

Claude Sabbah

**THÉORIE DE HODGE ET
THÉORÈME DE LEFSCHETZ « DIFFICILE »**
NOTES DE COURS (STRASBOURG 2000, BORDEAUX 2001)

Claude Sabbah

UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques, École polytechnique,
F-91128 Palaiseau cedex, France.

E-mail : `sabbah@math.polytechnique.fr`

Url : `http://math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah.html`

**THÉORIE DE HODGE ET
THÉORÈME DE LEFSCHETZ « DIFFICILE »**

NOTES DE COURS (STRASBOURG 2000, BORDEAUX 2001)

Claude Sabbah

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
0.1. Le théorème de Lefschetz « difficile ».....	1
0.2. Le théorème de Hodge.....	3
Références.....	5
1. Opérateurs elliptiques : régularité et finitude	7
1.1. La théorie dans \mathbb{R}^n	7
Mémento des notations de la théorie des distributions.....	7
1.1.a. Opérateurs différentiels.....	7
1.1.b. Le symbole principal et la notion d'opérateur elliptique.....	8
1.1.c. La notion de solution fondamentale.....	9
1.1.d. Solution fondamentale du laplacien Δ	9
1.1.e. Régularité des solutions.....	10
1.1.f. Résultats de finitude.....	10
1.1.g. Solution fondamentale approchée.....	10
1.2. Espaces de Sobolev sur une variété.....	11
1.2.a. Espaces de Sobolev sur \mathbb{R}^n	11
1.2.b. Espaces de Sobolev locaux sur \mathbb{R}^n	13
1.2.c. Espaces de Sobolev sur une variété compacte orientée.....	14
1.3. Opérateurs différentiels sur une variété.....	15
1.3.a. Opérateurs différentiels sur un fibré vectoriel.....	15
1.3.b. Adjoint formel.....	15
1.3.c. L'opérateur \star de Hodge et l'opérateur de Laplace-Beltrami.....	16
1.3.d. Le symbole principal et la notion d'opérateur elliptique.....	18
1.3.e. L'inégalité de Gårding et la régularité des opérateurs elliptiques.....	18
1.4. Finitude pour les opérateurs elliptiques et théorème de Hodge.....	19
1.4.a. Le théorème de finitude.....	19
1.4.b. Application : démonstration du théorème de Hodge 0.2.....	20
1.5. Démonstration de l'inégalité de Gårding.....	20
1.5.a. Opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^n	21
1.5.b. Opérateurs pseudo-différentiels sur une variété.....	25
1.5.c. Inversion des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques.....	26
Références.....	26
2. Structures de Hodge-Lefschetz	27
2.1. Algèbre linéaire et multi-linéaire.....	27
2.1.a. Algèbre linéaire sur un \mathbb{C} -espace vectoriel.....	27
2.1.b. Algèbre multi-linéaire sur un \mathbb{C} -espace vectoriel.....	28

2.2. Algèbre multi-linéaire hermitienne.....	29
2.2.a. Formes hermitiennes.....	29
2.2.b. Les opérateurs fondamentaux et leurs relations.....	30
2.3. Décomposition de Lefschetz et éléments primitifs.....	33
2.3.a. Décomposition de Lefschetz associée à un \mathfrak{sl}_2 -triplet.....	33
2.3.b. Application à l'algèbre extérieure.....	34
2.3.c. Structures de Hodge-Lefschetz.....	38
Références.....	40
3. Théorie de Hodge sur les variétés kählériennes complexes compactes.....	41
3.1. Variétés complexes hermitiennes.....	41
3.1.a. Variétés presque complexes hermitiennes.....	41
3.1.b. Les opérateurs d' et d''	42
3.1.c. Cohomologie de Dolbeault.....	43
3.1.d. Les théorèmes de Hodge pour les variétés compactes complexes hermitiennes.....	44
3.1.e. Relations entre les espaces $H_{d''}^{p,q}(X)$ et $H_{\text{DR}}^{p+q}(X, \mathbb{C})$	45
3.1.f. Théorie de Hodge pour les fibrés hermitiens.....	46
3.2. Variétés kählériennes.....	50
3.2.a. Identités locales de la géométrie kählérienne.....	50
3.2.b. Le théorème de Hodge en géométrie kählérienne.....	53
3.2.c. Le théorème de Lefschetz difficile.....	55
3.2.d. Les théorèmes de Hodge et de Lefschetz pour les fibrés hermitiens plats.....	57
3.3. Exemples et applications.....	57
3.3.a. Surfaces de Riemann compactes.....	57
3.3.b. Surfaces algébriques complexes.....	57
3.3.c. Tores complexes.....	57
3.3.d. Le théorème de Lefschetz « faible » pour les coefficients rationnels.....	60
3.3.e. Le théorème de Lefschetz pour les classes de type $(1, 1)$	60
Références.....	60
4. Le théorème de Lefschetz « difficile ».....	61
4.1. Cohomologie des variétés algébriques projectives lisses.....	61
4.1.a. La dualité de Kronecker et la dualité de Poincaré.....	61
4.1.b. Le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes.....	62
4.2. Le théorème de Lefschetz difficile.....	64
4.3. Semi-simplicité de la représentation de monodromie.....	65
4.3.a. Les pincesaux de Lefschetz.....	65
4.3.b. La représentation de monodromie.....	66
4.3.c. Le théorème de la monodromie.....	67
Références.....	68
5. Généralisations du théorème de Lefschetz difficile.....	69
5.1. Cohomologie à coefficients dans un système local.....	69
5.1.a. Représentations linéaire de groupes fondamentaux, faisceaux localement constants et fibrés plats.....	70
5.1.b. Représentations unitaires et fibrés hermitiens plats.....	72
5.1.c. Représentations semi-simples et fibrés plats harmoniques.....	72
5.2. Extension au cas singulier : la cohomologie d'intersection.....	76
5.2.a. Applications à la combinatoire.....	77
5.2.b. Une démonstration du théorème de Bloch-Giesecker.....	77
Références.....	79

6. Le théorème de décomposition de Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber	81
6.1. Un critère de dégénérescence de suite spectrale.....	81
6.1.a. La suite spectrale de Leray.....	81
6.1.b. Dégénérescence de la suite spectrale de Leray.....	82
6.1.c. Applications du théorème de dégénérescence.....	84
6.2. Le théorème de semi-simplicité.....	85
6.2.a. Représentations complètement réductibles.....	85
6.3. La notion de perversité.....	87
6.4. Cohomologie d'intersection et faisceaux pervers irréductibles.....	87
6.5. Cycles proches et cycles évanescents, filtration monodromique.....	87
6.6. Le théorème de décomposition.....	87
Références.....	87

INTRODUCTION

0.1. Le théorème de Lefschetz « difficile »

Les variétés complexes que nous allons considérer dans ce cours sont essentiellement les variétés algébriques complexes. Ce sont les sous-ensembles de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ définis par un certain nombre d'équations algébriques, et qui ont une structure de variété complexe. L'exemple le plus simple d'un tel objet est l'ensemble X_{f_d} d'équation $f_d(x_0, \dots, x_n) = 0$ dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de coordonnées homogènes $(x_0; \dots; x_n)$, où f_d est un polynôme homogène de degré d .

Exercice 0.1.1. Montrer que l'ensemble X_{f_d} est un variété complexe si et seulement si

$$\frac{\partial f_d}{\partial x_0}(x_0, \dots, x_n) = \dots = \frac{\partial f_d}{\partial x_n}(x_0, \dots, x_n) = 0 \implies x_0 = \dots = x_n = 0.$$

[Indication : exprimer le fait que le cône de \mathbb{C}^{n+1} d'équation $f_d = 0$ est une variété en dehors de son sommet.]

Par exemple, l'ensemble d'équation $x_0^d + \dots + x_n^d = 0$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une variété complexe. Quelle est sa dimension ?

L'intérêt de ces objets en tant qu'espaces topologiques est au moins double :

– d'une part, ils fournissent un grand nombre d'exemples de variétés différentiables (de dimension réelle paire, certes...) et peuvent servir de cobayes pour comprendre de manière générale la topologie des variétés différentiables compactes ; on peut leur appliquer des méthodes spécifiques à la géométrie algébrique (les bonnes vieilles méthodes de la géométrie projective, notamment) ;

– d'autre part, les contraintes topologiques imposées par leur structure algébrique peuvent jeter un éclairage nouveau sur des problèmes diophantiens : l'existence (un peu, beaucoup, pas du tout) de solutions en nombres entiers d'une équation algébrique peut être sensible à la forme (*i.e.* la topologie) de la variété complexe que cette équation définit.

Les premiers résultats sur la topologie des variétés algébriques complexes générales (*i.e.* de dimension quelconque) ont été obtenus par S. Lefschetz [3] aux environs de 1920. Ils répondent à la question suivante : quelle différence y a-t-il, du point de vue topologique (ici au sens de l'homologie singulière, *cf.* [1, §3.4]) entre une variété complexe projective $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et la variété obtenue en coupant X par un hyperplan projectif « assez général » ?

La réponse est donnée par le *théorème de Lefschetz faible* (faible par opposition au fort, *cf. infra*) : si la dimension complexe de X est n , les classes d'homologie de X et celle de

sa section hyperplane générale Y (qui est donc de dimension complexe $n - 1$) sont les mêmes en dimension $\leq n - 2$, ce qu'on écrit

$$H_{n-k}(Y, \mathbb{Z}) = H_{n-k}(X, \mathbb{Z}) \quad \text{pour } k \in [2, n].$$

La *dualité de Poincaré* permet d'obtenir des résultats analogues pour les groupes H_{n+k} , avec les mêmes valeurs de k . Le théorème dit aussi quelque chose pour $k = 1$: tout élément de $H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ provient d'un élément de $H_{n-1}(Y, \mathbb{Z})$. Ainsi, seules les classes d'homologie dans $H_n(X, \mathbb{Z})$ ne sont pas localisées sur des sections hyperplanes générales.

Le *théorème de Lefschetz difficile* (ou « vache », Hard Lefschetz Theorem en anglais) analyse de manière plus fine le rapport entre les classes de degré $n+k$ et celles de degré $n-k$ en partant de la constatation suivante : une façon d'obtenir un cycle de dimension $n-k$ à partir d'un cycle de dimension $n+k$ consiste à le couper successivement par k hyperplans projectifs (la dimension chute de 2 unités à chaque section pourvu que l'hyperplan soit « assez général », car un hyperplan est de codimension réelle 2). Le théorème de Lefschetz difficile affirme essentiellement que toute classe d'homologie de dimension $n-k$ ($k \geq 1$) a un multiple entier qui est obtenu de cette manière à partir d'une unique classe de dimension $n+k$.

Bien que ces deux résultats parlent des mêmes objets et soient de même nature, le premier a une démonstration « topologique », tandis qu'une démonstration de ce type n'est pas connue pour le second, pour lequel on a recours à l'analyse. Les méthodes topologiques modernes (ici la *théorie de Morse*) permettent en effet de bien comprendre le théorème « faible ». Par « topologiques », j'entends qui ne font intervenir que des objets localisés sur des sous-variétés contenues dans la variété initiale, et leur déformations possibles.

Par contre, jusqu'à présent, on ne connaît qu'une démonstration de nature analytique pour le théorème « fort » (celle, plutôt topologique, que pensait donner Lefschetz en 1924 étant insuffisante). Pour cela on a recours à la cohomologie et à sa représentation par les formes différentielles, c'est-à-dire la cohomologie de de Rham. Les formes différentielles considérées sont de nature globale et ne se laissent pas localiser sur des sous-variétés de codimension égale à leur degré en tant que forme (nombre de dx). La situation n'est pas sans rappeler la dualité onde-corpuscule de la physique, et d'ailleurs les formes différentielles considérées sont *harmoniques*, c'est-à-dire solution de l'équation de Laplace sur la variété, ce qui reste de l'équation des ondes lorsqu'il n'y a pas de temps (ce qui se produit pour les solutions stationnaires).

Ce cours exposera donc les outils nécessaires à la démonstration du théorème de Lefschetz difficile. Par contre, il n'abordera pas du tout les méthodes topologiques donnant celle du théorème de Lefschetz faible. Il est à noter cependant que « qui peut le plus peut le moins » et qu'il existe une démonstration du théorème faible par les méthodes de ce cours (tout au moins pour l'homologie à coefficients dans \mathbb{Q}).

L'outil principal sera le *théorème de Hodge* sur les variétés C^∞ compactes (cf. §0.2) et ses raffinements sur les *variétés complexes compactes kählériennes*.

En conclusion de ce paragraphe, voici ce qu'écrivait William Hodge en 1950, en introduction à l'intervention [2] qu'il fait au Congrès International des mathématiciens :

« Since the origin of birational geometry of algebraic varieties can be traced back to Riemann's theory of algebraic functions, it is not surprising that topological considerations have played a considerable role in the theory of algebraic varieties defined over the field of complex numbers. For instance, in the theory of algebraic functions of two complex variables,

due mainly to Picard, topological considerations are used extensively, and in the more geometrical theory of surfaces, due to the Italian school of geometers, many arguments are based essentially on topological methods. But in all these works, the topology is subservient to function theoretic or geometrical ends, and when Lefschetz memoir appeared, followed in 1924 by his Borel Tract *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, a new chapter in the theory of algebraic varieties was opened in which the topological properties of algebraic varieties are given equal status with the geometrical and the function-theoretic properties.[...] »

0.2. Le théorème de Hodge

Soit X une variété compacte orientée de dimension n (cf. [1, §1.6]), munie d'une métrique riemannienne. La métrique est, par définition, une métrique sur le fibré tangent, autrement dit est un accouplement bilinéaire (par rapport à la multiplication par les fonctions C^∞) symétrique

$$\langle , \rangle : \mathcal{E}^\infty(X, TX) \otimes \mathcal{E}^\infty(X, TX) \longrightarrow \mathcal{E}^\infty(X, \mathbb{R}),$$

qui est non dégénéré fibre à fibre et tel que $\langle \xi(x), \xi(x) \rangle > 0$ si $\xi(x) \neq 0$.

Il est possible d'en déduire une métrique sur les fibrés associés au fibré tangent, et notamment les fibrés $\wedge^k T^*X$: si $(\xi_1(x), \dots, \xi_n(x))$ est une base orthonormée locale de sections de TX , la base duale $(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$ sera, par définition, une base orthonormée locale de T^*X et la famille des $\xi_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}^*$ ($i_1 < \dots < i_k$) sera une base orthonormée locale de sections de $\wedge^k T^*X$. On dispose ainsi d'un produit scalaire « local »

$$\langle , \rangle : A^k(X) \otimes A^k(X) \longrightarrow \mathcal{E}^\infty(X),$$

où l'on note $A^k(X)$ l'espace des sections C^∞ du fibré $\wedge^k T^*X$.

Exercice 0.2.1

(1) Une variété X est orientable si et seulement si il existe une n -forme différentielle qui ne s'annule en aucun point de X . Le choix d'une telle forme vol détermine une orientation : dans toute carte locale directe U de coordonnées (x_1, \dots, x_n) de X , on a $\text{vol} = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ avec $a(x) \in \mathcal{E}^\infty(U, \mathbb{R}_{>0})$.

(2) Si de plus X est munie d'une métrique riemannienne \langle , \rangle , montrer qu'il existe une n -forme ω sur X telle que, dans chaque carte locale directe de coordonnées x_1, \dots, x_n , on ait $\omega = \sqrt{\det(\langle \partial_{x_i}, \partial_{x_j} \rangle)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. On dit que ω est la forme volume associée à la métrique.

