
GROUPES DE SYMÉTRIE EN PHYSIQUE DES HAUTES ÉNERGIES.

Approfondissement PHY 575

Denis Bernard, Yves Laszlo et David Renard

Le but de cet enseignement est de reprendre certains thèmes du cours de physique des particules – plus généralement de physique quantique – d’un point de vue plus mathématique avec des interventions de mathématiciens et d’un physicien (théoricien).

Dans le volume horaire disponible on voudrait donner un complément de formation mathématique (3h×4 cours), présenter quelques applications à la physique (3h×5 cours) et proposer à chaque élève un travail personnel bibliographique. Le cours sera composé d’une série de leçons-séminaires, mathématiques ou physiques, en alternance et sur des thèmes reliés.

La partie mathématique a pour but d’introduire les notions de base de la théorie des groupes (groupes, représentations linéaires, groupes et algèbres de Lie, etc.) mais aussi des concepts plus récents sur les algèbres de dimensions infinies (algèbres d’Heisenberg et de Virasoro, etc.). Ces notions seront illustrées sur de nombreux exemples.

La partie physique a pour but d’illustrer l’apport de la théorie des groupes en physique. Bien qu’une grande part des exemples soit issue de la physique subatomique, les notions introduites se recyclent et émergent dans d’autres domaines de la physique. Certains des sujets traités sont des classiques (par exemple, les groupes de Lorentz et de Poincaré, l’équation de Dirac, le modèle des quarks), d’autres font appel à des notions de physiques plus récentes (le modèle standard, l’invariance conforme).

Les travaux personnels, réalisés en binôme ou individuellement, pourront être orientés soit vers l’aspect mathématique, soit vers l’aspect physique. Des exemples de sujets sont proposés ci-après. Il est aussi possible de trouver des sujets où les applications sont prises dans d’autres domaines de la physique. Un binôme peut aussi partager un thème en une partie mathématique et une partie physique.

Plan des cours:
**ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES GROUPES
POUR PHYSICIENS AMATEURS**

1. Groupes: notions de base.

Groupes, sous-groupes; action d'un groupe sur un ensemble; espace homogène; produit semi-direct; représentations linéaires; lemme de Schur; opérations sur les représentations.

2. Groupes linéaires et leurs algèbres de Lie. $SU(2)$ et $SO(3)$.

Les groupes $GL(n, K)$; exponentielle de matrice, algèbre de Lie d'un groupe linéaire; représentations adjointes; représentations irréductibles de $sl(2, C)$ et des groupes $SL(2, R)$, $SU(2)$ et $SO(3)$.

3. Symétrie en mécanique quantique.

Symétrie et loi de conservation, représentations projectives; règles de sélection lemme de Schur: conséquences et applications; le groupe des permutations.

4. Invariance relativiste: groupes de Lorentz et de Poincaré.

Transformations de Lorentz et de Poincaré; représentations du groupe de Poincaré et du groupe de Lorentz; spin, équation de Dirac.

5. Du modèle des quarks au modèle standard.

Hadrons-mésons-baryons; l'algèbre $su(3)$ et ses représentations; le modèle des quarks; éléments du modèle standard.

6. Algèbres de Lie et leurs représentations.

Algèbres de Lie semi-simples; classification; racines et poids; représentations unitaires.

7. Algèbres d'Heisenberg et de Virasoro.

Algèbre d'Heisenberg, théorème de Stone-von Neumann; cas de dimension infinie et espace de Fock; algèbre de Virasoro.

8. Invariance conforme en physique.

Transformations conformes; mouvement Brownien bi-dimensionnel; systèmes électroniques mésoscopiques; champ libre quantique, invariance conforme et algèbre de Virasoro.

SUGGESTIONS DE SUJETS (mathématique ou physique):

Voici quelques propositions de sujets pour les travaux personnels. On pourra trouver des références abordant ces thèmes dans la bibliographie jointe (mais celle-ci n'est qu'indicative).

• *Groupes de Lorentz et de Poincaré*

Structure des groupes de Lorentz et de Poincaré; Représentation du groupe de Lorentz; Représentations unitaires du groupe de Poincaré (petits groupes et méthode des représentations induites); Interprétation; etc...

