorie des types. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [16].

Soit K un sous-groupe ouvert compact de G, inclus et distingué dans K_0 et admettant une décomposition d'Iwahori selon les sous-groupes paraboliques standards et soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique standard. Alors $K_M = K \cap M$ possède les mêmes propriétés que K relativement au groupe M. Reprenons les notations de la section VI.7.3.

Corollaire. *La partie $\mathcal{B}(M)_{K_M}$ de $\mathcal{B}(M)$ est l'image inverse par i_{MG} de la partie $\mathcal{B}(G)_K$.*

<u>*Démonstration*</u>. Soit $\mathfrak{s} = [M, (\sigma, E)]_G \in \mathcal{B}(G)$. Montrons que $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)_K$ si et seulement si $\mathfrak{t} = [M, \sigma]_M \in \mathcal{B}(M)_{K_M}$. Supposons $\mathfrak{t} = [M, \sigma]_M \in \mathcal{B}(M)_{K_M}$, c'est-à-dire que E admet des vecteurs fixes par K_M non nul. Considérons la représentation $\pi = i_P^G(\sigma)$, d'espace V. Comme d'après le lemme de Jacquet, V^K se surjecte sur $V_N^{K_M}$ qui contient un sous-quotient isomorphe à E^{K_M} d'après le lemme géométrique, on a $V^K \neq 0$. Donc il existe une représentation irréductible dans $\mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}}$ dans $\mathcal{M}(G)_K$, ce qui montre d'après ce qui précède que $\mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}} \subset \mathcal{M}(G)_K$, et donc $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)_K$. Réciproquement, si $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)_K$, d'après la démonstration du théorème, $E^{p(K_g)} \neq 0$ pour un certain $g \in G$. Ecrivons $g = pk$, avec $k \in K_0$ et $p \in P$. Alors, comme K est supposé distingué dans K_0,

$$K_g = gKg^{-1} \cap P = pkKk^{-1}p^{-1} \cap P = p(K \cap P)p^{-1}$$

et tous les $p(K_g)$ sont conjugués (à K_M) dans M. Donc $E^{K_M} \neq 0$. Démontrons maintenant le corollaire. Soit $\mathfrak{t} \in \mathcal{B}(M)$ et montrons que $\mathfrak{t} \in \mathcal{B}(M)_{K_M}$ si et seulement si $i_{MG}(\mathfrak{t}) \in \mathcal{B}(G)_K$. On a $\mathfrak{t} = [L, \sigma]_M$ pour un certain sous-groupe de Levi standard L inclus dans M. Si $\mathfrak{t} \in \mathcal{B}(M)_{K_M}$, alors σ admet un vecteur non nul fixé par $K_L = K \cap L$, et $i_{MG}(\mathfrak{t}) = [L, \sigma]_G$ admet un vecteur non nul fixé par K, donc $i_{MG}(\mathfrak{t}) \in \mathcal{B}(G)_K$. Réciproquement, si $i_{MG}(\mathfrak{t}) \in \mathcal{B}(G)_K$, alors σ admet un vecteur non nul fixé par $K_L = K \cap L$ et donc $\mathfrak{t} \in \mathcal{B}(M)_{K_M}$. □

VI.10.7 Représentations de type fini

Pour toute représentation (π, V) de $\mathcal{M}(G)$, notons $V_{\mathfrak{s}}$ la composante de V dans la catégorie $\mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$ (*cf.* VI.7.2.2).

Lemme. *Soit (τ, E) une représentation de type fini dans $\mathcal{M}(G)$. Alors $E_{\mathfrak{s}}$ est nul sauf pour un nombre fini de $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$.*

<u>*Démonstration*</u>. Chaque générateur de (τ, E) n'a de composantes que dans un nombre fini de $E_{\mathfrak{s}}$. □

Théorème. *Soit (τ, E) une représentation lisse de type fini de G. Alors (τ, E) est $\mathfrak{Z}(G)$-admissible, c'est-à-dire que pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, E^K est un $\mathfrak{Z}(G)$-module de type fini.*

On remarque que ceci est une généralisation de l'admissibilité des irréductibles : si (τ, E) est irréductible, $\mathfrak{Z}(G)$ agit par des scalaires sur E^K, et donc si E^K est $\mathfrak{Z}(G)$-admissible, cet espace est de dimension finie.

Démonstration. On se ramène avec le lemme au cas où (τ, E) est dans une catégorie $\mathcal{M}(G)_\mathfrak{s}$, pour un certain $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$. Comme $\mathfrak{Z}(G)$ agit alors sur (τ, E) via son quotient $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$, il s'agit de montrer que E^K est un $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$-module de type fini

Commençons par le cas où $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$ est le support d'inertie d'une représentation supercuspidale irréductible (π, V) de G. On reprend alors les notations des sections VI.4.1 et VI.4.5. Soit (Π, V_Π) un progénérateur de la catégorie $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$, par exemple celui construit dans la remarque VI.4.1 (noté là-bas (Π_1, V_{Π_1})). On sait que $(\tau, E) \in \mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ est isomorphe à un quotient d'une somme de copies de (Π, V_Π), plus exactement (τ, E) s'inscrit dans une suite exacte de G-modules de la forme

$$\bigoplus_{i\in I} V_\Pi \to \bigoplus_{j\in J} V_\Pi \to E \to 0$$

Si (τ, E) est de type fini, on peut alors prendre J fini. Il suffit donc de montrer que V_Π^K est un $\mathcal{Z}_{[\pi]}$-module de type fini. Rappelons que

$$(\Pi, V_\Pi) = \mathrm{ind}_{{}^0G}^{G}(\mathrm{Res}_{{}^0G}^{G}(\pi, V)) \simeq V \otimes F,$$

où $F = \mathbb{C}[\Lambda(G)]$ est l'algèbre des fonctions polynomiales sur la variété $\mathcal{X}(G)$. Comme π est supercuspidale irréductible, elle est admissible. Il reste donc à montrer que F est un $\mathcal{Z}_{[\pi]}$-module de type fini. Or ceci est évident, vu la description de $\mathcal{Z}_{[\pi]}$ comme algèbre des fonctions polynomiales sur

$$\mathbf{Irr}(G)_{[\pi]} \simeq \mathcal{X}(G)/\mathcal{X}(G)(\pi).$$

Voyons maintenant le cas général. Soit $(M, (\rho, W))$ une donnée cuspidale telle que $\mathfrak{s} = [M, (\rho, W)]_G$, où M est un sous-groupe de Levi de G. Soit P un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M. Soit $(\Pi_\mathfrak{s}, V_\mathfrak{s})$ le progénérateur de la catégorie $\mathcal{M}(G)_\mathfrak{s}$ construit en VI.10.1 (noté là-bas (Π_Ω, V_Ω)). Le même raisonnement que ci-dessus montre qu'il suffit de voir que $V_\mathfrak{s}^K$ est un $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$-module de type fini. Or

$$(\Pi_\mathfrak{s}, V_\mathfrak{s}) = i_P^G(\Pi, V_\Pi)$$

où (Π, V_Π) est le progénérateur de la catégorie $\mathcal{M}(M)_{[\rho]}$ construit comme ci-dessus. D'après ce qui précède, (Π, V_Π) est $\mathfrak{Z}_{[\rho]}$-admissible, où $\mathfrak{Z}_{[\rho]}$ est le centre de la catégorie $\mathcal{M}(M)_{[\rho]}$. Comme dans la section VI.8.1, il est facile de voir que l'induction parabolique préserve la $\mathfrak{Z}_{[\rho]}$-admissibilité. De plus, $\mathfrak{Z}_{[\rho]}$ est un $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$-module de type fini (voir VI.10.4), et donc $V_\mathfrak{s}$ est $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$-admissible. □

Corollaire. *Soit K un sous-groupe ouvert compact de G. Alors l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, K)$ est un module de type fini sur $\mathfrak{Z}(G)$. En particulier, $\mathcal{H}(G, K)$ est un module de type fini sur son centre, qui contient $e_K * \mathfrak{Z}(G) * e_K$.*

Démonstration. Prenons pour représentation de G l'espace $\mathcal{D}(G/K)$ des fonctions localement constantes à support compact sur G/K (que l'on peut aussi voir comme l'espace des fonctions sur G invariantes à droite par K et à support compact. C'est une représentation monogène engendrée par la fonction caractéristique de K. Le groupe G agit à gauche, et $\mathcal{D}(G/K)^K \simeq \mathcal{D}(G, K) \simeq \mathcal{H}(G, K)$ en tant que $\mathfrak{Z}(G)$-module. □

Proposition. *Pour qu'une représentation (τ, E) de G soit de type fini, il faut et il suffit qu'elle soit $\mathfrak{Z}(G)$-admissible et n'ait de composantes non nulles que dans un nombre fini de $\mathcal{M}(G)_\mathfrak{s}$.*

Démonstration. La condition est nécessaire d'après le lemme et le théorème ci-dessus. Elle est suffisante, car si

$$E = \bigoplus_{\mathfrak{s} \in F} E_{\mathfrak{s}}$$

où F est un sous-ensemble fini de $\mathcal{B}(G)$, on choisit alors un sous-groupe ouvert compact K de G vérifiant les conditions du corollaire VI.10.6 tel que

$$F \subset \mathcal{B}(G)_K$$

et donc (τ, E) est engendré par E^K où E^K est $\mathfrak{Z}(G)$-fini, et donc a fortiori $\mathcal{H}(G, K)$-fini, d'après le corollaire. □

Variante. *On peut reformuler et démontrer le théorème et la proposition ci-dessus pour les* (G, B)*-modules : Un* (G, B)*-module* (τ, E) *est de type fini si et seulement s'il est* $B \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{Z}(G)$*-admissible et n'a de composantes non nulles que dans un nombre fini de* $\mathcal{M}(G)_{\mathfrak{s}}$*. On en déduit que les foncteurs d'induction* i_P^G *préservent les* B*-modules de type fini.*

VI.10.8 Retour sur le théorème de Howe

Soit (π, V) une représentation lisse de G. On dit que (π, V) est $\mathfrak{Z}(G)$-finie si l'annulateur de (π, V) dans $\mathfrak{Z}(G)$ est un idéal de codimension finie.

Nous concluons notre étude des relations entre admissibilité, type fini et action de $\mathfrak{Z}(G)$ par le théorème suivant.

Théorème. *Soit* (π, V) *une représentation lisse de* G *et considérons les propriétés éventuelles suivantes de* (π, V) *:*

(1) (π, V) *est de type fini,*

(2) (π, V) *est admissible,*

(3) (π, V) *est* $\mathfrak{Z}(G)$*-finie.*

Alors deux de ces propriétés impliquent la troisième, et la représentation (π, V) *est alors de longueur finie.*

Démonstration. Le théorème de Howe VI.6.3 affirme que (1) et (2) est équivalent à (π, V) est de longueur finie. Il est facile de voir par récurrence sur la longueur qu'une représentation de longueur finie est $\mathfrak{Z}(G)$-finie, en commençant par le cas où (π, V) est irréductible (c'est alors le lemme de Schur).

Supposons que (π, V) vérifie (1) et (3). On a vu en VI.10.7 que (1) implique que (π, V) est $\mathfrak{Z}(G)$-admissible, c'est à dire que pour tout sous-groupe compact ouvert K de G, V^K est un $\mathfrak{Z}(G)$-module de type fini. Mais (3) nous dit que V^K est annulé par un idéal de codimension finie de $\mathfrak{Z}(G)$, donc V^K est de dimension finie. Ceci montre que (π, V) est admissible.

Supposons que (π, V) vérifie (2) et (3). Grâce à la caractérisation des représentations de type fini de la proposition VI.10.7, il s'agit de démontrer que (π, V) est $\mathfrak{Z}(G)$-admissible, et n'a qu'un nombre fini de composantes de Berstein $V_{\mathfrak{s}}$ non triviales. Le premier point est clair, puisque pour tout sous-groupe compact ouvert K de G, V^K est de dimension finie, donc de type fini sur $\mathfrak{Z}(G)$. Le second l'est aussi, puisqu'un idéal de codimension finie de $\mathfrak{Z}(G)$ va contenir les composantes $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$ sauf pour un nombre fini de $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$, et d'autre part, l'identité de $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$ agit par l'identité sur $V_{\mathfrak{s}}$. □

VI.11 Notes sur le Chapitre VI

Les généralités sur les foncteurs d'induction et de restriction se trouvent à de nombreux endroits de la littérature. Il en est de même des résultats principaux sur les représentations supercuspidales ([3], [4], [19]). L'attribution des résultats est parfois délicate. Ainsi, les diverses caractérisations des représentations supercuspidales (théorème VI.2.1), semble dues à H. Jacquet pour $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ et à Harish-Chandra en général, et la dénomination de théorème d'Harish-Chandra semble s'est imposée (peut-être aussi parce que d'autres résultats importants portent le nom de Jacquet). Je me suis aussi servi de [22] pour la rédaction de la démonstration ce théorème. Les théorèmes d'admissibilité et d'admissibilité uniforme, ainsi que la proposition VI.2.4 sont dûs à Bernstein ([3]). Là encore, les notes de S. DeBacker [22] m'ont été utiles. L'étude de la catégorie $\mathcal{M}(G)_{[\pi]}$ et la détermination de son centre est basée sur les notes [37]. Le lemme géométrique est dû indépendamment à Bernstein-Zelevinskii [4] et Casselman [19], la démonstration suit [4] pour une bonne part, mais aussi [19] à un point crucial, ce qui permet d'avoir une formule intégrale explicite (VI.5.1.14). Les conséquences du lemme géométrique sur les suites de compositions des induites paraboliques de supercuspidales VI.5.3 et VI.5.4 sont obtenues dans [4]. L'irréductibilité générique des induites VI.8.5 est tirée de [1]. La démonstration du lemme de Jacquet VI.6.1 rédigée ici emprunte à plusieurs sources, en particulier [3], [1], [22]. Le théorème de Howe est tiré de [3]. La démonstration du théorème de décomposition de Bernstein suit les notes [37] pour l'essentiel, notes elles-mêmes inspirées de [1] auquel je me suis reporté de temps à autre. Le second théorème d'adjonction est établi, pour les grandes lignes de la démonstration, dans [1] (voir aussi [2] et [21]). J'ai essayé de la rendre plus accessible en ajoutant quelques détails. Il reste néanmoins que c'est une démonstration difficile et subtile, dont le point crucial est le lemme de stabilisation C.II utilisé en VI.8.1. Le second théorème d'adjonction est équivalent à une forme forte de la dualité de Casselman, valable sans hypothèse d'admissibilité ([1] et [2])

Les résultats sur le centre de Bernstein sont exposés ici en suivant les idées de [1] et [2], reprises et détaillées dans les notes [37]. La démarche, comme nous l'avons expliquée, est quelque peu différente de celle suivie dans la rédaction antérieure [23], mais les corollaires importants du résultat principal sont tirés de [23]. L'énoncé de théorème VI.10.8 est inspiré du résultat analogue pour les groupes réels, que l'on peut trouver disséminé dans [34].

Chapitre VII

Classification de Langlands

Le but de ce chapitre est d'énoncer et de démontrer le théorème de classification de Langlands, qui réduit le problème de la détermination de $\mathbf{Irr}(G)$, c'est-à-dire des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles d'un groupe réductif p-adique G, au problème de la détermination des classes de représentations irréductibles *tempérées*. La définition de représentation tempérée donnée ici est uniquement en termes d'exposants normalisés, définis dans la première section. Le critère de Casselman donne une condition nécessaire et suffisante sur les exposants normalisés d'une représentation pour que celle-ci soit de carré intégrable modulo le centre : ceux-ci doivent être dans certains cônes ouverts. La définition d'une représentation tempérée est alors que tous ces exposants normalisés sont dans les adhérences de ces cônes ouverts. Une représentation tempérée n'est donc pas loin d'être une représentation de carré intégrable modulo le centre, et d'ailleurs, nous montrons qu'une représentation tempérée irréductible apparaît comme sous-représentation d'une induite parabolique d'une représentation de carré intégrable modulo le centre. En particulier, étant dans l'induite parabolique d'une unitaire, elle est unitaire. Nous montrons d'autre part que l'induction parabolique préserve la classe des représentations tempérées. Ce n'est pas le cas de la restriction parabolique, mais on peut définir une notion de restriction parabolique tempérée, qui préserve la classe des représentations tempérées, et même obtenir une version tempérée de la réciprocité de Frobenius et du lemme géométrique.

Nous étudions ensuite les opérateurs d'entrelacement entre représentations de la forme $i_P^G(\rho, W)$ et $i_Q^G(\rho, W)$, où P et Q sont deux sous-groupes paraboliques de même facteur de Lévi M et (ρ, W) est une représentation lisse de M. Lorsque (ρ, W) satisfait à un certain critère (PQ-régularité), on exhibe un opérateur d'entrelacement canonique entre ces représentations. Les propriétés de transitivité de ces opérateurs d'entrelacement sont étudiées en détails. Un triplet de Langlands est la donnée d'un sous-groupe parabolique $P = MN$ de G, d'une représentation irréductible tempérée (σ, E) de M et d'un caractère non ramifié ψ de M vérifiant une certaine condition de positivité. On montre alors que la représentation $\sigma \otimes \psi$ est $P\bar{P}$-régulière, et donc qu'il existe un opérateur d'entrelacement entre $i_P^G(\sigma, E)$ et $i_{\bar{P}}^G(\sigma, E)$. Une étude plus fine montre que l'espace de tels opérateurs est de dimension 1, et que $i_P^G(\sigma, E)$ (resp. $i_{\bar{P}}^G(\sigma, E)$) admet un unique quotient irréductible (resp. sous-représentation). On appelle ce quotient le quotient de Langlands du triplet. Le théorème de classification affirme que toute représentation irréductible de G apparaît comme quotient de Langlands, et ce de manière essentiellement unique.

VII.1 Critère de Casselman et applications

VII.1.1 Exposants

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G de composante déployée A. Soit (π, V) une représentation lisse admissible de G. La représentation $r_P^G(\pi, V)$ est alors admissible d'après le corollaire VI.6.1. Pour tout sous-groupe compact ouvert K_M de M, et pour tout $t \in A$, comme $tK_Mt^{-1} = K_M$, on peut écrire

$$(r_P^G V)^{K_M} = \bigoplus_\chi (r_P^G V)_\chi^{K_M}$$

où χ parcourt l'ensemble des caractères lisses de A et $(r_P^G V)_\chi^K$ est le sous-espace caractéristique de $(r_P^G V)^{K_M}$ pour le caractère χ, c'est-à-dire

$$(r_P^G V)_\chi^{K_M} = \{v \in (r_P^G V)^{K_M} \mid \exists d \in \mathbb{N},\, \forall t \in A, (r_P^G(\pi)(t) - \chi(t)\mathrm{Id}_V)^d \cdot v = 0\}.$$

Si K'_M est un autre sous-groupe ouvert compact de M, $K'_M \subset K_M$, alors $(r_P^G V)_\chi^{K_M} \subset (r_P^G V)_\chi^{K'_M}$. On peut donc poser

$$(r_P^G V)_\chi = \bigcup_{K_M} (r_P^G V)_\chi^{K_M}$$

où K_M parcourt les sous-groupes ouverts compacts de M. Si cet espace est non trivial, on dit que χ est un exposant normalisé de π pour le sous-groupe parabolique $P = MN$. On note $\mathrm{Exp}(A, r_P^G V)$ l'ensemble de ces exposants. On obtient alors

$$(r_P^G V) = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Exp}(A, r_P^G V)} (r_P^G V)_\chi. \tag{VII.1.1.1}$$

Si (π, V) est de longueur finie, il en est de même de $r_P^G(\pi, V)$ (*cf.* VI.6.4), et l'ensemble $\mathrm{Exp}(A, r_P^G V)$ est fini, d'après le lemme de Schur.

Remarque. Si on prend $P = G$, on obtient une décomposition :

$$V = \bigoplus_\chi V_\chi$$

qui est une version un peu plus faible de la décomposition de la proposition III.1.10 (puisque $A_G \subset Z(G)$).

Rappelons que l'induction et la restriction paraboliques préservent l'admissibilité. Nous allons comparer les décompositions d'une représentation et celle de son induite ou de sa restriction.

Lemme. (*i*) *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G et (ρ, W) une représentation admissible de M. Soit*

$$W = \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Exp}(A_M, W)} W_\psi, \qquad i_P^G W = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Exp}(A_G, i_P^G W)} (i_P^G W)_\chi$$

les décompositions respectives en sous-espaces caractéristiques de W et de $i_P^G W$ pour les actions de A_M et de A_G respectivement. Si

$$(i_P^G W)_\chi \neq \{0\},$$

alors χ est la restriction de A_M à A_G d'un caractère ψ tel que $W_\psi \neq \{0\}$.

— (ii) *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G et (π, V) une représentation admissible de G. Soit*

$$V = \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Exp}(A_G, V)} V_\psi, \quad r_P^G W = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Exp}(A_M, r_P^G V)} (r_P^G W)_\chi$$

les décompositions respectives en sous-espaces caractéristiques de V et de $r_P^G V$ pour les actions de A_G et de A_M respectivement. Alors la restriction d'un caractère χ de A_M apparaissant dans la deuxième décomposition à A_G est un caractère ψ apparaissant dans la première décomposition.

Démonstration. (i) Pour tout $f \in i_P^G W$, notons simplement par $g \cdot f$ l'action (par translation à droite) d'un élément g de G sur f. Supposons que f soit un vecteur propre non nul pour l'action de tout $a \in A_G$ pour la valeur propre $\chi(a)$. On a alors, pour tout $x \in G$,

$$\chi(a) f(x) = (a \cdot f)(x) = f(xa) = f(ax) = \rho(a) \cdot f(x).$$

Prenons $x \in G$ tel que $w = f(x) \neq 0$. Alors w est un vecteur propre de $\rho(a)$ pour la valeur propre $\chi(a)$. Ceci montre que χ est la restriction à A_G d'un caractère ψ de A_M intervenant non trivialement dans la décomposition de W.

(ii) C'est évident d'après la définition de $r_P^G V$, dès lors que l'on remarque que pour tout $a \in A_G$, $\delta_P(a) = 1$. □

VII.1.2 Critère de Casselman

Dans cette section, nous établissons un critère montrant qu'une représentation est de carré intégrable modulo le centre.

Théorème. *Soit (π, V) une représentation lisse admissible de G admettant un caractère central unitaire. Alors π est de carré intégrable modulo le centre si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique $P = MN$ de G, et pour tout exposant normalisé χ de π pour le sous-groupe parabolique $P = MN$, $\Re(\chi) \in {}^+[\mathfrak{a}_M^*]_P^G$.*

Démonstration. Nous renvoyons le lecteur à la section IV.3 pour les définitions et notations concernant les représentations de carré intégrable modulo le centre et à V.3.15 et V.3.20 pour les définitions de $\Re(\chi)$ et ${}^+[\mathfrak{a}_M^*]_P^G$. Nous allons adapter légèrement les définitions des représentations de carré intégrable au contexte des groupes réductifs p-adiques. En effet, le quotient $Z(G)/A_G$ est compact, et comme $A_G = C_{A_G}{}^0 A_G$, avec ${}^0 A_G$ compact, on a même $Z(G)/C_{A_G}$ compact (voir V.2.5). On fixe donc un caractère unitaire χ de C_{A_G} et une mesure G-invariante dg^* sur G/C_{A_G} et l'on définit l'espace $L^2(G, \chi, dg^*)$ comme en IV.3.1 et les représentations de carré intégrable modulo le centre comme en IV.3.2, C_{A_G} remplaçant $Z(G)$. Comme $Z(G)/C_{A_G}$ est compact, il est facile de voir cette que nouvelle définition est équivalente à l'ancienne.

Soit (π, V) comme dans l'énoncé du théorème. On cherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que quels que soient $v \in V$, $\lambda \in \tilde{V}$,

$$\text{(VII.1.2.1)} \qquad \int_{G/C_{A_G}} |\phi_{v,\lambda}(g)|^2 \, dg^*$$

converge. Soit $K \subset K_0$ un sous-groupe ouvert compact de G, distingué dans K_0, admettant une décomposition d'Iwahori selon les sous-groupes paraboliques standards de G et fixant v et λ.

Soient $k_1, \ldots, k_r$ un système de représentants des classes de K dans K_0. La décomposition de Cartan V.5.1 de G nous donne :

$$G = \coprod_{i,j=1}^{r} Kk_iF_\emptyset C_\emptyset^+ k_jK.$$

Fixons maintenant aussi un système de représentants S des classes d'équivalences dans $C_\emptyset^+$ pour la relation (V.3.24.1), de sorte que l'on peut encore rendre la décomposition de Cartan plus fine,

$$G = \coprod_{i,j=1}^{r} \coprod_{z\in S} Kk_iF_\emptyset zC_{A_G}k_jK,$$

et en déduire que

$$G/C_{A_G} = \coprod_{i,j=1}^{r} \coprod_{z\in S} Kk_iF_\emptyset zk_jK.$$

Ceci permet d'écrire (VII.1.2.1) sous la forme

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{r} \sum_{f\in F_\emptyset} \sum_{z\in S} |\phi_{v,\lambda}(k_ifzk_j)|^2\mu_G(KfzK)\\ &= \sum_{i,j=1}^{r} \sum_{f\in F_\emptyset} \sum_{z\in S} |\phi_{k_j\cdot v, k_i^{-1}\cdot\lambda}(fz)|^2\mu_G(KfzK).\end{aligned}$$

On obtient donc une somme finie de séries à termes positifs, toutes de la forme (en remplaçant $k_j \cdot v$ et $k_i^{-1} \cdot \lambda$ simplement par v et λ, et en notant que $k_j \cdot v$ et $k_i^{-1} \cdot \lambda$) sont encore fixés par K)

$$\sum_{f\in F_\emptyset} \sum_{z\in S} |\phi_{v,\lambda}(fz)|^2\mu_G(KfzK). \tag{VII.1.2.2}$$

Regardons de plus près le terme général de cette série. Rappelons (voir (V.3.24.1)) que $S \simeq \mathbb{N}^d$. Plus précisément, une base du cône S est donnée par des éléments t_α, $\alpha \in \Delta_\emptyset$ tels que $|\alpha(t_\alpha)|_{\mathbb{F}} < 1$ et $|\beta(t_\alpha)|_{\mathbb{F}} = 1$ si $\beta \neq \alpha$.

Fixons un entier n strictement positif, et, pour tout sous-groupe parabolique standard $P = MN$, notons

$$S_M(n) = \{z = \prod_{\alpha\in\Delta_\emptyset} t_\alpha^{i_\alpha} \,|\forall\alpha \in \Delta_\emptyset \setminus \Delta_\emptyset^M,\, i_\alpha > n,\ \forall\alpha \in \Delta_\emptyset^M,\, 0 \leq i_\alpha \leq n.\}$$

Il est alors clair que

$$S = \coprod_{P=MN \text{ standard}} S_M(n).$$

Remarquons que tout élément t de $S_M(n)$ s'écrit $z = z_1t'$ avec z_1 dans l'ensemble fini $S_M(n)_1$ des $\prod_{\alpha\in\Delta_\emptyset^M} t_\alpha^{i_\alpha}$, $0 \leq i_\alpha \leq n$ et t' dans l'ensemble

$$S'_M(n) = \{z' = \prod_{\alpha\in\Delta_\emptyset\setminus\Delta_\emptyset^M} t_\alpha^{i_\alpha},\, i_\alpha > n\}.$$

Fixons maintenant un sous-groupe parabolique standard $P = MN$, et décomposons K selon le sous-groupe parabolique $P = MN$, avec les notations habituelles :

$$K = K_N K_M K_{\bar{N}}.$$

Soient $f \in F_\emptyset$ et $z \in S_M(n)$ et posons pour simplifier $m = fz$. Comme $m = fz \in M_\emptyset^+ \subset M^+$, on a

$$m^{-1} K_{\bar{N}} m \subset K_{\bar{N}} \subset K, \quad m^{-1} K_M m = K_M \subset K,$$

et

$$m^{-1} K_N m = K_{m^{-1}Nm} \supset K_N.$$

D'où

$$\begin{aligned} KmK &= K_N K_M K_{\bar{N}} mK = m(m^{-1}K_N m)(m^{-1}K_M m)(m^{-1}K_{\bar{N}} m)K \\ &= mK_{m^{-1}Nm}K. \end{aligned}$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned} \mu_G(KmK) &= \mu_G(mK_{m^{-1}Nm}K) = \mu_G(K_{m^{-1}Nm}K) = \mu_G(K_{m^{-1}Nm}K_M K_{\bar{N}}) \\ &= [K_{m^{-1}Nm} : K_N]\mu_G(K_N K_M K_{\bar{N}}) = [K_{m^{-1}Nm} : K_N]\mu_G(K). \end{aligned}$$

Les calculs de fonctions modulaires effectués en V.5.4 pour un élément a de la composante déployée A de M marchent plus généralement pour un élément m de M, et donnent, pour m comme ci-dessus

$$[K_{m^{-1}Nm} : K_N] = \delta_P(m),$$

si bien que l'on a en définitive

$$\mu_G(KmK) = \delta_P(m)\mu_G(K).$$

La série (VII.1.2.2) peut alors s'écrire sous la forme

$$\sum_{P \text{ standard}} \sum_{f \in F_\emptyset, z \in S_M(n)} |\phi_{f \cdot v, \lambda}(z)|^2 \delta_P(fz)\mu_G(K).$$

Le nombre de sous-groupes paraboliques standards de G étant fini, ainsi que $F_\emptyset$, le problème de la convergence des séries (VII.1.2.2), pour tous λ, v, se ramène au problème de la convergence des séries de la forme :

$$\sum_{z \in S_M(n)} |\phi_{v,\lambda}(z)|^2 \delta_P(z).$$

On utilise maintenant le décomposition de $S_M(n)$ en

$$S_M(n) = S_M(n)_1 \, S'_M(n),$$

et le fait que $S_M(n)_1$ est fini pour se ramener comme ci-dessus au problème de la convergence des séries de la forme :

$$\sum_{z \in S'_M(n)} |\phi_{v,\lambda}(z)|^2 \delta_P(z).$$

Comme (π, V) est admissible, on peut choisir $\epsilon > 0$ (dépendant de v et λ) tel que (VI.9.6.5) soit vérifié pour tout $z \in C_A^+(\epsilon)$. On choisit alors n assez grand, de sorte que $S'_M(n) \subset A_M^+(\epsilon)$. On a alors

$$\begin{aligned} &\sum_{z \in S'_M(n)} |\phi_{v,\lambda}(z)|^2 \delta_P(z) \\ &= \sum_{z \in S'_M(n)} |\delta_P(z)^{1/2} \lambda(\pi(z) \cdot v)|^2 \\ &= \sum_{z \in S'_M(n)} |\langle r_P^G(\pi)(z) \cdot j_N(v), j_{\bar{N}}(\lambda) \rangle_P|^2, \end{aligned}$$

on est ramené à l'étude des séries

$$\sum_{z \in S'_M(n)} |\langle r_P^G(\pi)(z) \cdot j_N(v), j_{\bar{N}}(\lambda) \rangle_P|^2.$$

Identifions le sous-groupe S_M engendré par $S'_M(n)$ dans A_M à $\mathbb{Z}^d$, où $d = |\Delta_\emptyset \setminus \Delta_\emptyset^M|$. Les exposants normalisés de (π, V) pour le sous-groupe parabolique P, restreints à ce sous-groupe, s'identifient donc à des caractères de $\mathbb{Z}^d$. Vu ainsi, un tel exposant normalisé χ est donné par un d-uplets $(z_1, \ldots, z_d)$ de nombres complexes non nuls (voir C.III). De manière plus explicite, une base de S_M est donnée par les t_{α_i}, $i = 1, \ldots, d$, où

$$\{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,d} = \Delta_\emptyset \setminus \Delta_\emptyset^M,$$

et $z_i = \chi(t_{\alpha_i})$.