Soit vol une forme volume sur X . Il est alors possible, en intégrant le produit scalaire local, de définir un produit scalaire global $A^k(X) \otimes A^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(\eta, \eta') = \int_X \langle \eta, \eta' \rangle \text{vol}$$

et la norme $\| \cdot \|$ correspondante.

Rappelons que la cohomologie de de Rham $H_{\text{DR}}^k(X)$ est le quotient $Z^k(X)/B^k(X)$, où

$$Z^k(X) = \text{Ker}[d : A^k(X) \longrightarrow A^{k+1}(X)],$$

$$B^k(X) = \text{Im}[d : A^{k-1}(X) \longrightarrow A^k(X)].$$

On se pose la question suivante : est-il possible, pour chaque classe de cohomologie $\gamma \in H_{\text{DR}}^k(X)$, de trouver un représentant ψ qui soit de norme *minimum* ?

Lemme 0.2.2. *Pour toute $k \geq 1$, il existe un opérateur $d^* : A^k(X) \rightarrow A^{k-1}(X)$ qui est adjoint formel de l'opérateur d , c'est-à-dire que, pour toute forme $\eta \in A^{k-1}(X)$ et toute forme $\psi \in A^k(X)$, on a*

$$(d\eta, \psi) = (\eta, d^*\psi).$$

Admettons ce lemme qui sera démontré un peu plus tard (cf. propositions 1.3.3 et 1.3.6), à l'aide de l'opérateur \star de Hodge. Le point est que les espaces $A^k(X)$ ne sont pas complets pour la norme L^2 associée au produit scalaire (\cdot, \cdot) .

Assertion. *Une forme fermée $\psi \in Z^k(X)$ est de norme minimum dans $\psi + B^k(X)$ si et seulement si $d^*\psi = 0$. Si une telle forme existe, elle est unique dans $\psi + B^k(X)$.*

Démonstration. C'est un argument hilbertien standard :

(1) Si $d^*\psi = 0$ et $d\psi = 0$, alors, pour $\eta \in A^{k-1}(X)$, on a

$$\begin{aligned} \|\psi + d\eta\|^2 &= (\psi + d\eta, \psi + d\eta) \\ &= \|\psi\|^2 + \|d\eta\|^2 + 2(\psi, d\eta) \\ &= \|\psi\|^2 + \|d\eta\|^2 + 2(d^*\psi, \eta) \\ &= \|\psi\|^2 + \|d\eta\|^2, \end{aligned}$$

et $\|\psi + d\eta\| \leq \|\psi\|$ si et seulement si $d\eta = 0$.

(2) Réciproquement, si ψ est de norme minimale, on a $(\partial \|\psi + td\eta\|^2 / \partial t)|_{t=0} = 0$, d'où $(\psi, d\eta) = 0$ pour tout η . \square

Les formes fermées ψ de norme minimale dans $\psi + B^k(X)$ sont donc les solutions de $d\psi = 0$ et $d^*\psi = 0$, c'est-à-dire encore

$$\Delta\psi \stackrel{\text{déf}}{=} (dd^* + d^*d)\psi = 0$$

(en effet, $(\Delta\psi, \psi) = \|d\psi\|^2 + \|d^*\psi\|^2$). L'opérateur $\Delta : A^k(X) \rightarrow A^k(X)$ est le *laplacien* (ou opérateur de Laplace-Beltrami) associé à la métrique riemannienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Les formes solution de l'équation de Laplace $\Delta\psi = 0$ sont appelées, par analogie au cas des fonctions, les formes *harmoniques*. Leur espace est noté $\mathcal{H}^k(X)$. Il est contenu dans $Z^k(X)$. La question posée se reformule ainsi : est-ce que l'application naturelle $\mathcal{H}^k(X) \rightarrow H_{\text{DR}}^k(X)$, qui est injective, est un isomorphisme d'espaces vectoriels ?

On peut montrer (par une méthode assez simple) que la cohomologie de de Rham d'une variété C^∞ compacte est de dimension finie. Ceci implique la finitude de la dimension de l'espace des formes harmoniques, pour tout k . Le théorème de Hodge en donne une autre démonstration.

Théorème (de Hodge). *Pour tout $k \geq 0$ les espaces $\mathcal{H}^k(X)$ sont de dimension finie et on a une décomposition (\cdot, \cdot) -orthogonale*

$$A^k(X) = \mathcal{H}^k(X) \oplus B^k(X) \oplus \text{Im } d^*.$$

Le théorème de Hodge donne une réponse positive à la question posée : en effet, on a $Z^k(X) = \text{Ker } d = (\text{Im } d^*)^\perp$ et la décomposition du théorème donne $Z^k(X) = \mathcal{H}^k(X) \oplus B^k(X)$. Le théorème de Hodge donne ainsi une autre démonstration de la finitude de la cohomologie de de Rham, lorsque X est compacte, dont l'intérêt est de se généraliser au cas de la

cohomologie d'une variété compacte complexe à coefficients dans un fibré vectoriel holomorphe. Il permet aussi de donner une démonstration du théorème de dualité de Poincaré, à savoir que la forme bilinéaire

$$H^k(X) \otimes H^{n-k}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$[\psi] \otimes [\eta] \longmapsto \int_X \psi \wedge \eta$$

est *non dégénérée*. Ici encore, la méthode de Hodge permet de généraliser ce type de dualité.

Références

- [1] O. DEBARRE – « Variétés complexes », Notes de cours, Strasbourg, octobre 2000.
- [2] W. HODGE – « The topological invariants of algebraic varieties », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol.1*, American Mathematical Society, 1952, p. 182–192.
- [3] S. LEFSCHETZ – *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier-Villars, Paris, 1924.

CHAPITRE 1

OPÉRATEURS ELLIPTIQUES : RÉGULARITÉ ET FINITUDE

1.1. La théorie dans \mathbb{R}^n

Cette section contient des rappels sur les résultats enseignés habituellement dans un cours de maîtrise sur les distributions. Je renvoie donc à un tel cours, ou par exemple aux livres [3, 4, 6, 7] (voir aussi le chapitre 0 de [1] qui contient « juste ce qu'il faut »), pour les notions de base de la théorie des distributions. Je suggère aussi la lecture des articles consacrés aux « Équations aux dérivées partielles » dans l'Encyclopædia Universalis.

Mémento des notations de la théorie des distributions. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n .

- $\mathcal{D}(U)$: fonctions C^∞ à support compact sur U .
- $\mathcal{D}'(U)$: distributions sur U , dual de $\mathcal{D}(U)$ au sens suivant : pour $u \in \mathcal{D}'(U)$ et $K \subset U$ compact, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C_K > 0$ tels que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ à support dans K , on ait

$$(1.1.1) \quad |\langle u, \varphi \rangle| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty,$$

en prenant la notation des multi-indices : $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum \alpha_i$.

- $\mathcal{E}'(U)$: distributions à support compact contenu dans U .
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: fonctions de la classe de Schwartz, *i.e.* fonctions C^∞ sur \mathbb{R}^n telles que, pour tout multi-indices α, β , $\|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty < +\infty$.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: distributions tempérées. C'est le sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ pour lequel la majoration (1.1.1) est remplacée par

$$\exists p \in \mathbb{N}, \exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad |\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty.$$

Par exemple, une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^n qui est à croissance modérée à l'infini (*i.e.* qui ne croît pas plus vite qu'un polynôme) ainsi que toutes ses dérivées définit une distribution tempérée.

- La transformation de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même et, par adjonction, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.
- La convolution de deux distributions sur \mathbb{R}^n est définie quand l'une est à support compact, elle est associative quand deux des trois distributions sont à support compact. Lorsque la convolution et la transformation de Fourier sont définies, cette dernière transforme la convolution en multiplication, et réciproquement.

1.1.a. Opérateurs différentiels. La notion d'opérateur différentiel sur \mathbb{R}^n ou, plus généralement, sur un ouvert U de \mathbb{R}^n se définit de manière très simple : un tel opérateur P est une

application (en général seulement \mathbb{R} -linéaire) de l'espace $\mathcal{E}^\infty(U)$ des fonctions C^∞ sur U à valeurs réelles dans lui-même ; cette application doit être de la forme

$$(1.1.2) \quad P = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x) \partial^\alpha,$$

de plus, a_α est une fonction C^∞ sur U pour tout α . L'entier $d = \max\{|\alpha| \mid a_\alpha \neq 0\}$ est l'ordre de l'opérateur différentiel P .

Si E et F sont deux espaces vectoriels, un opérateur différentiel de E vers F est un opérateur comme ci-dessus, pour lequel les coefficients a_α sont des fonctions C^∞ à valeurs dans $\text{Hom}(E, F)$.

Exemples 1.1.3. Pour toute fonction $f \in \mathcal{E}^\infty(U)$, l'opérateur de multiplication par f , noté $f \cdot$ ou simplement f , est un opérateur différentiel d'ordre 0 sur $\mathcal{E}^\infty(U)$. Les opérateurs de dérivation $\partial/\partial x_i$ sont d'ordre 1. Le laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^n (\partial/\partial x_i)^2$ est d'ordre 2.

Exercices 1.1.4

(1) Montrer qu'on peut définir de manière inductive *et sans recours aux coordonnées* la notion d'opérateur différentiel d'ordre $\leq d$ en disant que ce sont les opérateurs \mathbb{R} -linéaires $P : \mathcal{E}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{E}^\infty(U)$ tels que,

- si $d = 0$, P est l'opérateur de multiplication par une fonction C^∞ ;
- si $d \geq 1$, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}^\infty(U)$, le commutateur $[P, f \cdot]$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq d - 1$.

(2) Le composé de deux opérateurs différentiels d'ordre d et d' est un opérateur d'ordre $d + d'$.

(3) Le crochet (commutateur) de deux opérateurs différentiels d'ordre d et d' est d'ordre $\leq d + d' - 1$.

(4) l'écriture (1.1.2) est unique, tout comme le serait d'ailleurs l'écriture dans l'autre sens $P = \sum_\alpha \partial^\alpha b_\alpha(x)$.

(5) Montrer que la notion d'opérateur différentiel est *locale*, *i.e.* qu'il existe un faisceau sur l'ouvert U dont les sections sur tout ouvert V de U sont les opérateurs différentiels sur V .

1.1.b. Le symbole principal et la notion d'opérateur elliptique. Soit P un opérateur différentiel d'ordre d exactement. Il résulte de l'exercice 1.1.4(3) ci-dessus que, pour tout multi-indice α de longueur d , le coefficient du terme d'ordre α ne dépend pas de la manière d'écrire l'opérateur comme somme de composés d'opérateurs d'ordre 0 ou 1.

Le *symbole principal* de l'opérateur P est le polynôme σ_P , *homogène* de degré d en les nouvelles variables y_1, \dots, y_n , à coefficient dans $\mathcal{E}^\infty(U)$, défini par

$$\sigma_P(x, y) = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha(x) y^\alpha$$

où a_α est le coefficient de P d'ordre α .

Si P est un opérateur différentiel de E dans F , le symbole principal est un endomorphisme de E dans F (*i.e.* une matrice si on a choisi des bases) à éléments dans $\mathcal{E}^\infty(U)$.

Exercice 1.1.5 (autre définition du symbole principal). Soit P un opérateur différentiel d'ordre d . Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}^\infty(U)$ et toute fonction $u \in \mathcal{E}^\infty(U)$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{-tf} P(e^{tf} u(x)) = t^d \sigma_P(x, \partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n) u(x) + \text{termes } b_j(x) t^j \text{ de degré } j < d.$$

Exercice 1.1.6. Soient P et Q deux opérateurs d'ordre d et d' respectivement.

(1) Montrer que PQ est de degré $d + d'$ et que $\sigma_{PQ} = \sigma_{QP} = \sigma_P \sigma_Q$.

(2) Montrer que le crochet $[P, Q]$ est de degré $d + d' - 1$ et que $\sigma_{[P, Q]} = \{\sigma_P, \sigma_Q\}$, où $\{, \}$ désigne le crochet de Poisson (cf. [2, § III.5])

Définition 1.1.7 (opérateur elliptique). Un opérateur différentiel P de E dans F est *elliptique* si son symbole $\sigma_P(x, y)$ (qui est une fonction C^∞ en x , polynomiale homogène de degré d en y , à valeurs dans l'espace des homomorphismes $\text{Hom}(E, F)$) prend ses valeurs dans les homomorphismes *injectifs* si $y \neq 0$ (i.e. un des y_j ne s'annule pas).

Exemples 1.1.8

(1) Si $E = F = \mathbb{R}$, on demande que $\sigma_P(x, y) \neq 0$ si $y \neq 0$.

(2) Si $\dim E = \dim F < +\infty$, on demande que, pour tout $x \in U$ et tout $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\sigma_P(x, y)$ soit inversible.

(3) Le laplacien Δ est elliptique car $\sigma_\Delta = \|y\|^2$.

1.1.c. La notion de solution fondamentale. Une manière classique d'analyser les fonctions harmoniques, i.e. les solutions de l'équation $\Delta u(x) = 0$, est d'introduire la solution fondamentale du laplacien. La notion de solution fondamentale est liée à la convolution dans \mathbb{R}^n , donc est de nature globale dans \mathbb{R}^n .

Toute équation différentielle $Pu = f$ dans \mathbb{R}^n , $P = \sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha$ peut s'écrire sous forme d'une équation de convolution

$$A \star u = f, \quad A = \sum_\alpha a_\alpha(x) \partial^\alpha \delta_0$$

où δ_0 est la distribution de Dirac à l'origine de \mathbb{R}^n . La distribution A est à support compact (l'origine), ce qui permet de la convoler avec toute distribution sur \mathbb{R}^n ou toute fonction C^∞ sur \mathbb{R}^n (auquel cas on obtient une fonction C^∞).

Définition 1.1.9. Soit A une distribution à support compact sur \mathbb{R}^n . Une distribution E sur \mathbb{R}^n est une *solution fondamentale* de A si $A \star E = \delta_0$.

Théorème 1.1.10. Soit $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ admettant une solution fondamentale E . Alors,

(1) Pour toute $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, il existe au moins une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de l'équation $A \star u = f$, à savoir $E \star f$.

(2) Pour toute $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, il existe au plus une solution $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ de l'équation $A \star u = f$ et, si elle existe, c'est $E \star f$. \square

1.1.d. Solution fondamentale du laplacien Δ . La recherche d'une solution fondamentale d'un opérateur différentiel, si elle existe, n'est en général pas facile. Pour le laplacien, on utilise les symétries de l'équation.

Théorème 1.1.11. Une solution fondamentale E pour Δ est donnée par

$$E = \begin{cases} \text{cste} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} & \text{si } n \geq 3, \\ \text{cste} \cdot \log r & \text{si } n = 2, \end{cases}$$

avec $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. \square

Plus généralement, le *théorème de Malgrange-Ehrenpreis* montre l'existence d'une solution fondamentale pour tout opérateur à coefficients constants.

1.1.e. Régularité des solutions. La propriété importante de la solution fondamentale du laplacien que nous avons exhibée ci-dessus est qu'elle est C^∞ hors de l'origine.