- A. Rougé, "Introduction à la physique subatomique", Les éditions de l'Ecole Polytechnique, 1997;
- W.K. Tung, "Group theory in physics", World scientific, 1985;
- S. Sternberg, "Group theory and physics", Cambridge Univ. Press;
- M. Hamermesh, "Group theory and its application to physical problem", Addison-Weley 1962;

• *Equation de Dirac et applications*

Equation de Klein-Gordon; Equation de Dirac; Spineurs; Covariance et représentation du groupe de Lorentz sur les spineurs; ondes planes et interprétation du spectre; couplage à un champ magnétique; facteur gyromagnétique; limite semi-classique. Quelques applications: Correction relativiste au spectre de l'atome d'hydrogène, Champs de Dirac et éléments de quantification; L'équation de Dirac dans un système non-relativiste: le graphène; etc...

- Références ci-dessus ainsi que:
- M. Peskin and D. Schroeder, "An introduction to quantum field theory", Addison-Wesley, 1995;
- S. Weinberg, "The quantum theory of fields", Cambridge Univ. Press 1995;

• *Invariance relativiste en théorie quantique des champs*

Lagrangien et théorie des champs; Symétries, théorème de Noether et applications; Champs libres: équation de Klein-Gordon et de Dirac; Espace de Fock, Formalisme hamiltonien et quantification: interprétation; Représentation de l'algèbre du groupe de Lorentz en théorie des champs; etc...

- Références ci-dessus.

• *Modèle standard et théorie de jauge*

Formalisme Lagrangien: champ libre scalaire, de spin 1/2 et 1; Notion d'invariance de jauge; Lagrangien pour un champ de jauge; Couplage entre les champs de matière et de jauge; Notion de brisure et symétrie et conséquences; Eléments du modèle standard; etc...

- P. Fayet, "Introduction à la théorie relativiste des champs", éd. de l'Ecole Polytechnique;
- K. Huang, "Quarks, leptons and gauge fields", World scientific ed.;
- I. Aitchison, A. Hey, "Gauge theories in particles physics", A. Higer ed.;
- A. Polyakov, "Gauge fields and string", Harwood academic publishers;
- M. Nakahara, "Geometry, Topology and Physics" Graduate student series in physics, Institute of Physics (IOP) Publishing, 1990;

- *Théorie de grande unification: su(5) par exemple.*

Particles du modèle standard; Groupe de jauge, charges et nombres quantiques; Notion d'unification et plongement du groupe de jauge du modèle standard; su(5) comme groupe de grande unification; Représentations de su(5); su(5) comme groupe de grande unification; etc...

- H. Georgi, "Lie groups in particle physics", Frontiers in physics, Benjamin readings, 1982;
- G. Ross, "Grand unified theories", Frontiers in physics, Benjamin readings, 1985;
- J. Ellis, "Grand unified theories in high energy physics", in Les Houches lectures, eds. R. Stora, M.K. Gaillard, 1982;
- R. Slanski, Physics Report 79 (1981) 1.

- *Le groupe des permutations et ses représentations*

Le groupe des permutations (sur des exemples); Construction de ses représentations, Symétriseurs d'Young; Tableaux d'Young; Exemples de représentations; Relation avec le groupe GL(n); etc...

- M. Hamermesh, "Group theory and its application to physical problems", Addison-Weley, 1962;
- W. Fulton and J. Harris, "Representation theory", Springer, 1991;
- S. Sternberg, "Group theory and physics", Cambridge Univ. Press, 1994;
- J.-P. Serre, "Représentations linéaires des groupes finis", Hermann, 1978;

- *Algèbres de courant (algèbres affines) et algèbre de Virasoro.*

Algèbre d'Heisenberg de dimension infinie et espace de Fock; Algèbres de Lie affines (comme extension des algèbres de Lie de dimension finie); Définitions et caractérisations; Exemples; Représentations (caractérisations et classifications); Exemples de représentations (e.g. fermions libres); Construction de Sugawara et algèbre de Virasoro; Applications en physique de basses dimensions; etc...

- V.G. Kac, "Infinite dimensional Lie algebras", Cambridge University Press, Cambridge 1990;
- P. Goddard and D. Olive, "Kac-Moody algebras and Virasoro algebras in

relation to quantum physics”, Int. J. Mod. Phys. A1 (1985) 303;
 – V.G. Kac and A.K. Reina, ”Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras”, World Scientific, Singapor, 1987.
 – Ph. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal, ”Conformal Field Theory”, Springer-Verlag, N.Y., (1997);

- *Opérateurs de vertex en math et en physique.*

Champs libres bosoniques et fermioniques en dimension deux; Algèbres d’Heisenberg de dimension infinie; Etats cohérents et opérateurs de vertex, Bosonisation-Fermionisation; Représentation fondamentale d’algèbre affines; Applications; etc...