Soit $K \subset K_0$ un sous-groupe ouvert compact de G, distingué dans K_0, admettant une décomposition d'Iwahori selon les sous-groupes paraboliques standards de G et fixant v et λ. On a alors $j_N(v) \in V_N^{K_M}$ et $j_{\bar{N}}(\lambda) \in \tilde{V}_{\bar{N}}^{K_M}$. La proposition C.III nous donne l'existence de polynômes Q_χ (vu comme fonction sur S_M) tels que

$$\langle r_P^G(\pi)(z) \cdot j_N(v), j_{\bar{N}}(\lambda) \rangle_P = \sum_\chi Q_\chi(z) \chi(z),$$

la somme (finie) portant sur les exposants normalisés de (π, V) pour le sous-groupe parabolique P.

Il est alors facile de voir que la série :

$$\sum_{z \in S'_M(n)} |\langle r_P^G(\pi)(z) \cdot j_N(v), j_{\bar{N}}(\lambda) \rangle_P|^2 = \sum_{z \in S'_M(n)} |\sum_\chi Q_\chi(z) \chi(z)|^2$$

converge si pour tout exposant normalisé χ, $|\chi(t_{\alpha_i})| < 1$, pour tout $i = 1 \ldots d$. Réciproquement, si l'un des exposants normalisés ne vérifie pas la condition, disons $\chi \in \mathrm{Exp}(A, r_P^G V)$, pour un certain parabolique standard P, alors, en prenant v tel que $j_N(v)$ soit dans le sous-espace propre correspondant, et $\lambda \in \tilde{V}$ tel que $\langle j_N(v), j_{\bar{N}}(\lambda) \rangle_P \neq 0$ on obtient

$$\sum_{z \in S'_M(n)} |\langle r_P^G(\pi)(z) \cdot j_N(v), j_{\bar{N}}(\lambda) \rangle_P|^2 = \sum_{z \in S'_M(n)} c|\chi(z)|^2 = +\infty$$

c étant une constante positive non nulle. En utilisant V.3.21, on retrouve la condition de l'énoncé. Ceci termine la démonstration du théorème. □

VII.1.3 Une application

Rappelons qu'un sous-groupe de Levi M de G est dit maximal s'il existe un sous-groupe parabolique propre maximal P de G dont M soit un facteur de Levi. Supposons que M soit un sous-groupe de Levi standard maximal de G (cette condition est équivalente à $l(M) = 2$, *cf.* V.4.8). Le groupe

$$\mathcal{W}(M, *) := \{g \in G \,|\, gMg^{-1} \text{ sous-groupe de Levi standard de } G\}/M$$

possède alors deux éléments, disons $\mathcal{W}(M, *) = \{1, w\}$. Remarquons qu'avec les notations de V.4.4, on a $\mathcal{W}(M, *) \simeq W(M, *)/W_M$.

Si l'on pose $M' = w \cdot M$, et si P' est le sous-groupe parabolique standard de G admettant M' comme facteur de Levi, alors $w \cdot P = \overline{P'}$, le sous-groupe parabolique opposé à P'. Nous allons donner des conditions nécessaires de réductibilité des induites supercuspidales de P à G.

Théorème. *Soit $P = MN$ comme ci-dessus et soit (ρ, W) une représentation supercuspidale irréductible de M. Posons $\rho' = \rho^w \in \mathcal{M}(M')_{sc}$. Supposons que $(\pi, V) = i_P^G(\rho, W)$ soit réductible. Alors $M = M'$ et $\rho' = \rho\psi$ pour un certain caractère non ramifié ψ de M à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. On peut supposer que π est de caractère central unitaire. En effet, si tel n'est pas le cas, un argument de la démonstration du théorème VI.8.5 nous dit qu'il existe un caractère non ramifié χ de G tel que le caractère central de $\pi_\chi = \pi \otimes \chi$ soit unitaire. D'après l'isomorphisme de Mackey III.2.11, on a $\pi_\chi = i_P^G(\rho) \otimes \chi \simeq i_P^G(\rho \otimes \chi_{|M})$. La représentation π est donc réductible si et seulement π_χ l'est, et la conclusion sur ρ se déduit de celle sur $\rho \otimes \chi_{|M}$.

Nous supposons d'abord que que $M \neq M'$. Posons $r(\pi) = \{r_Q^G(\pi)\}$, où Q décrit les sous-groupes paraboliques standards propres de G. D'après la proposition VI.5.3, les seules contributions proviennent des sous-groupes paraboliques P et P', plus précisément

$$r_P^G(\pi) = r_P^G i_P^G(\rho) = \rho, \quad r_{P'}^G(\pi) = r_{P'}^G i_P^G(\rho) = \rho'.$$

Le théorème VI.5.4 affirme que π est de longueur au plus 2, donc exactement 2, puisque π est supposée réductible. Posons $(\pi', V') = i_{P'}^G(\rho', W')$. Une analyse similaire s'applique à π'. Par adjonction on a

$$\text{(VII.1.3.1)} \qquad \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi') = \mathrm{Hom}_{M'}(r_{P'}^G i_P^G(\rho), \rho') = \mathrm{Hom}_{M'}(\rho', \rho'),$$

et la dimension de cet espace est 1 car ρ' est irréductible. De même $\mathrm{Hom}_G(\pi', \pi)$ est de dimension 1. On a vu que $l(\pi) = 2$, donc il existe des représentations irréductibles π_1 et π_2 de G et une suite exacte

$$\text{(VII.1.3.2)} \qquad 0 \to \pi_1 \to \pi \to \pi_2 \to 0.$$

Les facteurs de composition de π' et de π sont les mêmes (théorème VI.5.4), mais $\mathrm{Hom}_G(\pi', \pi)$ étant de dimension 1, π et π' ne sont pas complètement réductibles.

Le foncteur r_P^G étant exact, on obtient une suite exacte

$$0 \to r_P^G(\pi_1) \to r_P^G(\pi) = \rho \to r_P^G(\pi_2) \to 0.$$

Comme ρ est irréductible, soit $r_P^G(\pi_1) = \rho$ et $r_P^G(\pi_2) = 0$, soit c'est le contraire. Mais comme $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi) \neq 0$, on a par adjonction

$$\mathrm{Hom}_G(r_P^G \pi_1, \rho) \neq 0$$

et donc $r_P^G(\pi_1) \neq 0$, d'où $r_P^G(\pi_1) = \rho$ et $r_P^G(\pi_2) = 0$.

Le même argument avec le foncteur $r_{P'}^G$ montre que soit $r_{P'}^G(\pi_1) = \rho'$ et $r_{P'}^G(\pi_2) = 0$, soit c'est le contraire. Le foncteur R du lemme VI.7.2 étant fidèle, on voit que l'on ne peut avoir simultanément $r_P^G(\pi_1) = r_{P'}^G(\pi_1) = 0$ et idem avec π_2. Donc, $r_P^G(\pi_1) = \rho$, $r_P^G(\pi_2) = 0$, $r_{P'}^G(\pi_1) = 0$ et $r_{P'}^G(\pi_2) = \rho'$.

Comme M est maximal, A_M/A_G est de dimension 1. La restriction à A_M du caractère central χ de ρ vérifie donc l'une de ces trois possibilités, mutuellement exclusives :

- $|\chi(a)| = 1$ pour tout $a \in A_M$,
- $|\chi(a)| > 1$ pour tout $a \in A_M^{++}$,
- $|\chi(a)| < 1$ pour tout $a \in A_M^{++}$.

Dans le premier cas, le caractère central de ρ est unitaire, et comme ρ est supercuspidale, ρ est alors unitaire. Dans ce cas, $\pi = i_P^G(\rho)$ est encore unitaire, donc complètement réductible, ce qui est exclu.

Dans le second cas, on remplace ρ par sa contragrédiente pour se ramener au troisième cas, traité ci-dessous. La conclusion du théorème pour $\tilde{\rho}$ entraine le résultat pour ρ de manière évidente.

Dans le troisième cas, le critère de Casselman s'applique à la représentation π_1, puisque $r_Q^G\pi_1 = 0$ pour tout sous-groupe parabolique standard $Q \neq P$, et que $r_P^G\pi_1 = \rho$ et que plus, nous avons pris garde de supposer que le caractère central de π, donc celui de π_1, est unitaire. La représentation π_1 est de carré intégrable modulo le centre, donc en particulier unitaire. Si l'on note par $\bar{\pi}_1$ la représentation conjuguée de π_1, on a alors $\bar{\pi}_1 = \tilde{\pi}_1$, d'où, en utilisant (VI.9.6.2) :

$$\overline{r_{\bar{P}}^G(\pi_1)} = r_{\bar{P}}^G(\bar{\pi}_1) = r_{\bar{P}}^G(\tilde{\pi}_1) = r_P^G(\pi_1)\tilde{} = \tilde{\rho}.$$

On a vu ci-dessus que $r_{P'}^G\pi_1 = 0$. Or $r_{\bar{P}}^G$ s'obtient de $r_{P'}^G$ par composition avec w. On en déduit que $r_{\bar{P}}^G\pi_1 = 0$, et donc que $\rho = 0$, ce qui est absurde.

Nous sommes parvenu à montrer que l'hypothèse $M \neq M'$ aboutit toujours à une contradiction. On a donc $M = M'$, et dans ce cas, $P = P'$, $w \cdot P = \bar{P}$, et $r_P^G i_P^G \rho$ a pour facteurs de composition ρ et ρ' (c'est toujours la proposition VI.5.3). On suppose $\rho \neq \rho'$, sans quoi la conclusion du théorème est évidente. Comme ρ et ρ' sont supercuspidales, d'après le lemme VI.3.6, on a même

$$r_P^G i_P^G \rho = \rho \oplus \rho',$$

et donc

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi') = \mathrm{Hom}_{M'}(r_P^G i_P^G(\rho), \rho') = \mathrm{Hom}_{M'}(\rho \oplus \rho', \rho'),$$

qui est de dimension 1. On reprend les raisonnements précédents. Les représentations π et π' sont de longueur 2 et l'on écrit la suite exacte comme en (VII.1.3.2). L'exactitude du foncteur de Jacquet nous donne comme précédemment $r_P^G\pi_1 = \rho$, $r_P^G\pi_2 = \rho'$.

Comme ci-dessus, on se ramène au cas où par le critère de Casselman, on montre que π_1 est de carré intégrable modulo le centre. On a donc $\pi_1^h = \pi_1$, ou encore $\tilde{\pi}_1 = \bar{\pi}_1$.

Comme $w \cdot P = \bar{P}$,

$${}^{w}(r_{\bar{P}}^G(\pi_1)) = r_P^G(\pi_1) = \rho,$$

et l'on obtient, en utilisant (VI.9.6.2) :

$$\rho' = \rho^w = r_{\bar{P}}^G(\pi_1) = r_{\bar{P}}^G(\tilde{\tilde{\pi}}_1) = (r_P^G(\tilde{\pi}_1))\tilde{} = (r_P^G(\bar{\pi}_1))\tilde{} = \tilde{\bar{\rho}} = \rho^h.$$

De la même façon que dans la démonstration du théorème VI.8.5, on peut écrire ρ sous la forme $\rho = \psi\rho_0$ où ρ_0 est supercuspidale unitaire, et ψ est un caractère de M à valeurs réelles. On a donc

$$\rho' = \rho^h = (\psi\rho_0)^h = \psi^{-1}\rho_0,$$

d'où $\rho' = \psi^{-2}\rho$. □

Corollaire. *Soit $P = MN$, avec M sous-groupe de Levi maximal de G. Posons $\mathcal{W}(M, *) = \{1, w\}$ et soit D une classe d'inertie de représentations supercuspidales de M telle que $w \cdot D \neq D$ (c'est le cas par exemple si $w \cdot M \neq M$). Soit Ω la composante connexe de $\Omega(G)$ associée à (M, D). Alors*

(i) i_P^G envoie les représentations de D (c'est-à-dire les représentations irréductibles de $\mathcal{M}(M)_D$) dans les représentations irréductibles de $\mathcal{M}(G)_\Omega$.

(ii) Soit r_D la composition du foncteur r_P^G et de la projection sur $\mathcal{M}(M)_D$. Alors r_D est un foncteur fidèle de $\mathcal{M}(G)_\Omega$ vers $\mathcal{M}(M)_D$.

(iii) Pour toute représentation (π, V) dans $\mathcal{M}(G)_\Omega$, le morphisme naturel $\pi \to i_P^G r_D(\pi)$ est un isomorphisme. Le foncteur

$$r_D : \mathcal{M}(G)_\Omega \to \mathcal{M}(M)_D$$

est une équivalence de catégories dont l'inverse est i_P^G.

Démonstration. Le premier point découle immédiatement du théorème. Posons $w \cdot M = M'$, $w \cdot D = D'$ et soit P' le sous-groupe parabolique standard de facteur de Levi M'. On a dans ces conditions $w \cdot P = \bar{P}'$.

Montrons que la restriction à $\mathcal{M}(G)_\Omega$ du foncteur r_D est fidèle. D'après le lemme A.VIII.1, il suffit de montrer que si $\pi \in \mathcal{M}(G)_\Omega$, alors $r_D(\pi) \neq 0$. On peut supposer π irréductible grâce à l'exactitude de r_D. Alors d'après (i), π s'écrit $\pi = i_P^G(\rho)$ avec $\rho \in D$, ou bien $\pi = i_{P'}^G(\rho')$ avec $\rho' \in D'$. Dans les deux cas, la proposition VI.5.3 donne $r_D(\pi)$ non nul.

Le foncteur $i_P^G : \mathcal{M}(M)_D \to \mathcal{M}(G)_\Omega$ est l'adjoint à droite de $r_D : \mathcal{M}(G)_\Omega \to \mathcal{M}(M)_D$. Le morphisme d'adjonction (voir A.V)

$$\alpha_\pi : \pi \to i_P^G r_D(\pi)$$

est injectif d'après le lemme VI.7.2 (iii). D'autre part, le lemme géométrique VI.5.3 montre que le morphisme d'adjonction

$$\beta_\tau : r_D i_P^G \tau \to \tau,$$

$\tau \in \mathcal{M}(M)_D$, est un isomorphisme. En appliquant le foncteur exact r_D à α_π, on obtient une injection :

$$r_D(\alpha_\pi) : r_D(\pi) \to r_D i_P^G r_D(\pi).$$

En composant ceci avec $\beta_{r_D(\pi)}$ on obtient

$$r_D(\pi) \overset{r_D(\alpha_\pi)}{\longrightarrow} r_D i_P^G r_D(\pi) \overset{\beta_{r_D(\pi)}}{\longrightarrow} r_D(\pi)$$

qui est l'identité de $r_D(\pi)$ d'après les propriétés des morphismes d'adjonction (*cf.* Annexe A.V). Ceci implique que $r_D(\alpha_\pi)$ est un isomorphisme. On en déduit, r_D étant exact et fidèle, que α_π est un isomorphisme (naturel). Les morphismes d'adjonctions α et β sont donc respectivement des isomorphismes naturels entre l'identité de $\mathcal{M}(G)_\Omega$ et $i_P^G \circ r_D$ et entre $r_D \circ i_P^G$ et l'identité de $\mathcal{M}(M)_D$. Ceci montre l'équivalence de catégories. □

VII.2 Représentations tempérées

Nous développons dans cette section la théorie algébrique des représentations tempérées. Pour les aspects analytiques (comportement asymptotique du caractère et des coefficients matriciels), nous renvoyons le lecteur à [44].

VII.2.1 Définition par les exposants normalisés

Définition. Une représentation (π, V) de $\mathcal{M}(G)$ est dite tempérée si elle est admissible, et si pour tout sous-groupe parabolique $P = MN$, tout exposant normalisé χ de π relativement à P vérifie $\Re(\chi) \in {}^{+}\overline{[\mathfrak{a}_M^*]}_P^G$.

Remarques. 1. Si (π, V) est tempérée tout exposant normalisé χ de π relativement à G est unitaire (*ie.* $\Re(\chi) = 0$). En particulier, si (π, V) est tempérée et admet un caractère central, il est unitaire.

— 2. Si (π, V) est irréductible et de carré intégrable modulo le centre, alors d'après le critère de Casselman VII.1.2, π est tempérée.

— 3. Comme tout sous-groupe parabolique de G est conjugué à un sous-groupe parabolique standard, pour que (π, V) soit tempérée, il suffit que la condition $\Re(\chi) \in {}^{+}\overline{[\mathfrak{a}_M^*]}_P^G$ soit vérifiée pour tout exposant normalisé χ de π relativement à tout sous-groupe parabolique standard P de G.

Notre but immédiat est de voir comment les représentations tempérées se comportent par rapport aux foncteurs d'induction i_P^G et de restriction r_P^G.

VII.2.2 Représentations tempérées et induction

Les foncteurs d'induction parabolique préservent les représentations tempérées :

Lemme. *Soient $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G et (σ, E) une représentation tempérée de M. Alors $i_P^G(\sigma, E)$ est tempérée.*

Démonstration. Il suffit de le vérifier pour les sous-groupes paraboliques P standards. Soit $Q = LU$ un sous-groupe parabolique standard de G. Soit χ un exposant normalisé de $i_P^G(\sigma, E)$ relativement à Q. On veut montrer que $\Re(\chi) \in {}^{+}\overline{[\mathfrak{a}_L^*]}_Q^G$.

D'après le lemme géométrique VI.5.1, $(r_Q^G i_P^G(\sigma, E))_\chi$ admet une filtration dont le gradué associé admet pour composantes les représentations

$$(i_{L\cap w^{-1}\cdot P}^L \circ w \circ r_{w\cdot Q\cap M}^M(\sigma, E))_\chi,$$

où w décrit l'ensemble $W^{L,M}$ défini en (V.4.6.1). Comme σ est tempérée, tout exposant normalisé ψ relativement à $w \cdot Q \cap M$ vérifie

$$\Re(\psi) \in {}^{+}\overline{[\mathfrak{a}_{w\cdot L\cap M}^*]}_{w\cdot Q\cap M}^M,$$

c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$\Re(\psi) = \sum_{\alpha \in \Delta^M(w\cdot Q\cap M)} c_\alpha \alpha$$

où les c_α sont ≥ 0.

On a

$$\mathfrak{a}_\emptyset^* = \mathfrak{a}_{w\cdot L\cap M}^* \oplus (\mathfrak{a}_\emptyset^{w\cdot L\cap M})^*$$

et les $\alpha \in \Delta^M(w\cdot Q\cap M)$ sont des éléments de $\mathfrak{a}_{w\cdot L\cap M}^*$ que l'on peut donc voir comme éléments de $\mathfrak{a}_\emptyset^*$. Un tel $\alpha \in \Delta^M(w\cdot Q\cap M)$ peut alors s'écrire

$$\alpha = \beta + \mu$$

où $\beta \in \Delta_\emptyset^M \setminus \Delta_\emptyset^{w\cdot L\cap M}$ et $\mu \in (\mathfrak{a}_\emptyset^{w\cdot L\cap M})^*$.

Ceci permet d'écrire $\Re(\psi)$ sous la forme

$$\Re(\psi) = \sum_{\alpha \in \Delta_\emptyset^M \setminus \Delta_\emptyset^{w\cdot L\cap M}} c_\alpha \alpha \, + \mu$$

avec $\mu \in (\mathfrak{a}_\emptyset^{w\cdot L\cap M})^*$.

Alors

$$\Re(w^{-1}\cdot\psi) = \sum_{\alpha \in \Delta_\emptyset^M \setminus \Delta_\emptyset^{M\cap w\cdot L}} c_\alpha \; w^{-1}\cdot\alpha \, + w^{-1}\cdot\mu$$

avec $w^{-1}\cdot\mu \in (\mathfrak{a}_\emptyset^{L\cap w^{-1}\cdot M})^*$. Comme

$$\mathfrak{a}_\emptyset^* = \mathfrak{a}_{L\cap w^{-1}\cdot M}^* \oplus (\mathfrak{a}_\emptyset^{L\cap w^{-1}\cdot M})^* = \mathfrak{a}_L^* \oplus (\mathfrak{a}_{L\cap w^{-1}\cdot M}^L)^* \oplus (\mathfrak{a}_\emptyset^{L\cap w^{-1}\cdot M})^*,$$

on a $(w^{-1}\cdot\mu)_{|\mathfrak{a}_L} = 0$.

Le choix du système de représentants $W^{L,M}$ est maintenant crucial, car par (V.4.6.1), si $\alpha \in \Delta_\emptyset^M$, alors $w^{-1}\cdot\alpha \in \Sigma_\emptyset^+$. Ceci montre que

$$\Re(w^{-1}\cdot\psi) - w^{-1}\cdot\mu \in {}^+\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}_{P_\emptyset}^G.$$

D'après le lemme VII.1.1, tout caractère χ_1 de A_L tel que

$$(i_{L\cap w^{-1}\cdot P}^L \circ w \circ r_{w\cdot Q\cap M}^M \sigma)_{\chi_1} \neq 0$$

est la restriction à A_L d'un caractère ψ_1 de $A_{L\cap w^{-1}\cdot M}$ tel que

$$(w \circ r_{w\cdot Q\cap M}^M \sigma)_{\psi_1} \neq 0.$$

Un tel caractère ψ_1 est de la forme $w^{-1}\cdot\psi$ avec ψ comme ci-dessus. Ceci montre que $\Re(\psi_1)$ est la restriction à $\mathfrak{a}_L$ d'un élément de ${}^+\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}_{P_\emptyset}^G$. Un tel élément est dans ${}^+\overline{[\mathfrak{a}_L^*]}_Q^G$. □

VII.2.3 Représentations tempérées et restriction

Passons maintenant à l'étude du comportement des représentations tempérées sous l'action du foncteur r_P^G.

Lemme. *Soit (π, V) une représentation tempérée de G. Soient $P = MN$ un sous-groupe parabolique standard de G. Décomposons le module de Jacquet $r_P^G V$ en une somme directe de représentations de M,*

$$r_P^G V = (r_P^G V)^0 \oplus (r_P^G V)^+$$

où

$$(r_P^G V)^0 = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Exp}(A_M, r_P^G V) | \Re(\chi) = 0} (r_P^G V)_\chi,$$

$$(r_P^G V)^+ = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Exp}(A_M, r_P^G V) | \Re(\chi) \neq 0} (r_P^G V)_\chi$$

La représentation $(r_P^G \pi)^0$ est alors une représentation temperée de M.

Démonstration. Fixons $\chi \in \mathrm{Exp}(A_M, r_P^G V)$ tel que $\Re(\chi) = 0$. Un sous-groupe parabolique standard de M est l'intersection avec M d'un sous-groupe parabolique standard de G, disons $Q = LU$, contenu dans P. La transitivité des foncteurs de restriction (voir VI.1.4) nous montre que tout exposant normalisé χ_Q relativement à $M \cap Q$ de $(r_P^G \pi)_\chi$ est un exposant normalisé de π relativement à Q. Comme π est tempérée, on a,

$$\Re(\chi_Q) \in {}^+\overline{[\mathfrak{a}_L^*]}_Q^G. \tag{VII.2.3.1}$$

Rappelons la décomposition V.3.13 :

$$\mathfrak{a}_L^* = \mathfrak{a}_M^* \oplus (\mathfrak{a}_L^M)^*$$

D'après le lemme VII.1.1 (ii), la restriction de χ_Q à A_M est égale à χ. La projection de $\Re(\chi_Q)$ dans $\mathfrak{a}_M^*$ est donc égale à $\Re(\chi) = 0$. On en déduit que $\Re(\chi_Q) \in (\mathfrak{a}_L^M)^*$, d'où

$$\Re(\chi_Q) \in (\mathfrak{a}_L^M)^* \cap {}^+\overline{[\mathfrak{a}_L^*]}_Q^G \subset {}^+\overline{[\mathfrak{a}_L^*]}_{Q\cap M}^M.$$

□

VII.2.4 Réciprocité de Frobenius pour les représentations tempérées

Nous obtenons la version suivante de la réciprocité de Frobenius pour les représentations tempérées :

Proposition. *Soient $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Pour toute représentation (σ, E) tempérée de M et pour toute représentation tempérée (π, V) de G, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_G(V, i_P^G E) \simeq \mathrm{Hom}_M(r_P^G(V)^0, E)$$

Démonstration. Ce résultat est la conjonction de la réciprocité de Frobenius VI.1.1 et du lemme III.1.10. □

Lemme. *Soit (π, V) une représentation admissible tempérée de G admettant un caractère central. Alors π est de carré intégrable modulo le centre si et seulement si pour tout sous-groupe parabolique standard propre $P = MN$, $(r_P^G \pi)^0 = \{0\}$.*

<u>Démonstration</u>. Ceci découle des définitions, du fait que le caractère central est unitaire (remarque 1, VII.2.1) et du critère de Casselman. □

VII.2.5 Lemme géométrique pour les représentations tempérées

Nous allons maintenant établir une version du lemme géométrique pour les représentations tempérées.

Proposition. *Soient $P = MN$ et $Q = LU$ deux sous-groupes paraboliques de G et (ρ, W) une représentation tempérée de M. Alors $r_Q^G(i_P^G(\rho, W))^0$ admet une filtration dont les composantes du gradué associé sont les*

$$i^L_{L\cap w^{-1}.P} \circ w \circ (r^M_{w\cdot Q\cap M} W)^0,$$

où w décrit l'ensemble $\mathcal{W}^{Q,P}$ défini en V.4.7 paramétrant les orbites de Q sur $X = P\backslash G$.

<u>Démonstration</u>. Le seul changement par rapport au théorème VI.5.1 est que l'on prend la partie tempérée $(r^M_{w\cdot Q\cap M} W)^0$ de $r^M_{w\cdot Q\cap M} W$ dans la formule. On peut supposer P et Q standard, et dans ce cas $\mathcal{W}^{Q,P}$ est l'ensemble noté $W^{L,M}$ en V.4.6. Il est clair que si $w \in W^{L,M}$ et si

$$\chi \in \mathrm{Exp}(A_L, i^L_{L\cap w^{-1}.P} \circ w \circ (r^M_{w\cdot Q\cap M} W)^0)$$

alors χ est unitaire (Remarque VII.2.1), puisque la représentation $i_{L\cap w^{-1}.P} \circ w \circ (r^M_{w\cdot Q\cap M} W)^0$ est tempérée, donc $\Re(\chi) = 0$. Réciproquement, montrons que si $w \in W^{L,M}$ et si

$$\chi \in \mathrm{Exp}(A_L, i_{L\cap w^{-1}.P} \circ w \circ (r^M_{w\cdot Q\cap M} W)^+),$$

on a $\Re(\chi) \neq 0$. Fixons de tels w, χ. Comme dans la démonstration du lemme VII.2.2 il existe $\chi' \in \mathrm{Exp}(A_{w\cdot L\cap M}, r^M_{w\cdot Q\cap M} W)$ avec $\Re(\chi') \neq 0$ tel que $\Re(\chi)$ soit la restriction de $\Re(w^{-1}\cdot\chi')$ à $\mathfrak{a}_L$. On écrit, comme dans la démonstration du lemme VII.2.2,

$$\Re(\chi') = \sum_{\alpha\in\Delta_\emptyset^M\setminus\Delta_\emptyset^{w\cdot L\cap M}} c_\alpha \alpha + \mu$$

avec $\mu \in (\mathfrak{a}_\emptyset^{w\cdot L\cap M})^*$. Comme $\Re(\chi') \neq 0$, l'un des c_α est > 0.

On a alors

$$\Re(w^{-1}\cdot\chi') = \sum_{\alpha\in\Delta_\emptyset^M\setminus\Delta_\emptyset^{w\cdot L\cap M}} c_\alpha\, w^{-1}\cdot\alpha + w^{-1}\cdot\mu$$

avec $w^{-1}\cdot\mu \in (\mathfrak{a}_\emptyset^{L\cap w^{-1}\cdot M})^*$ et donc $(w^{-1}\cdot\mu)_{|\mathfrak{a}_L} = 0$.

Il s'agit donc de montrer que si $\alpha \in \Delta_\emptyset^M \setminus \Delta_\emptyset^{w\cdot L\cap M}$, alors $(w^{-1}\cdot\alpha)_{|\mathfrak{a}_L} \neq 0$. Or, par définition, il existe un sous-espace non nul $\mathfrak{g}_\alpha$ de l'algèbre de Lie de $w\cdot U\cap M$ dans lequel $A_\emptyset$ agit par la racine α. Alors $A_\emptyset$ agit dans $w^{-1}\cdot\mathfrak{g}_\alpha$, un sous-espace de l'algèbre de Lie de $U\cap w^{-1}\cdot M$, par $w^{-1}\cdot\alpha$. Comme 0 n'est pas valeur propre de l'action de A_L dans l'algèbre de Lie de U , on a bien $(w^{-1}\cdot\alpha)_{|\mathfrak{a}_L} \neq 0$. □

VII.2.6 Représentations tempérées irréductibles

Le résultat suivant nous dit que les représentations tempérées sont obtenues comme sous-représentations d'induites de séries discrètes.

Théorème. *Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G. Alors (π, V) est tempérée si et seulement s'il existe un sous-groupe parabolique standard $P = MN$ de G et une représentation irréductible de carré intégrable modulo le centre (σ, E) de M tels que (π, V) est une sous-représentation de $i_P^G(\sigma, E)$.*

Si $(P_1 = M_1 N_1, (\sigma_1, E_1))$ et $(P_2 = M_2 N_2, (\sigma_2, E_2))$ sont deux couples vérifiant cette propriété, alors il existe $g \in G$ tel que $gM_1 g^{-1} = M_2$ et $\sigma_1^g \simeq \sigma_2$.