Théorème 1.1.12. *Soit f une distribution à support compact sur \mathbb{R}^n . Alors la distribution $u = E \star f$ est solution de $\Delta u = f$. Hors du support de f , c'est une fonction de classe C^∞ qui tend vers 0 à l'infini.*

Démonstration. Elle est classique, voici quelques indications. Soit, pour $\varepsilon > 0$, une fonction χ_ε qui est C^∞ , égale à 1 hors de la boule ouverte $B(0, \varepsilon)$ et égale à 0 au voisinage de 0. Alors la fonction $E_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \chi_\varepsilon E$ est C^∞ et $E - E_\varepsilon$ est à support dans $B(0; \varepsilon)$.

On écrit $u = E_\varepsilon \star f + (E - E_\varepsilon) \star f$. Les propriétés usuelles de la convolution montrent que le premier terme est C^∞ et le second est à support dans le ε -voisinage $\text{Supp } f + B(0; \varepsilon)$ de $\text{Supp } f$, d'où le premier point.

Pour le second, on choisit un voisinage compact K de $\text{Supp } f$ et on note m l'ordre de f comme distribution. On a alors une majoration

$$\begin{aligned} |(E_\varepsilon \star f)(x)| &\leq C \sup_{\substack{x' \in K \\ |\alpha| \leq m}} |\partial_{x'}^\alpha E_\varepsilon(x - x')| \\ &= C \sup_{\substack{x' \in K \\ |\alpha| \leq m}} |\partial_{x'}^\alpha E(x - x')| \quad \text{si } d(x, K) \geq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure en calculant les dérivées de E hors de l'origine. \square

Corollaire 1.1.13. *Toute distribution harmonique sur \mathbb{R}^n est une fonction C^∞ .*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'une telle distribution u , solution de $\Delta u = 0$, est C^∞ au voisinage de chaque point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que pour toute fonction C^∞ à support compact φ telle que $\varphi \equiv 1$ près de x_0 , φu est C^∞ près de x_0 . Mais on a

$$\begin{aligned} \varphi u &= (\Delta E \star \delta_0) \star (\varphi u) \\ &= (E \star \Delta \delta_0) \star (\varphi u) \\ &= E \star (\Delta \delta_0 \star (\varphi u)) \quad (\text{car deux supports compacts}) \\ &= E \star (\Delta(\varphi u)) \end{aligned}$$

et, d'après le théorème ci-dessus, φu est C^∞ hors du support de $\Delta(\varphi u)$. Il reste à constater que x_0 n'est pas dans ce support. \square

1.1.f. Résultats de finitude. Pour obtenir un résultat de finitude sur les solutions du laplacien sur \mathbb{R}^n , il faut introduire une propriété de compacité, c'est-à-dire un contrôle sur le comportement à l'infini. Voici un exemple :

Théorème 1.1.14. *Toute fonction harmonique qui tend vers 0 à l'infini est identiquement nulle.*

Démonstration. Ceci est dû au fait que toute fonction harmonique satisfait la propriété de moyenne (analogue du théorème de Liouville pour les fonctions holomorphes). \square

1.1.g. Solution fondamentale approchée. On dit que E est une *solution fondamentale approchée* de la distribution A à support compact (ou plus exactement de l'opérateur de convolution $A \star \bullet$) si $A \star E = \delta_0 + \psi$, où ψ est C^∞ . Si P est un opérateur différentiel et $A = P(\delta_0)$ est la distribution associée, alors E satisfait $P(E) = \delta_0 + \psi$.

En ce qui concerne le théorème de régularité par exemple, il n'est pas utile d'avoir trouvé une solution fondamentale du laplacien, une solution fondamentale approchée (qui soit C^∞

hors de l'origine) aurait suffi. Il est souvent plus facile de trouver cette dernière. On peut en effet faire usage de la transformation de Fourier.

Pour le laplacien, on cherche \widehat{E} sous la forme $\widehat{E}(\xi) = -(1 - \chi(\xi)) / \|\xi\|^2$ où $\chi \equiv 1$ près de $\xi = 0$ et χ est C^∞ à support compact. Ainsi \widehat{E} est une fonction C^∞ à croissance lente ainsi que toute ses dérivées quand $\xi \rightarrow \infty$, donc définit bien une distribution tempérée. Par suite sa transformée de Fourier inverse E est définie comme distribution tempérée. C'est de plus une fonction C^∞ hors de $x = 0$: en effet, pour tout j , $\partial_{\xi_j} \widehat{E}$ est C^∞ à support compact, donc sa transformée de Fourier inverse est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et en particulier C^∞ ; autrement dit, $x_j E$ est C^∞ pour tout j , d'où l'assertion. Enfin, on a $\widehat{\Delta(E)} = -\|\xi\|^2 \widehat{E}(\xi) = 1 - \chi(\xi)$ et, par transformation de Fourier inverse, $\Delta(E) = \delta_0 + \psi$ avec $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Alors, pour toute distribution f à support compact sur \mathbb{R}^n , la distribution $u = E \star f$ satisfait

$$\Delta(u) = \Delta(E) \star f = \delta_0 \star f + \psi \star f = f + \psi \star f \equiv f \pmod{C^\infty}$$

et est C^∞ hors du support de f , puisque E est C^∞ hors de l'origine.

Exercice 1.1.15. Montrer le corollaire 1.1.13 en utilisant la solution fondamentale approchée ci-dessus.

Ainsi, l'opérateur de convolution $E \star \cdot$ est un inverse à droite pour Δ « modulo C^∞ », et permet de ce fait de trouver des solutions approchées de l'équation $\Delta u = f$. C'est aussi un inverse à gauche pour Δ « modulo C^∞ », et permet de ce fait de montrer la régularité des solutions. Un tel opérateur est appelé une *paramétrix* de Δ .

1.2. Espaces de Sobolev sur une variété

1.2.a. Espaces de Sobolev sur \mathbb{R}^n . Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev $W^s(\mathbb{R}^n)$ est le sous-espace des distributions tempérées $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ qui satisfont

- (1) la transformée de Fourier \widehat{u} est localement sommable,
- (2) $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|^2)^s |\widehat{u}(\xi)| d\xi < +\infty$.

Ces deux conditions peuvent se résumer en

$$(1 + \|\xi\|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Propriétés 1.2.1

(1) Plus s est grand, plus $W^s(\mathbb{R}^n)$ est petit, *i.e.* $W^s \supset W^{s'}$ pour $s \leq s'$. Une distribution tempérée est d'autant plus « régulière » qu'elle appartient à un W^s avec s grand.

(2) $W^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ car la transformation de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même (Plancherel).

(3) Pour $s \in \mathbb{N}$, $W^s(\mathbb{R}^n)$ est le sous-espace de $L^2 = W^0$ dont les dérivées (au sens des distributions, bien sûr) d'ordre $\leq s$ sont encore dans L^2 .

(4) Pour $u \in W^s(\mathbb{R}^n)$, les dérivées d'ordre $\leq k$ sont dans $W^{s-k}(\mathbb{R}^n)$.

(5) Muni du produit scalaire $(u | v)_s = \int (1 + \|\xi\|^2)^s \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi$, l'espace $W^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert réel⁽¹⁾ (donc complet). De plus, si $s \leq s'$, l'inclusion $W^{s'} \subset W^s$ est *continue*, c'est-à-dire que $\|u\|_s \leq C_{s,s'} \|u\|_{s'}$ si $s \leq s'$.

(6) L'opérateur différentiel $\partial^\alpha : W^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ est continu.

⁽¹⁾Dans ce chapitre, les fonctions C^∞ sont à valeurs réelles.

(7) L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions C^∞ à support compact est dense dans l'espace de Hilbert $W^s(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.2.2 (Lemme de Sobolev). *Pour $s > k + n/2$ on a $W^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}^k(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Il suffit de le montrer pour $k = 0$: si $k \geq 1$ et $s > k + n/2$ on aura alors, pour tout α avec $|\alpha| \leq k$,

$$u \in W^s(\mathbb{R}^n) \implies \partial^\alpha u \in W^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^n).$$

Soit donc $s > n/2$ et $u \in W^s(\mathbb{R}^n)$. On écrit

$$\widehat{u}(\xi) = [(1 + \|\xi\|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi)] \cdot (1 + \|\xi\|^2)^{-s/2}.$$

Le premier terme est dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ par définition, et le second aussi puisque $s > n/2$. Par suite \widehat{u} est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, u est transformée de Fourier (inverse) d'une fonction de L^1 : c'est donc une fonction continue, qui tend vers 0 quand $x \rightarrow \infty$, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. \square

Remarque 1.2.3. On voit de plus, lorsque $k = 0$, que la norme $\|u\|_{C^0} = \|u\|_\infty = \sup |u|$ est finie (puisque u tend vers 0 à l'infini) et que l'on a

$$\|u\|_{C^0} \leq \|\widehat{u}\|_{L^1} \leq C_s \|u\|_{W^s}$$

avec $C_s = \left\| (1 + \|\xi\|^2)^{-s/2} \right\|_{L^2}$. Ceci s'étend aux normes C^k , définies de la manière habituelle : $\|u\|_{C^k} = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u(x)|$. Ainsi, l'inclusion de $W^s(\mathbb{R}^n)$ dans le sous-espace des fonctions C^k de norme finie est continue.

Théorème 1.2.4 (Lemme de Rellich). *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et tout $s < s'$, l'inclusion $W'_K(\mathbb{R}^n) \subset W^s(\mathbb{R}^n)$ est compacte.*

Autrement dit, toute partie bornée de $W'_K(\mathbb{R}^n)$ est relativement compacte dans $W^s(\mathbb{R}^n)$, ou encore pour toute suite bornée u_k d'éléments de $W'_K(\mathbb{R}^n)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $W^s(\mathbb{R}^n)$. Ici, $W'_K(\mathbb{R}^n)$ désigne le sous-espace de $W^s(\mathbb{R}^n)$ formé des éléments à support dans K . Nous utiliserons ce lemme de la manière suivante :

Corollaire 1.2.5. *Soit E un sous-espace fermé de $W'_K(\mathbb{R}^n)$ qui est aussi fermé dans $W^s(\mathbb{R}^n)$. Alors E est de dimension finie.*

Démonstration. En effet, soit $B_{E,s'}$ la boule unité fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_{s'}$. Puisque E est fermé dans $W^s(\mathbb{R}^n)$, elle est aussi fermée dans $W^s(\mathbb{R}^n)$. Par le lemme de Rellich elle est aussi relativement compacte dans E , donc compacte. D'après le théorème de Riesz, E est de dimension finie. \square

Démonstration du lemme de Rellich. Commençons par remarquer l'inégalité (souvent appelée « de Peetre ») : pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $s \in \mathbb{R}$,

$$(1 + \|x + y\|^2)^s \leq (1 + \|x\|)^{2|s|} (1 + \|y\|^2)^s.$$

Par homogénéité, il suffit de la montrer pour $s = \pm 1$. C'est facile pour $s = 1$ (exercice). Pour $s = -1$, on pose $\xi = -x$, $\eta = x + y$ et on utilise l'inégalité pour $s = 1$ et ξ, η .

Revenons maintenant au lemme de Rellich et soit u_k une suite d'éléments de $W'_K(\mathbb{R}^n)$, de norme $\|\cdot\|_{s'}$ bornée par 1 par exemple. Notons d'abord que, u_k étant à support compact, sa transformée de Fourier est une fonction C^∞ (et à croissance lente à l'infini en fait). Par

hypothèse, $(1 + \|\xi\|^2)^{s'/2} \widehat{u}_k \in L^2$. Nous allons d'abord montrer qu'il existe une sous-suite extraite de \widehat{u}_k qui converge uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^n (coordonnée ξ).

Soit $\varphi(x)$ une fonction C^∞ à support compact, avec $\varphi \equiv 1$ sur le compact K . On a donc $u_k = \varphi u_k$ et, par transformation de Fourier,

$$\widehat{u}_k(\xi) = (\widehat{\varphi} \star \widehat{u}_k)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi - \eta) \widehat{u}_k(\eta) d\eta$$

(exercice : vérifier la seconde égalité ; se souvenir que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). En appliquant l'inégalité de Peetre on a donc

$$\begin{aligned} \left| (1 + \|\xi\|^2)^{s'/2} \widehat{u}_k(\xi) \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(1 + \|\xi - \eta\|)^{|s'|} \widehat{\varphi}(\xi - \eta)}_{L^2} \underbrace{(1 + \|\eta\|^2)^{s'/2} \widehat{u}_k(\eta)}_{L^2} d\eta \right| \\ &\leq \|u_k\|_{s'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + \|\eta\|)^{|s'|} \widehat{\varphi}(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \quad (\text{Cauchy-Schwartz}) \\ &\leq C_{s'} \quad (\text{car } \|u_k\|_{s'} \leq 1). \end{aligned}$$

En utilisant $\partial_\xi^\alpha \widehat{u}_k = \partial_\xi^\alpha \widehat{\varphi} \star \widehat{u}_k$, on montre de même que pour tout multi-indice α on a

$$\left| (1 + \|\xi\|^2)^{s'/2} \partial_\xi^\alpha \widehat{u}_k(\xi) \right| \leq C_{s', \alpha}.$$

Il résulte de ceci (pour α de longueur 1) que, sur tout compact K' , la suite \widehat{u}_k est bornée et uniformément équicontinue. Nous pouvons conclure par Ascoli. Nous supposons désormais que c'est la suite \widehat{u}_k qui converge uniformément sur tout compact.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ une boule telle que $(1 + \|\xi\|^2)^{s/2 - s'/2} \leq \varepsilon$ pour $\xi \notin B$. La suite u_k est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_s$: on décompose $\|u_j - u_k\|_s$ en \int_B et $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B}$; on majore la première par convergence uniforme sur B et la seconde par $\varepsilon \|u_j - u_k\|_{s'} \leq 2\varepsilon$. \square

1.2.b. Espaces de Sobolev locaux sur \mathbb{R}^n . La philosophie de la théorie des distribution consiste à remplacer les opérateurs de dérivation par des opérateurs d'intégration. De ce point de vue, on peut définir des dérivations d'ordre non entier par transformation de Fourier. La notion de régularité (au sens de k -fois dérivable) est remplacée par l'appartenance à un espace de Sobolev W^s . La présentation ci-dessus a l'avantage d'être hilbertienne, et l'inconvénient, qui lui est inhérent, d'être globale sur \mathbb{R}^n , à cause de l'utilisation de la transformation de Fourier. En particulier, on n'a pas d'inclusion du type $\mathcal{E}^m(\mathbb{R}^n) \subset W^m(\mathbb{R}^n)$ car nous avons vu que la condition d'appartenance à W^s contient une condition de comportement à l'infini. Tout ceci justifie l'introduction des espaces de Sobolev locaux.

Définition 1.2.6. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . On dit qu'une distribution $u \in \mathcal{D}'(U)$ est dans le sous-espace $\mathcal{W}^s(U)$ si, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, on a $\varphi u \in W^s(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 1.2.7. Définir le faisceau des distributions \mathcal{D}' sur \mathbb{R}^n , ainsi que les faisceaux de Sobolev \mathcal{W}^s . A-t-on $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = \Gamma(\mathbb{R}^n, \mathcal{D}')$? A-t-on $W^s(\mathbb{R}^n) = \Gamma(\mathbb{R}^n, \mathcal{W}^s)$?

Exercice 1.2.8. Montrer les propriétés suivantes :

(1) La distribution $u \in \mathcal{D}'(U)$ est dans $\mathcal{W}^s(U)$ si et seulement si, pour tout $x_0 \in U$, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ telle que $\varphi(x_0) \neq 0$ et $\varphi u \in W^s(\mathbb{R}^n)$.

