TRANSFORMATION DE LAPLACE POUR LES MODULES SIMPLEMENT EXPONENTIELS AVEC STRUCTURE PARABOLIQUE SUR L'ALGÈBRE DE WEYL

par

Claude Sabbah

Table des matières

Soit E un fibré holomorphe sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$, muni d'une connexion méromorphe ∇ à pôles sur $P\cup\{\infty\}$. Je note $(\widetilde{E},\nabla)$ le fibré méromorphe $E(*(P\cup\{\infty\}))$ avec sa connexion, et (E^o,∇^o) le fibré restriction de E à $U \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{P}^1 \smallsetminus [P\cup\{\infty\}]$ avec sa connexion.

Supposons seulement donnés (E^o,∇^o). Si h est une métrique *harmonique* pour (E^o,∇^o) avec un comportement « tame » (*cf.* [**4**]) en tout point de P et un comportement bien contrôlé à l'infini (définition à préciser plus loin), alors

(i) le faisceau sur $\mathbb{P}^1$ des section holomorphes de E^o dont la h-norme est au plus à croissance modérée en tout point de $P\cup\{\infty\}$ est un fibré méromorphe $\widetilde{E}$, muni d'une connexion méromorphe ∇, tels que $(\widetilde{E},\nabla)_{|U} = (E^o,\nabla^o)$;

(ii) la connexion ∇ est à singularité régulière en tout point de P, et, au voisinage de ∞, il existe une base de $\widetilde{E}$ dans laquelle la connexion a un pôle d'ordre 2.

On veut de plus, à l'aide de la métrique, définir une filtration parabolique de $(\widetilde{E},\nabla)$ en tout point de $P\cup\{\infty\}$. Une fois cette notion définie, la notion de stabilité s'ensuit, et la correspondance ci-dessus devrait être une équivalence de catégories.

Je vais donc rappeler ce qu'est une filtration parabolique en un point de P, où ∇ a une singularité régulière (définition de C. Simpson, [**4**]), puis j'étends cette définition en ∞. Comme la question est locale, je vais travailler sur un disque centré en 0, de coordonnée x.

1. Structure parabolique

1.a. Filtrations logarithmiques. Soit $(\widetilde{\mathscr{R}},\nabla)$ un fibré méromorphe sur le disque D de coordonnée x, à pôle en $x=0$ uniquement, muni d'une connexion méromorphe ∇ *à singularité régulière en* 0 (la lettre $\widetilde{\mathscr{R}}$ est pour rappeler la condition de singularité régulière ; c'est ce que j'ai noté $\widetilde{E}$ ci-dessus, en un point $p_j\in P$).

On peut montrer qu'il existe une unique filtration $V^\bullet\widetilde{\mathscr{R}}$ (décroissante) — on dit qu'elle est canonique, c'est-à-dire canoniquement attachée à $(\widetilde{\mathscr{R}},\nabla)$ — indexée par $\mathbb{R}$ [(1)] : chaque $V^a\widetilde{\mathscr{R}}$ est un $\mathscr{O}_D$-module libre de rang fini, tel que $\mathscr{O}_D(*0)\otimes_{\mathscr{O}_D}(V^a\widetilde{\mathscr{R}})=\widetilde{\mathscr{R}}$, et sur lequel la connexion ∇ est à pôle logarithmique, les valeurs propres α du résidu de ∇ sur $V^a\widetilde{\mathscr{R}}$ ayant une partie réelle contenue dans $[a,a+1[$.

Je note $\mathrm{gr}_V^a\widetilde{\mathscr{R}}$ le quotient $V^a\widetilde{\mathscr{R}}/V^{>a}\widetilde{\mathscr{R}}$ et, pour tout α de partie réelle égale à a, je note $\psi_0^\alpha\widetilde{\mathscr{R}}$ l'espace propre généralisé de l'endomorphisme $\mathrm{Rés}\,\nabla$ (*i.e.*, l'action induite par $x\nabla_{\partial_x}$) sur $V^a\widetilde{\mathscr{R}}$ pour la valeur propre α. On remarque que

$$V^a\widetilde{\mathscr{R}}/xV^a\widetilde{\mathscr{R}}=\bigoplus_{a'\in[a,a+1[}\mathrm{gr}_V^{a'}\widetilde{\mathscr{R}}=\bigoplus_{\alpha\mid\mathrm{Ré}\,\alpha\in[a,a+1[}\psi_0^\alpha\widetilde{\mathscr{R}},$$

la décomposition étant la décomposition en sous-espaces propres généralisés de $\mathrm{Rés}\,\nabla$. On remarque aussi que, pour tout $\ell\in\mathbb{Z}$, on a un isomorphisme $\psi_0^\alpha\widetilde{\mathscr{R}}\to\psi_0^{\alpha+\ell}\widetilde{\mathscr{R}}$ induit par la multiplication par x^ℓ, compatible à l'action de la partie nilpotente du résidu.

Dans la suite, je note A le sous-ensemble fini des $\alpha\in\mathbb{C}$ tels que $\psi_0^\alpha\widetilde{\mathscr{R}}\neq 0$ et $\mathrm{Ré}\,\alpha\in\,]-1,0]$ (il sera plus commode, dans le cadre des $\mathscr{D}$-modules, de choisir cet intervalle plutôt que $[0,1[$; il correspond à une condition de croissance L^2).

Par ailleurs, on peut montrer que les données suivantes sont équivalentes :

(i) une filtration décroissante $\widetilde{\mathscr{R}}^b$ de $\widetilde{\mathscr{R}}$, indexée par un sous-ensemble fini de $[0,1[$, par des sous-fibrés de même rang que $\widetilde{\mathscr{R}}$ et sur lesquels la connexion ∇ est à pôle logarithmique,

(ii) pour tout $\alpha\in A$, une filtration décroissante exhaustive $\psi_0^{\alpha,b}\widetilde{\mathscr{R}}$ de $\psi_0^\alpha\widetilde{\mathscr{R}}$, indexée par un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$, telle que chaque $\psi_0^{\alpha,b}\widetilde{\mathscr{R}}$ soit stable par la partie nilpotente du résidu de ∇ sur $\psi_0^\alpha\widetilde{\mathscr{R}}$.

La correspondance s'obtient, dans un sens,

– en étendant d'abord l'indexation de la filtration (1) par la formule $\widetilde{\mathscr{R}}^{b+\ell}=x^\ell\widetilde{\mathscr{R}}^b$, pour tout $\ell\in\mathbb{Z}$ (on dit alors qu'une telle filtration est *logarithmique*),

---

(1) c'est-à-dire par une réunion finie d'ensembles $a+\mathbb{Z}$, avec $a\in\mathbb{R}$.

– puis en associant à la filtration $\widetilde{\mathscr{R}}^b$ étendue les filtrations $\psi_0^{\alpha,b}\widetilde{\mathscr{R}}$ définies ainsi : sur chaque $\mathrm{gr}_V^a\widetilde{\mathscr{R}}$ (gradué pour la filtration canonique V), la filtration $\widetilde{\mathscr{R}}^b$ induit une filtration stable par l'endomorphisme induit par $x\partial_x$; cette filtration est donc compatible à la décomposition en somme directe $\mathrm{gr}_V^a\widetilde{\mathscr{R}} = \oplus_{\alpha\mid\mathrm{R\acute{e}}\,\alpha=a}\psi_0^\alpha\widetilde{\mathscr{R}}$ et chaque composante est stable par $x\partial_x$, donc par la partie nilpotente de $x\partial_x$.