Démonstration. La remarque 2, VII.2.1 affirme que (σ, E) est une représentation tempérée de M, et nous avons vu que l'induction normalisée préserve les représentations tempérées. Ceci montre que la condition est suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, choisissons un sous-groupe parabolique standard $P = MN$ de G, minimal pour la propriété que $(r_P^G V)^0 \neq 0$. Comme cette propriété est vérifiée pour $P = G$, l'existence d'un tel sous-groupe parabolique est assuré. Comme π est irréductible, $r_P^G(\pi, V)^0$ est de type fini (VI.1.3) et donc admet un quotient irréductible (σ, E), grâce à A.VI.3. D'après le lemme VII.2.4 et la minimalité de P, on voit que (σ, E) est de carré intégrable modulo le centre. Par réciprocité de Frobenius, $\mathrm{Hom}_G(V, i_P^G E) \neq \{0\}$. Comme (π, V) est irréductible, elle apparaît comme sous-représentation de $i_P^G(\sigma, E)$. Ceci termine la démonstration du premier point.

Pour le deuxième point, on remarque tout d'abord qu'une représentation de carré intégrable modulo le centre (σ, E) est unitaire, et donc que son induite normalisée $i_P^G(\sigma, E)$ l'est aussi. Si de plus (σ, E) est irréductible, $i_P^G(\sigma, E)$ est de longueur finie, donc est semi-simple, et tout sous-quotient est aussi une sous-représentation et un quotient.

On a $\mathrm{Hom}_G(V, i_{P_2}^G E_2) \neq 0$ et donc par réciprocité de Frobenius pour les représentations tempérées,

$$\mathrm{Hom}_M((r_{P_2}^G V)^0, E_2) \neq 0.$$

Comme V est quotient de $i_{P_1}^G E_1$, par exactitude du foncteur $r_{P_2}^G$, $(r_{P_2}^G V)^0$ est quotient de

$$(r_{P_2}^G i_{P_1}^G E_1)^0$$

donc $\mathrm{Hom}_{M_2}((r_{P_2}^G i_{P_1}^G E_1)^0, E_2) \neq 0$. D'après la proposition VII.2.5, il existe $w \in W^{M_2, M_1}$ tel que

$$\mathrm{Hom}_{M_2}(i_{M_2 \cap w^{-1} P_1}^{M_2} \circ w \circ (r_{M_1 \cap w \cdot P_2}^{M_1} E_1)^0, E_2) \neq 0.$$

Fixons un tel w. En particulier $(r_{M_1 \cap w \cdot P_2}^{M_1} E_1)^0 \neq 0$ et donc d'après le lemme VII.2.4 $M_1 \cap w \cdot P_2 = M_1$, c'est-à-dire $M_1 \subset w \cdot P_2$. On a alors

$$\mathrm{Hom}_{M_2}(i_{M_2 \cap w^{-1} P_1}^{M_2} \circ w \circ E_1, E_2) \neq 0,$$

ce qui donne, puisque les représentations apparaissant sont semi-simples

$$\mathrm{Hom}_{M_2}(E_2, i_{M_2 \cap w^{-1} P_1}^{M_2} \circ w \circ E_1) \neq 0.$$

Par réciprocité de Frobenius, on obtient

$$\mathrm{Hom}_G((r_{M_2 \cap w^{-1} \cdot P_1}^{M_2} \sigma_2)^0, \sigma_1^w) \neq 0.$$

En particulier $(r^{M_2}_{M_2\cap w^{-1}\cdot P_1}E_2)^0 \neq 0$, ce qui montre que $M_2 \cap w^{-1}\cdot P_1 = M_2$, c'est-à-dire $M_2 \subset w^{-1}\cdot P_1$. On en déduit $M_2 = w^{-1}\cdot M_1$ et

$$\mathrm{Hom}_{M_2}(\sigma_2, \sigma_1^w) \neq 0,$$

d'où $\sigma_2 \simeq \sigma_1^w$. □

Corollaire. *Une représentation irréductible tempérée est unitaire.*

Démonstration. Ceci découle du théorème car une représentation irréductible de carré intégrable est unitaire (IV.3.2) et l'induction parabolique préserve l'unitarité. □

Remarque. Sans l'hypothèse d'irréductibilité dans le corollaire précédent, la conclusion de celui-ci peut être fausse.

VII.3 Opérateurs d'entrelacement de représentations induites

VII.3.1 Ordre de Bruhat

Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques de G de même facteur de Levi M. Soit (ρ, W) une représentation lisse de M. Le but de cette section est de construire un opérateur d'entrelacement canonique entre $i^G_P\rho$ et $i^G_Q\rho$, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{Hom}_G(i^G_P\rho, i^G_Q\rho)$. Comme par réciprocité de Frobenius

$$\mathrm{Hom}_G(i^G_P\rho, i^G_Q\rho) \simeq \mathrm{Hom}_M(r^G_Q i^G_P\rho, \rho),$$

cherchons à exhiber un élément de $\mathrm{Hom}_M(r^G_Q i^G_P\rho, \rho)$.

On suppose que le facteur de Levi M est standard, et donc que les sous-groupes paraboliques P et Q sont semi-standards. Cette restriction n'est aucunement essentielle, mais de pure commodité, nous permettant d'utiliser des notations déjà introduites. Le lecteur n'aura aucun mal à adapter les démonstrations au cas général, ou à déduire les résultats du cas particulier, par conjugaison.

Rappelons que le lemme géométrique VI.5.1 donne une filtration du foncteur $r^G_Q \circ i^G_P$:

$$0 = F_0 \subset F_1 \ldots \subset F_k = r^G_Q \circ i^G_P : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(M)$$

telle que :

$$F_i/F_{i-1} \simeq i^M_{M\cap w_i^{-1}\cdot P} \circ w_i \circ r^M_{M\cap w_i\cdot Q},$$

où les w_i sont des représentants des doubles classes $\bar{w}_i \in P\backslash G/Q$, numérotés selon un ordre total spécifié en VI.5.1. Il est commode dans ce contexte de paramétrer $P\backslash G/Q$ non par le système de représentants $\mathcal{W}^{Q,P}$ de V.4.7, qui dépend de P et Q, mais simplement par l'ensemble des doubles classes $W_M\backslash W_G/W_M$ (voir V.4.5) qui n'en dépend pas. En revanche, nous munissons cet ensemble d'un ordre qui dépend de P et Q :

Définition. (Ordre de Bruhat) On munit $W_M\backslash W_G/W_M$ de l'ordre partiel

$$\bar{w} \leq_{PQ} \bar{w}' \text{ si } P\bar{w}Q \subset \overline{P\bar{w}'Q}.$$

Lorsque P et Q sont clairement indiqués par le contexte, on écrit $\leq$ au lieu de $\leq_{PQ}$.

On note $\bar{1} \in W_M \backslash W_G / W_M$ la double classe de l'élément neutre de W_G. On choisit alors un ordre total $\preceq$ sur $W_M \backslash W_G / W_M$ qui raffine l'ordre de Bruhat défini ci-dessus. Ainsi, si $P = Q$, $\bar{1}$ est le plus petit élément pour l'ordre $\preceq$. Au contraire, si $Q = \bar{P}$, c'est le plus grand. Rappelons qu'en VI.5.1, nous avions muni l'ensemble des orbites de Q dans $P \backslash G$ d'un ordre total

$$Z_1 < Z_2 \cdots < Z_m$$

de telle sorte que pour tout $i = 1, \ldots, m$, $\bigcup_{j \leq i} Z_j$ soit ouvert dans $P \backslash G$. Cet ordre peut être choisi de telle sorte qu'il soit inverse de l'ordre $\preceq$ sur $W_M \backslash W_G / W_M \simeq P \backslash G / Q$.

VII.3.2 Filtrations

Posons, pour toute représentation lisse (ρ, W) de M, et tout élément $\bar{w} \in W_M \backslash W_G / W_M$,

$$\widetilde{F}_{PQ}^{\preceq \bar{w}}(W) := \{f \in i_P^G(W),\ \mathrm{Supp}(f) \cap \left(\bigcup_{\bar{w}' \preceq \bar{w}} P\bar{w}'Q \right) = \emptyset\}$$

et de même définissons $\widetilde{F}_{PQ}^{\prec \bar{w}}(W)$ avec $\prec$ à la place de $\preceq$. Posons aussi

$$\widetilde{F}_{PQ}^{<\bar{w}}(W) := \{f \in i_P^G(W),\ \mathrm{Supp}(f) \cap \overline{P\bar{w}Q} \subset P\bar{w}Q\}.$$

et

$$\widetilde{F}_{PQ}^{\leq \bar{w}}(W) := \{f \in i_P^G(W),\ \mathrm{Supp}(f) \cap \overline{P\bar{w}Q} = \emptyset\}.$$

Remarquons que l'on a alors toujours :

$$\widetilde{F}_{PQ}^{\preceq \bar{w}}(W) \subset \widetilde{F}_{PQ}^{\prec \bar{w}}(W), \quad \widetilde{F}_{PQ}^{\prec \bar{w}}(W) \subset \widetilde{F}_{PQ}^{<\bar{w}}(W), \quad \widetilde{F}_{PQ}^{\leq \bar{w}}(W) \subset \widetilde{F}_{PQ}^{<\bar{w}}(W).$$

Tous les sous-espaces de $i_P^G(W)$ définis ci-dessus sont stables sous l'action de Q. Notons

$$F_{PQ}^{\preceq \bar{w}}(W), F_{PQ}^{\prec \bar{w}}(W), F_{PQ}^{\leq \bar{w}}(W), F_{PQ}^{<\bar{w}}(W),$$

les images respectives de

$$\widetilde{F}_{PQ}^{\preceq \bar{w}}(W), \widetilde{F}_{PQ}^{\prec \bar{w}}(W), \widetilde{F}_{PQ}^{\leq \bar{w}}(W), \widetilde{F}_{PQ}^{<\bar{w}}(W)$$

dans $r_Q^G i_P^G(W)$.

Les foncteurs $F_{PQ}^{\preceq \bar{w}}, F_{PQ}^{\prec \bar{w}}, F_{PQ}^{\leq \bar{w}}, F_{PQ}^{<\bar{w}}$ sont des sous-foncteurs de $r_Q^G \circ i_P^G$, il est clair que $F_{PQ}^{\prec \bar{w}} / F_{PQ}^{\preceq \bar{w}} \simeq F_{PQ}^{<\bar{w}} / F_{PQ}^{\leq \bar{w}}$ et lemme géométrique se reformule en

$$F_{PQ}^{\prec \bar{w}} / F_{PQ}^{\preceq \bar{w}} \simeq i_{M \cap w^{-1} \cdot P}^M \circ w \circ r_{w \cdot Q \cap M}^M.$$

Pour l'élément $\bar{1}$, ceci donne

$$F_{PQ}^{\prec \bar{1}} / F_{PQ}^{\preceq \bar{1}} \simeq F_{PQ}^{<\bar{1}} / F_{PQ}^{\leq \bar{1}} \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{M}(M)},$$

le membre de droite étant le foncteur identité de la catégorie $\mathcal{M}(M)$.

Autrement dit, si (ρ, W) est une représentation lisse de M, ρ apparaît comme sous-quotient dans $r_Q^G \circ i_P^G(\rho)$. Nous allons montrer que sous certaines conditions, ce sous-quotient apparaît comme quotient de $r_Q^G \circ i_P^G(\rho)$, fournissant ainsi un élément non nul de

$$\mathrm{Hom}_M(r_Q^G \circ i_P^G(\rho), \rho).$$

VII.3.3 PQ-régularité

Soit (σ, E) une représentation lisse de M. Restreignons cette représentation à la composante déployée A_M de M, et étendons-la ensuite à l'algèbre du groupe $\mathbb{C}[A_M]$. Ceci nous donne un morphisme d'algèbres

$$\sigma_{|\mathbb{C}[A_M]} : \mathbb{C}[A_M] \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$$

Définissons alors les idéaux suivants de $\mathbb{C}[A_M]$:

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \ker \sigma_{|\mathbb{C}[A_M]} \\ I_\sigma^{PQ} &= \ker \left[r_Q^G \circ i_P^G / F_{PQ}^{<\bar{1}}(E) \right]_{|\mathbb{C}[A_M]} \\ I_\sigma^{Q,\bar{w}} &= \ker \left[w \circ r_{M\cap w\cdot Q}^M(E) \right]_{|\mathbb{C}[A_M]}, \quad \bar{w} \in W_M \backslash W_G / W_M \end{aligned}$$

De même, lorsque χ est un caractère de A_M, on note encore χ son prolongement en un morphisme d'algèbres de $\mathbb{C}[A_M]$ dans $\mathbb{C}$.

Lemme. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $I_\sigma + I_\sigma^{PQ} = \mathbb{C}[A_M]$

(ii) $I_\sigma + \bigcap_{\bar{w}<\bar{1}} I_\sigma^{Q,\bar{w}} = \mathbb{C}[A_M]$

De plus, (i) *ou* (ii) *impliquent :*

(iii) $\forall \bar{w} < \bar{1}, \quad \mathrm{Exp}(A_M, \sigma) \cap \mathrm{Exp}(A_M, w \circ r_{M\cap w\cdot Q}^M(\sigma)) = \emptyset$. *Réciproquement,* (iii) *implique* (i) *et* (ii) *si* (σ, E) *est de longueur finie.*

Lorsque l'une des deux premières conditions est réalisée, on dit que σ *est* PQ*-régulière.*

Démonstration. On choisit l'ordre total $\preceq$ sur $W_M \backslash W_G / W_M$ plus fin que l'ordre de Bruhat $\leq_{PQ}$ de sorte que $\{\bar{w} < \bar{1}\} = \{\bar{w} \prec \bar{1}\}$. La représentation $(r_Q^G \circ i_P^G / F_{PQ}^{<\bar{1}})(E)$ admet une filtration dont les sous-quotients sont isomorphes aux

$$i_{M\cap w^{-1}\cdot P}^M \circ w \circ r_{M\cap w\cdot Q}^M(\sigma), \quad (\bar{w} < \bar{1}).$$

Comme les foncteurs d'induction paraboliques sont fidèles, on a

$$\ker \left[i_{M\cap w^{-1}\cdot P}^M \circ w \circ r_{M\cap w\cdot Q}^M(\sigma) \right]_{|\mathbb{C}[A_M]} = \ker \left[w \circ r_{M\cap w\cdot Q}^M(\sigma) \right]_{|\mathbb{C}[A_M]}.$$

Comme le nombre des $\bar{w} < \bar{1}$ est majoré par $|W_G|$, on a

$$\left(\bigcap_{\bar{w}<\bar{1}} I_\sigma^{Q,\bar{w}} \right)^{|W_G|} \subset I_\sigma^{PQ} \subset \bigcap_{\bar{w}<\bar{1}} I_\sigma^{Q,\bar{w}}.$$

La seconde inclusion montre que (i) implique (ii). Pour la réciproque, il suffit de voir que si I et J sont deux idéaux d'un anneau commutatif unitaire A tels que $I + J = A$, alors $I^n + J^m = A$, pour tous les entiers n et m strictement positifs. On peut écrire $\mathbf{1}_A = i + j$, avec $i \in I$ et $j \in J$, et donc $\mathbf{1}_A = (\mathbf{1}_A)^{n+m} = (i+j)^{n+m}$ qui est dans $I^n + J^m$ par la formule du binôme, ce qui montre l'assertion.

Supposons maintenant que (σ, E) soit de longueur finie. D'après la définition des exposants normalisés, et le fait qu'ils apparaissent en nombre fini, il existe un entier d tel que :

$$\left(\bigcap_{\chi\in\mathrm{Exp(A_M,E)}} \ker\chi\right)^d \subset I_\sigma \subset \bigcap_{\chi\in\mathrm{Exp(A_M,E)}} \ker\chi$$

et

$$\left(\bigcap_{\chi\in\cup_{\bar{w}<\bar{1}}\mathrm{Exp}(A_M,w\circ r^M_{M\cap w\cdot Q}(E))} \ker\chi\right)^d \subset I_\sigma^{PQ} \subset \bigcap_{\chi\in\cup_{\bar{w}<\bar{1}}\mathrm{Exp}(A_M,w\circ r^M_{M\cap w\cdot Q}(E))} \ker\chi$$

Remarquons que les deux inclusions de droite ne supposent pas que (σ, E) soit de longueur finie.

Si (iii) n'est pas vérifié à cause d'un χ_0, alors

$$I_\sigma \subset \bigcap_{\chi\in\mathrm{Exp}(A_M,E)} \ker\chi \subset \ker\chi_0,$$

$$I_\sigma^{PQ} \subset \bigcap_{\chi\in\cup_{\bar{w}<\bar{1}}\mathrm{Exp}(A_M,w\circ r^M_{M\cap w\cdot Q}(E))} \ker\chi \subset \ker\chi_0$$

et donc

$$I_\sigma + I_\sigma^{PQ} \subset \ker\chi_0 \neq \mathbb{C}[A_M],$$

ce qui montre que (i) n'est pas vérifié.

Réciproquement, supposons (iii), et supposons que

$$\left(\bigcap_{\chi\in\mathrm{Exp}(A_M,E)} \ker\chi\right) + \left(\bigcap_{\chi\in\cup_{\bar{w}<\bar{1}}\mathrm{Exp}(A_M,w\circ r^M_{M\cap w\cdot Q}(E))} \ker\chi\right) \neq \mathbb{C}[A_M].$$

Alors il existe un idéal maximal $\mathfrak{M}$ (propre) de $\mathbb{C}[A_M]$ contenant le membre de gauche, c'est-à-dire que

$$\left(\bigcap_{\chi\in\mathrm{Exp}(A_M,E)} \ker\chi\right) \subset \mathfrak{M}, \quad \left(\bigcap_{\chi\in\cup_{\bar{w}<\bar{1}}\mathrm{Exp}(A_M,w\circ r^M_{M\cap w\cdot Q}(E))} \ker\chi\right) \subset \mathfrak{M}.$$

Comme les ensembles d'exposants sont finis, et que chaque $\ker\chi$ est un idéal maximal de $\mathbb{C}[A_M]$, on voit que $\mathfrak{M}$ est égal à $\ker\chi_0$ pour un certain χ_0 à la fois dans $\mathrm{Exp}(A_M, E)$ et dans $\cup_{\bar{w}<\bar{1}}\mathrm{Exp}(A_M, w\circ r^M_{M\cap w\cdot Q}(E))$, ce qui est impossible d'après (iii). On a donc

$$\left(\bigcap_{\chi\in\mathrm{Exp}(A_M,E)} \ker\chi\right) + \left(\bigcap_{\chi\in\cup_{\bar{w}<\bar{1}}\mathrm{Exp}(A_M,w\circ r^M_{M\cap w\cdot Q}(E))} \ker\chi\right) = \mathbb{C}[A_M],$$

d'où d'après un argument donné ci-dessus,

$$\left(\bigcap_{\chi\in\mathrm{Exp(A_M,E)}} \ker\chi\right)^d + \left(\bigcap_{\chi\in\cup_{\bar{w}<\bar{1}}\mathrm{Exp}(A_M,w\circ r^M_{M\cap w\cdot Q}(E))} \ker\chi\right)^d = \mathbb{C}[A_M]$$

et donc $I_\sigma + I_\sigma^{PQ} = \mathbb{C}[A_M]$. $\square$

VII.3.4 Opérateurs d'entrelacement

Considérons l'inclusion

$$E \simeq F_{PQ}^{<\bar{1}}/F_{PQ}^{\leq\bar{1}}(E) \stackrel{i_\sigma}{\hookrightarrow} (r_Q^G \circ i_P^G/F_{PQ}^{\leq\bar{1}})(E).$$

Si la représentation (σ, E) est PQ-régulière, comme tous les autres sous-quotients (autres que σ) du membre de droite ont par hypothèse des exposants qui ne sont pas ceux de σ, la théorie des représentations du groupe A_M montre que cette inclusion i_σ admet une rétraction r_σ. Plus explicitement, cette rétraction est donnée par l'action d'un élément $\epsilon_\sigma \in I_\sigma^{PQ}$ tel que $\mathbf{1}_{\mathbb{C}[A_M]} \in \epsilon_\sigma + I_\sigma$. En particulier, elle commute avec l'action de M. La composition

$$K_{Q|P}(\sigma)\,:\, r_Q^G \circ i_P^G(E) \to (r_Q^G \circ i_P^G/F_{PQ}^{\leq\bar{1}})(E) \stackrel{r_\sigma}{\hookrightarrow} E$$

est un élément non nul dans

$$\mathrm{Hom}_M(r_Q^G \circ i_P^G(\sigma), \sigma)$$

qui par réciprocité de Frobenius donne un opérateur d'entrelacement non nul

$$J_{Q|P}(\sigma) \in \mathrm{Hom}_G(i_P^G(\sigma), i_Q^G(\sigma)).$$

Il est utile de donner une forme plus explicite de l'opérateur $K_{Q|P}$. Rappelons que l'isomorphisme naturel

$$F_{PQ}^{<\bar{1}}/F_{PQ}^{\leq\bar{1}}(E) \simeq E$$

est obtenu par passage au quotient à partir du morphisme

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{PQ}^{<\bar{1}} &\to E \\ f &\mapsto \int_{U\cap N\backslash U} f(u)\, d\nu_{U\cap N\backslash U}(u) = \int_{U\cap\bar{N}} f(u)\, du \end{aligned}$$

Ceci est en effet un cas particulier de la formule (VI.5.1.14), et l'égalité entre les deux intégrales provient de la décomposition

$$U = (U\cap N)(U\cap\bar{N}).$$

On constate directement sur cette formule que ces intégrales sont convergentes, puisque par définition de $\tilde{F}_{PQ}^{<\bar{1}}$, $\mathrm{Supp}(f)\cap PQ$ est compact modulo P, donc $\mathrm{Supp}(f_{|U})$ est compact modulo $P\cap U = N\cap U$.

Proposition. *Soient $P = MN$ et $Q = MU$ deux sous-groupes paraboliques semi-standards de G et (σ, E) une représentation lisse de M que l'on suppose PQ-régulière. Alors l'opérateur d'entrelacement $J_{Q|P}(\sigma)$ est l'unique élément de $\mathrm{Hom}_G(i_P^G(\sigma), i_Q^G(\sigma))$ vérifiant*

$$(\forall f \in \widetilde{F}_{PQ}^{<\bar{1}}(E)), \quad J_{Q|P}(\sigma)(f)(\mathbf{1}_G) = \int_{\bar{N}\cap U} f(u)\, du.$$

<u>*Démonstration*</u>. La remarque précédant la proposition montre que cette intégrale est convergente. La réciprocité de Frobenius associe à tout opérateur $J \in \mathrm{Hom}_G(i_P^G(\sigma), i_Q^G(\sigma))$ l'unique l'opérateur $K \in \mathrm{Hom}_M(r_Q^G \circ i_P^G(\sigma), \sigma))$ tel que

$$(\forall f \in i_P^G(E)), \quad J(f)(\mathbf{1}_G) = K(\bar{f})$$

où $\bar{f}$ est l'image de f dans $r_Q^G \circ i_P^G(E)$ (voir la démonstration du théorème de réciprocité de Frobenius en III.2.5). Il s'agit donc de montrer que $K_{Q|P}(\sigma)$ est l'unique élément de $\mathrm{Hom}_M(r_Q^G \circ i_P^G(\sigma), \sigma))$ tel que

$$(\forall f \in \widetilde{F}_{PQ}^{<\bar{1}}(E)), \quad K_{Q|P}(\sigma)(\bar{f}) = \int_{\bar{N}\cap U} f(u)\, du,$$

mais ceci est effectivement la formule qui donne $K_{Q|P}(\sigma)$.

VII.3.5 Propriétés des opérateurs d'entrelacement

Quels que soient les sous-groupes paraboliques semi-standards P et Q de G ayant même facteur de Levi M, posons :

$$d(P,Q) = |\Sigma(P) \cap \Sigma(\bar{Q})|$$

Il est bien connu que $d(P,Q)$ est la longueur de l'élément w du groupe de Weyl $W(A_M)$ tel que $w \cdot P = Q$.

Proposition. *Soit M un sous-groupe de Levi semi-standard de G et soit (σ, E) une représentation lisse de M. Soient P_1, P_2, P_3 trois sous-groupes paraboliques semi-standards de G de facteurs de Levi M.*

(i) *Supposons que*

$$d(P_1,P_2) + d(P_2,P_3) = d(P_1,P_3), \quad d(P_1,P_2) = 1.$$

Si σ est P_1P_3-régulière, alors elle est P_2P_3-régulière et P_1P_2-régulière. De plus

$$J_{P_3|P_2}(\sigma) \circ J_{P_2|P_1}(\sigma) = J_{P_3|P_1}(\sigma).$$

(ii) *Si $Q = LU$ est un sous-groupe parabolique semi-standard de G contenant P_1 et P_2, et si σ est P_1P_2-régulière, alors avec les identifications naturelles et les notations évidentes σ est $(P_1 \cap L)(P_2 \cap L)$-régulière et*

$$J_{P_2|P_1}^G(\sigma) = i_Q^G(J_{(P_2\cap L)|(P_1\cap L)}^L(\sigma)).$$

(iii) *Si L est un sous-groupe de Levi standard de G contenant M tel que $P_1 \cap L = P_2 \cap L$ et tel que $Q_1 = P_1L = LU_1$, $Q_2 = P_2L = LU_2$ sont des sous-groupes paraboliques (de radical unipotent respectivement U_1 et U_2) de G et si $i_{P_1\cap L}^L(\sigma)$ est $(P_1L)(P_2L)$-régulière, alors σ est P_1P_2-régulière et de plus, avec les identifications naturelles et les notations évidentes*

$$J_{P_2|P_1}(\sigma) = J_{Q_2|Q_1}(i_{P_1\cap L}^L(\sigma)).$$

Démonstration. Commençons par démontrer les assertions concernant la régularité des représentations. Notre hypothèse dans (i) est que

$$I_\sigma + \bigcap_{\bar{w}<_{P_1P_3}\bar{1}} I_\sigma^{P_3,\bar{w}} = \mathbb{C}[A_M].$$

Nous voulons montrer que

(VII.3.5.1) $$I_\sigma + \bigcap_{\bar{w}<_{P_1P_2}\bar{1}} I_\sigma^{P_2,\bar{w}} = \mathbb{C}[A_M] \text{ et } I_\sigma + \bigcap_{\bar{w}<_{P_2P_3}\bar{1}} I_\sigma^{P_3,\bar{w}} = \mathbb{C}[A_M].$$

Par définition, $\bar{w} <_{P_2P_3} \bar{1}$ implique que[1] : $P_2wP_3 \subset \overline{P_2P_3}$, donc

$$P_1wP_3 \subset P_1P_2wP_3 \subset P_1\overline{P_2P_3} \subset \overline{P_1P_2P_3} = \overline{P_1P_3},$$

la dernière égalité étant conséquence de $d(P_1,P_2) + d(P_2,P_3) = d(P_1,P_3)$. Ceci montre que $\bar{w} <_{P_2P_3} \bar{1}$ implique $\bar{w} <_{P_1P_3} \bar{1}$, ce qui suffit à montrer la seconde assertion de (VII.3.5.1).

De même que ci-dessus, on voit que $\bar{w} <_{P_1P_2} \bar{1}$ implique $\bar{w} <_{P_1P_3} \bar{1}$. Il reste à comparer les $I_\sigma^{P_3,\bar{w}}$ et les $I_\sigma^{P_2,\bar{w}}$, et pour ceci, nous devons comparer les représentations $r^M_{M\cap w\cdot P_3}(\sigma)$ et $r^M_{M\cap w\cdot P_2}(\sigma)$ pour un élément $\bar{w} <_{P_1P_2} \bar{1}$ de $W_M\backslash W_G/W_M$. Comme nous avons supposé que $d(P_1,P_2) = 1$, $\Sigma(P_1) \cap \Sigma(\bar{P}_2)$ est un singleton, disons une racine α. Soit N_α le sous-groupe radiciel correspondant, et soit U le sous-groupe unipotent engendré par tous les sous-groupes radiciels U_β, $\beta \in \Sigma(P_1) \cap \Sigma(P_2)$. Soit L le sous-groupe de Levi de G engendré par M, N_α et $N_{-\alpha}$. On a alors

$$N_1 = UN_\alpha, \quad N_2 = UN_{-\alpha}, \quad L \cap P_1 = MN_\alpha, \quad L \cap P_2 = MN_{-\alpha}.$$

De plus, $Q = LU$ est un sous-groupe parabolique semi-standard de G contenant P_1 et P_2, et comme $d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3) = d(P_1,P_3)$, on a $P_3 \cap L = P_2 \cap L$. De ceci, on tire facilement que[2] :

$$\overline{P_1P_2} = \overline{MN_\alpha N_{-\alpha}U} = \overline{LU} = Q.$$

Il s'ensuit que si $\bar{w} <_{P_1P_2} \bar{1}$ alors

$$P_1wP_2 \subset \overline{P_1P_2} = Q = LU,$$

d'où

$$MN_\alpha wMN_{-\alpha} = (P_1 \cap L)w(P_2 \cap L) \subset L,$$

ce qui entraine, d'après la décomposition de Bruhat de L, que $\bar{w} \in W_M\backslash W_L/W_M$, et l'on en déduit

$$M \cap w \cdot P_3 = M \cap w \cdot (P_3 \cap L) = M \cap w \cdot (P_2 \cap L) = M \cap w \cdot P_2.$$

Alors $I_\sigma^{P_3,\bar{w}} = I_\sigma^{P_2,\bar{w}}$, ce qui implique la première égalité dans (VII.3.5.1).

Dans (ii), l'hypothèse est que

$$I_\sigma + \bigcap_{\bar{w} <_{P_1P_2} \bar{1}} I_\sigma^{P_2,\bar{w}} = \mathbb{C}[A_M]$$

et nous voulons montrer que

$$I_\sigma + \bigcap_{\bar{w} <_{(P_1\cap L)(P_2\cap L)} \bar{1}} I_\sigma^{(P_2\cap L),\bar{w}} = \mathbb{C}[A_M].$$

On considère $W_M\backslash W_L/W_M$ comme un sous-ensemble de $W_M\backslash W_G/W_M$. Pour tout $\bar{w} \in W_M\backslash W_L/W_M$, l'on remarque que

$$M \cap w \cdot P_2 = M \cap w \cdot (P_2 \cap L)$$

de sorte que $I_\sigma^{P_2,\bar{w}} = I_\sigma^{(P_2\cap L),\bar{w}}$. D'autre part, si

$$(P_1 \cap L)\bar{w}(P_2 \cap L) \subset \overline{(P_1 \cap L)\ (P_2 \cap L)},$$

1. Le lecteur prendra garde a ne pas confondre la notation pour l'adhérence et celle pour les paraboliques opposés. Dans les formules qui suivent, il s'agit de la première.