(2) Pour $s > k + n/2$ et $k \geq 0$, on a $\mathcal{W}^s(U) \subset \mathcal{E}^k(U)$. De plus, $\mathcal{E}^k(U) \subset \mathcal{W}^k(U)$. En particulier,

$$\bigcap_s \mathcal{W}^s(U) = \mathcal{E}^\infty(U).$$

(3) Montrer que $\bigcup_s \mathcal{W}^s(U)$ est formé des distributions d'ordre fini sur U .

1.2.c. Espaces de Sobolev sur une variété compacte orientée. Maintenant que la notion d'espace de Sobolev sur \mathbb{R}^n est localisée, autrement dit maintenant que nous avons défini le faisceau de Sobolev sur \mathbb{R}^n , nous pouvons le définir itou sur toute variété C^∞ .

Soit X une variété C^∞ de dimension n et U un ouvert de X . Une *distribution* u sur U est une forme linéaire sur l'espace $A_c^n(U)$ des n -formes C^∞ à support compact dans U qui satisfait la propriété de continuité usuelle. Il faut noter que les distributions apparaissent comme duales des n -formes à support compact et non pas des fonctions C^∞ à support compact.

Si de plus la variété est orientée, on peut y intégrer les n -formes différentielles (cf. [5, § 1.6]). Noter que tout ouvert de X est *ipso facto* orienté, et que l'on peut y intégrer les n -formes à support compact contenu dans U . De ce fait, une fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ définit une distribution par $\langle f, \psi \rangle = \int_U f\psi$ pour toute n -forme à support compact ψ .

Si l'on tient à garder mieux l'analogie avec ce qui se passe sur \mathbb{R}^n , où la mesure de Lebesgue est fixée, on choisit une forme volume vol sur X (cf. exercice 0.2.1) et on écrit toute n -forme $\psi \in A_c^n(U)$ sous la forme $\psi = \varphi \text{vol}$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. On a alors $\langle f, \psi \rangle = \int_U f\varphi \text{vol}$.

Une distribution $u \in \mathcal{D}'(U)$ est dans l'espace de Sobolev local $\mathcal{W}^s(U)$ si, pour toute fonction C^∞ φ à support compact dans un ouvert de carte $U_0 \subset U$, la distribution φu est dans $\mathcal{W}^s(U_0)$, où l'on voit U_0 comme un ouvert de \mathbb{R}^n , et vol comme un multiple de la forme $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ (donc de ce fait $\varphi u \in W^s(\mathbb{R}^n)$).

Lorsque X est compacte, on peut munir $\mathcal{W}^s(X)$ d'une norme $\|\cdot\|_s$ en choisissant une partition (φ_i) C^∞ finie de l'unité adaptée à un atlas fini de X et en posant

$$\|u\|_s^2 = \sum_i \|\varphi_i u\|_{W^s(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Deux normes de ce type sont équivalentes et font de $\mathcal{W}^s(X)$ un espace de Banach.

Exercice 1.2.9. Montrer que, si X est compacte, l'espace $\mathcal{W}^0(X)$ s'identifie à l'espace $L^2(X, \text{vol})$ des fonctions mesurables $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\int_X |\varphi|^2 \text{vol} < +\infty$.

Généralisons un peu en prenant des fonctions à valeurs vectorielles. Soit E un fibré vectoriel réel de rang d sur X (cf. [5, § 1.3]). Fixons un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X par des cartes de X , qui soit trivialisant pour le fibré E . Sur chaque carte on a donc $E|_{U_i} \xrightarrow{\sim} U_i \times E_i$, où E_i est un espace vectoriel de dimension d .

Soit E^* le fibré dual, qui est trivialisé sur le même atlas avec pour fibres les espace E_i^* . On dispose d'un accouplement naturel entre les sections C^∞ de E et celle de E^* :

$$\mathcal{E}^\infty(X, E) \otimes \mathcal{E}^\infty(X, E^*) \longrightarrow \mathcal{E}^\infty(X).$$

Fibre à fibre, c'est l'accouplement entre un espace vectoriel et son dual

L'espace $\mathcal{D}'(X, E)$ des distributions sur X à valeurs dans E est défini en prenant pour « fonctions tests » les sections C^∞ à support compact du fibré dual E^* (on suppose fixée la forme volume vol).

Une section u de $\mathcal{D}'(X, E)$ est dans l'espace de Sobolev $\mathcal{W}^s(X, E)$ si, pour toute fonction C^∞ φ à support compact contenu dans un ouvert U_i , on a $\varphi u \in \mathcal{W}^s(U_i) \otimes E_i$.

Si on se donne une *métrique euclidienne* sur E , on peut de même définir la norme $\|u\|_s$ d'une section $u \in \mathcal{W}^s(X, E)$.

Exercice 1.2.10. En utilisant la propriété 1.2.1 (7), montrer que $\mathcal{E}^\infty(X, E)$ est dense dans l'espace $\mathcal{W}^s(X, E)$ pour la norme $\| \cdot \|_s$.

Théorème 1.2.11 (Lemme de Sobolev sur une variété). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout réel $s > k + n/2$, on a $\mathcal{W}^s(X, E) \subset \mathcal{E}^k(X, E)$ et l'injection est continue. \square

Exercice 1.2.12. En utilisant l'exercice 1.2.8, montrer que

$$\begin{aligned}\bigcap_s \mathcal{W}^s(X, E) &= \mathcal{E}^\infty(X, E) \\ \bigcup_s \mathcal{W}^s(X, E) &= \mathcal{D}'(X, E).\end{aligned}$$

Théorème 1.2.13 (Lemme de Rellich sur une variété compacte). Soit E un fibré vectoriel sur X muni d'une métrique euclidienne. Si X est compacte et $s < s'$, l'inclusion $\mathcal{W}^{s'}(X, E) \hookrightarrow \mathcal{W}^s(X, E)$ est compacte. \square

1.3. Opérateurs différentiels sur une variété

1.3.a. Opérateurs différentiels sur un fibré vectoriel. Soient E et F deux fibrés vectoriels réels sur une variété X . La notion d'opérateur différentiel étant *locale*, on peut l'étendre à toute variété : un opérateur différentiel $P : \mathcal{E}^\infty(X, E) \rightarrow \mathcal{E}^\infty(X, F)$ de degré $\leq d$ est une application \mathbb{R} -linéaire qui, dans toute carte locale de la variété où les fibrés E et F sont trivialisés, l'opérateur s'écrit en coordonnées sous la forme

$$P = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x) \partial^\alpha,$$

où a_α est une section C^∞ du fibré $\text{Hom}(E, F)$. Ainsi vu, l'opérateur est un opérateur matriciel.

Exemple 1.3.1. Prenons pour E le fibré $\wedge^k T^*X$, dont l'espace des sections C^∞ est noté $A^k(X)$, et pour F le fibré $\wedge^{k+1} T^*X$. La différentielle

$$d : A^k(X) \longrightarrow A^{k+1}(X)$$

est un opérateur différentiel d'ordre 1, bien défini sur la variété (*i.e.* sans faire appel aux coordonnées).

1.3.b. Adjoint formel. Supposons que les fibrés E et F soient euclidiens, c'est-à-dire munis d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ ou $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ euclidien. La variété X étant orientée et munie d'une forme volume vol , il est possible de définir un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_E$ ou $(\cdot, \cdot)_F$ euclidien sur l'espace des sections à support compact de ces fibrés :

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{E}_c^\infty(X, E), \quad (\varphi, \psi)_E = \int_X \langle \varphi, \psi \rangle_E \text{vol},$$

et de même pour F . Si $P : \mathcal{E}^\infty(X, E) \rightarrow \mathcal{E}^\infty(X, F)$ est une application \mathbb{R} -linéaire, on dira que P admet un *adjoint formel*, qu'on notera alors P^* , s'il existe un opérateur \mathbb{R} -linéaire $P^* : \mathcal{E}^\infty(X, F) \rightarrow \mathcal{E}^\infty(X, E)$ qui satisfait la propriété suivante : pour toutes sections C^∞ à support compact $\varphi \in \mathcal{E}_c^\infty(X, E)$ et $\psi \in \mathcal{E}_c^\infty(X, F)$, on a

$$(P\varphi, \psi)_F = (\varphi, P^*\psi)_E.$$

Exercice 1.3.2. Montrer que si un tel opérateur existe, il est unique :

(1) dans la situation générale, on raisonnera comme sur \mathbb{R}^n en introduisant l'espace $L^2(X, E)$ des sections u mesurables de E qui satisfont $\int_X \langle u, u \rangle_E \text{vol} < +\infty$ et en montrant que $\mathcal{E}_c^\infty(X, E)$ y est dense ;

(2) si on sait *a priori* que tout adjoint envoie $\mathcal{E}_c^\infty(X, F)$ dans $\mathcal{E}_c^\infty(X, E)$ (ce qui est le cas pour les opérateurs différentiels, cf. *infra*), on considérera, pour deux adjoints P^{*1} et P^{*2} , le nombre $([P^{*1} - P^{*2}] \psi, [P^{*1} - P^{*2}] \psi)_E$ pour $\psi \in \mathcal{E}_c^\infty(X, F)$.

Proposition 1.3.3. *Tout opérateur différentiel $P : \mathcal{E}^\infty(X, E) \rightarrow \mathcal{E}^\infty(X, F)$ entre deux fibrés vectoriels euclidiens admet un (unique) adjoint $P^* : \mathcal{E}^\infty(X, F) \rightarrow \mathcal{E}^\infty(X, E)$, qui est aussi un opérateur différentiel de même degré que P .*

En appliquant ceci à l'opérateur d , on en déduit le lemme 0.2.2.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de Stokes. Montrons-la lorsque X est un ouvert de \mathbb{R}^n et lorsque les fibrés E et F sont triviaux. Fixons de plus des bases orthonormées pour les métriques. L'opérateur P s'écrit donc $\sum a_\alpha(x) \partial^\alpha$, où a_α est une matrice. Notons aussi $\text{vol} = \lambda(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ avec $\lambda(x) > 0$. Il suffit de regarder ce qui se passe pour une dérivation partielle ∂_{x_i} puisque l'opérateur P est somme de composés de tels opérateurs (le cas des opérateurs d'ordre 0 ne pose pas de problème). On a donc

$$\begin{aligned} (\partial_{x_i} \varphi, \psi)_F &= \int_X \partial_{x_i} \varphi(x) \cdot \psi(x) \cdot \lambda(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= - \int_X \varphi(x) \partial_{x_i} \cdot (\psi(x) \lambda(x)) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \end{aligned}$$

d'après la formule de Stokes⁽²⁾ et puisque φ et ψ sont à support compact.

Dans le cas général, on utilise une partition de l'unité pour recoller les morceaux. \square

1.3.c. L'opérateur \star de Hodge et l'opérateur de Laplace-Beltrami. Lorsqu'on considère les fibrés vectoriels $\wedge^k T^*X$ et l'opérateur d , l'adjoint formel d^* s'exprime comme un conjugué de d . Remarquons d'abord que les fibrés $\wedge^k T^*X$ et $\wedge^{n-k} T^*X$ ont même rang. Une fois fixée la métrique sur X et donc le produit scalaire sur tous les $\wedge^j T^*X$ comme indiqué au §0.2, on peut expliciter un isomorphisme⁽³⁾, noté

$$\star : \wedge^k T^*X \xrightarrow{\sim} \wedge^{n-k} T^*X$$

défini par

$$\varphi \wedge \star \psi = \langle \varphi, \psi \rangle \text{vol}.$$

Rappelons en effet que le produit extérieur induit un isomorphisme de dualité

$$\wedge^k T^*X \xrightarrow[\sim]{\wedge} \text{Hom}(\wedge^{n-k} T^*X, \wedge^n T^*X).$$

Calculons dans une base orthonormée locale ξ_1, \dots, ξ_n de TX , définie sur un ouvert U . Alors les $\xi_I^* = \xi_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k}^*$ forment par définition une base orthonormée de $\wedge^k T^*U$ lorsque I parcourt l'ensemble des multi-indices ordonnés de longueur k .

Soit I^c le complémentaire de I dans $\{1, \dots, n\}$ et soit $\varepsilon(I, I^c)$ la signature de la permutation $(1, \dots, n) \mapsto (I, I^c)$. On a ainsi $\xi_I^* \wedge \xi_{I^c}^* = \varepsilon(I, I^c) \xi_1^* \wedge \cdots \wedge \xi_n^*$.

Lemme 1.3.4. *Soit $\psi = \sum_{|I|=k} \psi_I \xi_I^*$. On a $\star v = \sum_{|I|=k} \varepsilon(I, I^c) \psi_I \xi_{I^c}^*$.*

⁽²⁾qui dit que, si η une $(n-1)$ -forme à support compact sur X , alors $\int_X d\eta = 0$ (cf. [5, Th. 1.15]) ; on l'applique ici à $\eta = \varphi(x) \psi(x) \lambda(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$.

⁽³⁾Malgré une notation \star analogue, il n'a rien à voir avec la convolution.

Ce lemme montre que \star est bien un isomorphisme, puisque $\star dx_I = \varepsilon(I, I^c) dx_{I^c}$.

Démonstration. Il suffit de montrer l'égalité ci-dessus, par linéarité. Il suffit donc de montrer, pour tout J de longueur k ,

$$\xi_J^* \wedge \varepsilon(I, I^c) \xi_{I^c}^* = \delta_{I,J} \xi_1^* \wedge \cdots \wedge \xi_n^*,$$

où $\delta_{I,J} = \langle \xi_J^*, \xi_J^* \rangle$ est aussi le symbole de Kronecker, puisque la base est orthonormée. C'est justement la définition de $\varepsilon(I, I^c)$. \square

Lemme 1.3.5. *L'opérateur \star est une isométrie qui satisfait $\star \star = (-1)^{k(n-k)} = (-1)^{k(n-1)}$ sur $\wedge^k T^*X$. En particulier, si n est pair, on a $\star \star = (-1)^k$.*

Démonstration. Ceci résulte de $\varepsilon(I, I^c)\varepsilon(I^c, I) = (-1)^{k(n-k)}$ (exercice) et de $(-1)^{k^2} = (-1)^k$. \square

Proposition 1.3.6 (adjoint formel de d). *On a $d^* = (-1)^{nk+1} \star d \star : A^{k+1}(X) \rightarrow A^k(X)$. En particulier, si n est pair, on a $d^* = -\star d \star$.*

Il peut être plus clair de voir un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A^{k+1}(X) & \xrightarrow{(-1)^{nk+1} d^*} & A^k(X) \\ \star \downarrow & & \uparrow \star \\ A^{n-k-1}(X) & \xrightarrow{d} & A^{n-k}(X) \end{array}$$

Démonstration. Pour $\varphi \in A_c^k(X)$ et $\psi \in A_c^{k+1}(X)$, on a

$$\begin{aligned} (d\varphi, \psi) &= \int_X \langle d\varphi, \psi \rangle \text{vol} = \int_X d\varphi \wedge \star \psi \\ &= (-1)^{k+1} \int_X \varphi \wedge d \star \psi \end{aligned}$$

car $d(\varphi \wedge \star \psi) = d\varphi \wedge \star \psi + (-1)^k \varphi \wedge d \star \psi$ et, par la formule de Stokes, l'intégrale d'une n -forme exacte à support compact est nulle. Il vient donc

$$\begin{aligned} (d\varphi, \psi) &= (-1)^{k+1} (-1)^{(n-k)k} \int_X \varphi \wedge \star \star d \star \psi \\ &= (-1)^{k+1} (-1)^{(n-k)k} \int_X \langle \varphi, \star d \star \psi \rangle \text{vol}. \end{aligned} \quad \square$$

Définition 1.3.7 (opérateur de Laplace-Beltrami). L'opérateur $\Delta : A^k(X) \rightarrow A^k(X)$ sur la variété X est l'opérateur

$$\Delta = dd^* + d^*d.$$

Cet opérateur dépend bien sûr de la métrique choisie sur X , comme d'ailleurs le produit scalaire $(,)$. Il est formellement auto-adjoint (*i.e.* égal à son adjoint formel) pour ce produit scalaire.