Le procédé consiste donc à comparer une filtration logarithmique quelconque $\widetilde{\mathscr{R}}^b$ à la filtration canonique. On dit que la filtration induite par $\widetilde{\mathscr{R}}^b$ sur $\psi_0^\alpha\widetilde{\mathscr{R}}$ est la *filtration parabolique* associée à la valeur propre α.

De même, il est naturel d'étendre la définition de la filtration à tous les $\psi_0^\alpha\widetilde{\mathscr{R}}$, et pas seulement à ceux pour lesquels $\alpha\in A$. On la définit de sorte que, pour tout $\ell\in\mathbb{Z}$, l'isomorphisme $x^\ell:\psi_0^\alpha\widetilde{\mathscr{R}}\to\psi_0^{\alpha+\ell}\widetilde{\mathscr{R}}$ induise un isomorphisme filtré

$$x^\ell:\psi_0^{\alpha,b}\widetilde{\mathscr{R}}\longrightarrow\psi_0^{\alpha+\ell,b+\ell}\widetilde{\mathscr{R}}.$$

***Définition 1.1* (degré parabolique local).** Soit $(\widetilde{\mathscr{R}},\widetilde{\mathscr{R}}^\bullet,\nabla)$ un germe fibré méromorphe à connexion à singularité régulière, muni d'une filtration logarithmique. Le degré parabolique local est défini par la formule

$$\deg(\widetilde{\mathscr{R}},\widetilde{\mathscr{R}}^\bullet,\nabla)=-\mathrm{R\acute{e}}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{R\acute{e}s}(\nabla,\widetilde{\mathscr{R}}^0)+\sum_{b\in[0,1[}b\dim\mathrm{gr}^b\widetilde{\mathscr{R}}.$$

(*Cf.* la définition dans l'article de C. Simpson [**4**]). La notation $\mathrm{gr}^b\widetilde{\mathscr{R}}$ signifie, de manière analogue au cas de la filtration V, le quotient $\widetilde{\mathscr{R}}^b/\widetilde{\mathscr{R}}^{>b}$. On peut alors exprimer le degré parabolique en fonction des filtrations $\psi_0^{\alpha,\bullet}\widetilde{\mathscr{R}}$ ($\alpha\in A$). On a

$$\deg(\widetilde{\mathscr{R}},\widetilde{\mathscr{R}}^\bullet,\nabla)=\sum_{\alpha\in A}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\Big[(\ell-\mathrm{R\acute{e}}\,\alpha)\dim\psi_0^{\alpha,\ell}\widetilde{\mathscr{R}}+\sum_{b\in[\ell,\ell+1[}(b-\ell)\dim\mathrm{gr}^b\psi_0^\alpha\widetilde{\mathscr{R}}\Big].\tag{1.2}$$

1.b. Filtrations pseudo-logarithmiques. Dans le cas des singularités irrégulières, la notion de filtration parabolique nécessite l'introduction de filtrations pseudo-logarithmiques. Soit $\widetilde{E}$ un fibré méromorphe sur le disque D de coordonnée x, à pôle en $x=0$ uniquement, muni d'une connexion méromorphe ∇ (qui peut avoir une singularité irrégulière en 0, mais n'a pas d'autre pôle). Pour simplifier, je fais l'hypothèse que la structure formelle en $x=0$ est *sans ramification*, c'est-à-dire que le *formalisé* $\widetilde{E}^\wedge\overset{\text{déf}}{=}\mathbb{C}[\![x]\!]\otimes_{\mathbb{C}\{x\}}\widetilde{E}$ se décompose (ainsi que sa connexion) en $\oplus_q(\mathscr{E}^{q(x)}\otimes\widetilde{\mathscr{R}}_q^\wedge)$, où

– la somme est prises sur un nombre fini de $q(x)\in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$,

– $\mathscr{E}^{q(x)}$ est le fibré méromorphe trivial de rang 1 ayant pour connexion $d+dq$,

– $\widetilde{\mathscr{R}}_q$ est un germe de fibré méromorphe à connexion ayant une singularité régulière en 0.

Remarques 1.3

(i) En toute généralité, il est connu (théorème de Turrittin) qu'une telle décomposition n'existe qu'après image inverse par un revêtement ramifié $t\mapsto x=t^r$ pour un certain $r\in\mathbf{N}$; ici, je fais donc l'hypothèse que $r=1$.

(ii) L'ordre du pôle des q intervenant dans la décomposition peut être plus grand que 1. Plus loin, pour simplifier encore, je ferai l'hypothèse que chaque q a au plus un pôle simple.

(iii) On peut aussi montrer que, si $(\widetilde{E},\nabla)$ est sans ramification, alors tout germe de sous-fibré méromorphe à connexion $(\widetilde{F},\nabla)$ est aussi sans ramification et admet une décomposition $(\widetilde{F}^{\wedge},\nabla)=\oplus_q(\mathscr{E}^{q(x)}\otimes\widetilde{\mathscr{R}}_q'^{\wedge})$ avec $(\widetilde{\mathscr{R}}_q',\nabla)\subset(\widetilde{\mathscr{R}}_q,\nabla)$ (en effet, il n'y a pas de morphisme non trivial $\mathscr{E}^{q_1(x)}\otimes\widetilde{\mathscr{R}}_{q_1}^{\wedge}\to\mathscr{E}^{q_2(x)}\otimes\widetilde{\mathscr{R}}_{q_2}^{\wedge}$ compatible aux connexions, si $q_1\neq q_2$).

J'appelle *réseau* (« lattice » en anglais) de $\widetilde{E}$ un $\mathscr{O}_D$-sous-module libre E (*i.e.*, un fibré holomorphe) égal à $\widetilde{E}$ hors de 0. On sait qu'il y a équivalence entre la donnée d'un réseau E de $\widetilde{E}$ et celle d'un réseau $E^{\wedge}$ de son formalisé $\widetilde{E}^{\wedge}$. Je dirai qu'un réseau E de $\widetilde{E}$ est *pseudo-logarithmique* si son formalisé $E^{\wedge}$ est *somme directe de réseaux logarithmiques des $\widetilde{\mathscr{R}}_q$ tordus par $\mathscr{E}^{q(x)}$*.

Je noterai alors $\widehat{\psi}_0^{\alpha}\widetilde{E}\overset{\text{déf}}{=}\oplus_q\psi_0^{\alpha}\widetilde{\mathscr{R}}_q$, qui est muni de l'endomorphisme induit par $x\partial_x$. J'appelle *monodromie formelle* l'endomorphisme $\exp -2i\pi x\partial_x$, dont la partie semi-simple sur $\psi_0^{\alpha}\widetilde{\mathscr{R}}_q$ est $\exp(-2i\pi\alpha)\,\mathrm{Id}$ et la partie nilpotente est $\exp -2i\pi(x\partial_x-\alpha)$. On peut alors montrer qu'il y a équivalence entre la donnée d'une filtration pseudo-logarithmique de $\widetilde{E}$ indexée par $\mathbb{R}$ et celle, pour tout $\alpha\in B$, d'une filtration de $\widehat{\psi}_0^{\alpha}\widetilde{E}$ stable par la (partie nilpotente de la) monodromie formelle.