- P. Goddard and D. Olive, ”Algebras, lattices and strings”, in vertex operators in math. and phys.”, MSRI 3, J. Lepowski et al eds. Springer verlag, N.Y. (1984).
- I. Frenkel and V.G. Kac, ”Basics representation of affine Lie algebras and dual resonance models”, Invent. Math. 62 (1980) 23-66;
- D. Senechal, ”An introduction to bosonization”, arXiv cond-mat/9908262.
- A. Gogolin, A. Nersesyan, and A. Tsvelik, Bosonization and Strongly Correlated Systems (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- V.G. Kac and A.K. Reina, ”Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras”, World Scientific, Singapor, 1987.

- *Algèbres de Lie et leurs déformations quantiques*

Déformations quantiques de $SL(2)$; Représentations; Groupes quantiques et déformations d’algèbres de Lie; Applications aux équations de Yang-Baxter; Modèles physiques et symétries quantiques (e.g algèbre de Hecke); etc...

- Y. Manin, ”Quantum groups and non-commutative geometry”, Publications du CRM, Université de Montreal, (1988);
- V. Chari and A. Pressley, ”A guide to quantum groups”, Cambridge University Press, Cambridge, (1994);
- M. Jimbo, ”Introduction to the Yang-Baxter-Equation” Int. Mod. Phys. A4 (1989) 3759.
- Ch. Kassel, ”Quantum groups”, Springer-Verlag, NY (1995).

- *Représentations du groupe de Heisenberg. Théorème de Stone-Von-Neumann*

Les relations de commutation d’Heisenberg du point de vue mathématique...

- G. Lion et M. Vergne, ”The Weil representation, Maslov index and Theta Series”, Progress in Mathematics, Birkhäuser, (1980);
- J. Rosenberg, ”A Selective History of the Stone - von Neumann Theorem”,

Contemporary Math (2003);

- *Algèbres de Clifford, spineurs et opérateurs de Dirac*

Un peu de géométrie différentielle ...

- N. Berline, E. Getzler et M. Vergne, "Heat kernels and Dirac operators". Grundlehren Text Editions. Springer-Verlag, Berlin, 2004;
- H. B. Lawson and M-L. Michelsohn, "Spin geometry" , Princeton University Press (1989);

- *D'autres exemples de sujets:*

- Géométrie des théories de jauge: les instantons;
- Symétrie (cachée) de l'atome d'hydrogène;
- Invariance relativiste, action, supersymétrie;
- Equation de Dirac en mécanique statistique: le modèle d'Ising;
- Applications des matrices aléatoires;
- etc.....

Cette liste n'est pas limitative, d'autres sujets sont possibles. Certains élèves peuvent trouver eux-même leurs sujets à partir de leurs lectures. Cela peut parfois conduire à des travaux intéressants. Si vous vous engagez dans cette aventure demandez aux enseignants leurs avis sur vos sources.

UNE BIBLIOGRAPHIE SUCCINTE (suite):

Références (mathématiques):

- Y. Kosmann-Schwarzbach, "Groupes et symétries", éd. del l'Ecole Polytechnique;
- J.-P. Serre, "Représentations linéaires des groupes finis", Hermann, 1978.
- J. Humphreys, "Introduction to Lie algebras and representation theory", Springer-Verlag, 1980.
- H. Weyl, "The classical group", Princeton. Univ. Press, 1966.
- W. Fulton, J. Harris, "Representation theory", Springer, 1991.
- C. Chevalley, "The algebraic theory of spinors and Clifford algebras", Springer 1997.

Références (physiques):

- J.-P. Blaizot, J.-C. Tolédano, "Symétries et physique microscopique", Ellipses, 1997.
- M. Hamermesh, "Group theory and its application to physical problems", Addison-Weley, 1962.
- W.-K. Tung, "Group theory in physics", World Scientific, 1985.
- S. Sternberg, "Group theory and physics", Cambridge Univ. Press, 1994.
- R.N. Cahn, "Semi-simple Lie algebras and their representations", Benjamin Cummins, Merlo Park CA, 1984.
- L. Landau, E. Lifschitz, "Mécanique quantique", Mir, 1980.
- M. Peskin, D. Schroeder, "An introduction to quantum field theory", Addison-Wesley, 1995.
- S. Weinberg, "The quantum theory of fields", Cambridge Univ. Press, 1995.