1.3.d. Le symbole principal et la notion d'opérateur elliptique

Lorsque $P : \mathcal{E}^\infty(X, E) \rightarrow \mathcal{E}^\infty(X, F)$ est un opérateur différentiel d'ordre d entre deux fibrés vectoriels sur une variété, le *symbole principal* σ_P est une application $C^\infty \sigma_P : T^*X \rightarrow \text{Hom}(E, F)$ du fibré cotangent vers le fibré des homomorphismes, qui commute avec la projection sur X , définie par la méthode de l'exercice 1.1.5, c'est-à-dire telle que, pour toute fonction $C^\infty f$ sur un ouvert de X , on ait $e^{-tf}P(e^{tf}) = t^d\sigma_P(x, df(x)) + \dots$.

La notion d'opérateur elliptique se définit comme en 1.1.7.

Exercice 1.3.8. Montrer que, si P est d'ordre d , on a $\sigma_{P^*} = (-1)^d(\sigma_P)^*$, où $\sigma_P(x, y)^* \in \text{Hom}(F_x, E_x)$ est l'homomorphisme adjoint de $\sigma_P(x, y)$ au sens des produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$. En particulier, si $\text{rg } E = \text{rg } F$, P est elliptique si et seulement si P^* l'est.

Proposition 1.3.9 (symbole de Δ). L'opérateur $\Delta : A^k(X) \rightarrow A^k(X)$ est elliptique et a pour symbole $\sigma_\Delta(x, y)(\eta) = -\|y\|^2 \eta$.

Démonstration. Nous allons faire un calcul intrinsèque. À cette fin, rappelons quelques propriétés du produit intérieur par un champ de vecteur. Si ξ est un champ de vecteurs sur un ouvert U de X , le produit intérieur ι_ξ envoie $A^k(U)$ dans $A^{k-1}(U)$. C'est un opérateur local, qui est linéaire par rapport à la multiplication par les fonctions C^∞ , c'est-à-dire qu'il peut se définir fibre à fibre : il est défini par

$$(\iota_\xi \eta)(\xi_2, \dots, \xi_k) = \eta(\xi, \xi_2, \dots, \xi_k) \quad \text{pour toute } k\text{-forme } \eta.$$

C'est une dérivation, au sens où

$$\iota_\xi(\eta \wedge \omega) = \iota_\xi(\eta) \wedge \omega + (-1)^{\deg \eta} \eta \wedge \iota_\xi(\omega).$$

Si θ_ξ est la 1-forme associée à ξ par une métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$, l'opérateur $\theta_\xi \wedge$ est adjoint de ι_ξ , c'est-à-dire que pour toutes formes η, ω de degré convenable, on a

$$\langle \iota_\xi \eta, \omega \rangle = \langle \eta, \theta_\xi \wedge \omega \rangle$$

[il suffit de le vérifier sur une base orthonormée telle qu'elle est construite au §0.2]. En particulier, $\iota_\xi(\theta_\xi) = \|\xi\|^2 = \|\theta_\xi\|^2$.

Revenons au calcul de σ_Δ . On a d'abord $\sigma_d(x, y)(\eta) = y \wedge \eta$. En effet, on a $e^{-tf}d(e^{tf}\eta) = t \cdot df \wedge \eta + d\eta$.

D'autre part, on sait que, puisque d est d'ordre 1, on a aussi $\sigma_{d^*} = -(\sigma_d)^*$, autrement dit $\sigma_{d^*}(x, y) = -\iota_{\tilde{y}}$, si \tilde{y} est le vecteur tangent associé à y par la métrique.

On a maintenant

$$\begin{aligned} \sigma_\Delta(x, y)(\eta) &= (\sigma_d(x, y)\sigma_{d^*}(x, y) + \sigma_{d^*}(x, y)\sigma_d(x, y))(\eta) \\ &= -(y \wedge (\iota_{\tilde{y}}\eta) + \iota_{\tilde{y}}(y \wedge \eta)) = -\|y\|^2 \eta. \end{aligned} \quad \square$$

1.3.e. L'inégalité de Gårding et la régularité des opérateurs elliptiques. C'est le point clé de toute la démonstration dont la preuve sera donnée au §1.5. Commençons par remarquer qu'un opérateur différentiel $P : \mathcal{E}^\infty(X, E) \rightarrow \mathcal{E}^\infty(X, F)$ de degré d induit, pour tout $s \in \mathbb{R}$, un opérateur $P_s : \mathcal{W}^{s+d}(X, E) \rightarrow \mathcal{W}^s(X, F)$.

Un opérateur différentiel P est dit *régulier* si, pour toute section $v \in \mathcal{E}^\infty(X, F)$, les solutions distributions de $Pu = v$ sont aussi C^∞ . L'inégalité de Gårding ci-dessous montre que les opérateurs différentiels elliptiques sont réguliers dans ce sens, et donne une version plus précise et quantitative de cette régularité.

Théorème 1.3.10. Soit P un opérateur différentiel elliptique de degré d entre deux fibrés E et F de même rang r sur une variété compacte X de dimension n . Alors, il existe $C_s > 0$ telle que, pour toute section $u \in \mathcal{L}^2(X, E) = \mathcal{W}^0(X, E)$ satisfaisant à $Pu \in \mathcal{W}^s(X, F)$, on ait $u \in \mathcal{W}^{s+d}(X, E)$ et

$$\|u\|_{s+d} \leq C_s (\|P_s u\|_s + \|u\|_0).$$

Corollaire 1.3.11 (régularité). Dans les mêmes conditions, si l'on a $Pu \in \mathcal{E}^\infty(X, F)$, c'est que $u \in \mathcal{E}^\infty(X, E)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Gårding et du lemme de Sobolev 1.2.11. \square

Corollaire 1.3.12. Sur une variété riemannienne compacte, les formes harmoniques sont C^∞ . \square

1.4. Finitude pour les opérateurs elliptiques et théorème de Hodge

1.4.a. Le théorème de finitude

Théorème 1.4.1 (de finitude). Soient E, F deux fibrés vectoriels euclidiens de même rang r sur une variété compacte X . Soit $P : \mathcal{E}^\infty(X, E) \rightarrow \mathcal{E}^\infty(X, F)$ un opérateur différentiel elliptique. Alors,

- (1) $\text{Ker } P$ est de dimension finie,
- (2) Le sous-espace $\text{Im } P$ est fermé et de codimension finie dans $\mathcal{E}^\infty(X, F)$ pour la norme $\|\cdot\|_0$; de plus, si P^* est l'adjoint formel de P , on a une décomposition (\cdot, \cdot) -orthogonale

$$\mathcal{E}^\infty(X, F) = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P^*.$$

Démonstration. Soit d le degré de P et notons $P_s : \mathcal{W}^{s+d}(X, E) \rightarrow \mathcal{W}^s(X, F)$ l'opérateur défini par P . Puisque P_s est continu (cf. propriété 1.2.1(6)), $\text{Ker } P_s$ est fermé. Le corollaire 1.3.11 montre que $\text{Ker } P_s = \text{Ker } P_{s'} = \text{Ker } P$ pour $s' > s$. Le lemme de Rellich 1.2.13 et son corollaire 1.2.5 montrent que $\text{Ker } P$ est de dimension finie, d'où (1).

Nous allons maintenant montrer que, si $s + d > 0$, l'opérateur P_s est d'image fermée.

Lemme 1.4.2. Soient V un espace de Banach séparable, H un espace de Hilbert et $i : V \hookrightarrow H$ une injection continue et compacte. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-espace fermé de codimension finie $V_\varepsilon \subset V$ tel qu'on ait $\|i(u)\|_H \leq \varepsilon \|u\|_V$ pour tout $u \in V_\varepsilon$.

Démonstration. On peut supposer que $i(V)$ est dense dans H . Il existe une base orthonormée de H faite d'éléments $i(v_1), \dots, i(v_k), \dots$ de $i(V)$ (Gram-Schmidt). Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on considère la suite décroissante de sous-ensembles

$$K_N = \{u \in V \mid \varepsilon^2 \|u\|_V^2 + \sum_{j=1}^N |\langle i(u), i(v_j) \rangle_H|^2 \leq 1\}.$$

Alors $\overline{i(K_N)}$ est compact, car K_N est borné. De plus, $\cap_N \overline{i(K_N)}$ est contenu dans la boule unité ouverte de H : en effet, si $w \in \cap_N \overline{i(K_N)}$, il existe pour tout N un élément $u_N \in K_N$ tel que $i(u_N)$ ait les mêmes coefficients sur la base $(i(v_j))$ jusqu'à l'ordre N ; si C est telle que $\|i(u)\|_H \leq C \|u\|_V$, on a $C^{-2}\varepsilon^2 \|i(u_N)\|_H^2 + \sum_{j=1}^N |\langle w, i(v_j) \rangle_H|^2 \leq 1$ donc, en passant à la limite, $(1 + C^{-2}\varepsilon^2) \|w\|^2 \leq 1$.

Il existe ainsi $N(\varepsilon)$ tel que $i(K_N)$ soit contenu dans la boule unité ouverte de H . Ceci implique que, pour tout $u \in V$, on a

$$\|i(u)\|_H^2 \leq \varepsilon^2 \|u\|_V^2 + \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} |\langle i(u), i(v_i) \rangle_H|^2.$$

[Indication : si on a une inégalité stricte $>$ pour un certain $u \in V$, on remplace u par $u/\|i(u)\|_H$]. On pose donc $V_\varepsilon = \langle v_1, \dots, v_{N(\varepsilon)} \rangle^\perp$. \square

Appliquons le lemme à $\mathscr{W}^{s+d}(X, E) \subset \mathscr{W}^0(X, E)$ (ce qui est loisible, d'après le lemme de Rellich) et en prenant ε de sorte que $1 - C_s\varepsilon > 0$, où C_s est donnée par l'inégalité de Gårding. Pour $u \in \mathscr{W}^{s+d}(X, E)_\varepsilon$, on a alors $(1 - C_s\varepsilon)\|u\|_{s+d} \leq C_s\|P_s u\|_s$. Ceci montre que la restriction de P_s à $\mathscr{W}^{s+d}(X, E)_\varepsilon$ est d'image fermée. Puisque $\mathscr{W}^{s+d}(X, E)_\varepsilon$ est fermé et de codimension finie dans $\mathscr{W}^{s+d}(X, E)$, on en déduit que le sous-espace $\text{Im } P_s$ est fermé dans $\mathscr{W}^s(X, F)$.

On a ainsi, lorsque $s = 0$, la décomposition $(,)$ -orthogonale $\mathscr{W}^0(X, F) = \text{Im } P_d \oplus \text{Ker } P_0^*$. Puisque P^* est aussi elliptique, il en résulte que $\text{Ker } P_s^*$ est de dimension finie et ne dépend pas de s , donc est contenu dans $\mathscr{E}^\infty(X, F)$. Par conséquent, $\text{Im } P_d$ est de codimension finie dans $\mathscr{W}^0(X, F)$.

Si $v \in \mathscr{E}^\infty(X, F)$, la décomposition de v s'écrit $v = P_d u + w$, avec $P_d u \in \mathscr{E}^\infty(X, F)$ puisque $\text{Ker } P^* \subset \mathscr{E}^\infty(X, F)$. Par régularité, on a $u \in \mathscr{E}^\infty(X, E)$. Autrement dit, la décomposition $(,)$ -orthogonale de $\mathscr{W}^0(X, F)$ induit une décomposition $(,)$ -orthogonale

$$\mathscr{E}^\infty(X, F) = P(\mathscr{E}^\infty(X, E)) \oplus \text{Ker } P^*. \quad \square$$

1.4.b. Application : démonstration du théorème de Hodge 0.2. Appliquons le théorème de finitude à l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ sur la variété riemannienne compacte orientée X : c'est en effet un opérateur elliptique. Puisque Δ est autoadjoint, on a donc, en prenant pour E et F les fibrés $\wedge^k T^*X$, une décomposition $(,)$ -orthogonale

$$A^k(X) = \Delta(A^k(X)) \oplus \mathcal{H}^k(X).$$

Il reste à montrer que l'on a une décomposition orthogonale

$$\Delta(A^k(X)) = \text{Im } d \oplus \text{Im } d^*.$$

Par définition de l'adjoint formel et du fait de l'identité $d^2 = 0$, on a $\text{Im } d \perp \text{Im } d^*$. L'inclusion \subset est claire, puisque $\Delta = d^*d + dd^*$. D'autre part, il est immédiat de voir que $\mathcal{H}^k(X)$ est orthogonal aux deux sous-espaces $\text{Im } d$ et $\text{Im } d^*$; par conséquent, ceux-ci sont contenus dans $\text{Im } \Delta$. \square

1.5. Démonstration de l'inégalité de Gårding

Une partie du travail consiste en la recherche d'une paramétrix pour un opérateur différentiel elliptique, c'est-à-dire un inverse à gauche et à droite *modulo* C^∞ . Un tel inverse n'existe pas, en général, dans la classe des opérateurs différentiels⁽⁴⁾ Il faut considérer une famille plus large d'opérateurs sur l'espace des fonctions C^∞ à support compact, à savoir celle des *opérateurs pseudo-différentiels*. On les définit d'abord sur \mathbb{R}^n en utilisant la transformation de Fourier, puis sur un ouvert de \mathbb{R}^n par localisation, et enfin sur une variété, suivant le même principe que pour les espaces de Sobolev.

⁽⁴⁾L'analogie avec le théorème d'inversion locale du calcul différentiel n'est pas dépourvue d'intérêt : si $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application polynomiale dont le jacobien ne s'annule pas, alors p admet localement une fonction réciproque, qui n'est pas en général un polynôme ; c'est une fonction analytique, développable en série.

1.5.a. Opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^n . Soit $\sigma : T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction sur le fibré cotangent de \mathbb{R}^n . Si on note (x, ξ) les points de $T^*\mathbb{R}^n$, on peut, sous certaines hypothèses sur σ , associer à σ un opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c^\infty(\mathbb{R}^n) &\xrightarrow{\text{Op}_\sigma} \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \varphi(x) &\longmapsto \text{Op}_\sigma(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x, \xi) \widehat{\varphi}(\xi) e^{2i\pi x \cdot \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Définition 1.5.1. Soit $d \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction σ sur $T^*\mathbb{R}^n$ est un *symbole* d'ordre $\leq d$ si, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha, \beta} > 0$ de sorte que les inégalités suivantes soient satisfaites :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + \|\xi\|)^{d - |\beta|}.$$

On note $\mathcal{S}^d(\mathbb{R}^n)$ l'espace des symboles d'ordre $\leq d$ sur \mathbb{R}^n .