La définition 1.1 et la formule (1.2) s'étendent au cas pseudo-logarithmique.

1.c. Stabilité. Je donne ici une définition très générale, qui ne fait (presque) aucune hypothèse sur la nature des singularités de la connexion. Dans la suite, je mettrai les hypothèses qu'il faut pour avoir une bonne correspondance avec les fibrés harmoniques. Une conjecture est que, en définissant convenablement le type de comportement que peut avoir la métrique harmonique, on devrait pourvoir supprimer les hypothèses sur la nature des singularités.

Si $\widetilde{E}$ est un fibré méromorphe sur une surface de Riemann compacte, muni d'une connexion ∇ sans ramification en ses points singuliers et d'une filtration $\widetilde{E}^{\bullet}$ pseudo-logarithmique, le degré parabolique est, par définition, la somme de tous les degrés paraboliques locaux. Par la formule des résidus, il s'écrit

$$\deg(\widetilde{E},\widetilde{E}^{\bullet})=\deg\widetilde{E}^{0}+\sum_{b\in[0,1[}b\dim\mathrm{gr}^{b}\,\widetilde{E}.$$

On dit que $(\widetilde{E},\widetilde{E}^{\bullet},\nabla)$ est *stable* si, pour tout sous-fibré méromorphe à connexion $(\widetilde{F},\nabla)\subset(\widetilde{E},\nabla)$, muni de la filtration induite $\widetilde{F}^{\bullet}=\widetilde{E}^{\bullet}\cap\widetilde{F}$ (qui est aussi pseudo-logarithmique, d'après la remarque 1.3), on a l'inégalité des pentes

$$\frac{\deg(\widetilde{F},\widetilde{F}^{\bullet})}{\mathrm{rg}\,\widetilde{F}}<\frac{\deg(\widetilde{E},\widetilde{E}^{\bullet})}{\mathrm{rg}\,\widetilde{E}}\,.$$

Remarque 1.4. Si on a une suite exacte $0 \to \widetilde{E}' \to \widetilde{E} \to \widetilde{E}'' \to 0$ de fibrés méromorphes à connexion, et si $\widetilde{E}$ est muni d'une filtration pseudo-logarithmique, celle-ci induit de manière naturelle une filtration du même type sur $\widetilde{E}'$ et $\widetilde{E}''$, et le degré parabolique de $\widetilde{E}$ est somme des degrés paraboliques de $\widetilde{E}'$ et $\widetilde{E}''$ pour les filtrations induites. On en déduit que, dans la définition de stabilité, on peut considérer des fibré méromorphes quotients $\widetilde{E}''$, munis de la filtration induite, et la condition de stabilité se traduit par $\operatorname{pente}(\widetilde{E}'', \widetilde{E}''^{\bullet}) > \operatorname{pente}(\widetilde{E}, \widetilde{E}^{\bullet})$ pour tout tel quotient.

2. Passage aux $\mathscr{D}$-modules

Soit $\mathscr{D}_{\mathbb{P}^1}$ le faisceau des opérateurs différentiels holomorphes. Sur une disque D de coordonnée x comme plus haut, c'est le faisceau $\mathscr{O}_D\langle\partial_x\rangle$ des opérateurs de la forme $\sum_i a_i(x)\partial_x^i$, avec a_i holomorphe.

2.a. Situation locale. Si $(\widetilde{E}, \nabla)$ est un fibré méromorphe sur D, avec une connexion méromorphe, je munis $\widetilde{E}$ d'une structure de $\mathscr{D}_D$-module à gauche en faisant agir ∂_x par ∇_{∂_x}. Il est connu qu'on obtient ainsi un $\mathscr{D}_D$-module holonome.

Mais il existe beaucoup de $\mathscr{D}_D$-modules holonomes dont la restriction à $D \smallsetminus \{0\}$ soit (E^o, ∇^o). Il s'agit de trouver ce qu'on appelle « l'extension minimale » de (E^o, ∇^o).

Ce module, dont on montre qu'il existe et est unique, est caractérisé par les propriétés suivantes :

– sa restriction à $D \smallsetminus \{0\}$ est (E^o, ∇^o),
– ce module n'a pas de sous-module à support en 0,
– ce module n'a pas de quotient à support en 0.

Le $\mathscr{D}_D$-module associé à $(\widetilde{E}, \nabla)$ comme plus haut satisfait les deux premières propriétés, mais il peut arriver que la troisième ne soit pas satisfaite. Autrement dit, il peut arriver que le $\mathscr{D}_D$-module « extension minimale » ne corresponde pas à un fibré méromorphe. Il est important de bien faire la distinction car, lorsqu'on considère des modules sur $\mathbb{P}^1$, les transformés de Fourier peuvent être différents.

Je vais donner une autre façon de voir l'extension minimale, lorsque la singularité est *régulière*.

Pour tout $\mathscr{D}_D$-module holonome $\mathscr{M}$ à singularité régulière en 0, on sait associer une filtration canonique $V^a\mathscr{M}$ par des $\mathscr{O}_D$ sous-modules stables par $x\partial_x$. Dans cette situation générale, $V^a\mathscr{M}$ peut ne pas être un fibré. On a aussi les deux propriétés :

$$x \cdot V^a\mathscr{M} \subset V^{a+1}\mathscr{M}, \quad \text{avec égalité pour tout } a > -1, \tag{2.1}$$

$$\partial_x V^a\mathscr{M} \subset V^{a-1}\mathscr{M}. \tag{2.2}$$

Exemple 2.3. Si $\mathscr{M}$ est défini par l'équation $x = 0$ (correspondant ainsi à une masse de Dirac à l'origine), on a $V^a\mathscr{M} = 0$ si $a \notin \{-1, -2, \ldots\}$, et les $V^a\mathscr{M}$ sont des $\mathscr{O}_D$-modules cohérents à support l'origine (donc des espaces vectoriels de dimension finie).

Mais en toute généralité, on sait que $V^a\mathscr{M}$ est un fibré holomorphe (de rang indépendant de a) pour tout $a > -1$. Plus précisément, il est connu que le module $\widetilde{\mathscr{M}} \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{O}_D(*0) \otimes_{\mathscr{O}_D} \mathscr{M}$ est encore holonome, et $\widetilde{\mathscr{M}}$ est le $\mathscr{D}_D$-module associé à un fibré méromorphe à connexion $(\widetilde{E}, \nabla)$. Alors on a, pour tout $a > -1$, $V^a\mathscr{M} = V^a\widetilde{\mathscr{M}}$.

En particulier, pour tout $a > -1$, on a $\mathrm{gr}_V^a \mathscr{M} = \mathrm{gr}_V^a \widetilde{\mathscr{M}}$, de manière compatible avec le résidu de la connexion, donc aussi, pour tout α de partie réelle > -1, on a $\psi_0^\alpha \mathscr{M} = \psi_0^\alpha \widetilde{\mathscr{M}}$.