2. Le lecteur prendra garde a ne pas confondre la notation pour l'adhérence et celle pour les paraboliques opposés. Dans les formules qui suivent, il s'agit de la première.

alors
$$P_1\bar{w}P_2 = P_1(P_1\cap L)\bar{w}(P_2\cap L)P_2 \subset P_1\overline{(P_1\cap L)\ (P_2\cap L)}P_2 \subset \overline{P_1P_2},$$
et donc $\bar{w} <_{(P_1\cap L)(P_2\cap L)} \bar{1}$ implique que $\bar{w} <_{P_1P_2} \bar{1}$. La conclusion voulue découle de ces deux faits.

Dans (iii), l'hypothèse est maintenant que
$$I_{i^L_{P_1\cap L}(\sigma)} + \bigcap_{\bar{w}<_{(P_1L)(P_2L)}\bar{1}} I^{(P_2L),\bar{w}}_{i^L_{P_1\cap L}(\sigma)} = \mathbb{C}[A_L]$$
et nous voulons montrer que
$$I_\sigma + \bigcap_{\bar{w}<_{P_1P_2}\bar{1}} I^{P_2,\bar{w}}_\sigma = \mathbb{C}[A_M].$$
Remarquons que si $\bar{w}\in W_M\backslash W_G/W_M$, avec $\bar{w} <_{P_1P_2} \bar{1}$, alors
$$Q_1\bar{w}Q_2 = (P_1L)\bar{w}(P_2L) = LP_1\bar{w}P_2L \subset L\overline{P_1P_2}L \subset \overline{(LP_1)(LP_2)} = \overline{Q_1Q_2}$$
et donc $w <_{(P_1L)(P_2L)} \bar{1}$.

Nous avons besoin de comparer les $I^{(P_2L),\bar{w}}_{i^L_{P_1\cap L}(\sigma)}$ et les $I^{P_2,\bar{w}}_\sigma$. Fixons un $\bar{w}\in W_M\backslash W_G/W_M$, et appliquons le lemme géométrique à la représentation $w\circ(r^L_{L\cap w\cdot(P_2L)}\circ i^L_{P_1\cap L}(\sigma))$. Cette représentation admet une filtration dont les sous-quotients sont de la forme
$$w\circ(i^{L\cap w\cdot L}_{L\cap w\cdot L\cap v\cdot P_1}\circ v\circ r^M_{M\cap(vw)\cdot(P_2L)}(\sigma)),$$
où $\bar{v}$ décrit l'ensemble $W_M\backslash W_L/W_{L\cap w^{-1}\cdot L}$. L'annulateur d'une telle représentation dans $\mathbb{C}[A_M]$ est le même que celui de la représentation
$$w\circ v\circ(r^M_{M\cap(vw)\cdot(P_2L)}(\sigma)) = (vw)\circ(r^M_{M\cap(vw)\cdot(P_2L)}(\sigma))$$
car le foncteur d'induction parabolique est fidèle. Cet annulateur est contenu dans celui de $(vw)\circ(r^M_{M\cap(vw)\cdot P_2}(\sigma))$, égal par définition à $I^{P_2,\overline{vw}}_\sigma\cap\mathbb{C}[A_L]$. Ceci montre que
$$I^{(P_2L),\bar{w}}_{i^L_{P_1\cap L}(\sigma)} \subset \bigcap_{\bar{w}'\mapsto\bar{w}} (I^{P_2,\overline{w}'}_\sigma\cap\mathbb{C}[A_L])$$
où les $\overline{w}'$ décrivent la fibre au dessus de $\bar{w}$ de la projection
$$W_M\backslash W_G/W_M \to W_L\backslash W_G/W_L.$$
On en déduit que
$$I_\sigma\cap\mathbb{C}[A_L] + \bigcap_{\bar{w}<_{P_1P_2}\bar{1}} (I^{P_2,\bar{w}}_\sigma\cap\mathbb{C}[A_L]) = \mathbb{C}[A_L],$$
ce qui implique l'égalité voulue.

Nous allons maintenant démontrer les égalités entre opérateurs d'entrelacement de la proposition. Reprenons le point (i). L'hypothèse que $d(P_1,P_3) = d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3)$ peut se traduire par [3] :
$$\bar{N}_1\cap N_3 = (\bar{N}_1\cap N_2)(\bar{N}_2\cap N_3).$$

3. Le lecteur prendra garde a ne pas confondre la notation pour l'adhérence et celle pour les paraboliques opposés. Dans les formules qui suivent, il s'agit de la seconde.

D'autre part, on a la caractérisation suivante de $\tilde{F}^{<1}_{P_1P_3}(E)$:

$$\tilde{F}^{<1}_{P_1P_3}(E) = \{f \in i^G_{P_1}(E) \,|\, \mathrm{Supp} f \cap (\bar{N}_1 \cap N_3) \text{ est compact }\},$$

car l'application naturelle

$$(\bar{N}_1 \cap N_3) \to P_1 \backslash P_1 P_3$$

est un homéomorphisme. Il s'ensuit que si $f \in \widetilde{F}^{<1}_{P_1P_3}(E)$, on a

• Pour tout $u \in \bar{N}_2 \cap N_3$, la fonction $r(u) \cdot f \in i^G_{P_1}(E)$ a un support compact sur $\bar{N}_1 \cap N_2$, et donc est dans $\tilde{F}^{<1}_{P_1P_2}(E)$.

• Pour tout $u \in \bar{N}_2 \cap N_3$, on a

$$J_{P_2|P_1}(\sigma)(f)(u) = J_{P_2|P_1}(\sigma)(r(u)\cdot f)(\mathbf{1}_G) = \int_{\bar{N}_1\cap N_2} f(vu)\,dv.$$

Ceci montre que la fonction $J_{P_2|P_1}(\sigma)(f) \in i^G_{P_2}(E)$ est à support compact sur $\bar{N}_2 \cap N_3$, et donc est dans $\tilde{F}^{<1}_{P_2P_3}(E)$.

Il découle de ces deux points que

$$\begin{aligned} J_{P_3|P_2}(\sigma) \circ J_{P_2|P_1}(\sigma)(f)(\mathbf{1}_G) &= \int_{\bar{N}_2\cap N_3}\int_{\bar{N}_1\cap N_2} f(vu)\,dv\,du \\ &= \int_{\bar{N}_1\cap N_3} f(u)\,du = J_{P_3|P_1}(\sigma)(f)(\mathbf{1}_G) \end{aligned}$$

D'après la proposition VII.3.4, cette égalité est en fait valide pour toute $f \in i^G_{P_1}(E)$, et ceci démontre donc que

$$J_{P_3|P_2}(\sigma) \circ J_{P_2|P_1}(\sigma) = J_{P_3|P_1}(\sigma).$$

Passons maintenant au point (ii). Fixons d'abord, pour $i = 1, 2$, un isomorphisme naturel entre $i^G_{P_i}(E)$ et $i^G_Q \circ i^L_{P_i\cap L}(E)$:

$$f \mapsto \tilde{f}$$

où

$$\tilde{f}(g) = f_g \;:\; l \in L \mapsto \delta_U(l)^{1/2} f(lg).$$

On vérifie facilement que pour tout $g \in G$, $f_g \in i^L_{P_i\cap L}(E)$ (noter que $U \subset N_i$), que $\tilde{f} \in i^G_Q \circ i^L_{P_i\cap L}(E)$ et que l'isomorphisme inverse est donné par

$$\tilde{f} \mapsto [g \mapsto \tilde{f}(g)(\mathbf{1}_L)].$$

Si $f \in i^G_{P_1}(E)$, on a pour tout $g \in G$, par définition de l'opérateur induit $i^G_Q(J_{P_2\cap L|P_1\cap L}(\sigma))$,

$$i^G_Q(J_{P_2\cap L|P_1\cap L}(\sigma))(\tilde{f}) = J_{P_2\cap L|P_1\cap L}(\sigma) \circ \tilde{f}.$$

D'où

$$\text{(VII.3.5.2)} \qquad \left(\left(i^G_Q(J_{P_2\cap L|P_1\cap L}(\sigma))(\tilde{f})\right)(g)\right)(\mathbf{1}_L) = \left(J_{P_2\cap L|P_1\cap L}(\sigma)(\tilde{f}(g))\right)(\mathbf{1}_L).$$

Soit $f \in \widetilde{F}^{<1}_{P_1P_2}(E)$. Comme $\mathrm{Supp}(f) \cap (\bar{N}_1 \cap N_2)$ est compact, il en est de même de $\mathrm{Supp}(\tilde{f}(\mathbf{1}_G) \cap ((\bar{N}_1 \cap L) \cap (N_2 \cap L))$ puisque $((\bar{N}_1 \cap L) \cap (N_2 \cap L)) = \bar{N}_1 \cap N_2$. La caractérisation des espaces $\widetilde{F}^{<1}$

utilisée ci-dessus montre qu'alors $\tilde{f}(\mathbf{1}_G) \in \widetilde{F}^{<1}_{(P_1\cap L)(P_2\cap L)}(E)$ et l'on peut alors évaluer l'expression (VII.3.5.2) en $g = \mathbf{1}_G$.

$$\left(J_{P_2\cap L|P_1\cap L}(\sigma)(\tilde{f}(\mathbf{1}_G))\right)(\mathbf{1}_L) = \int_{\bar{N}_1\cap N_2} f(u)\,du = J_{P_2|P_1}(\sigma)(f)(\mathbf{1}_G).$$

Ceci suffit à montrer que $i_Q^G(J_{P_2\cap L|P_1\cap L}(\sigma)) = J_{P_2|P_1}(\sigma)$, d'après la proposition VII.3.4.

Enfin, terminons de démontrer (iii). On a $N_i = (N_i\cap L)(N_i\cap U_i)$, $i = 1, 2$, ce qui entraîne que l'inclusion naturelle $\bar{U}_1\cap U_2$ dans $\bar{N}_1\cap N_2$ est un homéomorphisme. De plus, on voit que $\bar{U}_1 = U_2$. Identifions $i_{P_1}^G(E)$ et $i_{P_1L}^G\circ i_{P_1\cap L}^L(E)$ comme dans la démonstration de (ii).

Si $\tilde{f} \in i_{P_1L}^G\circ i_{P_1\cap L}^L(E)$, la fonction $f \in i_{P_1}^G(E)$ qui lui correspond vérifie

$$\delta_{U_1}^{1/2}(l)f(lg) = \tilde{f}(g)(l), \quad (l\in L),\ (g\in G).$$

En particulier, pour tout $l \in L$, $\mathrm{Supp}(r(l)\cdot f) \subset \mathrm{Supp}(\tilde{f})$ et donc pour tout $l\in L$, $r(l)\cdot f \in \widetilde{F}^{<\bar{1}}_{P_1P_2}(E)$ dès que $\tilde{f} \in \widetilde{F}^{<\bar{1}}_{(P_1L)(P_2L)}(i_{P_1\cap L}^L(E))$. On peut alors calculer, en remarquant que $\delta_{U_2} = \delta_{\bar{U}_1} = \delta_{U_1}^{-1}$,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{J_{P_2|P_1}(\sigma)}(f)(\mathbf{1}_G)(l) = \delta_{U_2}^{1/2}(l)J_{P_2|P_1}(\sigma)(f)(l)\\
&= \delta_{U_2}^{1/2}(l)J_{P_2|P_1}(\sigma)(r(l)\cdot f)(\mathbf{1}_G) = \delta_{U_2}^{1/2}(l)\int_{\bar{N}_1\cap N_2} f(ul)\,du\\
&= \delta_{U_2}^{1/2}(l)\int_{\bar{U}_1\cap U_2} f(ul)\,du = \delta_{U_2}^{1/2}(l)\delta_{U_1}^{-1/2}(l)\int_{\bar{U}_1\cap U_2}\tilde{f}(u)(l)\,du\\
&= J_{P_2L|P_1L}(i_{P_1\cap L}^L(\sigma))(\tilde{f})(\mathbf{1}_G)(l).
\end{aligned}$$

Encore une fois, la conclusion découle de la proposition VII.3.4.

VII.4 Classification de Langlands

VII.4.1 Triplets de Langlands

Les triplets de Langlands donnent une paramétrisation de $\mathbf{Irr}(G)$.

Définition. On appelle triplet de Langlands la donnée :

- d'un sous-groupe parabolique standard $P = MN$,
- d'une représentation tempérée irréductible (σ, E) de M,
- d'un caractère non ramifié $\psi \in \mathcal{X}(M)$ tel que $\Re(\psi) \in {}_P^G[\mathfrak{a}_M^*]^+$

Lemme. *Si $(P = MN, (\sigma, E), \psi)$ est un triplet de Langlands, alors la représentation $\sigma\otimes\psi$ est $P\bar{P}$-régulière. En particulier, il existe un opérateur d'entrelacement non nul, unique à un facteur scalaire près :*

$$J_{\bar{P}|P}(\sigma\psi) : i_P^G(\sigma\otimes\psi) \to i_{\bar{P}}^G(\sigma\otimes\psi).$$

Démonstration. D'après le lemme VII.3.1, il s'agit de voir que si $\bar{w} <_{P\bar{P}} \bar{1}$, $\bar{w}\in W_M\backslash W_G/W_M$, alors

$$\mathrm{Exp}(A_M, \sigma\otimes\psi)\cap \mathrm{Exp}(A_M, w\circ r^M_{M\cap w\cdot\bar{P}}(\sigma\otimes\psi)) = \emptyset.$$

Or, les éléments de $\mathrm{Exp}(A_M, w \circ r^M_{M\cap w\cdot \bar{P}}(\sigma\otimes\psi))$ sont de la forme

$$(w^{-1}\cdot\chi)_{|A_M}(w^{-1}\cdot\psi)_{|A_M}.$$

Regardons de plus près ces deux termes. D'une part

$$\chi\in \mathrm{Exp}(A_{M\cap w\cdot M}, r^M_{M\cap w\cdot\bar{P}}(\sigma)).$$

Comme σ est tempérée, on a

$$\Re(\chi)\in {}^+\overline{[\mathfrak{a}^*_{M\cap w\cdot M}]}^M_{M\cap w\cdot\bar{P}}.$$

La démonstration du lemme VII.2.2 montre alors que que

$$\text{(VII.4.1.1)}\qquad \Re(w^{-1}\cdot\chi_{|A_M})\in {}^+\overline{[\mathfrak{a}^*_M]}^G_{\bar{P}} = {}^-\overline{[\mathfrak{a}^*_M]}^G_{P}.$$

D'autre part, $\psi\in\mathcal{X}(M)$, donc $w^{-1}\cdot\psi\in\mathcal{X}(w^{-1}\cdot M)$. Comme

$$A_M\subset A_{M\cap w^{-1}\cdot M}\subset A_\emptyset\subset M\cap w^{-1}\cdot M\subset w^{-1}\cdot M,$$

$(w^{-1}\cdot\psi)_{|A_M}\in\mathcal{X}(A_M)$, et $\Re((w^{-1}\cdot\psi)_{|A_M})$ est obtenu de la manière suivante à partir de $\mu:=\Re(\psi)\in\mathfrak{a}^*_M$: on considère μ comme un élément de $\mathfrak{a}^*_{M\cap w\cdot M}=\mathfrak{a}^*_M\oplus(\mathfrak{a}^M_{M\cap w\cdot M})^*$, et donc

$$w^{-1}\cdot\mu=\Re(w^{-1}\cdot\psi)\in\mathfrak{a}^*_{M\cap w^{-1}\cdot M}=\mathfrak{a}^*_M\oplus(\mathfrak{a}^M_{M\cap w^{-1}\cdot M})^*.$$

On projette alors $w^{-1}\cdot\mu$ sur $\mathfrak{a}^*_M$, c'est-à-dire que

$$\Re((w^{-1}\cdot\psi)_{|A_M})=(w^{-1}\cdot\mu)_{|\mathfrak{a}_M}.$$

Si $\bar{w}\neq\bar{1}$, montrons que l'on a

$$\text{(VII.4.1.2)}\qquad \Re(w^{-1}\cdot\psi_{|A_M})\in\Re(\psi)+({}^-\overline{[\mathfrak{a}^*_M]}^G_P\setminus\{0\}).$$

Pour cela, montrons tout d'abord que

$$\text{(VII.4.1.3)}\qquad (\forall\mu\in {}^G_{P_\emptyset}\overline{[\mathfrak{a}^*_\emptyset]}^+),\ (\forall w\in W_G),\quad \mu-w^{-1}\cdot\mu\in {}^+\overline{[\mathfrak{a}^*_\emptyset]}^G_{P_\emptyset}.$$

On raisonne par récurrence sur la longueur de w. Notons $\alpha_1,\dots\alpha_l$ les éléments de $\Delta_\emptyset$, et $\beta_1,\dots,\beta_l$ la base duale. On veut établir que pour tout $i=1,\dots,l$,

$$\langle\mu-w^{-1}\cdot\mu,\beta_i\rangle\geq 0.$$

Or,

$$\langle\mu-w^{-1}\cdot\mu,\beta_i\rangle=\langle\mu,\beta_i-w\cdot\beta_i\rangle.$$

Si $l(w)=1$, $w=s_{\alpha_j}$ pour une certaine racine $\alpha_j\in\Delta_\emptyset$ et dans ce cas,

$$\langle\mu,\beta_i-w\cdot\beta_i\rangle=\langle\mu,\beta_i-s_{\alpha_j}\cdot\beta_i\rangle=\begin{cases}2\langle\mu,\beta_i\rangle \text{ si } i=j\\ 0 \text{ si } i\neq j\end{cases}.$$

Cette quantité est donc positive ou nulle.

Si $l(w) > 1$, on écrit $w = w's_{\alpha_j}$ avec $l(w') = l(w) - 1$, et on a alors

$$\begin{aligned}\langle \mu, \beta_i - w \cdot \beta_i \rangle &= \langle \mu, \beta_i - w's_{\alpha_j} \cdot \beta_i \rangle \\ &= \langle \mu, \beta_i - w' \cdot \beta_i \rangle + \langle \mu, w' \cdot \beta_i - w's_{\alpha_j} \cdot \beta_i \rangle \\ &= \langle \mu, \beta_i - w' \cdot \beta_i \rangle + \langle {w'}^{-1} \cdot \mu, \beta_i - s_{\alpha_j} \cdot \beta_i \rangle \\ &= \langle \mu - {w'}^{-1} \cdot \mu, \beta_i \rangle + \langle {w'}^{-1} \cdot \mu, \beta_i - s_{\alpha_j} \cdot \beta_i \rangle.\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, le premier terme est ≥ 0. Pour le second, si $i \neq j$, on obtient 0, et si $i = j$, on obtient

$$\langle {w'}^{-1} \cdot \mu, \beta_i \rangle = \langle \mu, w' \cdot \beta_i \rangle.$$

Mais ceci est ≥ 0 car $l(w') = l(w's_{\alpha_i}) - 1$ équivaut à

$$w' \cdot \alpha_i \in {}^{+}\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}_{P_\emptyset}^{G}.$$

Ceci finit de démontrer (VII.4.1.3). Déduisons-en (VII.4.1.2), en posant $\Re(\psi) = \mu$. Par hypothèse, $\mu = \Re(\psi) \in {}_{P}^{G}[\mathfrak{a}_M^*]^{+}$, et donc $\mu \in {}_{P_\emptyset}^{G}\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}^{+}$, et d'après ce qui précède

$$\mu - w^{-1} \cdot \mu \in {}^{+}\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}_{P_\emptyset}^{G}.$$

On en déduit que

$$\mu - (w^{-1} \cdot \mu)_{|\mathfrak{a}_M^*} \in {}^{+}\overline{[\mathfrak{a}_M^*]}_{P}^{G}.$$

car la projection de $\mathfrak{a}_\emptyset^*$ sur $\mathfrak{a}_M^*$ envoie ${}^{+}\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}_{P_\emptyset}^{G}$ sur ${}^{+}\overline{[\mathfrak{a}_M^*]}_{P}^{G}$. Il reste à montrer que $\mu - w^{-1} \cdot \mu \neq 0$ pour $\bar{w} \neq \bar{1} \in W_M \backslash W_G / W_M$. Supposons le contraire : $w^{-1} \cdot \mu = \mu$. Choisissons l'ensemble $W^{M,M}$ défini en V.4.6 comme système de représentants des doubles classes $W_M \backslash W_G / W_M$. Alors $w(M \cap P_\emptyset) \subset P_\emptyset$ et donc si $\alpha \in \Delta^M(M \cap P_\emptyset) = \Delta_\emptyset^M$, on a $w \cdot \alpha \in {}^{+}\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}_{P_\emptyset}^{G}$. Si $\alpha \in \Delta_\emptyset^G \setminus \Delta_\emptyset^M$, on a

$$\langle \mu, w \cdot \alpha \rangle = \langle w^{-1} \cdot \mu, \alpha \rangle = \langle \mu, \alpha \rangle > 0$$

D'après le lemme V.3.17, on obtient alors

$$w \cdot \alpha \in {}^{+}\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}_{P_\emptyset}^{G}.$$

Finalement, nous avons montré que pour tout $\alpha \in \Delta_\emptyset^G$, $w \cdot \alpha \in {}^{+}\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}_{P_\emptyset}^{G}$, ce qui implique que $l(w) = 0$. Ceci contredit l'hypothèse $w \neq 1$.

Nous pouvons maintenant finir la démonstration du lemme. D'après (VII.4.1.1) et (VII.4.1.2),

$$\Re(w^{-1} \cdot \chi_{|A_M}) + \Re(w^{-1} \cdot \psi_{|A_M}) \in \Re(\psi) + ({}^{-}\overline{[\mathfrak{a}_M^*]}_{P}^{G} \setminus \{0\}).$$

Or un élément de $\mathrm{Exp}(A_M, \sigma \otimes \psi)$ s'écrit $\chi_1 \psi$, avec $\chi_1 \in \mathrm{Exp}(A_M, \sigma)$. La représentation σ étant tempérée, $\Re(\chi_1) = 0$, donc

$$\Re(\chi_1 \psi) = \Re(\psi) \in {}_{P}^{G}[\mathfrak{a}_M^*]^{+}.$$

Ceci montre que si $\bar{w} \neq \bar{1}$,

$$\mathrm{Exp}(A_M, \sigma \otimes \psi) \cap \mathrm{Exp}(A_M, w \circ r_{M \cap w \cdot \bar{P}}^{M}(\sigma \otimes \psi)) = \emptyset.$$

Comme $\bar{1}$ est l'élément maximal pour l'ordre de Bruhat $\leq_{\bar{P}P}$, on voit qu'alors, par réciprocité de Frobenius, $\mathrm{Hom}_G(i_P^G(\sigma \otimes \psi), i_{\bar{P}}^G(\sigma \otimes \psi))$ est de dimension 1, engendré par $J_{\bar{P}|P}(\sigma\psi)$. $\square$

VII.4.2 Le théorème de classification

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème principal de ce chapitre.

Théorème. (*i*) *Soit* $(P = MN, (\sigma, E), \psi)$ *un triplet de Langlands. Alors la représentation* $i_P^G(\sigma \otimes \psi, E)$ *admet un unique quotient irréductible. On le note* $J(P, \sigma, \psi)$.

(*ii*) *Si* $J(P_1, \sigma_1, \psi_1) = J(P_2, \sigma_2, \psi_2)$, *alors* $M_1 = M_2$, $\Re(\psi_2 \psi_1^{-1}) = 0$ *et* $\sigma_1 \psi_1 \simeq \sigma_2 \psi_2$.

(*iii*) *Soit* $(\pi, V) \in \mathbf{Irr}(G)$. *Alors il existe un triplet de Langlands* $(P = MN, (\sigma, E), \psi)$ *tel que* $(\pi, V) \simeq J(P, \sigma, \psi)$.

Démonstration. (*i*) On a vu que $\sigma \otimes \psi$ est $P\bar{P}$-régulière et que

$$\mathrm{Hom}_G(i_P^G(\sigma \otimes \psi), i_{\bar{P}}^G(\sigma \otimes \psi))$$

est de dimension 1, engendré par $J_{\bar{P}|P}(\sigma\psi)$. Soit (π, V) un quotient de $i_P^G(\sigma \otimes \psi)$. D'après le second théorème d'adjonction,

$$\mathrm{Hom}_G(i_P^G(\sigma \otimes \psi), \pi) \simeq \mathrm{Hom}_M(\sigma \otimes \psi, r_{\bar{P}}^G(\pi))$$

et l'on obtient ainsi un morphisme non nul

$$\sigma \otimes \psi \to r_{\bar{P}}^G(\pi)$$

qui est injectif puisque $\sigma \otimes \psi$ est irréductible. Comme $\sigma \otimes \psi$ est $P\bar{P}$-régulière, ce plongement admet une rétraction

$$r_{\sigma\psi} : r_{\bar{P}}^G(\pi) \to \sigma \otimes \psi$$

et par réciprocité de Frobenius, on obtient un morphisme non nul dans

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, i_{\bar{P}}^G(\sigma \otimes \psi)).$$

Si (π, V) est irréductible, ce morphisme est une injection. La composition

$$i_P^G(\sigma \otimes \psi) \to \pi \to i_{\bar{P}}^G(\sigma \otimes \psi)$$

est un élément non nul de $\mathrm{Hom}_G(i_P^G(\sigma \otimes \psi), i_{\bar{P}}^G(\sigma \otimes \psi))$, et est donc égal à $J_{\bar{P}|P}(\sigma\psi)$ à un facteur scalaire près. Ceci montre que (π, V) est l'unique quotient irréductible de $i_P^G(\sigma \otimes \psi)$.

De plus, on voit d'après ce qui précède que (π, V) est caractérisé en tant que sous-quotient irréductible de $i_P^G(\sigma \otimes \psi)$ par la propriété

$$\Re(\psi) \in \Re(\mathrm{Exp}(A_M, r_{\bar{P}}^G(\pi))).$$

Démontrons maintenant (*iii*). Soit $(\pi, V) \in \mathbf{Irr}(G)$. Considérons l'ensemble

$$\Re(\mathrm{Exp}(V)) := \bigcup_M \Re(\mathrm{Exp}(A_M, r_{\bar{P}}^G(\pi))),$$

où M décrit les sous-groupes de Levi standards de G.

Soit $\mu \in \Re(\mathrm{Exp}(V))$, disons $\mu \in \Re(\mathrm{Exp}(A_M, r_{\bar{P}}^G(\pi)))$ pour un certain sous-groupe parabolique standard $P = MN$ de G, et soit

$$\mu = \mu^+ + \mu^- + \mu_G$$

le décomposition de μ donnée par le lemme combinatoire de Langlands V.3.18, avec $\mu^+ \in {}^G_Q[(\mathfrak{a}_L^G)^*]^+$ et $\mu^- \in p_M^L(\overline{{}^-[\mathfrak{a}_M^*]_P^G})$ où $Q = LU$ est un certain sous-groupe parabolique standard de G contenant M.

Choisissons μ tel que la norme de μ^+ soit maximale. Comme $\mu^-_{|A_L}$ est trivial, on a grâce au lemme VII.1.1 et à la transitivité des foncteurs de restriction parabolique,

$$\mu_{|A_L} = \mu^+ + \mu_G \in \Re(\mathrm{Exp}(A_L, r_{\bar{Q}}^G(V))).$$

On peut donc trouver un sous-quotient irréductible (ρ, W) de $r_{\bar{Q}}^G(\pi, V)$ dont le caractère central χ_ρ vérifie

$$\Re(\chi_\rho) = \mu^+ + \mu_G.$$

En décomposant $r_{\bar{Q}}^G(V)$ selon le caractère central, on peut même supposer que (ρ, W) est une sous-représentation de $r_{\bar{Q}}^G(\pi, V)$.

Soit $\psi \in \mathcal{X}(L)$ tel que $\Re(\psi) = \mu^+ + \mu_G$. Posons alors $\sigma = \rho \otimes \psi^{-1}$. Montrons que σ est tempérée. Pour cela, considérons un sous-groupe parabolique standard $P_1 = M_1N_1$ de G contenu dans Q et regardons de plus près les exposants de

$$r_{\bar{P}_1 \cap L}^L(\sigma) = r_{\bar{P}_1 \cap L}^L(\rho \otimes \psi^{-1}).$$

Soit λ la partie réelle d'un tel exposant. On voit que $\lambda \in (\mathfrak{a}_{M_1}^L)^*$ car en effet $\Re(\chi_\rho\psi^{-1}) = 0$ et donc par le (ii) du lemme VII.1.1, $\lambda_{|\mathfrak{a}_L} = 0$. On en déduit que λ et μ^+ sont orthogonaux, et donc

$$|\lambda|^2 + |\mu^+|^2 = |\lambda + \mu^+|^2 = |(\lambda + \mu^+)^+|^2 + |(\lambda + \mu^+)^-|^2.$$

Comme $\rho \hookrightarrow r_{\bar{Q}}^G(\pi)$, on a

$$r_{\bar{P}_1 \cap L}^L(\rho) \hookrightarrow r_{\bar{P}_1 \cap L}^L \circ r_{\bar{Q}}^G(\pi) = r_{\bar{P}_1}^G(\pi),$$

et l'on voit alors que $\lambda + \Re(\psi) = \lambda + \mu^+ + \mu_G \in \Re(\mathrm{Exp}(A_M, r_{\bar{P}_1}^G(V)))$. Le choix de μ implique que

$$|\mu^+| \geq |(\lambda + \mu^+)^+|$$

d'où

$$|(\lambda + \mu^+)^-| \geq |\lambda|.$$

D'autre part, comme

$${}^G_{P_\emptyset}\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}^+ \subset -\mu^+ + {}^G_{P_\emptyset}\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}^+,$$

on a

$$|(\lambda + \mu^+)^-| = \mathrm{Dist}(\lambda + \mu^+, {}^G_{P_\emptyset}\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}^+) \leq \mathrm{Dist}(\lambda, {}^G_{P_\emptyset}\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}^+) = |\lambda^-|.$$

Finalement, on obtient

$$|\lambda^-| \leq |\lambda| \leq |(\lambda + \mu^+)^-| \leq |\lambda^-|,$$

d'où $\lambda = \lambda^- \in {}^-[\mathfrak{a}_{M_1}^*]_{P_1}^G = {}^+[\mathfrak{a}_{M_1}^*]_{\bar{P}_1}^G$. En changeant $\Delta_\emptyset^L$ en son opposé, pour que les $\bar{P}_1 \cap L$ soient les sous-groupes paraboliques standards de L, voit que σ vérifie les conditions voulues pour être tempérée. De plus, $\Re(\psi) = \mu^+ + \mu_G \in {}^G_Q[\mathfrak{a}_L^*]^+$.