On a ainsi une famille croissante $\dots \subset \mathcal{S}^d(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}^{d'}(\mathbb{R}^n) \subset \dots$ d'espaces ($d \leq d'$). On note aussi $\mathcal{S}^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{d \in \mathbb{R}} \mathcal{S}^d(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.5.2. Il est clair sur la définition que $\mathcal{S}^d(\mathbb{R}^n)$ est stable par dérivation par rapport aux variables x , tandis que une dérivation d'ordre k en ξ envoie \mathcal{S}^d dans \mathcal{S}^{d-k} .

Exemples 1.5.3

(1) Soit $\sigma(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ un polynôme de degré d en ξ à coefficients C^∞ en x et bornés ainsi que toutes leurs dérivées. Alors σ est un symbole d'ordre $\leq d$. Si φ est C^∞ à support compact, ou plus généralement si φ est dans la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (fonctions C^∞ sur \mathbb{R}^n à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées), alors $\widehat{\varphi}(\xi)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (dans la variable ξ) et, puisque la transformation de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on voit, en utilisant la transformation de Fourier inverse, que Op_σ n'est autre que l'opérateur différentiel $P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x) D_x^\alpha$, avec $D_{x_j} = \frac{1}{2i\pi} \partial_{x_j}$. Ceci justifie le nom de *pseudo-différentiel* attaché à un opérateur du type Op_σ . On dira aussi qu'un symbole σ comme ci-dessus est un *symbole différentiel*, et que c'est le *symbole total* de l'opérateur différentiel P .

(2) Si σ est un symbole différentiel elliptique d'ordre d alors, quitte à éliminer les singularités, $1/\sigma$ est un symbole d'ordre $-d$: plus précisément, si $\varphi(x)$ est C^∞ à support compact et si $\chi(\xi)$ est C^∞ à support compact et $\equiv 1$ près de $\xi = 0$, alors $\varphi(x) \cdot (1 - \chi(\xi/C))/\sigma(x, \xi)$ est dans $\mathcal{S}^{-d}(\mathbb{R}^n)$ si $C \gg 0$ est assez grand pour que

$$\xi/C \in \text{Supp } \chi \implies \forall x \in \text{Supp } \varphi, \quad \sigma(x, \xi) \neq 0.$$

(3) Si $\sigma(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une fonction C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées, alors σ est un symbole d'ordre $-\infty$. Par contre, $e^{2i\pi x \cdot \xi}$ n'est pas un symbole.

Expression asymptotique des symboles. Soit $(d_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels telle que $d_j \rightarrow -\infty$ quand $j \rightarrow \infty$ et, pour tout j , soit $\sigma_j \in \mathcal{S}^{d_j}(\mathbb{R}^n)$. Étant donné $\sigma \in \mathcal{S}^d(\mathbb{R}^n)$, on dira que σ admet $\sum_j \sigma_j$ pour développement asymptotique, et on notera $\sigma \sim \sum_j \sigma_j$ si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sigma - \sum_{j \leq k} \sigma_j \in \mathcal{S}^{d_{k+1}}(\mathbb{R}^n).$$

On peut « sommer » toute telle suite $(\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ par une variante du *lemme de Borel* :

Lemme 1.5.4. Pour $(\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ comme ci-dessus, il existe $\sigma \in \mathcal{S}^{d_0}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\sigma \sim \sum_j \sigma_j$.

Esquisse de démonstration. Soit χ une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^n à support compact, avec $\chi \equiv 1$ près de 0. On cherche σ sous la forme

$$\sigma(x, \xi) = \sum_j (1 - \chi(\varepsilon_j \xi)) \sigma_j(x, \xi),$$

où ε_j tend vers 0 assez vite. La somme considérée est localement finie. \square

Action des opérateurs pseudo-différentiels. Pour tout symbole σ d'ordre d , Op_σ opère envoie tout élément de $\mathcal{E}'_c(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Contrairement au cas des opérateurs différentiels, un opérateur pseudo-différentiel général ne préserve pas nécessairement la compacité du support. On a néanmoins :

Lemme 1.5.5. *Si σ est un symbole et si $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $\text{Op}_\sigma(\varphi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Esquisse de démonstration. On voit d'abord que $\text{Op}_\sigma(\varphi)$ est continue et bornée : on a

$$|\text{Op}_\sigma(\varphi)(x)| \leq \left(\sup_{x, \xi} |\sigma(x, \xi) (1 + \|\xi\|)^{-d}| \right) \cdot \int e^{2i\pi x \cdot \xi} (1 + \|\xi\|)^d |\widehat{\varphi}(\xi)| d\xi.$$

Ensuite on utilise des intégrations par parties. \square

Existence d'un adjoint. On veut maintenant faire opérer les symboles sur les distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La manière naturelle consiste à utiliser l'adjoint formel d'un opérateur pseudo-différentiel, s'il existe : pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on posera alors

$$\langle \text{Op}_\sigma(u), \varphi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle u, \text{Op}_\sigma^*(\varphi) \rangle.$$

L'adjoint formel doit satisfaire, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, une égalité analogue :

$$\int \text{Op}_\sigma(\psi) \cdot \overline{\varphi} dx = \int \psi \cdot \overline{\text{Op}_\sigma^*(\varphi)} dx.$$

Il est, bien entendu, important que l'adjoint formel d'un opérateur pseudo-différentiel soit aussi pseudo-différentiel, à l'image de ce qui se passe pour les opérateurs différentiels (cf. proposition 1.3.3). De plus, si l'adjoint formel existe, il est unique. Nous admettrons le résultat suivant :

Théorème 1.5.6 (adjoint d'un opérateur pseudo-différentiel). *Soit σ un symbole d'ordre $d \in \mathbb{R}$. Il existe un unique symbole $\sigma^* \in \mathcal{S}^d(\mathbb{R}^n)$ tel que Op_{σ^*} soit adjoint formel de Op_σ . De plus, on a, en posant $D_{x_j} = \frac{1}{2i\pi} \partial_{x_j}$,*

$$\sigma^*(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{\sigma}(x, \xi). \quad \square$$

Remarque 1.5.7. L'absence de signe dans la formule, contrairement à ce qui se passe dans la proposition 1.3.3, vient de l'utilisation de D_x au lieu de ∂_x , et de la conjugaison complexe. Ainsi, pour $\varphi, \psi \in \mathcal{E}'_c(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle D_{x_j} \varphi, \psi \rangle = \int D_{x_j}(\varphi) \cdot \overline{\psi} dx = \int \varphi \cdot \overline{D_{x_j} \psi} dx.$$

Composition des opérateurs et des symboles. Maintenant que les opérateurs sont des endomorphismes de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on peut les composer. Soient donc σ_1 et σ_2 deux symboles d'ordre d_1 et d_2 respectivement. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} \text{Op}_{\sigma_1}(\text{Op}_{\sigma_2}(\varphi))(x) &= \int e^{2i\pi x \cdot \xi} \sigma_1(x, \xi) \widehat{\text{Op}_{\sigma_2}(\varphi)}(\xi) d\xi \\ &= \int e^{2i\pi x \cdot \xi} \sigma_1(x, \xi) \left(\iint e^{-2i\pi y \cdot (\xi - \eta)} \sigma_2(y, \eta) \widehat{\varphi}(\eta) dy d\eta \right) d\xi \\ &= \int e^{2i\pi [y\eta + \xi(x-y)]} \sigma_1(x, \xi) \sigma_2(y, \eta) \widehat{\varphi}(\eta) dy d\eta d\xi, \end{aligned}$$

de sorte que, si on pose

$$\sigma(x, \eta) = \int e^{-2i\pi(x-y)(\eta-\xi)} \sigma_1(x, \xi) \sigma_2(y, \eta) dy d\xi,$$

on a $\text{Op}_{\sigma} = \text{Op}_{\sigma_1} \circ \text{Op}_{\sigma_2}$. Il faut bien entendu donner un sens à une telle intégrale. On notera $\sigma = \sigma_1 \diamond \sigma_2$. Nous admettrons le résultat suivant :

Théorème 1.5.8 (composition d'opérateurs pseudo-différentiels). *Si $\sigma_1 \in \mathcal{S}^{d_1}(\mathbb{R}^n)$ et $\sigma_2 \in \mathcal{S}^{d_2}(\mathbb{R}^n)$, alors $\sigma_1 \diamond \sigma_2$ a un sens comme distribution tempérée. C'est un symbole dans $\mathcal{S}^{d_1+d_2}(\mathbb{R}^n)$. De plus, on a l'expression asymptotique*

$$(\sigma_1 \diamond \sigma_2)(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \sigma_1 D_x^{\alpha} \sigma_2. \quad \square$$

En particulier on a $\sigma_1 \diamond \sigma_2 \equiv \sigma_1 \sigma_2 \pmod{\mathcal{S}^{d_1+d_2-1}}$.

Exercice 1.5.9. Montrer que le crochet $[\text{Op}_{\sigma_1}, \text{Op}_{\sigma_2}]$ est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole σ est d'ordre $\leq d_1 + d_2 - 1$. Montrer que l'on a $\sigma \equiv \frac{1}{2i\pi} \{\sigma_1, \sigma_2\} \pmod{\mathcal{S}^{d_1+d_2-2}}$, où $\{, \}$ est le crochet de Poisson.

Théorème 1.5.10 (action sur $L^2(\mathbb{R}^n)$). *Si $\sigma \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^n)$, alors $\text{Op}_{\sigma} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continu pour la norme L^2 sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, autrement dit s'étend de manière unique en un opérateur continu $L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Commençons par le cas où $\sigma \in \mathcal{S}^{-(n+1)}(\mathbb{R}^n)$. Il est utile maintenant d'introduire le *noyau* de l'opérateur Op_{σ} .

Si $\sigma \in \mathcal{S}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \text{Op}_{\sigma}(\varphi)(x) &= \int e^{2i\pi x \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= \int e^{2i\pi x \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \left(\int e^{-2i\pi y \cdot \xi} \varphi(y) dy \right) d\xi. \end{aligned}$$

On vérifie que, à x fixé, la fonction $(y, \xi) \mapsto \sigma(x, \xi) \varphi(y)$ est L^1 de sorte que, par Fubini, on a

$$\text{Op}_{\sigma}(\varphi)(x) = \int K_{\sigma}(x, y) \varphi(y) dy \quad \text{avec} \quad K_{\sigma}(x, y) = \int e^{2i\pi(x-y) \cdot \xi} \sigma(x, \xi) d\xi.$$

Ainsi, à x fixé, la fonction $y \mapsto K_{\sigma}(x, y)$ n'est autre que la transformée de Fourier inverse de $\xi \mapsto \sigma(x, \xi)$, prise en $x - y$.

Si $\sigma \in \mathcal{S}^d(\mathbb{R}^n)$, on peut définir K_{σ} comme *distribution tempérée* des variables x, y en utilisant l'extension de la transformation de Fourier aux distributions tempérées.

Remarque 1.5.11. D'une manière générale, on pourrait montrer l'existence d'un opérateur adjoint de Op_σ en prenant l'opérateur dont le noyau est la distribution tempérée $K^*(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{K_\sigma(y, x)}$. Ce qui n'est pas évident dans le théorème 1.5.6 est que cet opérateur est associé à un symbole, et que ce symbole a l'expression asymptotique voulue.

Si $\sigma \in \mathcal{S}^{-(n+1)}(\mathbb{R}^n)$, on a $|\sigma(x, \xi)| \leq C(1 + \|\xi\|)^{-(n+1)}$, qui est sommable en ξ de manière uniforme par rapport à x . Ainsi $(x, y) \mapsto K_\sigma(x, y)$ est une fonction continue et bornée. En appliquant le même raisonnement à la dérivée $\partial\sigma/\partial\xi_j$, dont le noyau est, à une constante près, $(x_j - y_j)K_\sigma(x, y)$, et ceci jusqu'à l'ordre $n+1$, on en déduit que $(1 + \|x - y\|^{n+1})K_\sigma(x, y)$ est bornée. En particulier, pour une constante $C > 0$ convenable, on a

$$\int |K_\sigma(x, y)| dx \leq C \quad \text{et} \quad \int |K_\sigma(x, y)| dy \leq C.$$

Ceci implique que l'opérateur de noyau K_σ , c'est-à-dire Op_σ , est borné en norme L^2 : en effet

$$\begin{aligned} |\text{Op}_\sigma(\varphi)(x)|^2 &= \left| \int K_\sigma(x, y)\varphi(y) dy \right|^2 \\ &\leq \int |K_\sigma(x, y)|^2 |\varphi(y)|^2 dy \\ &\leq \int |K_\sigma(x, y)| |\varphi(y)|^2 dy \cdot \int |K_\sigma(x, y)| dy \\ &= C \int |K_\sigma(x, y)| |\varphi(y)|^2 dy, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int |\text{Op}_\sigma(\varphi)(x)|^2 dx &\leq C \int |K_\sigma(x, y)| |\varphi(y)|^2 dy dx \\ &\leq C \int |\varphi(y)|^2 dy \cdot \int |K_\sigma(x, y)| dx \\ &\leq C^2 \int |\varphi(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

Exercice 1.5.12. On justifiera ces inégalités en utilisant les propriétés de K_σ .

Soit maintenant $\sigma \in \mathcal{S}^{-k}(\mathbb{R}^n)$ avec $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous allons montrer que Op_σ est continu pour la norme L^2 par récurrence descendante sur k , en partant de $k = n+1$, où le résultat est vrai d'après ce qui précède. Utilisons l'existence de l'adjoint de Op_σ (cf. théorème 1.5.6). Puisque l'on a

$$\|\text{Op}_\sigma(\varphi)\|_{L^2}^2 = (\text{Op}_\sigma(\varphi), \text{Op}_\sigma(\varphi)) = |(\text{Op}_\sigma^* \text{Op}_\sigma(\varphi), \varphi)| \leq \|\text{Op}_\sigma^* \text{Op}_\sigma(\varphi)\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2},$$

on en déduit que, si $\text{Op}_\sigma^* \text{Op}_\sigma$ est continu pour la norme L^2 , il en est de même de Op_σ et dans ce cas $\|\text{Op}_\sigma\|_{L^2}^2 \leq \|\text{Op}_\sigma^* \text{Op}_\sigma\|_{L^2}$. Remarquons maintenant que $\text{Op}_\sigma^* \text{Op}_\sigma = \text{Op}_{\sigma^* \diamond \sigma} = \text{Op}_{\sigma^* \diamond \sigma}$ et que $\sigma^* \diamond \sigma$ est d'ordre $\leq -2k \leq -k-1$ (car $k \geq 1$), d'où le résultat par récurrence.