La différence entre $\mathscr{M}$ et $\widetilde{\mathscr{M}}$ vient essentiellement de $\psi_0^{-1}\mathscr{M}$. Plus précisément, on peut montrer que le $\mathscr{D}_D$-module holonome $\mathscr{M}$ à singularité régulière en 0 est connu dès qu'on connaît les $\psi_0^\alpha\mathscr{M}$ avec leur endomorphisme résidu, pour α de partie réelle dans $]-1, 0]$ et pour $\alpha = -1$, avec la donnée supplémentaire de deux applications

$$\mathrm{can}_0 : \psi_0^0\mathscr{M} \longrightarrow \psi_0^{-1}\mathscr{M} \quad \text{et} \quad \mathrm{var}_0 : \psi_0^{-1}\mathscr{M} \longrightarrow \psi_0^0\mathscr{M}$$

qui satisfont à

$$\mathrm{can}_0 \circ \mathrm{var}_0 = x\partial_x + 1, \quad \mathrm{var}_0 \circ \mathrm{can}_0 = x\partial_x.$$

Ces applications sont induites par les applications ∂_x et x, ce qui est bien défini grâce aux propriétés (2.2) et (2.1).

Exemple 2.4. Dans le cas du fibré méromorphe $\widetilde{\mathscr{M}}$, var_0 (induit par la multiplication par x) est un isomorphisme, et par suite la donnée de $\psi_0^{-1}\widetilde{\mathscr{M}}$ est superflue pour reconstituer $\widetilde{\mathscr{M}}$.

On peut montrer que $\mathscr{M}$ (à singularité régulière en 0) est *extension minimale en* 0 si et seulement si can_0 est *surjectif* et var_0 est *injectif*.

Toujours dans ce cadre local, le complexe de de Rham holomorphe attaché à un $\mathscr{D}_D$-module holonome à singularité régulière $\mathscr{M}$ est le complexe

$$\mathscr{M} \xrightarrow{\partial_x} \mathscr{M}$$

et on peut montrer qu'il est isomorphe à son sous-complexe

$$V^0\mathscr{M} \xrightarrow{\partial_x} V^{-1}\mathscr{M}.$$

Lorsque $\mathscr{M}$ est extension minimale, on peut voir que le morphisme ci-dessus est *surjectif*.

2.b. Filtration parabolique. Je cherche maintenant à étendre, toujours dans un cadre local et pour un $\mathscr{D}_D$-module holonome à singularité régulière en 0, la notion de filtration parabolique. Comme on a vu que le germe de $\mathscr{M}$ en 0 est déterminé par les $\psi_0^\alpha\mathscr{M}$ ($\alpha \in A \cup \{-1\}$) avec leur endomorphisme résidu et les deux morphismes can_0 et var_0, je vais définir la notion de filtration parabolique sur ces données.

Ainsi, une filtration parabolique sur le germe $\mathscr{M}$ consiste en la donnée, pour tout $\alpha \in A \cup \{-1\}$, d'une filtrations décroissante $\psi_0^{\alpha,b}\mathscr{M}$ de $\psi_0^\alpha\mathscr{M}$ par des sous-espaces vectoriels invariants par le résidu, et de sorte que les deux applications can_0 et var_0 préservent les filtrations.

Exemples 2.5

(i) Si $\mathscr{M} = \widetilde{\mathscr{M}}$ est un fibré méromorphe à connexion, alors var_0 est un isomorphisme et la filtration sur $\psi_0^{-1}\widetilde{\mathscr{M}}$ est entièrement déterminée par celle sur $\psi_0^0\widetilde{\mathscr{M}}$, d'après la dernière condition ci-dessus. La donnée de la filtration parabolique sur $\psi_0^{-1}\widetilde{\mathscr{M}}$ est donc superflue, et on retrouve la notion de filtration parabolique pour les fibrés méromorphes.

(ii) En général, il peut exister plusieurs filtrations paraboliques sur $\mathscr{M}$ qui donnent lieu au même fibré méromorphe avec filtration parabolique : il suffit de choisir différentes filtrations paraboliques de $\psi_0^{-1}\mathscr{M}$, avec les seules conditions (outre l'invariance par le résidu) que, pour tout $b \in [0,1[$,

$$\psi_0^{-1,b}\mathscr{M} \supset \mathrm{can}_0(\psi_0^{0,b}\mathscr{M}), \tag{2.6}$$

$$\mathrm{var}_0(\psi_0^{-1,b}\mathscr{M}) \subset \psi_0^{0,b}\mathscr{M}. \tag{2.7}$$

(iii) Si $\mathscr{M}$ est *extension minimale*, il existe une filtration parabolique « minimale » définie sur $\mathscr{M}$ par une filtration parabolique du fibré méromorphe $\widetilde{\mathscr{M}}$: puisque can_0 est surjectif, on peut prendre, pour tout $b \in [0,1[$,

$$\psi_0^{-1,b}\mathscr{M} = \mathrm{can}_0(\psi_0^{0,b}\mathscr{M}),$$

et on a alors $\mathrm{var}_0(\psi_0^{-1,b}\mathscr{M}) \subset \psi_0^{0,b}\mathscr{M}$ car, d'une part, $\mathrm{var}_0 \circ \mathrm{can}_0$ est égal au résidu sur $\psi_0^0\mathscr{M}$ et, d'autre part, la filtration $\psi_0^{0,b}\mathscr{M}$ est invariante par le résidu. De même, on voit que la filtration proposée sur $\psi_0^{-1}\mathscr{M}$ est invariante par le résidu.

Lorsque $\mathscr{M}$ est extension minimale, la filtration parabolique sur le fibré méromorphe associé $\widetilde{\mathscr{M}}$ détermine donc une « meilleure » filtration parabolique sur $\mathscr{M}$. Essayons d'aller en sens inverse. J'appellerai *filtration parabolique microlocale* de $\mathscr{M}$ la donnée de filtrations paraboliques sur tous les $\psi_0^\alpha\mathscr{M}$ (invariantes par le résidu, bien sûr), pour α dans l'ensemble A' obtenu en ôtant 0 de A et en le remplaçant par -1.

Pour un fibré méromorphe $\widetilde{\mathscr{M}}$, la donnée d'une filtration parabolique est équivalente à celle d'une filtration parabolique microlocale, puisque var_0 est un isomorphisme.

Pour $\mathscr{M}$ quelconque, la donnée d'une filtration parabolique microlocale ne permet pas, en général, de reconstruire une filtration parabolique (c'est-à-dire une filtration sur $\psi_0^0\mathscr{M}$), même lorsque $\mathscr{M}$ est extension minimale : étant donnée la filtration $\psi_0^{-1,b}\mathscr{M}$, il peut exister plusieurs filtrations $\psi_0^{0,b}\mathscr{M}$ qui satisfont à (2.6) et (2.7). Cette question se posera lorsqu'on considérera la transformation de Laplace avec filtration parabolique. C'est pourquoi j'introduis la notion d'admissibilité, dans un cadre plus général que celui des singularités régulières.

Soit $\widetilde{\mathscr{M}}$ un fibré méromorphe à connexion sur le disque. On suppose seulement que la connexion à une singularité sans ramification. On se donne une filtration *pseudo-logarithmique* $\widetilde{\mathscr{M}}^b$ de $\widetilde{\mathscr{M}}$, comme définie au § 1.b.

***Définition 2.8* (d'une filtration pseudo-logarithmique admissible)**
On dira que la filtration pseudo-logarithmique $\widetilde{\mathscr{M}}^b$ est *admissible* si la filtration parabolique des $\psi_0^\alpha\widetilde{\mathscr{M}}$ $(\alpha \in A)$ satisfait la contrainte suivante pour $\alpha = 0$:

$$\widehat{\psi}_0^{0,b}\widetilde{\mathscr{M}} = \begin{cases} 0 & \text{si } b > 0, \\ \widehat{\psi}_0^0\widetilde{\mathscr{M}} & \text{si } b \leqslant 0. \end{cases} \tag{2.8)(*}$$

(Autrement dit, sur la partie correspondant à la valeur propre 1 de la monodromie formelle, la filtration est la filtration canonique de Deligne.)