On a donc $\rho = \sigma \otimes \psi \hookrightarrow r_{\bar{Q}}^G(\pi)$, d'où nous obtenons par le second théorème d'adjonction un morphisme non nul dans $\mathrm{Hom}_G(i_Q^G(\sigma \otimes \psi), \pi)$, ce qui montre que π est un quotient de $i_Q^G(\sigma \otimes \psi)$. Ainsi $J(Q, \sigma, \psi) = \pi$.

Il reste à démontrer (*ii*), c'est-à-dire l'unicité. Supposons que deux triplets de Langlands $(P_i = M_iN_i, (\sigma_i, E_i), \psi_i)$, $i = 1, 2$ donnent le même quotient de Langlands (π, V) :

(VII.4.2.1)
$$\begin{array}{ccccc} i_{P_1}^G(\sigma_1\psi_1) & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & i_{\bar{P}_1}^G(\sigma_1\psi_1) \\ & & \big\downarrow & & \\ i_{P_2}^G(\sigma_2\psi_2) & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & i_{\bar{P}_2}^G(\sigma_2\psi_2). \end{array}$$

La flèche verticale étant l'identité de (π, V). On en déduit un morphisme non nul dans $\mathrm{Hom}_G(i_{P_1}^G(\sigma_1\psi_1), i_{\bar{P}_2}^G(\sigma_2\psi_2))$, et par réciprocité de Frobenius, morphisme non nul dans $\mathrm{Hom}_{M_2}(r_{\bar{P}_2}^G \circ i_{P_1}^G(\sigma_1\psi_1), \sigma_2\psi_2)$.

Grâce au lemme géométrique, il existe $\bar{w} \in W_{M_1}\backslash W_G/W_{M_2}$ tel que

$$\mathrm{Hom}_{M_2}(i_{M_2\cap w^{-1}\cdot P_1}^{M_2} \circ w \circ r_{M_1\cap w\cdot\bar{P}_2}^{M_1}(\sigma_1\psi_1), \sigma_2\psi_2) \neq \{0\},$$

d'où, par le second théorème d'adjonction,

$$\mathrm{Hom}_{M_2\cap w^{-1}\cdot M_1}(w \circ r_{M_1\cap w\cdot\bar{P}_2}^{M_1}(\sigma_1\psi_1), r_{M_2\cap w^{-1}\cdot\bar{P}_1}^{M_2}(\sigma_2\psi_2)) \neq \{0\},$$

Posons $\mu_i = \Re(\psi_i) \in {}_{P_i}^{G}[\mathfrak{a}_{M_i}^*]^+$. Ce qui précède montre qu'il existe

$$\lambda_1 \in \mathrm{Exp}(A_{M_1\cap w\cdot\bar{M}_2}, r_{M_1\cap w\cdot\bar{P}_2}^{M_1}(\sigma_1))$$

et $\lambda_2 \in \mathrm{Exp}(A_{M_2\cap w^{-1}\cdot M_1}, r_{M_2\cap w^{-1}\cdot\bar{P}_1}^{M_2}(\sigma_1))$ tels que

$$w^{-1}\cdot(\lambda_1 + \mu_1) = \lambda_2 + \mu_2$$

Comme σ_1 et σ_2 sont tempérées,

$$\lambda_1 \in {}^+\overline{[\mathfrak{a}_{M_1\cap w\cdot M_2}^*]}_{M_1\cap w\cdot\bar{P}_2}^{M_1} \subset {}^+\overline{[\mathfrak{a}_{M_1\cap w\cdot M_2}^*]}_{\bar{R}_1}^{G} = {}^-\overline{[\mathfrak{a}_{M_1\cap w\cdot M_2}^*]}_{R_1}^{G}$$

$$\lambda_2 \in {}^+\overline{[\mathfrak{a}_{M_2\cap w^{-1}\cdot M_1}^*]}_{M_2\cap w^{-1}\cdot\bar{P}_1}^{M_2} \subset {}^+\overline{[\mathfrak{a}_{M_2\cap w^{-1}\cdot M_1}^*]}_{\bar{R}_2}^{G} = {}^-\overline{[\mathfrak{a}_{M_2\cap w^{-1}\cdot M_1}^*]}_{R_2}^{G},$$

où R_1 (resp. R_2) est le sous-groupe parabolique standard de G de facteur de Levi $M_1 \cap w \cdot M_2$ (resp. $M_2 \cap w^{-1} \cdot M_1$). Rappelons (Lemme V.4.6) que $M_1 \cap w \cdot P_2$ (resp. $M_2 \cap w^{-1} \cdot P_1$) est le sous-groupe parabolique standard dans M_1 (resp. de M_2) de facteur de Levi $M_1 \cap w \cdot M_2$ (resp. $M_2 \cap w^{-1} \cdot M_1$), de sorte que

$$M_1 \cap w \cdot P_2 \subset R_1, \quad M_2 \cap w^{-1} \cdot P_1 \subset R_2.$$

On a aussi

$$w^{-1}\cdot\lambda_1 \in {}^+\overline{[\mathfrak{a}_{M_2\cap w^{-1}\cdot M_1}^*]}_{w^{-1}\cdot M_1\cap\bar{P}_2}^{w^{-1}\cdot M_1} \subset {}^+\overline{[\mathfrak{a}_{M_2\cap w^{-1}\cdot M_1}^*]}_{\bar{R}_2}^{G} = {}^-\overline{[\mathfrak{a}_{M_2\cap w^{-1}\cdot M_1}^*]}_{R_2}^{G}.$$

Remarquons que

$$\mu_1 \in {}_{P_1}^{G}[\mathfrak{a}_{M_1}^*]^+ \subset {}_{R_1}^{G}\overline{[\mathfrak{a}_{M_1\cap w\cdot M_2}^*]}^+, \quad \mu_2 \in {}_{P_2}^{G}[\mathfrak{a}_{M_2}^*]^+ \subset {}_{R_2}^{G}\overline{[\mathfrak{a}_{M_2\cap w^{-1}\cdot M_1}^*]}^+.$$

Et enfin

$$w^{-1}\cdot\mu_1 \in {}_{w^{-1}\cdot P_1}^{G}[\mathfrak{a}_{w^{-1}\cdot M_1}^*]^+ \subset {}_{R_2}^{G}\overline{[\mathfrak{a}_{M_2\cap w^{-1}\cdot M_1}^*]}^+.$$

Posons

$$\mu = \lambda_2 + \mu_2 = w^{-1} \cdot \lambda_1 + w^{-1} \cdot \mu_1.$$

L'existence et l'unicité dans l'énoncé du lemme combinatoire de Langlands V.3.18 nous donnent alors

$$\mu^- = \lambda_2 = w^{-1} \cdot \lambda_1,$$
$$\mu^+ = \mu_2^+ = (w^{-1} \cdot \mu_1)^+$$
$$\mu_G = (\mu_2)_G = (w^{-1} \cdot \mu_1)_G.$$

Montrons maintenant que ceci implique que $w = 1$, par un argument déjà utilisé dans la démonstration du lemme VII.4.1. En effet, le choix du système de représentants W^{M_2,M_1} donne que $w(M_2 \cap P_\emptyset) \subset P_\emptyset$ et donc si $\alpha \in \Delta^{M_2}(M_2 \cap P_\emptyset) = \Delta_\emptyset^{M_2}$, on a $w \cdot \alpha \in {}^+\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}_{P_\emptyset}^G$. Si $\alpha \in \Delta_\emptyset^G \setminus \Delta^{M_2}(M_2 \cap P_\emptyset)$, on a

$$\langle \mu_1, w \cdot \alpha \rangle = \langle w^{-1} \cdot \mu_1, \alpha \rangle = \langle \mu_2, \alpha \rangle > 0.$$

D'après le lemme V.3.17, on obtient alors

$$w \cdot \alpha \in {}^+\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}_{P_\emptyset}^G.$$

Finalement, nous avons montré que pour tout $\alpha \in \Delta_\emptyset^G$, $w \cdot \alpha \in {}^+\overline{[\mathfrak{a}_\emptyset^*]}_{P_\emptyset}^G$, ce qui implique que $l(w) = 0$.

Ainsi $\mu_1 = \mu_2$. Comme $\mu_1 \in {}_{P_1}^G[\mathfrak{a}_{M_1}^*]^+$, on peut écrire

$$\mu_1 = \sum_{\alpha \in \Delta(P_1)} c_\alpha\, \alpha, \quad c_\alpha > 0$$

et de même pour μ_2. Ceci montre que $M_1 = M_2$. Le morphisme non nul dans

$$\mathrm{Hom}_{M_2 \cap w^{-1} \cdot M_1}(w \circ r_{M_1 \cap w \cdot \bar{P}_2}^{M_1}(\sigma_1 \psi_1), r_{M_2 \cap w^{-1} \cdot P_1}^{M_2}(\sigma_2 \psi_2))$$

est en fait un morphisme non nul dans

$$\mathrm{Hom}_{M_1}(\sigma_1 \psi_1, \sigma_2 \psi_2)$$

qui est nécessairement un isomorphisme puisque $\sigma_1 \psi_1$ et $\sigma_2 \psi_2$ sont irréductibles.

VII.5 Notes sur le chapitre VII

La démonstration du critère de Casselman rédigée ici emprunte à [1], [19] et surtout [22]. L'application VII.1.3 est tirée de [1], rappelons que c'est un point crucial pour montrer que les petits progénérateurs des composantes de la décomposition de Bernstein exhibés en VI.10.1 sont bien générateurs. La section sur les représentations tempérées est tirée de [44], celle sur les opérateurs d'entrelacement de [21]. La rédaction de la classification de Langlands suit aussi celle de [21]. Le lecteur peut aussi se reporter à [39] pour une autre rédaction.

Annexe A

Eléments de théorie des catégories

A.I Catégories et foncteurs

Nous supposons que le lecteur possède quelques rudiments de théorie des catégories, c'est-à-dire au moins les définitions et la terminologie de base (objet, morphismes, foncteurs, sous-catégorie...), telles qu'on peut les trouver dans tout bon livre sur le sujet, par exemple [26] ou [36]. Pour une introduction (en français) à la fois concise et rigoureuse de ce sujet, couvrant tous les aspects dont nous avons besoin dans ce livre, nous renvoyons au chapitre II de [24]. Outre des énoncés généraux que, pour la commodité du lecteur, nous rappelons - et parfois démontrons -, nous développons un certain nombre d'exemples hétéroclites, parce qu'ils sont apparus dans le corps du livre. Nous n'entrerons pas dans les questions de fondements logiques de la théorie des catégories, que nous utilisons d'un point de vue naïf, en espérant que tout ce que nous disons peut être rendu rigoureux par les procédés standards (univers de Grothendieck...).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On écrit simplement $X \in \mathcal{C}$ pour dire que X est un objet de $\mathcal{C}$ et $f : X \to Y$ (ou $X \xrightarrow{f} Y$), pour dire que f est un morphisme de X dans Y. On note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y et Id_X l'identité de X.

Les notations pour les foncteurs sont usuelles. Si F est un foncteur de la catégorie $\mathcal{A}$ dans la catégorie $\mathcal{B}$, si X, Y sont des objets de $\mathcal{A}$ et si f est un morphisme de X dans Y, on note respectivement $F(X)$, $F(Y)$ et $F(f)$ leurs images par le foncteur F. Souvent, dans la littérature mathématique, les foncteurs ne sont explicitement définis que sur les objets. Leur effet sur les morphismes est en général évident, et il fait partie de la tâche du lecteur de l'expliciter.

A.I.1 Morphismes remarquables

Nous commençons par introduire quelques définitions concernant les morphismes. Un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ est un *isomorphisme*, s'il existe un morphisme $Y \xrightarrow{g} X$ tel que $gf = \mathrm{Id}_X$ et $fg = \mathrm{Id}_Y$. C'est un *monomorphisme* si les seules paires de morphismes $Z \xrightarrow{h_1} X$ et $Z \xrightarrow{h_2} X$ telles que

$$Z \xrightarrow{h_1} X \xrightarrow{f} Y = Z \xrightarrow{h_2} X \xrightarrow{f} Y$$

sont celles telles que $h_1 = h_2$. C'est un *épimorphisme* si les seules paires de morphismes $Y \xrightarrow{h_1} Z$ et $Y \xrightarrow{h_2} Z$ telles que

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h_1} Z = X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h_2} Z$$

sont celles telles que $h_1 = h_2$.

Un isomorphisme est a la fois un épimorphisme et un monomorphisme, mais la réciproque est fausse en général. Elle est vraie dans les catégories abéliennes.

A.I.2 Sous-objets, objets quotients

Introduisons maintenant les notions de *sous-objets* et *d'objets quotients* d'un objet X dans une catégorie $\mathcal{C}$. Considérons le préordre $\leq$ sur les monomorphismes $Y \xrightarrow{f} X$:

$$Y_1 \xrightarrow{f_1} X \leq Y_2 \xrightarrow{f_2} X$$

s'il existe un morphisme $Y_1 \xrightarrow{i} Y_2$ tel que

$$Y_1 \xrightarrow{i} Y_2 \xrightarrow{f_2} X = Y_1 \xrightarrow{f_1} X.$$

Remarquons alors que i est un monomorphisme. On dit que f_1 et f_2 sont équivalents si $f_1 \leq f_2$ et $f_2 \leq f_1$. Un sous-objet de X est une classe d'équivalence de monomorphismes dans X pour cette relation d'équivalence. On note S_X la collection des sous-objets de X. Il est clair que $\leq$ induit une relation d'ordre sur S_X. Dualement, on définit les objets quotients de X : on munit la collection des épimorphismes $X \xrightarrow{f} Y$ du préordre $\leq$ donné par

$$X \xrightarrow{f_1} Y_1 \leq X \xrightarrow{f_2} Y_2$$

s'il existe un morphisme $Y_2 \to Y_1$ tel que

$$X \xrightarrow{f_2} Y_2 \to Y_1 = X \to Y_1.$$

On dit que f_1 et f_2 sont équivalents si $f_1 \leq f_2$ et $f_2 \leq f_1$. Un quotient de X est une classe d'équivalence d'épimorphismes et $\leq$ induit un ordre sur la collection Q_X des quotients de X.

Si C et D sont deux sous-objets de X, on appelle *intersection* de C et D, et l'on note $C \cap D$, un plus grand minorant de C et D dans S_X. De même, on appelle *union* de C et D, et l'on note $C \cup D$ un plus petit majorant de C et D dans S_X. Bien sûr, de tels objets n'existent pas nécessairement mais s'ils existent, ils sont uniques. On peut aussi de manière évidente étendre ces notions en définissant l'intersection et l'union d'une famille quelconque de sous-objets de X. On dira que la catégorie $\mathcal{C}$ admet des intersections (resp. unions) quelconques (resp. finies), si pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et toute famille (resp. famille finie) de sous-objets de X, l'intersection (resp. l'union) de cette famille existe.

Bien souvent, au lieu de dire : (la classe de) $Y \xrightarrow{f} X$ est un sous-objet de X, on dit par abus de langage : Y est un sous-objet de X, et l'on note $Y \subseteq X$.

A.I.3 Objets noethériens, de type fini

Soit X un objet de $\mathcal{C}$. Soient U une partie de S_X et A un sous-objet de X dans U. On dit que X est *maximal* dans U, si pour tout sous-objet B de X dans U tel que $A \subseteq B$, on a $B = A$. On dit que X est *noethérien* si pour toute partie U de S_X non vide, il existe un élément maximal dans U. On peut aussi définir la notion d'objet noethérien grâce à une *condition de maximalité des chaînes*. Une chaîne dans S_X est une partie de S_X totalement ordonnée. Il est alors facile de vérifier que l'objet X est noethérien si et seulement si toute chaîne dans S_X contient un élément maximal ([24], proposition 1.6.1). En pratique, il suffit de considérer des chaînes bien ordonnées, c'est-à-dire des suites croissantes de sous-objets.

Une autre notion très proche est celle d'objet de *type fini* dans une catégorie. On suppose ici que la catégorie $\mathcal{C}$ admet des unions quelconques. On dit qu'un objet X de $\mathcal{C}$ est de type fini si pour toute chaîne de sous-objets propres (A_i) de X, $\bigcup_i A_i$ est encore un sous-objet propre de X (propre signifie non isomorphe à X). On peut caractériser les objets de type fini par une propriété de compacité. L'objet X de $\mathcal{C}$ est de type fini si pour toute famille de sous-objets (A_i) de X telle que $\bigcup_i A_i = A$, il existe un nombre fini de sous-objets $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ tels que $\bigcup_{j=1}^n A_{i_j} = A$ (voir [36] 4.10, Theorem 1).

Il est clair d'après les définitions qu'un sous-objet d'un objet noethérien est de type fini. En effet, considérons une chaîne de sous-objets propres $(A_i)_i$ d'un sous-objet Y d'un objet noethérien X. Alors d'après la propriété de noethérianité, cette chaîne admet un élément maximal, disons B, et il est clair que cet objet maximal est un plus petit majorant de la famille $(A_i)_i$, c'est-à-dire $B = \bigcup_i A_i \subset Y$. On voit donc que $B = \bigcup_i A_i$ est un sous-objet propre de Y, ce qui montre que Y est de type fini. Réciproquement, si tout sous-objet de X est de type fini, alors X est noethérien. En effet, soit B_i une suite croissante de sous-objets et posons $B = \bigcup_i B_i$. Comme B est de type fini, il existe $i_1 \leq \ldots \leq i_r$ tels que $B = \bigcup_{j=1}^r B_{i_j} = B_{i_r}$, ce qui montre que la suite croissante des B_i est stationnaire.

Une catégorie où tout objet de type fini est noethérien sera dite *noethérienne* .

Exemple. Un module M sur un anneau unitaire A est un objet de type fini dans la catégorie $\mathcal{M}(A)$ si et seulement si M est de type fini sur A au sens algébrique ([24], lemme 3.6.1). La catégorie $\mathcal{M}(A)$ est noethérienne si et seulement si l'anneau A est noethérien.

A.I.4 Objet initial, final, nul

Définissons maintenant les notions d'objet *initial*, *final* ou *nul*. Un objet X dans une catégorie $\mathcal{C}$ est dit initial (resp. final) si pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$) est un singleton. Un objet nul est un objet à la fois initial et final. Les objets initiaux, finaux ou nuls sont uniques à isomorphisme près. Si $\mathcal{C}$ admet un objet nul $0_{\mathcal{C}}$, tous les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ possèdent un objet distingué, à savoir la composition

$$X \to 0_{\mathcal{C}} \to Y$$

que l'on notera simplement 0. On peut dans ces conditions définir le *noyau* d'un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$. C'est un morphisme $K \to X$ tel que

$$K \to X \xrightarrow{f} Y = K \xrightarrow{0} Y$$

et tel que pour tout morphisme $L \to X$ ayant la même propriété, à savoir

$$L \to X \xrightarrow{f} Y = L \xrightarrow{0} Y,$$

il existe un unique morphisme $L \to K$ tel que

$$L \to K \to X = L \to X.$$

La notion de *conoyau* est duale : le conoyau d'un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme $Y \to K$ tel que

$$X \xrightarrow{f} Y \to K = Y \xrightarrow{0} K$$

et tel que pour tout morphisme $Y \to L$ ayant la même propriété, à savoir

$$X \xrightarrow{f} Y \to L = Y \xrightarrow{0} L,$$

il existe un unique morphisme $K \to L$ tel que

$$Y \to K \to L = Y \to L.$$

On note $\ker f$ et $\mathrm{coker} f$ respectivement le noyau et le conoyau de f (lorsqu'ils existent).

A.I.5 Catégorie produit, catégorie opposée

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories. On forme la catégorie $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dont les objets sont les couples (X, Y), $X \in \mathcal{A}$, $Y \in \mathcal{B}$, et les morphismes entre (X, Y) et (X', Y') les couples de morphismes $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Y')$. On forme aussi la catégorie $\mathcal{A}^{op}$ dont les objets sont les mêmes que $\mathcal{A}$, et pour tout couple (X, X') d'objets, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}(X, X') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', X)$. Le recours à la catégorie opposée nous permet de nous passer de la notion de foncteur contravariant, en conséquence, tous les foncteurs considérés seront toujours covariants sauf mention explicite du contraire. Un autre apport conceptuel de l'introduction des catégories opposées est la notion de dualité. Comme nous l'avons vu dans les diverses définitions données ci-dessus, celles-ci vont souvent par paires, l'une étant obtenue à partir de l'autre « en inversant le sens des flèches », c'est-à-dire en travaillant dans les catégories opposées. Sont ainsi duales les paires monomorphisme/épimorphisme, sous-objet/objet quotient, objet initial/objet final, noyau/conoyau. Nous verrons de nombreuses autres instances de ce principe dans la suite. En pratique, tout énoncé en théorie des catégories admet un énoncé dual, dont la démonstration s'obtient en inversant le sens des flèches.

A.II Transformation naturelle, équivalence de catégories

A.II.1 Transformations naturelles

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories, et F, G deux foncteurs de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. On appelle transformation naturelle θ de F vers G la donnée pour tout objet X de $\mathcal{A}$ d'un morphisme

$$\theta_X : F(X) \to G(X)$$

telle que pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{A}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \theta_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta_Y} \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

commute.

Pour tout couple de catégories $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, on peut former une catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ dont les objets sont les foncteurs de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$, et les morphismes les transformations naturelles entre ces foncteurs. On note donc $\mathrm{Hom}(F, G)$ l'ensemble des transformations naturelles de F vers G et Id_F la transformation naturelle triviale du foncteur F vers lui-même. Un isomorphisme naturel entre F et G est une transformation naturelle $\theta \in \mathrm{Hom}(F, G)$ admettant un inverse, c'est-à-dire une transformation naturelle $\phi \in \mathrm{Hom}(G, F)$ telle que $\theta\phi = \mathrm{Id}_G$, $\phi\theta = \mathrm{Id}_F$.

Toute catégorie $\mathcal{A}$ est muni d'un foncteur identité, que nous notons $\mathcal{I}d_{\mathcal{A}}$:

$$\mathcal{I}d_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad X \mapsto X, \quad f \mapsto f,$$

pour tout objet X et tout morphisme f de $\mathcal{A}$.

A.II.2 Equivalences de catégories

L'une des idées importantes à l'origine de la théorie des catégories est que, dans bien des cas, on s'intéresse plus aux classes d'isomorphisme d'objets d'une catégorie donnée qu'aux objets eux-mêmes. Ceci est particulièrement vrai en théorie des représentations par exemple, où les problèmes de classification de représentations irréductibles sont toujours ≪ à isomorphisme près ≫. Heuristiquement, si l'on part d'une catégorie $\mathcal{C}$, imaginons que l'on forme la sous-catégorie $\bar{\mathcal{C}}$ dont les objets sont donnés par un choix de représentants des classes d'isomorphismes d'objets de $\mathcal{C}$, les morphismes entre deux représentants étant tous les morphismes entre ces objets dans $\mathcal{C}$ (autrement dit, c'est une sous-catégorie pleine). On aimerait une définition d'équivalence de catégories qui rende $\mathcal{C}$ et $\bar{\mathcal{C}}$ équivalentes. Exiger l'existence de foncteurs $F : \mathcal{C} \to \bar{\mathcal{C}}$ et $G : \bar{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ inverses l'un de l'autre, c'est-à-dire tels que $FG = \mathcal{I}d_{\bar{\mathcal{C}}}$, $GF = \mathcal{I}d_{\mathcal{C}}$ comme définition de l'équivalence est une containte trop forte pour obtenir ceci. La définition adéquate est

Définition. Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur entre deux catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On dit que F est une équivalence de catégories s'il existe un foncteur $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tel que FG soit naturellement isomorphe à $\mathcal{I}d_{\mathcal{A}}$, et GF naturellement isomorphe à $\mathcal{I}d_{\mathcal{B}}$. Les catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont alors dites équivalentes et les foncteurs F et G sont dits quasi-inverses.

Exemple. Soit $\mathbf{Vect_k^n}$ la catégorie des espaces vectoriels de dimension n sur le corps k dont les morphismes sont les applications linéaires. Soit V_k^n la catégorie dont l'unique objet est l'espace vectoriel k^n et les morphismes les endomorphismes de k^n. Comme foncteur F, on prend l'inclusion de V_k^n dans $\mathbf{Vect_k^n}$. C'est une équivalence de catégories.

Cet exemple illustre bien l'idée exprimée ci-dessus, puisque tous les objets de $\mathbf{Vect_k^n}$ sont isomorphes à k^n. Remarquons que la construction d'un quasi-inverse G nécessite le choix d'un tel isomorphisme pour tout objet (autrement dit le choix d'une base). Il n'y a donc pas unicité du quasi-inverse, et sa construction utilise l'axiome du choix.

Le foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est dit *plein* (resp. *fidèle*) si pour tout couple d'objets (X, Y) dans $\mathcal{A}$, F réalise une surjection (resp. une injection) entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y))$. Un foncteur plein et fidèle est dit pleinement fidèle. Une sous-catégorie $\mathcal{A}$ d'une catégorie $\mathcal{B}$ est dite pleine si le foncteur d'inclusion $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est pleinement fidèle.

On utilise souvent le critère suivant pour montrer qu'un foncteur est une équivalence de catégories ([27], Theorem 1.13 ou [24], théorème 2.3.5).

Théorème. *Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une équivalence de catégories s'il est pleinement fidèle et si tout objet de $\mathcal{B}$ est isomorphe à un objet de la forme $F(X)$, où $X \in \mathcal{A}$.*

A.III Problèmes universels et foncteurs représentables

Nous introduisons maintenant la notion de problème universel et de solution d'un tel problème. Certains exemples choisis pour illustrer cette notion sont apparus dans le texte, comme par exemple le localisé d'un espace vectoriel par rapport à un endomorphisme. On en profite pour établir un lemme et son corollaire, utilisé en VI.9.1.

A.III.1 Problèmes universels

Définition. Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur et soit Y un objet de $\mathcal{B}$. On dit que l'objet X de $\mathcal{A}$ et le morphisme $i : Y \to F(X)$ sont solutions du problème universel à droite posé par F et Y si pour tout objet Z de $\mathcal{A}$ et tout morphisme $f : Y \to F(Z)$, il existe un unique morphisme $g : X \to Z$ vérifiant $F(g) \circ i = f$. De même on dit que $X \in \mathcal{A}$ et $j : F(X) \to Y$ sont solutions du problème universel à gauche posé par F et Y si pour tout objet Z de $\mathcal{A}$ et tout morphisme $f : F(Z) \to Y$, il existe un unique morphisme $g : Z \to X$ vérifiant $j \circ F(g) = f$.

Remarque. Si deux couples (X, i) et (X', i') sont solutions du problème universel (à droite) posé par F et Y, alors X et X' sont isomorphes, à un unique isomorphisme près, comme on le voit en prenant comme morphisme f successivement les morphismes i et i'. On obtient en effet deux morphismes $g_1 : X \to X'$ et $g_2 : X' \to X$ vérifiant $F(g_1) \circ i = i'$ et $F(g_2) \circ i' = i$, d'où $F(g_2 \circ g_1) \circ i = i$ et $F(g_1 \circ g_2) \circ i' = i'$. Les morphismes Id_X et $\mathrm{Id}_{X'}$ vérifiant aussi $F(\mathrm{Id}_X) \circ i = i$ et $F(\mathrm{Id}_{X'}) \circ i' = i'$, par unicité, $g_2 \circ g_1 = \mathrm{Id}_X$ et $g_1 \circ g_2 = \mathrm{Id}_{X'}$. Il en est de même pour les problèmes universels à gauche.

Exemples. 1. *Coproduits, produits.* Soit $\mathcal{A}$ une catégorie. Considérons le foncteur « diagonal »

$$\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \times \mathcal{A}, \quad X \mapsto (X, X), \quad f \mapsto (f, f)$$

et donnons nous un élément (X, Y) de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Une solution du problème universel à gauche posé par Δ et (X, Y) est appelée produit de X et de Y et notée $X \times Y$. De même le coproduit (où « somme directe »), noté $X \coprod Y$ (ou $X \oplus Y$), est la solution du problème universel à droite posé par Δ et (X, Y).

— 2. *Complété d'un espace topologique.* Soient **EvTop** et $\overline{\textbf{EvTop}}$ les catégories des espaces vectoriels topologiques et des espaces vectoriels topologiques complets respectivement, les morphismes étant les applications continues. Le foncteur que l'on considère est l'inclusion (pleinement fidèle) de $\overline{\textbf{EvTop}}$ dans **EvTop**. On se donne $Y \in$ **EvTop**. Une solution du problème universel à droite posé par l'inclusion et Y est le complété de Y, et l'inclusion continue $Y \hookrightarrow \bar{Y}$. Plus généralement, on peut définir le complété d'un espace topologique admettant une structure uniforme, la structure uniforme étant nécessaire pour définir la notion de filtre de Cauchy (voir [9]).

— 3. *Localisé d'un anneau.* Soit $\mathcal{A}$ la catégorie dont les objets sont les couples (A, S) constitués d'un anneau commutatif unitaire A et d'une partie multiplicative S de A, les morphismes entre deux objets (A, S) et (A', S') étant les morphismes d'anneaux unitaires $\phi : A \to A'$ tels que $\phi(S) \subset S'$. On considère la sous-catégorie pleine $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ dont les objets sont les couples (A, S), avec S contenu dans les inversibles de A. La solution du problème universel posé par un élément (A, S) de $\mathcal{A}$ et l'inclusion de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ est le localisé $S^{-1}A$ de l'anneau A en S et le morphisme naturel $A \to S^{-1}A$. Remarquons que si $0 \in S$, on a $S^{-1}A = \{0\}$.

— 4. *Localisé d'un module.* Soit A un anneau commutatif unitaire, et S une partie multiplicative de A. Considérons la sous-catégorie pleine $\mathcal{M}(A)_S$ de $\mathcal{M}(A)$ dont les objets sont les modules M tels que l'action de tout élément $s \in S$ sur M soit inversible (c'est-à-dire pour tout $s \in S$, pour tout $m \in M$, il existe $t \in A$ tel que $ts \cdot m = st \cdot m = m$). Le problème universel posé par un module M de $\mathcal{M}(A)$ et par le foncteur d'oubli de $\mathcal{M}(A)_S$ dans $\mathcal{M}(A)$ admet comme solution le localisé $S^{-1}M$ et le morphisme naturel $M \to S^{-1}M$ (vu simplement comme A-module, et non comme $S^{-1}A$-module). Là encore, si $0 \in S$, on a $S^{-1}M = \{0\}$.