Reste à voir ce qui se passe pour $k = 0$. On cherche donc une constante $C > 0$ telle que $\|\text{Op}_\sigma(\varphi)\|_{L^2}^2 \leq C \|\varphi\|_{L^2}^2$, c'est-à-dire aussi telle que $((C \text{Id} - \text{Op}_\sigma^* \text{Op}_\sigma)\varphi, \varphi) \geq 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Puisque σ est un symbole d'ordre ≤ 0 , il est borné. Soit $C > \sup |\sigma(x, \xi)|^2$ et posons

$$\theta(x, \xi) = (C - |\sigma(x, \xi)|^2)^{1/2}.$$

On vérifie sans difficulté que θ est aussi un symbole d'ordre ≤ 0 . On a

$$\theta^* \diamond \theta \equiv C - |\sigma(x, \xi)|^2 \equiv C - \sigma^* \diamond \sigma \pmod{\mathcal{S}^{-1}}.$$

On en déduit que

$$\|\text{Op}_\sigma(\varphi)\|_{L^2}^2 + \|\text{Op}_\theta(\varphi)\|_{L^2}^2 \leq C \|\varphi\|_{L^2}^2 + (\text{Op}_\rho(\varphi), \varphi),$$

avec $\rho \in \mathcal{S}^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Puisque, d'après ce qui précède, Op_ρ est continu pour la norme L^2 , on en déduit qu'il en est de même de Op_σ . \square

Corollaire 1.5.13 (action sur les espaces de Sobolev). Soit $\sigma \in \mathcal{S}^d(\mathbb{R}^n)$. Alors $\text{Op}_\sigma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continu pour les normes de Sobolev $\|\cdot\|_s$ et $\|\cdot\|_{s-d}$, autrement dit s'étend de manière unique en un opérateur continu $W^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{s-d}(\mathbb{R}^n)$.

Esquisse de démonstration. Soit $\chi(\xi)$ une fonction C^∞ à support compact sur \mathbb{R}^n , telle que $\chi \equiv 1$ près de 0. Alors $\tau_d(\xi) = (1 - \chi(\xi)) |\xi|^d$ est un symbole d'ordre d qui satisfait la propriété du corollaire. On applique alors le théorème 1.5.10 à $\tau_{-(d+s)} \diamond \sigma \diamond \tau_s$, qui est d'ordre 0 d'après le théorème 1.5.8. \square

1.5.b. Opérateurs pseudo-différentiels sur une variété. On localise la notion d'opérateur pseudo-différentiel par le procédé usuel : si U est un ouvert de \mathbb{R}^n , une fonction σ sur T^*U est un symbole d'ordre $\leq d$ si, pour toute fonction C^∞ $\chi(x)$ à support compact dans U , la fonction $\chi\sigma$ est un symbole d'ordre d sur \mathbb{R}^n ; autrement dit, pour tout compact K de U et tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{K,\alpha,\beta} > 0$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \sup_{x \in K} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi) \right| \leq C_{K,\alpha,\beta} (1 + \|\xi\|)^{d-|\beta|}.$$

Plus généralement, si E et F sont deux fibrés vectoriels euclidiens ou hermitiens sur U , un symbole d'opérateur de E dans F est une application σ entre variétés C^∞ T^*U et $\text{Hom}(E, F)$, qui commute avec les projections :

$$\begin{array}{ccc} T^*U & \xrightarrow{\sigma} & \text{Hom}(E, F) \\ & \searrow & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

et qui satisfait une propriété analogue. On étend les propriétés du § 1.5.a, convenablement localisées, à cette situation. En particulier, un opérateur pseudo-différentiel d'ordre d sur U est continu de $\mathcal{W}^s(U, E)$ dans $\mathcal{W}^{s-d}(U, F)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Soit X une variété compacte orientée et soient E et F deux fibrés euclidiens ou hermitiens sur X . Fixons un recouvrement fini de X par des cartes sur lesquelles les fibrés sont trivialisables et choisissons une partition de l'unité (χ_j) adaptée à ce recouvrement. À toute application C^∞ $\sigma : T^*X \rightarrow \text{Hom}(E, F)$ qui commute avec la projection sur X et qui est localement un symbole d'ordre d , ce qu'on notera $\sigma \in \mathcal{S}^d(X, E, F)$, on associe l'opérateur Op_σ défini par

$$\text{Op}_\sigma(\varphi) = \sum_j \chi_j \text{Op}_\sigma(\chi_j \varphi).$$

Ceci dépend du choix de la partition de l'unité, mais permet de travailler de manière locale sur X et donc d'appliquer les résultats ci-dessus.

Remarque 1.5.14 (opérateurs régularisants). Soit $\sigma \in \mathcal{S}^{-\infty}(X, E, F)$. Alors, pour tout s , Op_σ envoie $cW^s(U, E)$ dans $\cap_d \mathcal{W}^{s-d}(U, F) = \mathcal{C}^\infty(X, E)$ d'après le lemme de Sobolev. On dit que Op_σ est un *opérateur régularisant*.

1.5.c. Inversion des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques. Soit $\sigma \in \mathcal{S}^d(X, E, F)$. On dit que σ est un *symbole elliptique* s'il existe $c > 0$ telle que, pour tout $(x, \xi) \in T^*X$ avec $\|\xi\|$ assez grand, on ait, pour tout $u \in E_x$,

$$\|\sigma(x, \xi)u\|_{F_x} \geq c \|\xi\|^d \|u\|_{E_x}.$$

Lorsque E et F ont même rang, ce qu'on supposera désormais, cette condition implique que $\sigma(x, \xi)$ est un isomorphisme de E_x sur F_x pour tout x et tout ξ avec $\|\xi\|$ assez grand.

Théorème 1.5.15 (inversion des opérateurs elliptiques). Soit $\sigma \in \mathcal{S}^d(X, E, F)$ un symbole elliptique. Il existe un symbole $\tau \in \mathcal{S}^{-d}(X, F, E)$ tel que $\tau \diamond \sigma = \text{Id}_E + \rho$ avec $\rho \in \mathcal{S}^{-\infty}(X, E, E)$.

Démonstration. Comme dans l'exemple 1.5.3(2), on peut trouver un symbole $\sigma' \in \mathcal{S}^{-d}(X, F, E)$ tel que $\sigma'\sigma - \text{Id}_E$ et $\sigma\sigma' - \text{Id}_F$ soient $\equiv 0$ pour $\|\xi\|$ assez grand. En particulier (cf. exemple 1.5.3(3)), $\sigma'\sigma - \text{Id}_E \in \mathcal{S}^{-\infty}(X, E)$ et $\sigma\sigma' - \text{Id}_F \in \mathcal{S}^{-\infty}(X, F)$. Par conséquent, d'après le théorème 1.5.8, on a

$$\sigma' \diamond \sigma - \text{Id}_E \in \mathcal{S}^{-1}(X, E) \quad \text{et} \quad \sigma \diamond \sigma' - \text{Id}_F \in \mathcal{S}^{-1}(X, F).$$

Pour conclure, il suffit de trouver un inverse (mod $\mathcal{S}^{-\infty}$) à gauche et à droite de $\text{Id} + \theta$ avec θ d'ordre -1 . Pour cela, on considère la série $\text{Id} - \theta + \theta^{\circ 2} - \dots$. D'après le lemme 1.5.4, il existe ρ telle que $\text{Id} + \rho \sim \text{Id} - \theta + \theta^{\circ 2} - \dots$, puisque $\theta^{\circ j} \in \mathcal{S}^{-j}$. Alors $(\text{Id} + \theta)(\text{Id} + \rho)$ et $(\text{Id} + \rho)(\text{Id} + \theta)$ sont $\equiv \text{Id} \pmod{\mathcal{S}^{-\infty}}$. \square

Démonstration du théorème 1.3.10. Soit donc P un opérateur différentiel elliptique de degré d , de E dans F . Il existe, d'après le théorème d'inversion 1.5.15, un symbole τ de degré $-d$, tel que $\text{Op}_\tau \circ P = \text{Id} + \text{Op}_\rho$, avec Op_ρ régularisant.

Soit $u \in \mathcal{W}^0(X, E)$ tel que $Pu \in \mathcal{W}^s(X, F)$. On a $u = \text{Op}_\tau(Pu) - \text{Op}_\rho(u)$. Alors, d'une part, $\text{Op}_\tau(Pu) \in \mathcal{W}^{s+d}(X, E)$ et $\text{Op}_\rho(u) \in \mathcal{C}^\infty(X, E) \subset \mathcal{W}^{s+d}(X, E)$ d'après le corollaire 1.5.13, donc $u \in \mathcal{W}^{s+d}(X, E)$; d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{s+d} &\leq \|\text{Op}_\tau(Pu)\|_{s+d} + \|\text{Op}_\rho(u)\|_{s+d} \\ &\leq C_s (\|Pu\|_s + \|u\|_0) \end{aligned}$$

car, pour tout s , Op_τ est continu de \mathcal{W}^s dans \mathcal{W}^{s+d} et Op_ρ est en particulier d'ordre $\leq -(s+d)$, donc continu de \mathcal{W}^0 dans \mathcal{W}^{s+d} . \square

Références

- [1] S. ALINHAC & P. GÉRARD – *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, Savoirs Actuels, CNRS Éditions & EDP Sciences, Paris, 1991.
- [2] M. AUDIN – « Lagrangiennes et lagrangiennes spéciales », Notes de cours, Strasbourg, octobre 2000.
- [3] J.-M. BONY – *Cours d'analyse*, Presses de l'École polytechnique et Ellipses, 1994.
- [4] H. BREZIS – *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [5] O. DEBARRE – « Variétés complexes », Notes de cours, Strasbourg, octobre 2000.
- [6] L. SCHWARTZ – *Méthodes mathématiques de la physique*, Hermann, Paris, 1965.
- [7] C. ZUILY – *Distributions et équations aux dérivées partielles, exercices corrigés*, Hermann, Paris, 1978.

CHAPITRE 2

STRUCTURES DE HODGE-LEFSCHETZ

Il ne sera question que d'algèbre linéaire et multi-linéaire dans ce chapitre. Nous allons mettre en évidence plusieurs propriétés de l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel complexe muni d'une forme hermitienne, propriétés que nous regrouperons sous le nom de *structure de Hodge-Lefschetz*. Au chapitre suivant, nous verrons comment la cohomologie d'une variété kählérienne compacte hérite aussi de ce type de propriétés. Ce chapitre s'inspire notamment de [3, Chap. 1] et [2, § 6]

2.1. Algèbre linéaire et multi-linéaire

2.1.a. Algèbre linéaire sur un \mathbb{C} -espace vectoriel. Soit T un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n (un tel espace est noté V dans [1, § 2.4]). On note $F = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T, \mathbb{C})$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des formes \mathbb{R} -linéaires sur T . C'est un espace de dimension $2n$ sur \mathbb{C} .

On note $T' = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(T, \mathbb{C})$ le dual de T . C'est naturellement un sous-espace de F : c'est le sous-espace des $f \in F$ telles que $f(it) = if(t)$ pour tout $t \in T$.

Pour faire bonne mesure, on note $T'' \subset F$ le sous-espace de F des formes *anti-linéaires*, c'est-à-dire les $f \in F$ telles que $f(it) = -if(t)$ pour tout $t \in T$. On a bien sûr $T' \cap T'' = \{0\}$ dans F . Pour des raisons de dimension, on a donc

$$F = T' \oplus T''.$$

Soit $f \mapsto \bar{f}$ l'involution anti-linéaire sur F définie par $\bar{\bar{f}}(t) = \overline{f(t)}$. D'une manière générale, si E est un \mathbb{C} -sous-espace de F , on note \bar{E} le \mathbb{C} -sous-espace formé des \bar{f} pour $f \in E$. Ainsi, on a $T'' = \bar{T}'$.

On note $F_0 \subset F$ le \mathbb{R} -espace vectoriel formé des formes linéaires invariantes par conjugaison. C'est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2n$. C'est encore l'ensemble des formes \mathbb{R} -linéaires sur T qui sont à *valeurs réelles*, c'est-à-dire $F_0 = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T, \mathbb{R})$. On a aussi une décomposition (comme \mathbb{R} -espace vectoriel)

$$F = F_0 \oplus iF_0,$$

autrement dit, toute forme linéaire $f \in F$ a une décomposition $f = \text{Ré} f + i \text{Im} f$ avec $\text{Ré} f = (f + \bar{f})/2$ et $\text{Im} f = (f - \bar{f})/2i$.

Exercice 2.1.1. Montrer que F s'identifie au \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} F_0$.

2.1.b. Algèbre multi-linéaire sur un \mathbb{C} -espace vectoriel. Soit $\wedge F$ l'algèbre extérieure sur F , c'est-à-dire l'espace des formes \mathbb{R} -multi-linéaires alternées sur T . Cet espace est gradué, c'est-à-dire qu'il se décompose en somme directe

$$\wedge F = \bigoplus_r \wedge^r F.$$

Un élément de $\wedge^r F$ est une forme r -linéaire (sur \mathbb{R})

$$f : \underbrace{T \times \cdots \times T}_{r \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

L'espace $\wedge F$ est une algèbre *graduée* pour le produit extérieur \wedge : si $f \in \wedge^r F$, $g \in \wedge^s F$, alors $f \wedge g \in \wedge^{r+s} F$ est défini par

$$(f \wedge g)(t_1, \dots, t_r, t_{r+1}, \dots, t_{r+s}) = [f(t_1, \dots, t_r)g(t_{r+1}, \dots, t_{r+s})]^a,$$

où $[\cdots]^a$ désigne l'opération d'anti-symétrisation. Par exemple, si f et g sont deux formes linéaires sur T , on pose $f \wedge g(t_1, t_2) = \frac{1}{2}(f(t_1)g(t_2) - f(t_2)g(t_1))$. Cette algèbre est *commutative au sens gradué, i.e.*, pour $f \in \wedge^r F$ et $g \in \wedge^s F$, on a $g \wedge f = (-1)^{rs} f \wedge g$.

La bi-gradation. Cette graduation de l'algèbre $\wedge F$ se décompose elle-même en une *bi-gradation* : l'espace $\wedge^{p,q} F$ est l'espace engendré par les produits extérieurs de p éléments de T' et de q éléments de $T'' = \overline{T'}$. Puisque la forme est alternée, on peut toujours supposer que les p termes considérés sont les p premiers. On a donc

$$\wedge^r F = \bigoplus_{p+q=r} \wedge^{p,q} F.$$

On a en particulier $\wedge^{r,0} F = \wedge^r T'$ (formes \mathbb{C} -multi-linéaires sur T) et $\wedge^{0,r} F = \wedge^r T''$.

Le produit extérieur \wedge est, de manière évidente, bi-gradué. Il faut noter que la commutativité s'exprime toujours en terme du degré total.

L'opérateur C de Weil. Si $\lambda : T \rightarrow T$ est un automorphisme (\mathbb{C} -linéaire) et $f \in \wedge^r F$, on pose $f^\lambda(t_1, \dots, t_r) = f(\lambda(t_1), \dots, \lambda(t_r))$. Ainsi, on a $f^{\lambda^\mu} = (f^\lambda)^\mu$. Puisque λ est \mathbb{C} -linéaire, l'automorphisme $f \mapsto f^\lambda$ préserve la bi-gradation. On note C l'automorphisme ainsi associé à $\lambda : t \mapsto it$. On a donc

$$f \in \wedge^{p,q} F \xrightarrow{C} C(f) = i^{p-q} f.$$

On dit qu'un endomorphisme $\varphi : \wedge F \rightarrow \wedge F$ est *bi-homogène* de bi-degré (δ', δ'') si, pour tous p, q , $\varphi(\wedge^{p,q} F) \subset \wedge^{p+\delta', q+\delta''} F$. Ainsi, pour tout automorphisme \mathbb{C} -linéaire $\lambda : T \rightarrow T$, l'automorphisme

$$\begin{aligned} \wedge F &\longrightarrow \wedge F \\ f &\longmapsto f^\lambda \end{aligned}$$

est bi-homogène de bi-degré $(0, 0)$. En particulier, C est de bi-degré $(0, 0)$.