On peut de même, pour un $\mathscr{D}_D$-module $\mathscr{M}$ à singularité régulière, définir la notion de filtration parabolique microlocale admissible, en imposant que la filtration sur $\psi_0^{-1}\mathscr{M}$ soit triviale comme ci-dessus.

Lorsqu'on impose la condition d'admissibilité, l'ambiguïté indiquée plus haut disparaît, et il revient au même, dans tous les cas, de se donner une filtration parabolique admissible ou une filtration parabolique microlocale admissible (puisqu'on n'a le choix de la filtration ni sur $\psi_0^{-1}\mathscr{M}$ ni sur $\psi_0^0\mathscr{M}$).

2.c. Situation globale (stabilité et degré). On se place maintenant sur la droite affine $\mathbb{A}^1$ munie de la coordonnée t et sur sa complétion $\mathbb{P}^1$. Soit $(\widetilde{E}, \nabla)$ un fibré méromorphe à connexion sur $\mathbb{P}^1$, à pôle sur $P \cup \{\infty\}$, avec des singularités régulières en P et une singularité irrégulière en ∞. Il lui correspond un $\mathscr{D}_{\mathbb{P}^1}$-module holonome $\widetilde{\mathscr{M}}$, et dans la suite on garde toujours la propriété de fibré méromorphe au voisinage de l'infini, autrement dit on garde la structure de $\mathscr{D}_{\mathbb{P}^1}(*\infty)$-module. L'espace des sections globales de $\mathscr{D}_{\mathbb{P}^1}(*\infty)$ est l'algèbre de Weyl $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$. Ainsi, l'espace $\widetilde{M}$ des sections globales de $\widetilde{\mathscr{M}}$ est un module à gauche holonome sur l'algèbre de Weyl $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$.

De même, si $\mathscr{M}$ est l'extension minimale de $\widetilde{\mathscr{M}}$ en chaque point p de P (et égal à $\widetilde{\mathscr{M}}$ au voisinage de l'infini), alors l'espace des sections globales M de $\mathscr{M}$ est un module holonome sur $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$. Je dirai que M est *extension minimale* (*i.e.*, M n'a ni sous-module ni quotient à support dans un point de $\mathbb{A}^1$).

Étant donné un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module M muni d'une filtration parabolique admissible (ou, ce qui revient au même, d'une filtration parabolique microlocale admissible), je dis que M est *stable* si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

– M est extension minimale,
– $\widetilde{M}$ (muni de la filtration parabolique admissible provenant de celle de M) est stable.

Le degré parabolique de M est alors défini comme étant celui de $\widetilde{M}$ (pour les filtrations paraboliques admissibles correspondantes).

Je considère les catégories suivantes (où les morphismes sont les morphismes de fibrés à connexion ou de $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-modules, compatibles aux filtrations paraboliques) :

– La catégorie $\mathrm{FMPA}(\mathbb{A}^1)$ des fibrés rationnels à connexion sur $\mathbb{A}^1$, munis d'une filtration parabolique admissible.

– La sous-catégorie $\mathrm{FMPA}_0^{\mathrm{st}}(\mathbb{A}^1)$ formée des objets *stables de degré* 0.

– La catégorie $\mathrm{DMPA}(\mathbb{A}^1)$ des $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-modules holonomes, munis d'une filtration parabolique admissible.

– La sous-catégorie $\mathrm{DMPA}_0^{\mathrm{st}}(\mathbb{A}^1)$ formée des objets *stables de degré* 0.

On dispose des foncteurs "Extension minimale" FMPA $\mapsto$ DMPA et "localisation hors des singularités" DMPA $\mapsto$ FMPA, qui sont bien définis au niveau des objets munis de filtrations paraboliques admissibles.

Proposition 2.9. *Ces foncteurs sont des équivalences de catégories.*

3. $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-modules simplement exponentiels

Soit M un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module holonome. Je dis que M est *simplement exponentiel* si

– M n'a que des singularités régulières à distance finie,

– la décomposition formelle de M (*i.e.*, de $\mathscr{M}$) à l'infini est de la forme $\oplus_i(\mathscr{E}^{a_it}\otimes\widetilde{\mathscr{R}}_i)$ où, si on note $t'=1/t$ la coordonnée à l'infini, chaque $\widetilde{\mathscr{R}}_i$ est un $\mathbb{C}\,[\![t']\!]\,[t'^{-1}]$-module libre, dont la connexion est à singularité régulière (en $t'=0$).

Cette condition est bien plus restrictive que la condition « à croissance exponentielle » introduite dans [**2**, Chap. XII].

On a cependant :

***Proposition 3.1* (phase stationnaire formelle).** *Si M est simplement exponentiel, il en est de même de son transformé de Laplace ${}^FM$. De plus, la formule de la phase stationnaire formelle s'applique, c'est-à-dire que la décomposition formelle de ${}^FM$ en $\tau=\infty$ s'écrit $\oplus_{p\in P}M_p^\mu$, si M_p^μ est le microlocalisé de M au point $p\in\mathbb{A}^1$.*

Rappelons que, si M est un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module, on note ${}^FM$ et on appelle *transformé de Laplace* le $\mathbb{C}$-espace vectoriel M muni de l'action de $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\rangle$ pour laquelle la multiplication par τ est l'action de ∂_t et l'action de ∂_τ est la multiplication par $-t$. Je donnerai plus d'indications sur le microlocalisé plus loin (voir cependant par exemple [**3**, Chap. V]). Il faut seulement retenir deux propriétés :

– M_p^μ ne dépend que du germe analytique de M en p,

– M_p^μ est entièrement déterminé par les $\psi_p^\alpha M$ munis de leur endomorphisme résidu, pour α dans l'ensemble A' obtenu en supprimant 0 de A et en y ajoutant -1 (par comparaison, le germe $\widetilde{M}_p$ du fibré méromorphe $\widetilde{M}$ en p est déterminé par les $\psi_p^\alpha M$ munis de leur endomorphisme résidu, pour α dans l'ensemble A).

On peut énoncer cette proposition d'une autre manière, en utilisant les ψ. Je note $\widehat{\infty}$ le point $\tau=\infty$. Le module ${}^F\!M$ à une singularité irrégulière en $\widehat{\infty}$, mais comme il est sans ramification, on peut définir les $\psi_{\widehat{\infty}}^{\alpha}\,{}^F\!M$, pour α variant dans un ensemble que je note $A_{\widehat{\infty}}$, qui contient 0 mais pas -1.

La proposition dit d'abord que $A_{\widehat{\infty}}$ est la réunion des A_p, mais aussi que $\psi_{\widehat{\infty}}^{\alpha}\,{}^F\!M \simeq \oplus_{p\in P}\psi_p^{\alpha}\mathscr{M}$ (avec le même endomorphisme résidu) si $\alpha\neq 0$, et (attention) $\psi_{\widehat{\infty}}^{0}\,{}^F\!M \simeq \oplus_{p\in P}\psi_p^{-1}\mathscr{M}$ (c'est ici qu'intervient le microlocalisé).