— 5. *Localisé d'un espace vectoriel relativement à un endomorphisme.* Soient k un corps, $k[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans k, et $\mathcal{M}(k[X])$ la catégorie des $k[X]$-modules à gauche unitaires. Un $k[X]$-module peut-être vu comme la donnée d'un espace vectoriel sur k et d'un endomorphisme de cet espace vectoriel. La catégorie $\mathcal{M}(k[X])$ est donc équivalente à celle dont les objets sont les couples (L, a) où L est un espace vectoriel sur k et $a \in \mathrm{End}_k(L)$, les morphismes entre deux objets (L, a) et (L', a') étant les applications linéaires entre L et L' entrelaçant a et a'. Considérons dans $k[X]$ la partie multiplicative $(X) \setminus \{0\}$ des polynômes non nuls multiples de X. L'exemple précédent affirme l'existence, pour tout $k[X]$-module L, d'un localisé par rapport à la partie $(X) \setminus \{0\}$. Traduisons ceci en termes d'espaces vectoriels munis d'endomorphismes grâce à l'équivalence de catégories décrite ci-dessus : étant donné un couple (L, a) où L est un un espace vectoriel sur k et $a \in \mathrm{End}_k(L)$, il existe un couple $(L_a, \tilde{a})$, L_a où est un espace vectoriel sur k et $\tilde{a} \in \mathrm{End}_k(L_a)$ est inversible, et un morphisme $\iota : (L, a) \to (L_a, \tilde{a})$ tels que pour tout morphisme $f : (L, a) \to (M, b)$, où $b \in \mathrm{End}_k(M)$ est inversible, il existe un unique morphisme $\tilde{f} : (L_a, \tilde{a}) \to (M, b)$ tel que $f = \tilde{f} \circ \iota$. On appelle $(L_a, \tilde{a})$ le localisé de L en a. Si B est une k-algèbre, on peut faire la même construction en remplaçant les k-espaces vectoriels par des B-modules, et les endomorphismes d'espaces vectoriels par des endomorphismes de B-modules.

Nous donnons une description un peu plus explicite du localisé de L en a. Nous énonçons les résultats nécessaires dans le lemme suivant :

Lemme. *Soient L un espace vectoriel sur un corps k et a un endomorphisme de L.*

(i) Si a est injectif, le morphisme canonique $\iota : (L, a) \to (L_a, \tilde{a})$ est aussi injectif.

(ii) Soit $K := \bigcup_n \ker a^n$. Alors K est stable par a. Soit a' l'endomorphisme de $L' = L/K$ induit par a. Alors le localisé $(L'_{a'}, \tilde{a}')$ de L' en a' est isomorphe au localisé de L en a. De plus a' est injectif, ainsi que le morphisme canonique ι' de (L', a') dans $(L'_{a'}, \tilde{a}')$. L'espace $L'_{a'}$ est donc une extension de L', telle que $\tilde{a}'$ coincide avec a' sur L', et $L'_{a'} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\tilde{a}')^{-n}(L')$.

<u>Démonstration</u>. (i) Il suffit de construire un morphisme injectif

$$f : (L, a) \to (M, b),$$

avec b inversible. Comme f se factorise en $f = \tilde{f} \circ \iota$, il est clair que ι doit alors être injectif. Construisons un tel morphisme. Soit R_0 un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, a$ dans L. Construisons par récurrence une suite d'espaces vectoriels R_i et d'isomorphismes $f_i : R_{i+1} \to R_i$. Posons $M = L \oplus (\bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i)$ et $b : M \to M$, $b = a + \sum_{i=0}^{\infty} f_i$. Par construction, b est injectif et surjectif, c'est donc un isomorphisme. Prenons alors pour morphisme f l'inclusion de L dans M.

(ii) Remarquons qu'un élément $l \in L$ tel que $a^n(l) = 0$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, est dans le noyau de ι, puisque $\iota \circ a^n = \tilde{a}^n \circ \iota$ et que $\tilde{a}^n$ est inversible. Ceci entraine que

$$K := \bigcup_n \ker a^n \subset \ker \iota.$$

On peut donc factoriser ι à travers $L' = L/K$. Soit a' le morphisme induit par a sur L', et soit $(L'_{a'}, \tilde{a}')$ le localisé de L' en a'. En utilisant les propriétés universelles satisfaites par $(L'_{a'}, \tilde{a}')$ et $(L_a, \tilde{a})$, on voit que ceux-ci sont isomorphes. D'autre part, a' est injectif. D'après (i), le morphisme canonique ι' de (L', a') dans $(L'_{a'}, \tilde{a}')$ est lui aussi injectif. On identifie alors L' à un sous-espace de $L'_{a'}$ grâce à cette injection ι'.

Posons $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\tilde{a}')^{-n}(L')$. On a $L' \subset M \subset L'_{a'}$ et M est stable par $\tilde{a}'$. Il en découle facilement que $M = L'_{a'}$. Réciproquement, si (M, β) est une extension de L' vérifiant $\beta_{|L'} = a'$, β inversible et $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \beta^{-n}(L')$, (M, β) vérifie la propriété universelle caractérisant le localisé $(L'_{a'}, \tilde{a}')$. □

Corollaire. *Supposons que le morphisme canonique $\iota : L \to L_a$ soit surjectif. Soit $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker a^n$, et $L' = L/K$. Alors $(L_a, \tilde{a})$ est isomorphe à (L', a').*

A.III.2 Foncteurs représentables

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Considérons la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op},\mathbf{Ens}}$ des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans **Ens**. Pour chaque objet X de $\mathcal{C}$, on peut construire un foncteur h_X dans $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op},\mathbf{Ens}}$ en posant pour tout $Y \in \mathcal{C}$,

$$h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X),$$

et pour tout tout morphisme $f : Y \to Z$ dans $\mathcal{C}^{op}$ (c'est-à-dire que f est un morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$),

$$h_X(f) : h_X(Y) \to h_X(Z), \quad \phi \mapsto \phi \circ f.$$

Soit $\phi : X_1 \to X_2$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. On associe à ϕ une transformation naturelle h_ϕ de h_{X_1} dans h_{X_2} en posant, pour tout objet Y de $\mathcal{C}$,

$$h_{\phi,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2), \quad g \mapsto \phi \circ g.$$

Il est clair que $h_\psi h_\phi = h_{\psi\phi}$ lorsque ψ et ϕ se composent dans $\mathcal{C}$. Ceci définit donc un foncteur

$$h : \mathcal{C} \to \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op},\mathbf{Ens}}$$

Définition. Un foncteur F dans $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op},\mathbf{Ens}}$ est dit représentable s'il existe un isomorphisme naturel $\varpi : h_X \to F$, pour un certain X dans $\mathcal{C}$. On dit alors que (X, ϖ) représente le foncteur F.

Théorème (Yoneda). *Le foncteur h réalise une équivalence de catégorie entre $\mathcal{C}$ et la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op},\mathbf{Ens}}$ dont les objets sont les foncteurs représentables. En particulier, h est pleinement fidèle, c'est-à-dire que $\phi \mapsto h_\phi$ réalise une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op},\mathbf{Ens}}}(h_X, h_Y)$$

<u>*Démonstration*</u>. Soient $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op},\mathbf{Ens}}$ et X un objet de $\mathcal{C}$. Montrons que l'ensemble des transformations naturelles de h_X vers F est en bijection avec l'ensemble $F(X)$. Soit $x \in F(X)$. Pour tout $Y \in \mathcal{C}$ posons

$$\theta_{x,Y} : h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \to F(Y), \quad f \mapsto F(f)(x).$$

Alors θ_x est une transformation naturelle de h_X vers F. En effet, pour tout morphisme $g : Y \to Z$ dans $\mathcal{C}^{op}$ (c'est-à-dire $g : Z \to Y$ dans $\mathcal{C}$), le diagramme

$$\begin{tikzcd} h_X(Y) \arrow[r, "\theta_{x,Y}"] \arrow[d, "h_X(g)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\ h_X(Z) \arrow[r, "\theta_{x,Z}"'] & F(Z) \end{tikzcd}$$

commute.

Dans l'autre sens, supposons que θ soit une transformation naturelle de h_X vers F. Posons $\eta(\theta) = \theta_X(\mathrm{Id}_X) \in F(X)$. Montrons que les applications $x \mapsto \theta_x$ et $\theta \mapsto \eta(\theta)$ sont inverses l'une de l'autre. On a d'une part

$$\eta(\theta_x) = \theta_{x,X}(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}(x) = x,$$

et d'autre part pour tout $Y \in \mathcal{C}$ et pour tout $f \in h_X(Y)$

$$\theta_{\eta(\theta),Y}(f) = F(f)(\eta(\theta)) = F(f)(\theta_X(\mathrm{Id}_X)) = \theta_Y(h_X(f)(\mathrm{Id}_X)) = \theta_Y(f).$$

Ceci montre l'assertion.

Appliquons ceci avec $F = h_Y$. On obtient

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = h_Y(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}^{op},\mathbf{Ens}}}(h_X, h_Y), \quad \phi \mapsto \theta_\phi.$$

Or il est immédiat de vérifier que $\theta_\phi = h_\phi$. Ceci montre que h est pleinement fidèle. $\square$

Remarque. Le foncteur F est représenté par (X,ϖ) si et seulement si (X,ϖ) est solution du problème universel (à gauche) posé par h et F. Dans l'autre sens, si l'on considère le problème universel à gauche posé par $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $Y \in \mathcal{B}$, on obtient une solution (X,j) dès lors que le foncteur

$$Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(Z),Y), \quad \mathcal{A}^{op} \to \mathbf{Ens}$$

est représentable par (X,ϖ), et $j = \varpi_X(\mathrm{Id}_X)$.

<u>*Démonstration*</u>. Supposons que F soit représenté par (X,ϖ). Vérifions la propriété universelle voulue : soit $\theta :\ h_Z \to F$ une transformation naturelle. On veut montrer qu'il existe un unique morphisme $\phi :\ Z \to X$ tel que $\varpi \circ h_\phi = \theta$. Comme dans la démonstration du théorème, θ correspond à un élément $\eta(\theta)$ de $F(Z)$, et donc $\varpi^{-1}(\eta(\theta))$ est un élément de $h_X(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)$. Prenons $\phi = \varpi_Z^{-1}(\eta(\theta))$. On a alors pour tout $Y \in \mathcal{C}$, et tout $f \in h_Z(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$

$$\begin{aligned}(\varpi \circ h_{\varpi_Z^{-1}(\eta(\theta))})_Y(f) &= \varpi_Y(\varpi_Z^{-1}(\eta(\theta)) \circ f)\\ =&\varpi_Y(\varpi_Z^{-1}(\theta_Z(\mathrm{Id}_Z)) \circ f) = \varpi_Y(\varpi_Y^{-1}(\theta_Y(f))) = \theta_Y(f).\end{aligned}$$

L'unicité est immédiate, car ϖ étant un isomorphisme, θ détermine h_ϕ, et donc ϕ d'après le théorème.

Réciproquement, si (X, ϖ) est solution du problème universel (à gauche) posé par h et F, il nous faut vérifier que ϖ est un isomorphisme, c'est-à-dire que pour tout $Y \in \mathcal{C}$,

$$\varpi_Y : h_X(Y) \to F(Y)$$

est un isomorphisme. Construisons son inverse : soit $y \in F(Y)$. Il lui correspond, par le théorème de Yoneda une transformation naturelle $\theta_y : h_Y \to F$, que par la propriété universelle, nous pouvons factoriser par ϖ : $\theta_y = \varpi \circ h_\phi$, pour un certain $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) = h_X(Y)$. Il est maintenant facile de vérifier que l'application $y \mapsto \phi$ ainsi définie est l'inverse de ϖ_Y.

Nous laissons la démonstration de la seconde assertion au lecteur. □

Corollaire. *Si F est un foncteur représentable, l'objet représentant F est déterminé à un unique isomorphisme près.*

A.III.3 Un principe d'isomorphisme

Nous reformulons mainteant le lemme de Yoneda sous une forme utile pour montrer que deux objets d'une catégorie sont isomorphes, ou que deux foncteurs sont naturellement isomorphes.

Proposition. *Soient X, Y deux objets d'une catégorie $\mathcal{M}$ tels que pour tout objet Z de $\mathcal{M}$, on ait un isomorphisme, naturel en Z :*

(A.III.3.1) $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y).$$

Alors $X \simeq Y$. Si $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ sont deux foncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{M}$ tels que l'on ait un isomorphisme naturel en X et Z :

(A.III.3.2) $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, F(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, G(X)).$$

Alors les foncteurs F et G sont naturellement isomorphes.

A.IV Limites et colimites

A.IV.1 Limites

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{I}$ deux catégories, la seconde, pour des raisons qui ne tarderont pas à apparaître étant dite « catégorie d'indices », ou encore « schéma diagrammatique ». Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, définissons le foncteur constant

$$\Delta_X : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$$

où $\Delta_X(i) = X$ pour tout objet i de $\mathcal{I}$ et $\Delta_X(i \to j) = \mathrm{Id}_X$ pour tout morphisme $i \to j$ dans $\mathcal{I}$. Il est clair que les foncteurs constants de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{C}$ correspondent bijectivement aux objets de $\mathcal{C}$, et que les transformations naturelles entre deux foncteurs constants Δ_X et Δ_Y correspondent bijectivement aux morphismes de X dans Y. En effet, si $X \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, on définit la transformation naturelle

$$\Delta_f : \Delta_X \to \Delta_Y$$

en posant

$$\Delta_f(i) = f$$

pour tout objet i de $\mathcal{I}$. On obtient ainsi un foncteur

$$\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{F}_{\mathcal{I},\mathcal{C}}.$$

Soit $D : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un foncteur (un tel foncteur est appelé un diagramme dans $\mathcal{C}$, de schéma $\mathcal{I}$). Une *limite* de D (si elle existe) est la donnée d'un foncteur constant $\Delta_X : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ (que l'on peut voir simplement comme la donnée de l'objet X) et d'une transformation naturelle η de Δ_X vers D, telle que pour tout foncteur constant $\Delta_Y : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ et toute transformation naturelle de Δ_Y vers D, il existe une unique transformation naturelle $\Delta_Y \to \Delta_X$ (c'est à dire un unique morphisme $X \to Y$) telle que

$$\Delta_Y \to \Delta_X \xrightarrow{\eta} D = \Delta_Y \to D.$$

En quelque sorte, la transformation naturelle $\Delta_X \to D$ est la « meilleure approximation » de D par un foncteur constant.

Remarque. On voit que (Δ_X, η) est solution du problème universel à gauche posé par Δ et D. Il y a donc unicité de la limite à unique isomorphisme près, et on la note $\varprojlim D$. D'autre part, en utilisant la remarque A.III.2 liant problème universel et foncteur représentable, on obtient pour tout $Y \in \mathcal{A}$ un isomorphisme naturel

(A.IV.1.1) $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, \varprojlim D) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{I},\mathcal{A}}}(\Delta_Y, D).$$

Plus concrètement, une limite de D est donc la donnée d'un objet X de $\mathcal{C}$, et pour tout objet i de $\mathcal{I}$ d'un morphisme de X dans $D(i)$, telle que pour tout morphisme $i \to j$ dans $\mathcal{I}$,

(A.IV.1.2) $$[X \to D(i) \to D(j)] = [X \to D(j)].$$

Le fait que $\Delta_X \to D$ soit la meilleure approximation de D par un foncteur constant se traduit par : s'il existe un objet Y de $\mathcal{C}$ et pour tout objet i de $\mathcal{I}$ des morphismes $Y \to D(i)$ vérifiant les relations de compatibilité analogues à (A.IV.1.2), alors il existe un unique morphisme de $Y \to X$ tel que pour tout $i \in \mathcal{I}$

$$Y \to X \to D(i) = Y \to D(i).$$

Exemples. 1. *Objets finaux.* Un objet final dans une catégorie $\mathcal{C}$ est une limite. En effet, prenons pour $\mathcal{I}$ la catégorie vide (pas d'objets, pas de morphismes). Admettons qu'un foncteur constant de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{C}$ soit la donnée d'un objet T de $\mathcal{C}$. Les conditions de compatibilité (A.IV.1.2) sont vides, et donc d'après la propriété satisfaite par T, pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $X \to T$.

— 2. *Noyaux.* Soit $X \to Y$ un morphisme dans une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un objet nul. Soit $\mathcal{I}$ la catégorie ayant deux objets i et j et deux morphismes en dehors de Id_i et Id_j, à savoir $i \xrightarrow{1} j$ et et $i \xrightarrow{0} j$. Soit D le foncteur tel que $D(i) = X$, $D(j) = Y$, $D(1) = f$ et $D(0) = 0$. Alors la limite du foncteur D est le noyau de $X \to Y$.

— 3. *Produits.* Soient X et Y deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Considérons la catégorie discrète $\mathcal{I}$ formée de deux objets i et j (discrète veut dire que les seuls morphismes sont les identités des objets). Soit $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ le foncteur défini par $F(i) = X$ et $F(j) = Y$. Alors la limite de F est le produit de X et de Y, que l'on note $X \times Y$.

Plus généralement, pour toute famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$, on forme la catégorie discrète $\mathcal{I}$ dont les objets sont les $i \in I$, et on définit un foncteur $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ par $F(i) = X_i$. La limite de F est alors le produit des X_i, noté $\prod_{i \in I} X_i$.

— 4. *Produit fibré.* Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et dans $\mathcal{C}$ considérons les morphismes

(A.IV.1.3)
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{I}$ la catégorie formées de trois objets i, j, p, dont les morphismes, outre les identités des objets, sont $i \to p$ et $j \to p$, et soit D le foncteur un $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{C}$ tel que $D(i) = X$, $D(j) = Y$, $D(p) = Z$, $D(i \to p) = f$ et $D(j \to p) = g$. La limite de D est le produit fibré, noté $X \times_Z Y$ du diagramme (A.IV.1.3).

— 5. *Limites projectives ou inverses.* Soit $\mathcal{I}$ un *ensemble ordonné filtrant croissant* (c'est-à-dire que pour couple (i, j) d'éléments de $\mathcal{I}$, il existe un élément k de $\mathcal{I}$ tel que $i \leq k$, $j \leq k$). On considère $\mathcal{I}$ comme une catégorie, où les morphismes, outre les identités des objets, sont donnés par les couples (i, j) avec $i \leq j$ le morphisme correspondant étant $j \to i$. Soit $D : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un foncteur, et posons, pour tout i, j dans $\mathcal{I}$, $A_i = D(i)$, $D(j \to i) = f_{ji}$. On dit que $((A_i)_{i \in I}, (f_{ji})_{i \leq j})$ est un *système projectif.* Alors la limite projective (ou limite inverse) du système des (A_i, f_{ij}) est la limite de D.

— 6. *Intersection de sous-objets.* Nous laissons au lecteur le soin d'interpréter une intersection de sous-objets d'un objet d'une catégorie comme limite dans une catégorie appropriée.

A.IV.2 Colimites

Nous définissons de manière duale la notion de colimite d'un foncteur $D : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ comme dans le paragraphe précédent : c'est la donnée d'un foncteur constant $\Delta_X : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ et d'une transformation naturelle de D vers Δ_X, telle que pour tout foncteur constant $\Delta_Y : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ et toute transformation naturelle de D vers Δ_Y, il existe une unique transformation naturelle $\Delta_Y \to \Delta_X$ (c'est à dire un unique morphisme $Y \to X$) telle que

$$D \to \Delta_X \to \Delta_Y = D \to \Delta_Y.$$

Une colimite est solution du problème universel à droite posé par Δ et D.

Comme exemples de colimites, nous avons les notions duales de celles des exemples du paragraphes précédent. On obtient ainsi respectivement les objets initiaux, les conoyaux, les coproduits, les sommes amalgamées, les limites inductives (ou directes), les unions de sous-objets. La notation utilisée pour les colimites est $\varinjlim$.

Explicitons un peu l'exemple des limites inductives. Soit I un ensemble ordonné filtrant croissant. On considère $\mathcal{I}$ comme une catégorie, où les morphismes, outre les identités des objets, sont donnés par les couples (i, j) avec $i \leq j$ le morphisme correspondant étant $i \to j$. Soit $D : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un foncteur, et posons, pour tout i, j dans $\mathcal{I}$, $A_i = D(i)$, $D(i \to j) = f_{ij}$. On dit que $((A_i)_{i\in I},(f_{ij})_{i\leq j})$ est un *système inductif* . Alors la limite inductive (ou limite directe) du système des (A_i, f_{ij}) est la colimite de D.

Exemple. Soit $\mathcal{A}$ la catégorie des groupe abéliens. Dans cette catégorie, toute famille $(G_i)_{i\in I}$ admet un produit, donné par le produit cartésien d'ensembles $\prod_{i\in I} G_i$, muni de la loi de groupe produit de celle des G_i, et des projections canoniques $p_i : \prod_{i\in I} G_i \to G$. Toute famille $(G_i)_{i\in I}$ admet aussi un coproduit, appelé *somme directe* des G_i et notée $\bigoplus_{i\in I} G_i$. Si I est fini, $\bigoplus_{i\in I} G_i$ est le produit $\prod_{i\in I} G_i$ muni des injections canoniques $i_i : G_i \to \prod_{i\in I} G_i$. Si I est infini, $\bigoplus_{i\in I} G_i$ est le sous-groupe formé des éléments de $\prod_{i\in I} G_i$ n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées non nulles, muni de ces mêmes injections.

Soit maintenant $((G_i)_{i\in I},(g_{ij})_{i\leq j})$ un système inductif de groupes abéliens (les lois de groupes sont notées additivement). Formons le coproduit des G_i dans la catégorie des ensembles, c'est-à-dire leur union disjointe. Munissons celle-ci de la relation d'équivalence suivante : $g_i \in G_i$ est équivalent à $g_j \in G_j$ s'il existe $k \geq i, j$ tel que $f_{ik}(g_i) = f_{jk}(g_j)$ et appelons $\underline{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Alors $\underline{G}$ est naturellement muni d'une structure de groupe, l'on a des projections canoniques $f_i \ : G_i \to \underline{G}$.

D'autre part, $\underline{G}$ vérifie la propriété universelle de la colimite : pour tout système de morphismes $\phi_i : G_i \to Y$ compatible avec les f_{ij}, les ϕ se factorisent par les f_i. On a donc $\varinjlim_{i\in I} G_i = \underline{G}$.

On en déduit immédiatement le fait suivant, qui est fondamental en théorie des faisceaux : si $g_i \in G_i$ est tel que $f_i(g_i) = 0$, alors il existe $j \geq i$ tel que $f_{ij}(g_i) = 0$.

A.V Foncteurs adjoints

Il y a deux manières (équivalentes) de voir la notion de foncteurs adjoints. Selon ce que l'on veut en faire, on utilise un point de vue ou l'autre.

A.V.1 Définition par les foncteurs Hom

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories, et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ deux foncteurs. Définissons les foncteurs :

$$R_F : \mathcal{A} \times \mathcal{B}^{op} \to \mathbf{Ens}, \quad (X, Y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, F(X)),$$

et

$$L_G : \mathcal{A} \times \mathcal{B}^{op} \to \mathbf{Ens}, \quad (X, Y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G(Y), X).$$

Si $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y', Y)$ le morphisme $R_F(f, g)$ est donné par :

$$R_F(f, g) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, F(X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y', F(X')), \quad \psi \mapsto F(f) \circ \psi \circ g,$$

et le morphisme $L_G(f, g)$ par :

$$L_G(f, g) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, F(X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y', F(X')), \quad \psi \mapsto f \circ \psi \circ G(g).$$

Définition. On dit que F est l'adjoint à droite de G (ou que G est l'adjoint à gauche de F) si les foncteurs R_F et L_G sont naturellement isomorphes. Notons θ cet isomorphisme naturel. On a alors,

$$\theta_{Y,X} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, F(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G(Y), X), \quad (X \in \mathcal{A}), \ (Y \in \mathcal{B}).$$

Le théorème suivant relie les notions de foncteurs adjoints et de foncteurs représentables.

Théorème. *Soit $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ un foncteur. Alors G admet un adjoint à droite si et seulement si pour tout objet X de $\mathcal{A}$, le foncteur contravariant*

$$Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G(Y), X)$$

de $\mathcal{B}$ dans **Ens** *est représentable.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire, puisque si G admet F comme adjoint à droite, $F(X)$, le foncteur $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G(Y), X)$ est représenté par $(F(X), \theta)$. Montrons qu'elle est suffisante. Rappelons que d'après le lemme de Yoneda, le foncteur

$$h : \mathcal{B} \to \mathcal{F}_{\mathcal{B}^{op}, \mathbf{Ens}}$$

est pleinement fidèle. Il réalise donc une équivalence de catégorie sur la sous-catégorie pleine des foncteurs représentables de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}^{op}, \mathbf{Ens}}$. Soit Λ un quasi-inverse de h et soit $H : \mathcal{A} \to \mathcal{F}_{\mathcal{B}^{op}, \mathbf{Ens}}$ le foncteur défini par $H(X)(Y) = \mathrm{Hom}(G(Y), X)$, qui par hypothèse est à valeurs dans la sous-catégorie pleine des foncteurs représentables de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}^{op}, \mathbf{Ens}}$. Alors $F = \Lambda \circ H$ est l'adjoint cherché. □

Corollaire. *Il y a unicité à isomorphisme près de l'adjoint à droite d'un foncteur $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Il en est de même pour les adjoints à gauche.*

A.V.2 Adjonctions

Soient F et G deux foncteurs adjoints comme ci-dessus. Pour tout objet $Y \in \mathcal{B}$, on dispose de $\eta_Y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, FG(Y))$, le morphisme correspondant à $\mathrm{Id}_{G(Y)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G(Y), G(Y))$. De même, pour tout X dans $\mathcal{A}$, on dispose d'un morphisme $\epsilon_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GF(X), X)$ correspondant à $\mathrm{Id}_{F(Y)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(Y), F(Y))$. On obtient ainsi des transformations naturelles η et ϵ respectivement de $\mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$ vers FG et de GF vers $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$. On appelle η et ϵ les *morphismes d'adjonction*, le premier étant parfois appelé *unité* et le second *counité*. Ces morphismes vérifient de plus que les composées

$$F(X) \stackrel{\eta_{F(X)}}{\longrightarrow} FGF(X) \stackrel{F(\epsilon_X)}{\longrightarrow} F(X) \tag{A.V.2.1}$$

$$G(Y) \stackrel{G(\eta_Y)}{\longrightarrow} GFG(Y) \stackrel{\epsilon_{G(Y)}}{\longrightarrow} G(Y) \tag{A.V.2.2}$$

sont égales aux identités respectives de $F(X)$ et $G(Y)$.

Réciproquement, supposons que η et ϵ soient des transformations naturelles respectivement de $\mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$ vers FG et de GF vers $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$. Alors on obtient pour tout $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} \theta_{Y,X} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G(Y), X) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, F(X)) \\ f &\mapsto [Y \stackrel{\eta_Y}{\to} FG(Y) \stackrel{F(f)}{\to} F(X)] \end{aligned}$$

et dans le sens opposé

$$\begin{aligned}\sigma_{Y,X} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, F(X)) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G(Y), X)\\ g &\mapsto [G(Y) \stackrel{G(g)}{\to} GF(X) \stackrel{\epsilon_X}{\to} X.]\end{aligned}$$

On déduit facilement de la naturalité de η et ϵ que θ et σ sont des tranformations naturelles respectivement de L_G vers R_F et de R_F vers L_G. D'autre part, si η et ϵ vérifient (A.V.2.1) et (A.V.2.2), alors θ et σ sont inverses l'un de l'autre.

On appelle *adjonction* un quadruplet (F, G, ϵ, η) où

- $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ sont deux foncteurs.

- $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \to FG$ et de $\epsilon : GF \to \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ sont deux transformations naturelles vérifiant (A.V.2.1) et (A.V.2.2).

Le résultat suivant sert très souvent.

Théorème. *Soient $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ deux foncteurs, G étant l'adjoint à gauche de F. Alors F préserve les limites et G les colimites.*

Démonstration. Montrons la première asertion, la seconde s'établissant de la même manière. Soit $D : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ comme en A.IV.1, et supposons que $\varprojlim D$ existe. On veut montrer que $\varprojlim(F \circ D)$ existe et est égale à $F(\varprojlim D)$. On utilise le principe A.III.3. Pour tout $Y \in \mathcal{B}$, on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, F(\varprojlim D)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G(Y), \varprojlim D) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{I},\mathcal{A}}}(\Delta_{G(Y)}, D)\\ \simeq &\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{I},\mathcal{B}}}(\Delta_Y, F(D)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, \varprojlim F \circ D),\end{aligned}$$

On a utilisé successivement l'adjonction de F et G, l'isomorphisme naturel (A.IV.1.1), le fait que toute transformation naturelle $\theta : \Delta_{G(Y)} \to D$ est la donnée, pour tout $i \in \mathcal{I}$, d'un morphisme $G(Y) \to D(i)$ (vérifiant certaines conditions de compatibilité), et que par adjonction de F et G, ceci est équivalent à la donnée de morphismes $Y \to F(D(i))$, définissant une transformation naturelle de Δ_Y dans $F \circ D$. Enfin, on utilise la propriété universelle de la limite. Ceci montre que $F(\varprojlim D)$ est bien la limite de $F \circ D$. □

Exemple. Pour illustrer la notion de foncteur adjoint, nous choisissons un exemple simple qui est un cas particulier des constructions de la section I.2. Soit A une $\mathbb{C}$ algèbre unitaire et soit B une sous-algèbre de A. Tout A-module unitaire à gauche M est aussi un B-module, et nous obtenons ainsi un foncteur d'oubli :

$$\mathcal{F} : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B).$$

Un adjoint à gauche du foncteur d'oubli, le foncteur de changement de base, est donné par

$$P_B^A : N \mapsto A \otimes_B N.$$

Pour montrer cette assertion, nous devons exhiber un isomorphisme naturel :

$$\theta_{X,Y} : \mathrm{Hom}_A(A \otimes_B X, Y) \to \mathrm{Hom}_B(X, \mathcal{F}(Y)).$$

Si $f : A \otimes_B X \to Y$ est un A-morphisme, posons

$$\theta_{X,Y}(f)(x) = f(1 \otimes x), \quad (x \in X).$$

Ceci définit bien un B-morphisme car :

$$\begin{aligned}\theta_{X,Y}(f)(b\cdot x) = f(1\otimes b\cdot x) = f(b\otimes x) = f(b\cdot(1\otimes x))\\ = b\cdot f(1\otimes x) = b\cdot(\theta_{X,Y}(f)(x))\end{aligned}$$

L'inverse de θ est donné par σ :

$$\sigma_{X,Y} : \operatorname{Hom}_B(X,\mathcal{F}(Y)) \to \operatorname{Hom}_A(A\otimes_B X, Y)$$

défini pour tout $g \in \operatorname{Hom}_B(X,\mathcal{F}(Y))$ par

$$\sigma_{X,Y}(g)(a\otimes x) = a\cdot g(x).$$

Ceci est bien un A-morphisme car :

$$\sigma_{X,Y}(g)(a'\cdot(a\otimes x)) = \sigma_{X,Y}(g)(a'a\otimes x) = a'a\cdot g(x) = a'\cdot(\sigma_{X,Y}(g)(a\otimes x)).$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la naturalité de θ et σ.