Esquisse de démonstration de la proposition 3.1. La première partie est classique. Pour la seconde, on note $\widehat{\boldsymbol{k}}$ le corps $\mathbb{C}\,[\![\theta]\!]\,[\theta^{-1}]$, en posant $\theta=\tau^{-1}$. Alors, puisque M est régulier en chaque $p\in\mathbb{A}^1$, on a $\dim_{\widehat{\boldsymbol{k}}} M_p^{\mu}=\mu_p(M)$, si $\mu_p(M)=\dim\oplus_{\alpha\in A'}\psi_p^{\alpha}M$, où l'ensemble A' est obtenu à partir de l'ensemble A en supprimant 0 et en ajoutant -1.

La proposition 1.5, page 79 de [**2**] nous permet d'écrire $\operatorname{rg}{}^F\!M=\sum_p\mu_p(M)$. Donc, si on note G le $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\rangle$-module $\mathbb{C}[\tau,\tau^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}[\tau]}{}^F\!M$ et $\widehat{G}$ le formalisé $\mathbb{C}\,[\![\theta]\!]\otimes_{\mathbb{C}[\theta]}G$, on en déduit que $\dim_{\widehat{\boldsymbol{k}}}\widehat{G}=\sum_p\dim_{\widehat{\boldsymbol{k}}}M_p^{\mu}$.

Maintenant, on peut appliquer le même argument que dans [**3**, Prop. V.3.6, p. 193], pour obtenir l'isomorphisme $\widehat{G}\xrightarrow{\sim}\oplus M_p^{\mu}$ de $\mathbb{C}\,[\![\theta]\!]\,[\theta^{-1}]$-modules avec action de $\theta^2\partial_\theta=t$. □

Ainsi, la catégorie des $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-modules simplement exponentiels reste stable par transformation de Laplace (et transformation inverse). Les singularités à distance finie de M décrivent la structure formelle de ${}^F\!M$ à l'infini. En utilisant la transformation inverse, on voit que la décomposition formelle de M à l'infini est déterminée par les singularités de ${}^F\!M$ à distance finie.

On peut noter une subtilité ici : la structure formelle de M à l'infini ne détermine que les microlocalisés de ${}^F\!M$ en ses points singuliers $\widehat{p}$ (qui sont réguliers) à distance finie.

4. Extension minimale et stabilité

Soit $\widetilde{M}$ un fibré méromorphe à connexion ∇ sur $\mathbb{A}^1$, simplement exponentiel en tant que $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module et $(\widetilde{\mathscr{M}},\nabla)$ le fibré méromorphe à connexion sur $\mathbb{P}^1$ qui lui est associé. On se donne une filtration *pseudo-logarithmique* $\widetilde{\mathscr{M}}^{\bullet}$ de $\widetilde{\mathscr{M}}$. À distance finie, c'est une filtration logarithmique, puisque les singularités y sont régulières.

Par ailleurs, on note $M_{\min}$ le $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module extension minimale de $\widetilde{M}$ sur $\mathbb{A}^1$: rappelons que c'est, par définition, le plus grand $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ sous-module de $\widetilde{M}$ qui n'a pas de sous-module ou de quotient à support ponctuel. D'après l'exemple 2.5(iii), la filtration parabolique de $\widetilde{M}$ permet de définir une filtration parabolique « minimale » de $M_{\min}$.

Proposition 4.1. *Supposons que* $(\widetilde{\mathscr{M}}, \widetilde{\mathscr{M}}^{\bullet}, \nabla)$ *soit un fibré méromorphe à connexion, simplement exponentiel, muni d'une filtration pseudo-logarithmique admissible,* de degré 0 et stable. *Alors le transformé de Fourier* ${}^{F}(M_{\min})$ *est aussi extension minimale en tout* $\widehat{p} \in \widehat{\mathbb{A}}^1$.

Le fait que la propriété d'extension minimale (une propriété locale en chaque singularité) soit conservée par transformation de Fourier n'est pas toujours vrai sans hypothèse de stabilité (qui est une propriété globale).

Remarque 4.2. Voici un cas simple où la proposition est clairement satisfaite. Supposons que $(\widetilde{\mathscr{M}}, \nabla)$ soit *irréductible* en tant que fibré méromorphe à connexion. Alors, quelque soit le choix de la filtration parabolique $\widetilde{\mathscr{M}}^{\bullet}$, $(\widetilde{\mathscr{M}}, \widetilde{\mathscr{M}}^{\bullet}, \nabla)$ est stable (il n'y a pas de sous-module non trivial, donc la condition de stabilité est satisfaite, faute de combattants). Dans ce cas, l'irréductibilité de $(\widetilde{\mathscr{M}}, \nabla)$ équivaut à celle de $M_{\min}$ comme $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module. Alors ${}^{F}(M_{\min})$ est aussi irréductible comme $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\rangle$-module, donc est aussi extension minimale du fibré méromorphe associé.

Démonstration de la proposition 4.1. Supposons que ${}^{F}(M_{\min})$ ne soit pas extension minimale. Alors ce module admet un sous-module ou un quotient à support ponctuel $\widehat{p}$. On en déduit que $M_{\min}$ a un sous-module ou un quotient N (qu'on peut supposer génériquement de rang 1) de la forme $\mathscr{E}^{\widehat{p}\cdot t}$ (c'est-à-dire $(\mathbb{C}[t], d+\widehat{p}\,dt)$). En particulier, la connexion sur N n'a pas de pôle à distance finie, et a un pôle double sans résidu à l'infini. Considérons le fibré méromorphe associé $\widetilde{\mathscr{N}}$ sur $\mathbb{P}^1$ et la filtration induite $\widetilde{\mathscr{N}}^{\bullet}$. On remarque que, à l'infini, on a $\psi_{\infty}^{\alpha}\widetilde{\mathscr{N}} = 0$ si $\alpha \neq 0$, de sorte que, puisque $\widetilde{\mathscr{M}}^{\bullet}$ est admissible, la filtration induite sur $\widetilde{\mathscr{N}}$ est la filtration canonique de Deligne.

Par la formule des résidus, on a $\deg \widetilde{\mathscr{N}}^0 = 0$ et la contribution parabolique est nulle. Il en résulte que $\deg(\widetilde{\mathscr{N}}, \widetilde{\mathscr{N}}^{\bullet}) = 0$, ce qui est contradictoire avec la condition de stabilité de $(\widetilde{\mathscr{M}}, \widetilde{\mathscr{M}}^{\bullet}, \nabla)$ (*cf.* remarque 1.4 pour le cas d'un quotient). □

5. Transformation de Laplace et stabilité

5.a. Transformé de Laplace minimal d'un fibré méromorphe à connexion.

Soit $(\widetilde{\mathscr{M}}, \nabla)$ un fibré méromorphe à connexion sur $\mathbb{P}^1$, simplement exponentiel à l'infini et régulier à distance finie. Soit $\widetilde{M}$ le $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module associé et $M_{\min}$ son extension minimale à distance finie. Soit ${}^{F}(M_{\min})$ le transformé de Laplace de $M_{\min}$ et ${}^{F}\widetilde{(M_{\min})}$ son localisé hors de ses points singuliers à distance finie. On note ${}^{F}\widetilde{\mathscr{M}}$ le fibré méromorphe associé sur $\widehat{\mathbb{P}}^1$. Je dirai que ${}^{F}\widetilde{\mathscr{M}}$ est le fibré méromorphe transformé de Laplace *minimal* de $\widetilde{\mathscr{M}}$.

Une autre définition possible pour le transformé de Laplace serait de considérer $\widetilde{M}$ comme un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module et d'en prendre son transformé de Laplace, puis de localiser pour obtenir un fibré méromorphe. Je ne considérerai pas cette transformation, car on n'obtient pas toujours un fibré du bon rang.

5.b. Transformation de Laplace avec filtration parabolique. Je cherche maintenant à construire une filtration parabolique sur le transformé de Laplace ${}^{F}(M_{\min})$ de $M_{\min}$, à partir de la filtration parabolique de $\widetilde{M}$. Il faut raisonner en deux temps :

– d'abord définir une filtration parabolique sur $M_{\min}$,
– puis définir le transformé de Laplace de cette filtration.

Le premier point a été vu au § 2.b.

Soit $(\widetilde{\mathscr{M}}, \nabla)$ comme ci-dessus et soit $\widetilde{\mathscr{M}}^{b}$ une filtration pseudo-logarithmique *admissible* de $\widetilde{\mathscr{M}}$. On définit une filtration pseudo-logarithmique admissible sur ${}^{F}\widetilde{\mathscr{M}}$ comme suit :

(i) Filtration parabolique en $\widehat{\infty}$:

– En utilisant l'isomorphisme $\widehat{\psi}^{\alpha}_{\widehat{\infty}}{}^{F}\widetilde{\mathscr{M}} \simeq \oplus_{p\in P}\psi^{\alpha}_{p}M_{\min}$, pour tout $\alpha \neq 0$ de partie réelle dans $]-1,0]$, compatible à la monodromie (formelle), et l'isomorphisme naturel $\psi^{\alpha}_{p}M_{\min} \simeq \psi^{\alpha}_{p}\widetilde{\mathscr{M}}$, on transporte la filtration $\psi^{\alpha,\bullet}_{p}\widetilde{\mathscr{M}}$ en une filtration $\widehat{\psi}^{\alpha,\bullet}_{\widehat{\infty}}{}^{F}\widetilde{\mathscr{M}}$.

– Sur $\widehat{\psi}^{0}_{\widehat{\infty}}{}^{F}\widetilde{\mathscr{M}}$ on met la filtration triviale comme dans (2.8)(∗).

(ii) Filtration parabolique en $\widehat{p} \neq \widehat{\infty}$:

– En utilisant l'isomorphisme (phase stationnaire pour Laplace inverse) $\widehat{\psi}^{\alpha}_{\infty}\widetilde{\mathscr{M}} \simeq \oplus_{\widehat{p}\in\widehat{P}}\psi^{\alpha}_{\widehat{p}}{}^{F}(M_{\min})$, pour tout $\alpha \neq 0$ de partie réelle dans $]-1,0]$, compatible à la monodromie (formelle), et l'isomorphisme naturel $\psi^{\alpha}_{\widehat{p}}{}^{F}(M_{\min}) \simeq \psi^{\alpha}_{\widehat{p}}{}^{F}\widetilde{\mathscr{M}}$, on obtient une filtration sur $\psi^{\alpha}_{\widehat{p}}{}^{F}\widetilde{\mathscr{M}}$.

– Sur $\widehat{\psi}^{0}_{\widehat{p}}{}^{F}\widetilde{\mathscr{M}}$ on met la filtration triviale comme dans (2.8)(∗).

Théorème 5.1. *Dans les conditions ci-dessus, si $(\widetilde{\mathscr{M}}, \widetilde{\mathscr{M}}^{\bullet}, \nabla)$ est stable de degré 0, alors il en est de même de $({}^{F}\widetilde{\mathscr{M}}, {}^{F}\widetilde{\mathscr{M}}^{\bullet}, {}^{F}\nabla)$, et $(\widetilde{\mathscr{M}}, \widetilde{\mathscr{M}}^{\bullet}, \nabla)$ est le transformé de Laplace minimal inverse de $({}^{F}\widetilde{\mathscr{M}}, {}^{F}\widetilde{\mathscr{M}}^{\bullet}, {}^{F}\nabla)$.*

Remarques 5.2

(i) Considérer le transformé de Fourier de $M_{\min}$ (plutôt que celui de $\widetilde{M}$, par exemple) fait que ${}^{F}\widetilde{\mathscr{M}}$ n'a ni sous-fibré méromorphe ni quotient qui soit isomorphe à un fibré du type $\mathscr{E}^{c\cdot\tau}$. Le degré de ce dernier, pour toute filtration pseudo-logarithmique admissible, est nul. Un tel sous-fibré serait toujours déstabilisant.

(ii) Pour une raison analogue, il n'est peut-être pas vrai que, étant donné $(\widetilde{\mathscr{M}}, \widetilde{\mathscr{M}}^{\bullet}, \nabla)$ de degré 0, si son transformé de Laplace minimal défini ci-dessus est stable, alors $(\widetilde{\mathscr{M}}, \widetilde{\mathscr{M}}^{\bullet}, \nabla)$ le soit. En effet, $\widetilde{\mathscr{M}}$ pourrait contenir comme sous-fibré ou quotient un fibré du type $\mathscr{E}^{\widehat{p}\cdot t}$, dont le transformé de Laplace serait annulé par localisation (en τ).

Démonstration du théorème 5.1. Calculons d'abord les degrés. On utilise la formule (1.2). D'après la définition ci-dessus, la différence $\deg({}^F\widetilde{\mathscr{M}}, {}^F\widetilde{\mathscr{M}}^\bullet) - \deg(\widetilde{\mathscr{M}}, \widetilde{\mathscr{M}}^\bullet)$ provient seulement des termes $\widehat{\psi}^0$ de part et d'autre. L'hypothèse d'admissibilité fait que le terme correspondant à $\alpha = 0$ dans (1.2) est nul, donc $\deg({}^F\widetilde{\mathscr{M}}, {}^F\widetilde{\mathscr{M}}^\bullet) = \deg(\widetilde{\mathscr{M}}, \widetilde{\mathscr{M}}^\bullet)$.

Supposons maintenant que $\deg({}^F\widetilde{\mathscr{M}}, {}^F\widetilde{\mathscr{M}}^\bullet) = \deg(\widetilde{\mathscr{M}}, \widetilde{\mathscr{M}}^\bullet) = 0$ et que $(\widetilde{\mathscr{M}}, \widetilde{\mathscr{M}}^\bullet, \nabla)$ est stable.

D'après la proposition 4.1, le $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\rangle$-module ${}^F(M_{\min})$ est extension minimale à distance finie. C'est donc aussi l'extension minimale (à distance finie) de son localisé ${}^F\widetilde{\mathscr{M}}$. Le transformé de Laplace minimal inverse de ${}^F\widetilde{\mathscr{M}}$ est par suite le localisé de $M_{\min}$, c'est-à-dire $\widetilde{\mathscr{M}}$.