Vérifions que θ et σ sont inverses l'un de l'autre :

$$\sigma_{X,Y}(\theta_{X,Y}(f))(a\otimes x) = a\cdot(\theta_{X,Y}(f)(x)) = a\cdot(f(1\otimes x)) = f(a\otimes x).$$

et

$$\theta_{X,Y}(\sigma_{X,Y}(g))(x) = (\sigma_{X,Y}(g))(1\otimes x) = g(x).$$

Nous avons donc démontré l'adjonction des foncteurs d'oubli et de changement de base en utilisant la première définition des foncteurs adjoints. Lorsqu'on regarde de plus près cette démonstration, on s'aperçoit que le second point de vue est sous-jacent. En effet, le point clef est l'existence d'un B-morphisme

$$\eta_X : x \mapsto 1\otimes x, \quad X \to A\otimes_B X$$

et d'un A-morphisme

$$\epsilon_Y : a\otimes y \mapsto a\cdot y, \quad A\otimes_B Y \to Y$$

Ce sont des morphismes d'adjonction et le fait que θ et σ soient inverses l'un de l'autre provient de ce que η et ϵ vérifient (A.V.2.1) et (A.V.2.2), c'est-à-dire dans ce cas :

$$x \mapsto 1\otimes x \mapsto 1\cdot x = x$$

et

$$a\otimes x \mapsto a\otimes 1\otimes x \mapsto a\cdot(1\otimes x) = a\otimes x.$$

A.VI Catégories abéliennes

Dans cette section, nous rappelons les résultats fondamentaux concernant les catégories abéliennes. Nos références en la matière seront les livres [26] et [36], auxquels le lecteur est invité à se reporter s'il souhaite plus de détails.

A.VI.1 Axiomatique des catégories abéliennes

La notion de catégorie abélienne axiomatise les propriétés fondamentales des catégories suivantes :

- la catégorie $A - \mathbf{mod}$ des modules à gauche sur un anneau A,

Toute sous-catégorie pleine d'une catégorie $A - \mathbf{mod}$ stable par passage aux sous-modules et aux quotients est encore une catégorie abélienne, par exemple :

- la catégorie $\mathcal{M}(A)$ des modules à gauche unitaires sur un anneau unitaire A,

- la catégorie des faisceaux (ou préfaisceaux) de groupes abéliens sur un espace topologique.

Donnons maintenant les axiomes définissant les catégories abéliennes. Ceux donnés ici ne sont pas les plus économiques. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie. On dit que $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne si elle vérifie les axiomes suivants.

AB0. Il existe un objet nul dans $\mathcal{A}$, noté 0.

AB1. La catégorie $\mathcal{A}$ admet des produits finis.
AB1*. La catégorie $\mathcal{A}$ admet des coproduits finis.

AB2. Tout morphisme dans $\mathcal{A}$ admet un noyau.
AB2*. Tout morphisme dans $\mathcal{A}$ admet un conoyau.

AB3. Tout monomorphisme dans $\mathcal{A}$ est un noyau.
AB3*. Tout épimorphisme dans $\mathcal{A}$ est un conoyau.

L'usage dans les catégories abéliennes est d'uitiliser le terminologie « somme directe »et la notation $\bigoplus$ plutôt que « coproduit » et $\coprod$.

A.VI.2 Propriétés des catégories abéliennes

On tire de nombreuses conséquences de ces axiomes. En voici quelques unes parmi les plus importantes.

— 1. Un morphisme dans $\mathcal{A}$ est un isomorphisme si et seulement si c'est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.

— 2. Soit A un objet de $\mathcal{A}$, et soient S_A l'ensemble de ses sous-objets, Q_A l'ensemble de ses quotients. Alors les applications

$$\text{coker} : S_A \to Q_A, \quad \text{ker} : Q_A \to S_A$$

qui, respectivement, associent à tout sous-objet $B \to A$ son conoyau, et à tout quotient $A \to C$ son noyau, sont inverses l'une de l'autre. De plus, elles inversent l'ordre sur S_A et Q_A. On note A/B le quotient $\text{coker}(B \to A)$ pour tout sous-objet $B \to A$ de A.

— 3. Deux sous-objets quelconques d'un objet A admettent une intersection et une union. Comme pour les coproduits, il est souvent plus parlant de changer la terminologie pour les unions dans les catégories abéliennes en parlant plutôt de sommes. On utilise alors la notation $+$ ou $\sum$.

On définit *l'image* d'un morphisme $f : A \to B$ dans $\mathcal{A}$ comme le plus petit sous-objet $C \to B$ de B tel que f se factorise par $C \to B$. Dualement, on définit la *coimage* de f comme le plus petit quotient $A \to D$ de A qui factorise f.

— 4. Tout morphisme $f : A \to B$ admet une image (resp. une coimage) qui s'identifie à $\ker(\mathrm{coker} f)$ (resp. à $\mathrm{coker}(\ker f)$).

— 5. (Factorisation des morphismes) Tout morphisme $A \to B$ dans $\mathcal{A}$ se factorise de manière unique à isomorphisme près en $A \to I \to B$, où $A \to I$ est un épimorphisme, et $I \to B$ est un monomorphisme. De plus $A \to I$ est la coimage de $A \to B$, et $I \to B$ en est l'image.

L'existence de noyau et d'image pour tous les morphismes dans $\mathcal{A}$ permet de définir la notion de *suite exacte* de morphismes dans $\mathcal{A}$. Nous supposons le lecteur suffisamment familier avec cette notion pour ne pas avoir à la redéfinir.

— 6. Pour tout couple (A, B) d'objets de $\mathcal{A}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ est muni d'une structure de groupe abélien, dont l'élément neutre est l'élément distingué 0 dont l'existence est assuré par **AB0**. Les opérations de composition des morphismes sont distributives par rapport à l'addition sur les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$.

— 7. Pour tout couple (A, B) d'objets de $\mathcal{A}$, le produit $A \times B$ et la somme $A \oplus B$ dont l'existence est assurée par les axiomes **AB1**, **AB1*** sont naturellement isomorphes.

— 8. *Lemme des* 3×3. Considérons le diagramme suivant dans $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & C \arrow[d] & C' \arrow[d] & C'' \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où les colonnes et les lignes sont exactes. Alors on peut compléter ce diagramme par un monomorphisme $C \to C'$ et un épimorphisme $C' \to C''$ de sorte que le diagramme enrichi soit toujours commutatif et que la suite $0 \to C \to C' \to C'' \to$ soit exacte.

— 9. *Isomorphismes de Noether.* Du lemme des 3×3, on peut facilement déduire les deux théorèmes d'isomorphismes de Noether :

(i) étant donnés un objet C dans $\mathcal{A}$ et deux sous-objets A et B de C avec $A \subseteq B$, alors B/A est un sous-objet de C/A et $(C/A)/(B/A)$ est isomorphe à C/B,

(ii) étant donnés un objet C dans $\mathcal{A}$ et deux sous-objets A et B de C, on a

$$B/(A \cap B) \simeq (A + B)/A.$$

En supposant de plus que $A \cap B = 0$, et $A + B = C$, (ii) donne $C \simeq A \oplus B$.

L'existence de limites est bien sûr une propriété importante des catégories. Ceci nous conduit à considérer les axiomes suivants :

AB4. Toute famille d'objets admet un produit dans $\mathcal{A}$.

AB4*. Toute famille d'objets admet une somme directe dans $\mathcal{A}$.

Une catégorie abélienne vérifiant **AB4**. est dite complète, tandis qu'une catégorie abélienne vérifiant **AB4***. est dite cocomplète.

AB5. $\mathcal{A}$ est cocomplète, et pour tout système filtrant croissant M_i de sous-objets de M, pour tout sous-objet N de M, on a

$$N \bigcap \left(\sum_i M_i \right) = \sum_i (N \bigcap M_i).$$

Remarquons que les sommes existent grâce à **AB4***.

Une catégorie de Grothendieck est une catégorie abélienne cocomplète vérifiant **AB5**.

Continuons notre liste de propriétés des catégories abéliennes.

— 10. Supposons que $\mathcal{A}$ soit complète (resp. cocomplète). Alors tout diagramme $D : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$, admet une limite (resp. colimite). En particulier, $\mathcal{A}$ admet des limites inverses (resp. directes).

A.VI.3 Suites de Jordan-Hölder et facteurs de composition

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Un objet non nul M de $\mathcal{A}$ est dit *simple* si tout sous-objet de M est soit l'objet nul 0, soit M. On note $\mathbf{Irr}(\mathcal{A})$ l'ensemble des classes d'équivalence d'objets simples de $\mathcal{A}$. Supposons que l'on ait une suite croissante de sous-objets de M, tous différents

$$0 = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_n = M.$$

Une telle suite est appelée *suite de composition*, ou *suite de Jordan-Hölder* si les quotients successifs B_i/B_{i-1}, $i = 0, \ldots n$ sont simples. L'entier n est appelé la *longueur* de cette suite de composition et les quotients B_i/B_{i-1} sont appelés *facteurs de composition* de M. Le *théorème de Jordan-Hölder* affirme alors que si l'objet M admet une suite de composition, alors toutes les suites de composition sont de même longueur et leurs facteurs sont isomorphes, à l'ordre près. Un objet admettant une suite de composition est dit de longueur finie, sa longueur étant celle d'une de ses suites de composition. Le théorème de Jordan-Hölder se démontre à partir des isomorphismes de Noether A.VI.2, 9.

Pour obtenir les résultats sur les suites et les facteurs de composition d'un objet généralisant ceux de la catégorie des A-modules, il nous faut faire quelques hypothèses supplémentaires sur $\mathcal{A}$. On suppose donc que $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck. Elle vérifie donc **AB4*** et **AB5**. On suppose de plus :

AB6 : tout objet de $\mathcal{A}$ est une somme de sous-objets de type fini.

Exemples. Remarquons que les catégories $A - \mathbf{mod}$ (respectivement $\mathcal{M}(A)$), A un anneau (respectivement A un anneau unitaire) vérifient tous ces axiomes.

Le premier résultat que nous allons établir utilise le lemme de Zorn. Le lemme de Zorn peut être considéré comme un axiome de la théorie des ensembles. Il est équivalent à l'axiome du choix. On dit qu'un ensemble ordonné S est inductivement ordonné si toute partie non vide et totalement ordonnée de S admet un majorant. Nous renvoyons le lecteur à [35] ou [24] pour les définitions de ces termes. Le lemme de Zorn affirme qu'un ensemble non vide inductivement ordonné admet un élément maximal.

Proposition. *(i) Soit M un objet non nul de $\mathcal{A}$ de type fini. Alors M admet un quotient simple.*

(ii) Si M n'est pas de type fini, il existe des sous-objets $N_1 \subset N_2$ de M tels que le quotient N_2/N_1 soit simple.

Démonstration. Il est clair que (ii) découle de (i) en prenant pour N_2 un sous-objet de type fini dans M, dont l'existence est assuré par **AB6**. Pour démontrer (i), introduisons l'ensemble (ordonné) S des sous-objets propres de M. Pour pouvoir appliquer le lemme de Zorn, montrons que S est stable par union d'une suite croissante, c'est-à-dire que si

$$N_0 \subset N_1 \ldots \subset N_p \subset \ldots$$

est une suite croissante de sous-objets propres, alors $N := \bigcup_i N_i$ est dans S. Il s'agit de montrer que N est un sous-module propre. Supposons le contraire, c'est-à-dire $M = \bigcup_i N_i$. Comme M est de type fini, il existe un certain indice i_0 tel que $M = N_{i_0}$, ce qui est absurde puisque N_{i_0} est un sous-module propre. L'assertion est donc démontrée. D'après le lemme de Zorn, S admet un élément maximal M_0, et par maximalité, le quotient M/M_0 est simple. □

Notons $\mathbf{JH}(M)$ l'ensemble des sous-quotients simples d'un objet M. On a alors :

Lemme. *(i) Si $M' \subset M$ est un sous-objet, alors*

$$\mathbf{JH}(M) = \mathbf{JH}(M') \cup \mathbf{JH}(M/M').$$

(ii) $\mathbf{JH}(M) = \emptyset$ si et seulement si $M = 0$.

(iii) Si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-objets de M,

$$\mathbf{JH}(\sum_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} \mathbf{JH}(M_i).$$

Démonstration. (i) est clair. (ii) découle du lemme précédent. Pour (iii), l'assertion découle de (i) par récurrence si I est fini. En remplaçant les M_i par une famille consistant en des sommes de M_i, on se ramène au cas où $(M_i)_{i\in I}$ est un système filtrant croissant. Soit $Q = M'/M''$ un sous-quotient simple de $\sum_{i\in I} M_i$. Supposons que pour tout $i \in I$, $Q \notin \mathbf{JH}(M_i)$. Alors pour tout $i \in I$,

$$M' \cap (M'' + M_i) = M''.$$

Donc, en utilisant **AB5**, on obtient

$$M' = M' \bigcap (\sum_i (M'' + M_i)) = \sum_i M' \bigcap (M'' + M_i) = M'',$$

ce qui contredit le fait que Q est simple. □

A.VII Semi-simplicité

Lemme. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne vérifiant les hypothèses de la section précédente, et soit E un objet de $\mathcal{A}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) E est isomorphe à une somme directe d'objets simples (ie. E est complètement réductible).

(ii) E est la somme de ses sous-objets simples.

(iii) Pour tout sous-objet E' de E, il existe un sous-objet E'' de E tel que $E = E' \oplus E''$.

Démonstration. Il est clair que (i) implique (ii). Supposons (ii) et montrons (iii). Soit E' un sous-objet de E. On peut, d'après l'hypothèse, écrire E comme une somme (mais pas directe) de sous-objets,

$$E = \sum_{i \in I} E_i$$

pour un certain ensemble d'indices I. Prenons un sous-objet de E de la forme $\sum_{j \in J} E_j$, $J \subset I$, maximal pour l'inclusion et tel que la somme $F = E' + \sum_{j \in J} E_j$ soit directe (l'existence d'un tel J est assurée par le lemme de Zorn). Alors cette somme est égale à E. En effet, il suffit de voir que chaque E_i, $i \in I$, est dans $E' \oplus (\bigoplus_{j \in J} E_j)$. Comme l'intersection de F avec E_i est un sous-objet de E_i, cette intersection est E_i ou 0 puisque E_i est simple. Si cette intersection était nulle, on pourrait adjoindre i à J ce qui contredit la maximalité de J. Donc $E_i \subset F$. Montrons maintenant que (iii) implique (i). Commençons par voir que E admet alors un sous-objet simple. Soit E' un sous-objet de E de type fini, dont l'existence est assurée par l'hypothèse **AB6**. Considérons l'ensemble des sous-objets propres de F, ordonné par l'inclusion. Comme dans la démonstration de la proposition A.VI.3, on voit que cet ensemble est inductivement ordonné, et donc qu'il admet d'après le lemme de Zorn un élément maximal M. Cet M est un sous-objet de E. D'après l'hypothèse, on peut écrire $E = M \oplus F$, pour un certain sous-objet F. On a alors

$$E' = M \oplus (E' \cap F).$$

Comme M est maximal dans E', $E' \cap F$ est simple. Ceci montre que E admet un sous-objet simple. Soit maintenant E_0 une somme directe maximale de sous-objets simples de E. Si $E \neq E_0$, on écrit $E = E_0 \oplus F$. On applique maintenant la remarque précédente à F : il existe un sous-objet simple de F. Ceci contredit la définition de E_0. $\square$

Corollaire. *Un sous-module d'un module semi-simple est semi-simple.*

Démonstration. Supposons que E soit un sous-module de $\mathcal{E}$ avec $\mathcal{E}$ semi-simple, et soit E' un sous-module de E. C'est aussi un sous-module de $\mathcal{E}$, et donc il existe un sous-module $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E} = E' \oplus \mathcal{F}$. Posons $F = \mathcal{F} \cap E$. On a alors $E = E' \oplus F$. $\square$

A.VIII Foncteurs remarquables

Par foncteurs remarquables, nous entendons des foncteurs préservant des propriétés des objets ou des morphismes auxquels ils s'appliquent. Par exemple, nous avons définis plus haut les foncteurs fidèles et les foncteurs pleins. Donnons d'autres exemples.

A.VIII.1 Foncteurs exacts

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur entre deux catégories abéliennes. On dit que F est *additif* s'il respecte la structure de groupe des Hom, c'est-à-dire si pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{A}$,

$$F : \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y))$$

est un morphisme de groupes abéliens. Les foncteurs entre catégories abéliennes seront implicitement toujours supposés additifs. Dans ce qui suit, les catégories sont abéliennes et les foncteurs sont additifs.

On dit qu'il est *exact à gauche* (resp. à *droite*) si pour toute suite exacte dans $\mathcal{A}$ de la forme

$$0 \to X \stackrel{f}{\to} Y \stackrel{g}{\to} Z,$$

la suite

$$0 \to F(X) \stackrel{F(f)}{\to} F(Y) \stackrel{F(g)}{\to} F(Z),$$

est exacte (resp. si pour toute suite exacte de la forme

$$X \stackrel{f}{\to} Y \stackrel{g}{\to} Z \to 0,$$

la suite

$$F(X) \stackrel{F(f)}{\to} F(Y) \stackrel{F(g)}{\to} F(Z) \to 0,$$

est exacte). Si F est exact à droite et à gauche, on dit simplement qu'il est *exact*. Pour un foncteur contravariant $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, la convention pour l'exactitude à gauche ou à droite est la suivante. On considère F comme un foncteur covariant $\mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}$ et l'on transfère les définitions ci-dessus.

On peut montrer qu'un foncteur exact à gauche $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ préserve les limites finies (c'est-à-dire que pour tout foncteur $D : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$, où la catégorie d'indice $\mathcal{I}$ est finie, admettant une limite X, alors $F(X)$ est la limite du foncteur $F \circ D$). De même un foncteur exact à droite préserve les colimites finies.

Rappelons qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est fidèle si pour tout couple d'objets (X, Y) de $\mathcal{C}$, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

est injective. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des catégories abéliennes et que le foncteur F est additif, F est fidèle si pour tout $X \stackrel{f}{\to} Y$, $F(f) = 0$ implique que $f = 0$. Dans une catégorie abélienne tout morphisme $X \stackrel{f}{\to} Y$ se factorise de manière unique en

$$X \to I \to Y,$$

où $X \to I$ est un épimorphisme et $I \to Y$ un monomorphisme (voir la propriété 5 des catégories abéliennes dans l'annexe A.VI.2). D'autre part, si $f \neq 0$, alors $I \neq 0$. Si F est exact, on en déduit que

$$F(X) \to F(I) \to F(Y)$$

est la factorisation de $F(f)$, car F étant exact, il préserve épimorphismes et monomorphismes. Si $F(f) = 0$, on a alors $F(I) = 0$. On déduit de cette petite discussion le résultat suivant

Lemme. *Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur exact, et $F(I) = 0$ implique que $I = 0$, alors F est fidèle.*

A.VIII.2 Progénérateurs

Soit X un objet de la catégorie abélienne $\mathcal{A}$. On définit les foncteurs :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \bullet) : \qquad & \mathcal{A} \to \mathbb{Z} - \mathbf{mod}, \\ & Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y), \\ [Y \stackrel{f}{\to} Z] \mapsto & [\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\bullet \circ f} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, X): \qquad & \mathcal{A} \to \mathbb{Z} - \mathbf{mod}, \\ & Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X), \\ [Y \xrightarrow{f} Z] & \mapsto [\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, X) \xrightarrow{f \circ \bullet} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X)]\end{aligned}$$

Le premier de ces foncteurs est covariant, le second contravariant. Ils sont tous deux exacts à gauche. Un objet X de $\mathcal{A}$ est dit *projectif* si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \bullet)$ est exact, *injectif* si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, X)$ est exact. C'est un *générateur* de $\mathcal{A}$ (resp. un *cogénérateur*) si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \bullet)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(., X)$) est fidèle. Un *progénérateur* est un générateur projectif. Un critére simple est qu'un objet projectif X est un progénérateur dans $\mathcal{A}$ si et seulement si pour tout objet non nul Y dans $\mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ est non trivial. La nécessité de cette condition provient du lemme A.VIII.1.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne cocomplète. Un objet projectif P dans $\mathcal{A}$ est dit *petit* si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \bullet)$ préserve les sommes directes. Il existe plusieurs caractérisations équivalentes de cette notion. En particulier, P est un petit projectif, si pour toute somme directe $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, et pour tout morphisme $\phi : P \to M$, il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que ϕ se factorise en $P \to \bigoplus_{j \in J} M_i \to M$. Dans une catégorie de Grothendieck, un objet est un petit projectif si et seulement s'il est projectif de type fini (*cf.* [36], 4.11, Lemma 1). Le résultat suivant nous donne un critère pour qu'une catégorie abélienne cocomplète soit équivalente à la catégorie des modules à droite sur un certain anneau $\mathcal{R}$ (*cf.* [36], 4.11, Theorem 1).

Théorème. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, cocomplète, et admettant un petit progénérateur P. Alors $\mathcal{A}$ est naturellement équivalente à la catégorie des modules à droite unitaires sur l'anneau $\mathcal{R}_P = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)$, l'équivalence étant donnée par le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \bullet)$.*

Remarque. On a bien sûr la réciproque, puisque un anneau unitaire A est un petit progénérateur de $\mathcal{M}(A)$

Nous notons aussi le résultat suivant.

Lemme. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne , admettant un petit progénérateur P. Alors tout objet M de $\mathcal{A}$ est quotient de deux objets isomorphes à des sommes directes d'objets isomorphes à P.*

<u>*Démonstration*</u>. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, N)$ est non trivial pour tout $N \in \mathcal{A}$, on peut trouver, pour tout $m \in M$ un morphisme $f_m : P \to M$ dont l'image contient m. En prenant la somme directe sur tous les $m \in M$, on obtient un épimorphisme

$$\bigoplus_{m \in M} P \to M.$$

Considérons le noyau C de ce morphisme. Le même argument nous donne l'existence d'un épimorphisme de la forme $\bigoplus_{j \in J} P \to C$. On obtient donc :

$$\bigoplus_{j \in J} P \to C \to \bigoplus_{m \in M} P \to M.$$

d'où l'on tire une suite exacte

$$\bigoplus_{j \in J} P \to \bigoplus_{m \in M} P \to M \to 0.$$

□

A.IX Décompositions de catégories

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de Grothendieck (**AB4*** et **AB5**) vérifiant aussi **AB6** et soit $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$, une famille de sous-catégories pleines. On écrit

$$\mathcal{M} = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i$$

si tout objet M de $\mathcal{M}$ s'écrit comme une somme directe

$$M = \bigoplus_{i\in I} M_i$$

où pour tout i, $M_i \in \mathcal{M}_i$ et de plus, pour $i \neq j$, quels que soient X_i et X_j respectivement objets de $\mathcal{M}_i$ et $\mathcal{M}_j$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X_i, X_j) = \{0\}$.

Supposons que $\mathcal{M} = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i$. Alors $\mathbf{Irr}(\mathcal{M})$ est une union disjointe

$$\mathbf{Irr}(\mathcal{M}) = \coprod_{i\in I} \mathbf{Irr}(\mathcal{M}_i).$$

Dans l'autre direction, supposons maintenant que S soit une partie de $\mathbf{Irr}(\mathcal{M})$, et notons $\mathcal{M}_S$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ dont les objets sont ceux dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans S. Alors $\mathcal{M}_S$ est une sous-catégorie abélienne, stable par passage aux sous-quotients, aux extensions et aux colimites. Pour tout objet M de $\mathcal{M}$, on note E_S la somme de tous les sous-objets de E qui sont dans $\mathcal{M}_S$. Alors il est clair que $E_S \in \mathcal{M}_S$. Soit S' une autre partie de $\mathbf{Irr}(\mathcal{M})$, telle que $S \cap S' = \emptyset$. Si $E \in \mathcal{M}_S$ et $E' \in \mathcal{M}_{S'}$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(E, E') = \{0\}$. De plus, pour tout $E \in \mathcal{M}$, $E_S \cap E_{S'} = \{0\}$, et donc

$$E_S \oplus E_{S'} \subset E.$$

Définition. On dit que la partie $S \subset \mathbf{Irr}(\mathcal{M})$ scinde un objet E dans $\mathcal{M}$, si $E = E_S \oplus E_{\bar{S}}$, où $\bar{S} = \mathbf{Irr}(\mathcal{M}) \setminus S$. On dit que S scinde la catégorie $\mathcal{M}$ si S scinde tout objet de $\mathcal{M}$. Plus généralement, supposons que l'on ait une décomposition en union disjointe :

$$\mathbf{Irr}(\mathcal{M}) = \coprod_{\alpha} S_\alpha.$$

On dit que cette décomposition $\{S_\alpha\}$ scinde un objet E dans $\mathcal{M}$, si $E = \bigoplus_\alpha E_{S_\alpha}$ et que $\{S_\alpha\}$ scinde la catégorie $\mathcal{M}$ si $\{S_\alpha\}$ scinde tout objet de $\mathcal{M}$.

Lemme. *Supposons que* $\mathbf{Irr}(\mathcal{M}) = \coprod_\alpha S_\alpha$ *scinde un objet* E *dans* $\mathcal{M}$. *Alors tout sous-quotient de* E *est aussi scindé selon cette décomposition.*

Démonstration. Ecrivons $E = \bigoplus_\alpha E_\alpha$. Il est clair qu'il suffit de montrer que pour tout sous-objet L de E, on a

$$L = \bigoplus_{\alpha} (E_\alpha \cap L).$$

Posons $C = L/\bigoplus_\alpha (E_\alpha \cap L)$. Alors pour tout α,

$$\mathrm{JH}(C) \subset \mathrm{JH}(L/(E_\alpha \cap L)) \subset \mathrm{JH}(E/E_\alpha) \subset \bigcup_{\beta\neq\alpha} \mathrm{JH}(E_\beta) \subset \mathbf{Irr}(\mathcal{M}) \setminus S_\alpha.$$

Ceci montre que $\mathrm{JH}(C) \subset \bigcap_\alpha (\mathbf{Irr}(\mathcal{M}) \setminus S_\alpha) = \emptyset$, et donc $C = \{0\}$. □

A.X Centre d'une catégorie

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Le centre $\mathfrak{z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ est l'ensemble des endomorphismes (c'est-à-dire des transformations naturelles vers lui-même) du foncteur identité. Autrement dit, un élément z du centre de $\mathcal{C}$ est la donnée, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, d'un morphisme $z_X : X \to X$, de sorte qu'étant donnés deux objets X et Y de $\mathcal{C}$, et un morphisme $f : X \to Y$, on ait $f \circ z_X = z_Y \circ f$.

Exemple. Si $\mathcal{C} = \mathcal{M}(A)$, la catégorie des A-modules unitaires sur l'anneau unitaire A, alors $\mathfrak{z}(\mathcal{C})$ s'identifie naturellement au centre de l'anneau A.

Annexe B

Théorème d'Amitsur et corollaires

B.I Théorème d'Amitsur

Le résultat principal de cette section est dû à Amitsur. On peut le voir comme une version non commutative du théorème des zéros de Hilbert pour des algèbres sur le corps $\mathbb{C}$.

Définition. Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre d'unité $\mathbf{1}_A$. Le spectre d'un élément a de A est l'ensemble

$$\mathrm{Spec}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a - \lambda \mathbf{1}_A \text{ n'est pas inversible } \}$$

On identifie la sous-algèbre $\mathbb{C}\mathbf{1}_A$ de A avec $\mathbb{C}$.

Théorème. *Supposons que A soit de dimension au plus dénombrable sur $\mathbb{C}$. Alors*

a) si A est une algèbre à division, $A = \mathbb{C}$,

b) pour tout $a \in A$, $\mathrm{Spec}(a)$ *est non vide. De plus* $\mathrm{Spec}(a) = \{0\}$ *si et seulement si a est nilpotent.*

Démonstration. Montrons que *b*) implique *a*). Supposons qu'il existe $a \in A$, $a \notin \mathbb{C}$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $a - \lambda\mathbf{1}_A$ est non nul, donc inversible si l'on suppose que A est une algèbre à division. Ceci nous donne $\mathrm{Spec}(a) = \emptyset$, ce qui contredit *b*).

Démontrons maintenant *b*). Supposons $\mathrm{Spec}(a) = \emptyset$, c'est-à-dire que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $a - \lambda\mathbf{1}_A$ est inversible. La famille non dénombrable

$$\{(a - \lambda\mathbf{1}_A)^{-1} \,|\, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

d'éléments de A est donc liée, puisque la dimension de A est au plus dénombrable. Ceci montre qu'il existe un nombre fini d'éléments $\mu_i \in \mathbb{C}$, que l'on peut supposer non nuls, et un même nombre d'éléments λ_i dans $\mathbb{C}$ tels que

$$\sum_i \mu_i \, (a - \lambda_i \mathbf{1}_A)^{-1} = 0.$$

En multipliant par $\prod_i (a - \lambda_i \mathbf{1}_A)$, on fait apparaître un polynôme $P \in \mathbb{C}[t]$ de degré strictement positif tel que $P(a) = 0$. Ce polynôme P admet sur $\mathbb{C}$ une factorisation de la forme

$$P(t) = c(t - \alpha_1) \ldots (t - \alpha_r),$$

$c \in \mathbb{C}^\times$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$. Ceci entraine que

$$(a - \alpha_1 \mathbf{1}_A) \dots (a - \alpha_r \mathbf{1}_A) = 0$$

ce qui contredit le fait que tous les $a - \alpha_j \mathbf{1}_A$ soient inversibles. Ceci démontre que $\mathrm{Spec}(a)$ est non vide.