Soit $({}^F\widetilde{\mathscr{N}}, {}^F\nabla)$ un sous-fibré méromorphe à connexion de $({}^F\widetilde{\mathscr{M}}, {}^F\nabla)$, et $\widetilde{{}^FN}$ le $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module correspondant. On le suppose non nul. Alors son extension minimale à distance finie $(\widetilde{{}^FN})_{\min}$ est un sous-module non nul de $(\widetilde{{}^FM})_{\min}$, et son transformé de Fourier inverse est un sous-module non nul de $M_{\min}$ (car $(\widetilde{{}^FM})_{\min} = {}^F(M_{\min})$) et son localisé $\widetilde{N}$ est un sous-fibré méromorphe de $\widetilde{M}$. Ainsi, $\widetilde{N}$ est le transformé de Laplace inverse minimal de $\widetilde{{}^FN}$.

Notons ensuite que la filtration induite par $\widetilde{\mathscr{M}}^\bullet$ sur $\widetilde{\mathscr{N}}$ est égale à la filtration transformée de Laplace inverse de celle induite par ${}^F\widetilde{\mathscr{M}}^\bullet$: en effet, ceci résulte de la fonctorialité des identifications utilisées pour construire la transformée de Laplace d'une filtration pseudo-logarithmique admissible.

Le calcul fait au début, appliqué à $\widetilde{{}^FN}$, montre alors que $\deg({}^F\widetilde{\mathscr{N}}, {}^F\widetilde{\mathscr{N}}^\bullet) = \deg(\widetilde{\mathscr{N}}, \widetilde{\mathscr{N}}^\bullet)$, où les filtrations considérées sont les filtrations induites par ${}^F\widetilde{\mathscr{M}}^\bullet$ et $\widetilde{\mathscr{M}}^\bullet$ respectivement.

L'hypothèse de stabilité implique que $\deg(\widetilde{\mathscr{N}}, \widetilde{\mathscr{N}}^\bullet) < 0$. Par conséquent, $\deg({}^F\widetilde{\mathscr{N}}, {}^F\widetilde{\mathscr{N}}^\bullet) < 0$, et $({}^F\widetilde{\mathscr{M}}, {}^F\widetilde{\mathscr{M}}^\bullet, {}^F\nabla)$ est stable. □

Remarque 5.3. Dans tout ce qui précède, je n'ai pas utilisé de fibré *holomorphe* E sur $\mathbb{P}^1$, mais seulement des fibrés *méromorphes* paraboliques ou des $\mathscr{D}$-modules d'un certain type.

Par ailleurs, la morale est que les petites différences que l'extension minimale, la localisation hors des points singuliers et la transformation de Laplace font apparaître n'existent que sur les ψ^0 ou ψ^{-1}. La condition d'admissibilité des filtrations, jointe au fait que le degré parabolique ne tient pas compte de la partie $\mathrm{gr}^0\,\psi^0$ (car le coefficient correspondant est nul) fait que ces petites différences sont paraboliquement invisibles.

6. Correspondances

Je considère maintenant les catégories suivantes, avec les mêmes notations que plus haut, mais en ajoutant la condition de type exponentiel (qui devrait être supprimée conjecturalement) :

– La catégorie $\mathrm{FMPA}(\mathbb{A}^1)$ des fibrés rationnels à connexion sur $\mathbb{A}^1$, de type simplement exponentiel, munis d'une filtration parabolique admissible.

– La sous-catégorie $\mathrm{FMPA}_0^{\mathrm{st}}(\mathbb{A}^1)$ formée des objets *stables de degré* 0.

– La catégorie $\mathrm{DMPA}(\mathbb{A}^1)$ des $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-modules holonomes, de type simplement exponentiel, munis d'une filtration parabolique admissible.

– La sous-catégorie $\mathrm{DMPA}_0^{\mathrm{st}}(\mathbb{A}^1)$ formée des objets *stables de degré* 0.

– La catégorie $\mathrm{HPA}(\mathbb{A}^1)$ des fibrés holomorphes à connexion (E^o, ∇^o) sur un ouvert de Zariski de $\mathbb{A}^1$, munis d'une métrique harmonique simplement exponentielle admissible h (*i.e.*, « tame » à distance finie, induisant une connexion méromorphe simplement exponentielle à l'infini, et induisant une filtration parabolique admissible).

– La sous-catégorie $\mathrm{HPA}_0^{\mathrm{st}}(\mathbb{A}^1)$, formée des objets *analytiquement stables de degré* 0.

Conjecture 6.1. *On a un diagramme commutatif d'équivalences de catégories :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{HPA}_0^{\mathrm{st}}(\mathbb{A}^1) \arrow[r, bend left, "\textit{Nahm}"] \arrow[d, bend right] & \mathrm{HPA}_0^{\mathrm{st}}(\widehat{\mathbb{A}^1}) \arrow[l, bend left, "\textit{Nahm inverse}"] \arrow[d, bend right] \\
\mathrm{FMPA}_0^{\mathrm{st}}(\mathbb{A}^1) \arrow[r, bend left, "\textit{Laplace minimal}"] \arrow[u, bend right] \arrow[d, bend right, "\textit{Ext. min.}"'] & \mathrm{FMPA}_0^{\mathrm{st}}(\widehat{\mathbb{A}^1}) \arrow[l, bend left, "\textit{Laplace minimal inverse}"] \arrow[u, bend right] \arrow[d, bend right, "\textit{Ext. min.}"'] \\
\mathrm{DMPA}_0^{\mathrm{st}}(\mathbb{A}^1) \arrow[r, bend left, "\textit{Laplace}"] \arrow[u, bend right, "\textit{loc.}"'] & \mathrm{DMPA}_0^{\mathrm{st}}(\widehat{\mathbb{A}^1}) \arrow[l, bend left, "\textit{Laplace inverse}"] \arrow[u, bend right, "\textit{loc.}"']
\end{tikzcd}$$

Pour le carré du bas, la conjecture est vraie, d'après le théorème 5.1. Pour le carré du haut, il faut sans doute, pour le moment, ajouter des hypothèse de semi-simplicité des résidus, pour pouvoir appliquer [**5**] et [**1**].

Correspondance pour les rangs. Je me place sous l'hypothèse de semi-simplicité des résidus. Si r est le rang du fibré méromorphe $\widetilde{E}$, et si r_j est la dimension du noyau du résidu en $p_j \in P$, alors $\dim \psi_{p_j}^{-1}(\widetilde{E})_{\min} = r - r_j$. Le rang du transformé de Laplace minimal de $\widetilde{E}$ est égal à la somme des $\dim \psi_{p_j}^{-1}(\widetilde{E})_{\min}$, c'est-à-dire $\sum_j (r - r_j)$, d'après la formule de la phase stationnaire formelle (Prop. 3.1). D'après [**5**], c'est le rang du transformé de Nahm de $\widetilde{E}$ pour la métrique harmonique de Biquard-Boalch et Simpson.

Références

[1] O. Biquard & Ph. Boalch – « Wild nonabelian Hodge theory on curves », *Compositio Math.* **140** (2004), p. 179–204.

[2] B. Malgrange – *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Math., vol. 96, Birkhäuser, Basel, Boston, 1991.

[3] C. Sabbah – *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, Savoirs Actuels, CNRS Éditions & EDP Sciences, Paris, 2002.

[4] C. Simpson – « Harmonic bundles on noncompact curves », *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), p. 713–770.

[5] S. Szabo – « Nahm transform of meromorphic integrable connections on the Riemann sphere », Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg, juillet 2005.

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* `sabbah@math.polytechnique.fr`
Url : `http://www.math.polytechnique.fr/~sabbah`