Démontrons maintenant l'assertion concernant les éléments nilpotents. Soient $a \in A$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $a^n = 0$. Alors a ne peut pas être inversible, ce qui montre que $0 \in \mathrm{Spec}(a)$. D'autre part, si $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, $a - \lambda \mathbf{1}_A$ est inversible, d'inverse

$$(a - \lambda \mathbf{1}_A)^{-1} = -\lambda^{-1}(\mathbf{1}_A - \lambda^{-1} a)^{-1} = -\lambda^{-1} \sum_{i=0}^{n} (\lambda^{-1} a)^i.$$

Ceci montre que $\mathrm{Spec}(a) = \{0\}$. Réciproquement, si $\mathrm{Spec}(a) = \{0\}$, comme $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ est encore une famille non dénombrable, l'argument ci-dessus montre qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[t]$ non constant tel que $P(a) = 0$. Ce polynôme P admet sur $\mathbb{C}$ une factorisation de la forme

$$P(t) = ct^n (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_r),$$

$c, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}^\times$. Comme chaque $a - \alpha_j \mathbf{1}_A$ est inversible, on en déduit que $n > 0$ et $a^n = 0$. □

B.II Lemme de Schur

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre. Nous allons utiliser le résultat de la section précédente pour montrer le

Théorème. *Soit M un A-module simple et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On a alors*

a) $\mathrm{End}_A(M)$ *est une algèbre à division.*

b) Si la dimension de M sur $\mathbb{C}$ est au plus dénombrable, on a

$$\mathrm{End}_A(M) \simeq \mathbb{C}.$$

Il suffit pour cela que la dimension de A soit au plus dénombrable.

Démonstration. Soit $0 \neq f \in \mathrm{End}_A(M)$. Comme $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont des sous-modules de M, et que M est simple, on a $\ker f = 0$ et $\mathrm{Im}\, f = M$. Ceci montre que f est inversible.

Montrons maintenant que si la dimension de A est au plus dénombrable, il en est de même de celle de M. Considérons $m \in M$ tel que $A \cdot m \neq 0$ et

$$A \to M, \quad a \mapsto a \cdot m.$$

Comme M est simple, $A \cdot m = M$ et donc M est de dimension au plus dénombrable sur $\mathbb{C}$.

De même, démontrons $b)$: considérons

$$\mathrm{End}_A(M) \to M, \quad f \mapsto f(m).$$

Comme $f(a \cdot m) = a \cdot f(m)$ et que $A \cdot m = M$, on voit que f est déterminé par $f(m)$, et donc que le morphisme ci-dessus est injectif. On en déduit que la dimension de $\mathrm{End}_A(M)$ est au plus dénombrable. Le théorème d'Amitsur, montre alors que $\mathrm{End}_A(M) \simeq \mathbb{C}$. □

B.III Lemme de séparation

Soit A une algèbre sur $\mathbb{C}$. Nous avons le résultat de séparation suivant :

Lemme. *Soit A une algèbre sur $\mathbb{C}$ de dimension dénombrable. Soit a un élément non nilpotent de A. Alors il existe un module simple à gauche M tel que $a \cdot M \neq 0$.*

Démonstration. Quitte à remplacer A par $\tilde{A} = A \oplus \mathbf{1}_A$, on peut supposer que A admet une unité. Comme a est non nilpotent, d'après le théorème d'Amitsur B.I et sa démonstration, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tel que $a - \lambda \mathbf{1}_A$ non inversible à gauche. Alors

$$A \to A, \quad b \mapsto b(a - \lambda \mathbf{1}_A)$$

n'est pas surjectif ($\mathbf{1}_A$ n'est pas atteint) et le module $N = A/A(a - \lambda \mathbf{1}_A)$ est donc non nul. Comme N est de type fini, d'après la proposition A.VI.3, N admet un quotient simple M. On a alors $a \cdot M \neq 0$. En effet, si $M = N/I$, où I est un sous-module de N, et si $\tilde{I}$ est l'image inverse de I dans A, alors $\tilde{I}$ est un ideal de A qui contient $A(a - \lambda \mathbf{1}_A)$. Si de plus, on suppose que $a \cdot M = 0$, alors $\tilde{I}$ contient $a \cdot A$. Mais alors $\tilde{I}$ contient $a - (a - \lambda \mathbf{1}_A) = \lambda \mathbf{1}_A$, donc contient $\mathbf{1}_A$ et donc $\tilde{I} = A$. Comme $M \simeq A/\tilde{I}$, on aboutit à une contradiction. $\square$

Annexe C

Algèbre linéaire

C.I Sous-algèbres commutatives de $\mathrm{End}(V)$

On démontre le résultat suivant sur les sous-algèbres commutatives de $\mathrm{End}(V)$:

Lemme. *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension k et soit R une sous-algèbre commutative de $\mathrm{End}(V)$ engendrée par l éléments $a_1, \ldots, a_l$ et l'identité. Alors $\dim R \leq f_l(k) = k^{2-2^{1-l}}$.*

Démonstration. Considérons les sous-espaces caractéristiques de l'endomorphismes a_1. Ce sont des sous-espaces stables sous l'action de R. Décomposons chacun d'eux en sous-espaces caractéristiques pour l'action de a_2. On obtient une décomposition plus fine en sous-espaces stables sous l'action de R. Reitérons l'opération jusqu'a a_l. On décompose ainsi V en somme directe de sous-espaces stables sous l'action de R, disons m sous-espaces de dimension $k_1, \ldots, k_m$, où chaque a_i est la somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur nilpotent. Comme $2 - 2^{1-l} \geq 1$, f_l est convexe, d'où

$$f_l(k) \geq f_l(k_1) + \cdots + f_l(k_m)$$

et il suffit de démontrer le lemme pour chaque sous-espace. On peut donc supposer que les a_i sont sommes d'un opérateur scalaire et d'un opérateur nilpotent. Il est clair que l'on peut aussi remplacer les a_i par leurs parties nilpotentes, et donc en définitive supposer ceux-ci nilpotents.

Notons $\phi_l(k)$ la plus grande dimension possible d'une sous-algèbre commutative R de $\mathrm{End}(V)$ engendrée par l éléments $a_1, \ldots, a_l$ *nilpotents* et l'identité.

Soit I l'idéal de R engendré par les a_i et posons $V_i = I^i \cdot V$. On a donc une suite

$$\{0\} = V_k \subset V_{k-1} \subset \cdots \subset V_1 \subset V_0 = V$$

de sous-espaces de V. Soit W un supplémentaire de V_1 dans V et soit s sa dimension. Comme $I^j \cdot W$ engendre $V_j \bmod V_{j+1}$, il est clair que $R \cdot W = V$. Donc chaque $a \in R$ est déterminé par sa restriction à W. On en déduit que $\dim R \leq sk$, d'où $\phi_l(k) \leq sk$. Soit R' la sous-algèbre de R engendrée par $a_2, \ldots, a_l$ et l'identité, et R'' l'idéal engendré par a_1, de sorte que $R = R' + R''$. On a $\dim R' \leq \phi_{l-1}(k)$, et d'autre part, comme $a_1 \cdot V \subset V_1$, $\dim R''$ est plus petite ou égale à la dimension de la restriction de R à V_1 et donc plus petite que $\phi_l(k-s)$. Comme ϕ_l est croissante, on a $\phi_l(k-s) \leq \phi_l(\lfloor k - \phi_l(k)/k \rfloor)$ ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x) d'où

$$\phi_l(k) \leq \phi_l(\lfloor k - \phi_l(k)/k \rfloor) + \phi_{l-1}(k).$$

Nous allons maintenant conclure par récurrence sur l et k, en remarquant que pour tout l, le cas $k = 1$ est trivial ($\phi_l(1) = 1$ pour tout l). Supposons donc par l'absurde que $\phi_l(k) > f_l(k)$ pour un certain $l \geq 1$ et un certain $k \geq 2$, en supposant l'inégalité du lemme établie pour tout couple (l', k') avec $l' < l$, ou $l' = l$ et $k' < k$. On a alors, d'après l'inégalité démontrée ci-dessus

$$f_l(k) \leq \phi_l(k) < \phi_l(\lfloor k - \phi_l(k)/k \rfloor) + \phi_{l-1}(k),$$

et d'après l'hypothèse de récurrence

$$f_l(k) \leq f_l(\lfloor k - \phi_l(k)/k \rfloor) + f_{l-1}(k).$$

Comme on a supposé $\phi_l(k) > f_l(k)$, $k - \phi_l(k)/k > k - f_l(k)/k$, et la fonction f_l étant croissante, on obtient

$$f_l(k) < f_l(k - \phi_l(k)/k) + f_{l-1}(k) \leq f_l(k - f_l(k)/k) + f_{l-1}(k).$$

Montrons que ceci mène à une contradiction. Posons $\epsilon = 1 - l$. L'inégalité ci-dessus est

$$k^{2-2^\epsilon} < \left(k - \frac{k^{2-2^\epsilon}}{k}\right)^{2-2^\epsilon} + k^{2-2^{\epsilon+1}},$$

où encore

$$1 < \left(1 - k^{-2^\epsilon}\right)^{2-2^\epsilon} + k^{2^\epsilon - 2^{\epsilon+1}} \leq \left(1 - k^{-2^\epsilon}\right) + k^{-2^\epsilon}.$$

On obtient

$$1 - k^{-2^\epsilon} < \left(1 - k^{-2^\epsilon}\right)^{2-2^\epsilon},$$

ce qui est impossible car $0 < 1 - k^{-2^\epsilon} < 1$ et $2 - 2^\epsilon \geq 1$. $\square$

C.II Endomophismes stables

Définition. Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $t \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. On dit que t est stable si $\ker t = \ker t^2$ et $\mathrm{Im}\, t = \mathrm{Im}\, t^2$. On dit que t est finalement stable s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que t^n soit stable. On utilise la même terminologie pour des endomorphismes de B-modules, où B est une $\mathbb{C}$-algèbre.

Lemme. *(i) Soit $t \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Alors t est stable si et seulement si*

$$V = \ker t \oplus \mathrm{Im}\, t.$$

(ii) Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f_A"'] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f_B"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "f_C"'] & 0 \\
A \arrow[r, "\phi"'] & B \arrow[r, "\psi"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes et les endomorphismes f_A et f_B stables. Alors f_C est stable.

(iii) *Considérons le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f_A"'] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f_B"'] & C \arrow[d, "f_C"'] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\phi"'] & B \arrow[r, "\psi"'] & C \end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes et les endomorphismes f_B et f_C stables. Alors f_A est stable.

(iv) *Supposons $t \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ finalement stable. Alors les suites $N_k = \ker t^k$ et $I_k = \mathrm{Im}\, t^k$ sont respectivement croissante et décroissante, toutes deux stationnaires à partir du premier indice k_0 tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$ ou $I_{k_0} = I_{k_0+1}$.*

Démonstration. (i) Si t est stable, et si $v \in \ker t \cap \mathrm{Im}\, t$, écrivons $v = t(w)$, pour un certain $w \in V$. On a alors $t(v) = t^2(w) = 0$, donc $w \in \ker t^2 = \ker t$, soit $v = t(w) = 0$. Ceci montre que $\ker t \cap \mathrm{Im}\, t = \{0\}$. Montrons maintenant que tout $v \in V$ est dans $\ker t + \mathrm{Im}\, t$. On a $t(v) \in \mathrm{Im}\, t = \mathrm{Im}\, t^2$, donc $t(v) = t^2(w)$ pour un certain $w \in V$. On a alors $t(v - t(w)) = 0$, soit $v - t(w) \in \ker t$, ce qui établit l'assertion. Réciproquement, si $V = \ker t \oplus \mathrm{Im}\, t$, alors pour tout $v \in \ker t^2$, $t(v) \in \ker t \cap \mathrm{Im}\, t = \{0\}$, d'où $v \in \ker t$, et donc $\ker t^2 \subset \ker t$. L'inclusion dans l'autre sens étant triviale, on obtient $\ker t^2 = \ker t$. De même si $v = t(w) \in \mathrm{Im}\, t$, on écrit $w = w_0 + w_*$ avec $w_0 \in \ker t$ et $w_* \in \mathrm{Im}\, t$, et l'on obtient $v = t(w_0 + w_*) = t(w_*) \in \mathrm{Im}\, t^2$. Ainsi $\mathrm{Im}\, t \subset \mathrm{Im}\, t^2$, et donc $\mathrm{Im}\, t^2 = \mathrm{Im}\, t$. L'endomorphisme t est donc stable.

(ii) Soit $c \in C$. Comme ψ est surjective, il existe $b \in B$ tel que $\psi(b) = c$. Comme f_B est stable, d'après (i), on peut écrire $b = b_0 + b_*$ avec $b_0 \in \ker f_B$ et $b_* \in \mathrm{Im}\, f_B$. On a alors $c = \psi(b_0) + \psi(b_*)$ avec $f_C(\psi(b_0)) = \psi(f_B(b_0)) = 0$, donc $\psi(b_0) \in \ker f_C$, et $\psi(b_*) \in \psi(f_B(B)) = f_C(\psi(B)) \subset \mathrm{Im}\, f_C$. Ceci montre que $C = \ker f_C + \mathrm{Im}\, f_C$.

Supposons $c \in \ker f_C \cap \mathrm{Im}\, f_C$. Ecrivons $c = f_C(c')$, avec $c' = \psi(b'_0) + \psi(b'_*)$, $b'_0 \in \ker f_B$ et $b'_* \in \mathrm{Im}\, f_B$. On obtient

$$c = f_C(c') = f_C(\psi(b'_0)) + f_C(\psi(b'_*)) = \psi(f_B(b'_0)) + \psi(f_B(b'_*)) = \psi(f_B(b'_*)).$$

De plus, $f_C(c) = 0$ donne

$$0 = f_C(c) = f_C(\psi(f_B(b'_*))) = \psi(f_B^2(b'_*)).$$

Ainsi $f_B^2(b'_*) \in \ker \psi = \mathrm{Im}\, \phi$. Il existe donc $a \in A$ tel que $f_B^2(b'_*) = \phi(a)$. En écrivant $a = a_0 + a_*$, avec $a_0 \in \ker f_A$ et $a_* \in \mathrm{Im}\, f_A$, on obtient

$$f_B^2(b'_*) = \phi(a_0) + \phi(a_*).$$

Or $f_B(\phi(a_0)) = \phi(f_A(a_0)) = 0$, donc $\phi(a_0) \in \ker f_B$, et

$$\phi(a_*) \in \phi(f_A(A)) = f_B(\phi(A)) \subset \mathrm{Im}\, f_B.$$

Comme $B = \mathrm{Im}\, f_B \oplus \ker f_B$, on en déduit que $\phi(a_0) = 0$ et

$$f_B^2(b'_*) = \phi(a_*) = \phi(f_A(a')) = f_B(\phi(a'))$$

pour un certain $a' = f_A(a'') \in \mathrm{Im}\, f_A$. Ceci donne

$$f_B(b'_*) - \phi(f_A(a'')) = f_B(b'_* - \phi(a'')) \in \ker f_B \cap \mathrm{Im}\, f_B = \{0\}.$$

On peut conclure que
$$c = \psi(f_B(b'_*)) = \psi(\phi(a')) = 0,$$
et donc $\ker f_C \cap \operatorname{Im} f_C = \{0\}$.

(iii) Supposons que $a \in \ker f_A \cap \operatorname{Im} f_A$. Alors $\phi(a) \in \ker f_B$ car $f_B(\phi(a)) = \phi(f_A(a)) = 0$ et $\phi(a) \in \operatorname{Im} f_B$ car $\phi(a) \in \phi(f_A(A)) = f_B(\phi(A))$. Comme f_B est stable, d'après (i), on a alors $\phi(a) = 0$, d'où $a = 0$ car ϕ est injective. Ceci montre que $\ker f_A \cap \operatorname{Im} f_A = \{0\}$.

Nous voulons montrer maintenant que tout $a \in A$ est dans $\ker f_A + \operatorname{Im} f_A$. Ecrivons $\phi(a) = b_0 + f_B(b_*)$ avec $b_0 \in \ker f_B$, et $b_* \in \operatorname{Im} f_B$, ce qui est loisible puisque f_B est stable. Supposons que

$$b_0 \in \operatorname{Im} \phi = \ker \psi, \quad b_* \in \operatorname{Im} \phi = \ker \psi, \tag{C.II.1}$$

et soient $a_0, a_* \in A$ tels que $b_0 = \phi(a_0)$, $b_* = \phi(a_*)$. On a alors
$$\phi(a) = \phi(a_0) + f_B(\phi(a_*)) = \phi(a_0 + f_A(a_*)),$$
et comme ϕ est injective, $a = a_0 + f_A(a_*)$. D'autre part
$$0 = f_B(b_0) = f_B(\phi(a_0)) = \phi(f_A(a_0)),$$
d'où comme ϕ est injective, $f_A(a_0) = 0$, et donc $a_0 \in \ker f_A$. Ainsi $a \in \ker f_A + \operatorname{Im} f_A$. Il reste à prouver (C.II.1). On a
$$\psi(\phi(a)) = 0 = \psi(b_0 + f_B(b_*)) = \psi(b_0) + \psi(f_B(b_*)).$$
Or $f_C(\psi(b_0)) = \psi(f_B(b_0)) = 0$, d'où $\psi(b_0) \in \ker f_C$ et $\psi(f_B(b_*)) = f_C(\psi(b_*)) \in \operatorname{Im}(f_C)$. Comme f_C est stable, on en déduit $\psi(b_0) = 0$ et $\psi(f_B(b_*)) = f_C(\psi(b_*)) = 0$. Ceci montre que $b_0, f_B(b_*) \in \ker \psi$. Posons $\psi(b_*) = c_0 + c_*$, avec $c_0 \in \ker f_C$ et $c_* \in \operatorname{Im} f_C$. On a alors
$$f_C(\psi(b_*)) = \psi(f_B(b_*)) = 0 = f_C(c_0 + c_*) = f_C(c_*).$$
On voit alors que $c_* \in \operatorname{Im} f_C \cap \ker f_C = \{0\}$. On obtient $\psi(b_*) = c_0 \in \ker f_C \cap \operatorname{Im} f_C = \{0\}$, et donc $b_* \in \ker \psi$.

(iv) Il est clair que les suites N_k et I_k sont respectivement croissante et décroissante, et par hypothèse, elles deviennent toutes deux stationnaires à partir d'un certain rang. Posons $E_k = N_{k+1}/N_k$ et $F_k = I_k/I_{k+1}$. La restriction de t^k à N_{k+1} est à valeurs dans I_k, nulle sur N_k, et induit donc un morphisme $\bar{t}^k : E_k \to F_k$. Le noyau de ce morphisme est $N_k + (\operatorname{Im} t \cap N_{k+1})/N_k$ et son image est $I_{k+1} + t^k(N_{k+1})/I_{k+1}$.

On a aussi un morphisme $\bar{t} : E_{k+1} \to E_k$ induit par
$$N_{k+2} \xrightarrow{t} N_{k+1} \to N_{k+1}/N_k = E_k$$
dont le noyau est exactement N_{k+1}. Le morphisme $\bar{t}$ est donc injectif, d'image $N_k + t(N_{k+2})/N_k = N_k + (\operatorname{Im} t \cap N_{k+1})/N_k$.

Enfin, on a un morphisme $\bar{t} : F_k \to F_{k+1}$, induit par
$$I_k \xrightarrow{t} I_{k+1} \to I_{k+1}/I_{k+2} = F_{k+1}$$
dont le noyau contient I_{k+1}. Le morphisme $\bar{t}$ est surjectif, de noyau $I_{k+1} + t^k(N_{k+1})/I_{k+1}$.

Ainsi, on a construit une suite exacte

$$0 \xrightarrow{\bar{t}} E_{k+1} \to E_k \xrightarrow{\bar{t}^k} F_k \xrightarrow{\bar{t}} F_{k+1} \to 0$$

On en déduit immédiatement que la suite N_k devient stationnaire dès le premier indice k_0 tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$ et qu'il en est de même de la suite F_k. Supposons que le suite N_k devienne stationnaire à partir de l'indice k_0. Alors $E_k = 0$ pour tout $k \geq k_0$, et l'on déduit de la suite exacte ci-dessus que $F_k \simeq F_{k+1}$ pour tout $k \geq k_0$. Comme la suite I_k devient stationnaire à partir d'un certain rang, pour k assez grand $F_k = 0$, et ceci montre que $F_k = 0$ pour tout $k \geq k_0$. La suite I_k devient donc stationnaire avant la suite I_k, mais le même argument pouvant être utilisé dans l'autre sens, on en déduit l'assertion finale du (iv).

$\square$

Proposition. *Soit B une $\mathbb{C}$-algèbre commutative noethérienne , et L un B-module de type fini. Soit $a \in \mathrm{End}_B(L)$ et supposons que le localisé $(L_a, \tilde{a})$ de L en a (voir A.III.1, exemple 5) soit un B-module de type fini. Alors a est finalement stable. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que a^n soit stable, et soient $K = \ker a^n$, $I = \mathrm{Im}\, a^n$. Alors $L = K \oplus I$ et le localisé $(L_a, \tilde{a})$ est isomorphe à $(I, a_{|I})$.*

Démonstration. On peut munir $\mathrm{End}_B(L_a)$ d'une structure de B-module par

$$(b \cdot \phi)(v) = b \cdot (\phi(v)) = \phi(b \cdot v), \quad (\phi \in \mathrm{End}_B(L_a), b \in B, v \in L_a).$$

Comme L_a est un B-module de type fini, il est facile de voir que $\mathrm{End}_B(L_a)$ aussi, et donc on peut trouver des éléments $b_i \in B$, $i = 1, \dots, m$ tels que

$$\tilde{a}^{-m} + b_1 \tilde{a}^{-m+1} + \cdots + b_m = 0$$

d'où $\tilde{a}^{-1} = -(b_1 + b_2\tilde{a} + \cdots + b_m \tilde{a}^{m-1})$, et donc $\tilde{a}^{-1} \in B[\tilde{a}]$. Montrons que le morphisme $\iota : L \to L_a$ (A.III.1, exemple 5) est surjectif. Il est clair que $\tilde{a}$ stabilise $\iota(L)$, et comme $\tilde{a}^{-1} \in B[\tilde{a}]$, $\tilde{a}^{-1}$ stabilise $\iota(L)$ et $\tilde{a}_{|\iota(L)}$ est donc inversible. Considérons le couple $(\iota(L), \tilde{a})$. Il est aussi manifestement solution du même problème universel que $(L_a, \tilde{a})$. On en déduit la surjectivité de ι.

On utilise maintenant le lemme et le corollaire A.III.1, qui montrent que $(L_a, \tilde{a})$ est isomorphe à (L', a'), où $L' = L/K$, avec $K = \cup_{n^i n \mathbb{N}} \ker a^n$. Comme L_a et L sont des B-modules de type fini, K aussi. Par conséquent, il existe un entier n non nul tel que $K = \ker a^n$. Posons $I = \mathrm{Im}\, a^n$. On a alors $L = K \oplus I$. Comme ι est surjectif, il induit un isomorphisme $(I, a^m) \simeq (L_a, \tilde{a}^m)$. Or $\tilde{a}^m$ est inversible, et donc $a_{|I}$ est inversible. $\square$

C.III Représentations de $\mathbb{Z}^d$

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, et $u_1, \dots, u_d$ des endomorphismes inversibles de V commutant deux à deux. Ceci est équivalent à la donnée d'une représentation U du groupe abélien $\mathbb{Z}^d$ dans V,

$$U : \underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \mapsto u_1^{n_1} \circ \cdots u_d^{n_d}.$$

Fixons $v \in V$ et $\lambda \in V^*$ et formons le coefficient matriciel

$$F : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}, \quad F(\underline{n}) = \lambda(U(\underline{n}) \cdot v).$$

Proposition. *Il existe des caractères $\chi_1, \dots, \chi_l$ de $\mathbb{Z}^d$ et des polynômes $Q_1, \dots, Q_l$ dans $\mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$ tels que*

$$F(\underline{n}) = \sum_{j=1}^{l} \chi_j(\underline{n}) Q_j(\underline{n}).$$

Démonstration. Les u_i commutants deux à deux, ils admettent des sous-espaces propres communs, et si $z_1, \dots, z_d$ sont les valeurs propres respectivement de $u_1, \dots, u_d$ sur l'un de ces sous-espaces propres, alors $U(\underline{n})$ agit sur ce sous-espace propre comme le scalaire

$$\chi(\underline{n}) = z_1^{n_1} \dots z_d^{n_d}, \quad \underline{n} = (n_1, \dots n_d) \in \mathbb{Z}^d).$$

Soient $\chi_1, \dots \chi_l$ tous les caractères de $\mathbb{Z}^d$ deux à deux distincts ainsi obtenus, le caractère χ_j étant donné par un d-uplet $(z_1^{(j)} \dots z_d^{(j)})$ de nombres complexes non nuls.

Choisissons une base de triangularisation commune des $u_1, \dots, u_d$ de telle sorte que pour tout $\underline{n} \in \mathbb{Z}^d$, la matrice $A(\underline{n})$ de $U(\underline{n})$ dans cette base soit diagonale par bloc, de blocs $A_j(\underline{n})$, $A_j(\underline{n})$ étant une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont de la forme $\chi_j(\underline{n})$, $j = 1, \dots, l$. Il suffit de montrer que les coefficients de la matrice $A(\underline{n})$ sont de la forme voulue, et pour cela, il suffit de le faire pour chaque bloc A_j. On fixe donc j. Notons $(\underline{e_1}, \dots, \underline{e_d})$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. On a alors

$$A_j(\underline{e_k}) = z_k^{(j)}(\mathrm{Id} + N_k^{(j)}), \quad (k = 1, \dots, d)$$

où les $N_k^{(j)}$ sont des matrices triangulaires supérieures strictes (donc nilpotentes), commutant deux à deux. Ceci nous donne

$$\begin{aligned} A_j(\underline{n}) &= \prod_{i=1}^{d} \left(z_k^{(j)}(\mathrm{Id} + N_k^{(j)}) \right)^{n_i} = \chi_j(\underline{n}) \prod_{i=1}^{d} (\mathrm{Id} + N_k^{(j)})^{n_i} \\ &= \chi_j(\underline{n}) \prod_{i=1}^{d} \left(\mathrm{Id} + \binom{n_i}{1} N_i + \binom{n_i}{2} N_i^2 + \binom{n_i}{3} N_i^3 + \cdots \right) \end{aligned}$$

la somme étant finie, puisque les N_i sont nilpotentes. Les coefficients binomiaux étant des polynômes en les n_i, ceci termine la démonstration. □

Bibliographie

[1] I. N. Bernstein. Draft of : representations of p-adic groups, notes d'un cours à Harvard prises par K. Rumelhart, 1992.

[2] I. N. Bernstein. Second adjointness for representations of p-adic reductive groups, 1992.

[3] I. N. Bernšteĭn and A. V. Zelevinskiĭ. Induced representations of the group $GL(n)$ over a p-adic field. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 10(3) :74–75, 1976.

[4] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. I. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 10(4) :441–472, 1977.

[5] A. Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[6] A. Borel and J. Tits. Groupes réductifs. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (27) :55–150, 1965.

[7] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fascicule XXVII. Algèbre commutative. Chapitre 1 : Modules plats. Chapitre 2 : Localisation.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1290. Herman, Paris, 1961.

[8] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.

[9] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4.* Hermann, Paris, 1971.

[10] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique, Fasc. XXIII.* Hermann, Paris, 1973. Livre II : Algèbre. Chapitre 8 : Modules et anneaux semi-simples, Nouveau tirage de l'édition de 1958, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1261.

[11] N. Bourbaki. *Algebra I. Chapters 1–3.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation [MR0979982 (90d :00002)].

[12] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitre 10.* Springer-Verlag, Berlin, 2007. Reprint of the 1998 original.

[13] F. Bruhat and J. Tits. Groupes réductifs sur un corps local. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (41) :5–251, 1972.

[14] F. Bruhat and J. Tits. Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (60) :197–376, 1984.

[15] D. Bump. *Automorphic forms and representations*, volume 55 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[16] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko. Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 77(3) :582–634, 1998.

[17] J. Carmona. Sur la classification des modules admissibles irreductibles. In *Noncommutative harmonic analysis and Lie groups (Marseille, 1982)*, volume 1020 of *Lecture Notes in Math.*, pages 11–34. Springer, Berlin, 1983.

[18] R. W. Carter. *Finite groups of Lie type.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1993. Conjugacy classes and complex characters, Reprint of the 1985 original, A Wiley-Interscience Publication.

[19] W. Casselman. Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups, 1975.

[20] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors. *Algebraic number theory*, London, 1986. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Reprint of the 1967 original.

[21] J.-F. Dat. v-tempered representations of p-adic groups. I. l-adic case. *Duke Math. J.*, 126(3) :397–469, 2005.

[22] S. DeBacker. Notes non publiées. 1999.

[23] P. Deligne. Le “centre” de Bernstein. In *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, pages 1–32. Hermann, Paris, 1984. Edited by P. Deligne.

[24] R. Douady and A. Douady. *Algèbre et théories galoisiennes. 2.* CEDIC, Paris, 1979. Théories galoisiennes. [Galois theories].

[25] J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass., 1978. Reprinting of the 1966 original, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics.

[26] P. Freyd. *Abelian categories. An introduction to the theory of functors.* Harper's Series in Modern Mathematics. Harper & Row Publishers, New York, 1964.

[27] S. I. Gelfand and Y. I. Manin. *Methods of homological algebra.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[28] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann, Paris, 1973. Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252.

[29] R. Goodman and N. R. Wallach. *Representations and invariants of the classical groups*, volume 68 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[30] Harish-Chandra. *Collected papers.* Springer-Verlag, New York, 1984. Edited by V. S. Varadarajan.

[31] G. Hochschild. *La structure des groupes de Lie.* Dunod, Paris, 1968.

[32] J. E. Humphreys. *Linear algebraic groups.* Springer-Verlag, New York, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[33] A. W. Knapp. *Lie groups, Lie algebras, and cohomology*, volume 34 of *Mathematical Notes.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988.

[34] A. W. Knapp and D. A. Vogan, Jr. *Cohomological induction and unitary representations*, volume 45 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[35] S. Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[36] B. Pareigis. *Categories and functors.* Translated from the German. Pure and Applied Mathematics, Vol. 39. Academic Press, New York, 1970.

[37] A. Roche. Notes on the Bernstein decomposition. Notes d'un cours au Fields Institute-university of Ottawa, 2004.

[38] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann, Paris, revised edition, 1978.

[39] A. J. Silberger. The Langlands quotient theorem for p-adic groups. *Math. Ann.*, 236(2) :95–104, 1978.

[40] A. J. Silberger. *Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups*, volume 23 of *Mathematical Notes.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1979. Based on lectures by Harish-Chandra at the Institute for Advanced Study, 1971–1973.

[41] T. A. Springer. *Linear algebraic groups*, volume 9 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1998.

[42] R. Steinberg. *Lectures on Chevalley groups.* Yale University, New Haven, Conn., 1968. Notes prepared by John Faulkner and Robert Wilson.

[43] J. Tits. Reductive groups over local fields. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[44] J.-L. Waldspurger. La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra). *J. Inst. Math. Jussieu*, 2(2) :235–333, 2003.

Liste des notations

Index terminologique