Involution réelle sur $\wedge F$. Si $f \in \wedge^r F$, on note $\overline{f} \in \wedge^r F$ la forme multi-linéaire définie par $\overline{f}(t_1, \dots, t_r) = \overline{f(t_1, \dots, t_r)}$. On a donc

$$\overline{\wedge^{p,q} F} = \wedge^{q,p} F.$$

Il est temps de travailler avec des bases. Soit w_1, \dots, w_n une \mathbb{C} -base de T' , qu'on écrit $w_j = u_j + iv_j$, avec $u_j = \operatorname{Ré} w_j$, $v_j = \operatorname{Im} w_j$. Alors $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ est une \mathbb{C} -base de F , et aussi une \mathbb{R} -base de F_0 . De même, $(w_1, \dots, w_n, \overline{w}_1, \dots, \overline{w}_n)$ est une \mathbb{C} -base de F . L'espace $\wedge^{p,q} F$ admet pour base les $w_{J'} \wedge \overline{w}_{J''}$ où J' (*resp.* J'') parcourt l'ensemble des parties à p (*resp.* q) éléments de $\{1, \dots, n\}$.

On voit ainsi que la partie réelle $(\wedge F)_0$ n'est autre que l'algèbre extérieure $\wedge F_0$.

La forme volume. Fixons une base w de T' comme ci-dessus et considérons le générateur vol du \mathbb{R} -espace vectoriel (de dimension 1) $\wedge^{2n} F_0$ défini par

$$(2.1.2) \quad \text{vol}_w = 2^n \cdot (u_1 \wedge v_1) \wedge \cdots \wedge (u_n \wedge v_n).$$

C'est aussi un générateur du \mathbb{C} -espace vectoriel (de dimension 1) $\wedge^{2n} F$, qui s'écrit dans ce cas aussi sous la forme suivante :

$$\text{vol}_w = i^n \cdot (w_1 \wedge \bar{w}_1) \wedge \cdots \wedge (w_n \wedge \bar{w}_n) = \varepsilon(n) i^n \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge w_n \wedge \bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{w}_n$$

où $\varepsilon(n) = (-1)^{n(n-1)/2}$. Si w' est une autre base de T , on a $\text{vol}_{w'} = a \text{vol}_w$ avec $a > 0$. Nous dirons qu'un élément non nul de $\wedge^{n,n} F$ est un *élément de volume* si c'est un multiple positif de vol_w pour une base w de T' ou, ce qui revient au même, si c'est un élément de la forme vol_w pour une certaine base w de T' .

Exercice 2.1.3. Montrer que la fonction $\varepsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \{\pm 1\}$ définie par $\varepsilon(k) = (-1)^{k(k-1)/2}$ satisfait les propriétés suivantes :

- (1) $\varepsilon(k+1) = (-1)^k \varepsilon(k) = \varepsilon(-k) = (-1)^{k(k+1)/2}$,
- (2) $\varepsilon(k+\ell) = (-1)^{k\ell} \varepsilon(k) \varepsilon(\ell)$,
- (3) $\varepsilon(2k) = (-1)^k$,
- (4) $\varepsilon(k+4) = \varepsilon(k)$.

La forme d'intersection. Pour tout $k \geq 0$, le produit extérieur induit une application bilinéaire non dégénérée

$$(2.1.4) \quad \begin{aligned} \wedge^{n-k} F \times \wedge^{n+k} F &\xrightarrow{\wedge} \wedge^{2n} F \\ (\eta, \eta') &\longmapsto \eta \wedge \eta' \end{aligned}$$

qui, après le choix d'une forme volume (par exemple celle associée à une forme hermitienne, cf. *infra*), est une *forme bilinéaire* non dégénérée, appelée *forme d'intersection*, que nous noterons I .

2.2. Algèbre multi-linéaire hermitienne

2.2.a. Formes hermitiennes. Soit $H : (t, t') \mapsto H(t, t')$ une forme sesquilinéaire sur T , \mathbb{C} -linéaire à gauche et \mathbb{C} -anti-linéaire à droite. On dit que H est *hermitienne* si $H(t', t) = \overline{H(t, t')}$, et de plus que H est *définie positive* si $H(t, t) > 0$ pour tout $t \neq 0$.

Si on pose $\omega(t, t') = -\text{Im } H(t, t')$, alors ω est une forme \mathbb{R} -bilinéaire alternée à valeurs réelles, qui satisfait $\omega(it, it') = \omega(t, t')$ et on a

$$H(t, t') = \text{Ré } H(t, t') + i \text{Im } H(t, t') = \omega(t, it') - i\omega(t, t').$$

Enfin, $\text{Ré } H(t, t')$ est symétrique. Plus précisément, il y a ainsi correspondance bi-univoque entre les formes *hermitiennes* sur T et les formes \mathbb{R} -bilinéaires *alternées* (à valeurs réelles) *invariantes par i* . Par cette correspondance, la positivité de H équivaut à

$$\omega(t, it) > 0 \quad \text{si } t \neq 0.$$

Si on fixe une \mathbb{C} -base *orthonormée* ξ_1, \dots, ξ_n de T , de sorte que $t = \sum_j t_j \xi_j$, et si w_1, \dots, w_n est la base duale de T' , on peut écrire

$$H(t, t') = \sum_j t_j \bar{t}'_j.$$

La forme ω est un élément de $\wedge^2 F_0$. Vue comme un élément de $\wedge^2 F$, elle satisfait donc $\bar{\omega} = \omega$ et elle s'écrit

$$\omega = 2 \sum_j u_j \wedge v_j = i \sum_j w_j \wedge \bar{w}_j.$$

En effet, posons $t_j = x_j + iy_j$. Alors $u_j(t_j \xi_j) = x_j$ et $v_j(t_j \xi_j) = y_j$, de sorte que

$$2 \cdot u_j \wedge v_j(t_j \xi_j, t'_j \xi_j) = x_j y'_j - y_j x'_j = -\operatorname{Im} t_j t'_j.$$

On en déduit que, si ω est la 2-forme associée à une forme hermitienne définie positive sur T , alors $\omega^{\wedge n}$ est un *élément de volume*. Plus précisément on a, pour toute base orthonormée w_1, \dots, w_n , l'égalité $\omega^{\wedge n} = n! \cdot \operatorname{vol}_w$.

Exercice 2.2.1. Soit w_1, \dots, w_n une base de T' et soit $\omega = i \sum_{jk} \omega_{jk} w_j \wedge \bar{w}_k$ un élément de $\wedge^{1,1} F$. Montrer que ω définit une forme hermitienne définie positive si et seulement si la matrice (ω_{jk}) est hermitienne définie positive.

Exercice 2.2.2. On rencontre souvent la convention opposée pour une forme sesquilinéaire, à savoir \mathbb{C} -linéaire à droite et \mathbb{C} -anti-linéaire à gauche. Montrer que tout ce qui précède s'adapte si l'on pose dans ce cas $\omega = \operatorname{Im} H$.

Exercice 2.2.3 (l'aspect euclidien). Montrer que la correspondance $H \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_H = \operatorname{Re} H$ induit une correspondance biunivoque entre les formes hermitiennes sur T et les formes \mathbb{R} -bilinéaires symétriques (à valeurs réelles) sur T . Montrer que H est définie positive si et seulement si $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ est un produit scalaire euclidien.

2.2.b. Les opérateurs fondamentaux et leurs relations. Outre l'opérateur C qui ne dépend pas de la structure hermitienne, nous allons introduire trois opérateurs importants sur $\wedge F$: l'opérateur \star de Hodge (plus exactement sa version hermitienne), et les deux opérateurs adjoints L et Λ .

Nous supposons fixée une forme hermitienne définie positive sur T , c'est-à-dire $\omega \in \wedge^{1,1} F$ définie positive. Remarquons que l'élément de volume vol_w associé à la base w duale d'une \mathbb{C} -base orthonormée de T ne dépend pas de cette base. Nous le noterons vol . La forme hermitienne définit une forme hermitienne définie positive sur T' , puis sur $\wedge^{p,q} F$ pour tous p, q en imposant que la base $w_{j'} \wedge \bar{w}_{j''}$ soit orthonormée. Cette forme est notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

– *Opérateur de Hodge* : c'est l'opérateur inversible \mathbb{C} -linéaire $\star : \wedge^{p,q} F \rightarrow \wedge^{n-q, n-p} F$ tel que $\theta \wedge \star \bar{\eta} = \langle \theta, \eta \rangle \operatorname{vol}$ pour tout couple d'éléments η, θ de $\wedge^{p,q} F$.

– *Opérateur de Lefschetz* : c'est l'opérateur $L = \omega \wedge : \wedge^{p,q} F \rightarrow \wedge^{p+1, q+1} F$. C'est un opérateur bi-homogène de bi-degré $(1, 1)$.

– L'opérateur Λ est défini par $\Lambda = \star^{-1} L \star : \wedge^{p,q} F \rightarrow \wedge^{p-1, q-1} F$. C'est un opérateur bi-homogène de bi-degré $(-1, -1)$.

Exercice 2.2.4. Montrer que l'opérateur C de Weil commute avec les opérateurs \star, L, Λ .

Calcul de l'opérateur \star de Hodge

Lemme 2.2.5. L'opérateur de Hodge \star est réel : on a $\star \wedge^k F_0 \subset \wedge^{2n-k} F_0$. De plus, sur $\wedge F_0$ il coïncide avec l'opérateur \star défini au § 1.3.c.

Démonstration. Si η est une k -forme réelle et si on définit l'opérateur \star' comme au § 1.3.c sur $\wedge F_0$, c'est-à-dire que pour toute forme réelle θ de degré convenable on a $\theta \wedge \star' \eta = \langle \theta, \eta \rangle \operatorname{vol}$, alors c'est aussi vrai pour toute forme complexe θ , donc $\star' \eta = \star \eta = \star \bar{\eta}$. \square

Soient I, J, K trois sous-ensembles *deux à deux disjoints* de $\{1, \dots, n\}$. Notons $a = |I|$, $b = |J|$ et $c = |K|$. Dans une base orthonormée w_1, \dots, w_n de T' comme ci-dessus, posons

$$\text{vol}_K = \left(i^c \bigwedge_{k \in K} (w_k \wedge \bar{w}_k) \right)$$

et considérons l'élément

$$w_{I, \bar{J}, K} \stackrel{\text{déf}}{=} w_I \wedge \bar{w}_J \wedge \text{vol}_K,$$

avec $w_I = w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_a}$, si i_1, \dots, i_a est la suite ordonnée des éléments de I . C'est un élément de $\wedge^{p,q} F$ avec $p = a + c$, $q = b + c$. De plus, $\wedge^{p,q} F$ admet une base orthonormée formée d'éléments de ce type. Notons aussi K^o le complémentaire de $I \cup J \cup K$ dans $\{1, \dots, n\}$. On a ainsi

$$(2.2.6) \quad \begin{aligned} a + b + c + c^o &= n, & p &= a + c, & q &= b + c, & p + q &\stackrel{\text{déf}}{=} r, \\ n - q &= a + c^o, & n - p &= b + c^o, & c^o - c &= n - (p + q). \end{aligned}$$

Lemme 2.2.7. *On a $\star w_{I, \bar{J}, K} = \varepsilon(a + b) i^{b-a} w_{I, \bar{J}, K^o}$.*

Démonstration. Notons d'abord que, si I', J', K' sont aussi deux à deux disjoints, on a l'égalité $w_{I, \bar{J}, K} \wedge w_{I', \bar{J}', K'} = 0$ sauf lorsque $I' = I$, $J' = J$, $K \cap K' = \emptyset$ et I, J, K, K' forment une partition de $\{1, \dots, n\}$; autrement dit, $K' = K^o$. On a alors

$$w_{I, \bar{J}, K} \wedge w_{I, \bar{J}, K^o} = (-1)^{ab+b} (w_I \wedge \bar{w}_J) \wedge (w_J \wedge \bar{w}_J) \wedge \text{vol}_{K \cup K^o}.$$

En utilisant l'exercice 2.1.3, on voit que ce terme est égal à

$$(-1)^{ab+b} (\varepsilon(a) i^{-a} \text{vol}_I) \wedge (\varepsilon(b) i^{-b} \text{vol}_J) \wedge \text{vol}_{K \cup K^o} = \varepsilon(a + b) i^{b-a} \text{vol}.$$

Il résulte alors de la définition de \star que $\star \bar{w}_{I, \bar{J}, K}$ est un multiple de w_{I, \bar{J}, K^o} . On a ainsi l'égalité $\star w_{I, \bar{J}, K} = \lambda w_{I, \bar{J}, K^o}$, et nous allons maintenant calculer la constante λ . On doit donc avoir

$$\begin{aligned} \text{vol} &= \langle w_{I, \bar{J}, K}, w_{I, \bar{J}, K} \rangle \text{vol} = w_{I, \bar{J}, K} \wedge \star \bar{w}_{I, \bar{J}, K} \\ &= \bar{\lambda} \cdot w_{I, \bar{J}, K} \wedge \bar{w}_{I, \bar{J}, K^o} \\ &= \bar{\lambda} \cdot w_{I, \bar{J}, K} \wedge w_{I, \bar{J}, K^o} = \bar{\lambda} \cdot \varepsilon(a + b) i^{b-a} \text{vol}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\lambda = \varepsilon(a + b) i^{b-a}$, comme annoncé. \square

Conséquence 2.2.8. *On a $\star \star = (-1)^r = C^2$ sur $\wedge^r F$.*

Démonstration. Exercice (on remarquera que, avec les notations (2.2.6), on a $b - a = q - p$; comparer à la démonstration du lemme 1.3.5). \square

Les opérateurs L et Λ

Lemme 2.2.9. *L'opérateur Λ est l'adjoint de L pour le produit scalaire \langle, \rangle sur $\wedge F$.*

Démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned} \langle L\theta, \eta \rangle \text{vol} &= \omega \wedge \theta \wedge \star \bar{\eta} \\ &= \theta \wedge \omega \wedge \star \bar{\eta} \quad \text{car } \omega \text{ est de degré } 2 \\ &= \theta \wedge L \star \bar{\eta} \\ &= \theta \wedge \star \Lambda \bar{\eta}. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que $\Lambda\bar{\eta} = \overline{\Lambda\eta}$. Comme la forme ω est réelle, il est clair que cette égalité est satisfaite pour L à la place de Λ . Il suffit donc de vérifier que $\star\bar{\eta} = \overline{\star\eta}$, ce qui résulte du lemme 2.2.5. \square

Définition 2.2.10 (\mathfrak{sl}_2 -**triplet**). L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est l'espace des matrices 2×2 complexes, de trace nulle, muni du crochet de Lie $[A, B] = AB - BA$. Elle admet pour base les matrices

$$\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui satisfont les relations $[\ell, \lambda] = b$, $[b, \ell] = 2\ell$, $[b, \lambda] = -2\lambda$.

Une *représentation* de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans un \mathbb{C} -espace vectoriel V est un homomorphisme compatible au crochet $\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{End}(V)$.

La donnée d'une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est équivalente à la donnée de trois endomorphismes L, Λ, B de V qui satisfont les relations

$$(2.2.11) \quad [L, \Lambda] = B, \quad [B, L] = 2L, \quad [B, \Lambda] = -2\Lambda.$$

On dit que (L, Λ, B) est un \mathfrak{sl}_2 -*triplet*.

Théorème 2.2.12 (relations entre L et Λ). Soit $B : \wedge^r F \rightarrow \wedge^r F$ l'opérateur de multiplication par $r-n$ sur $\wedge^r F$. Alors (L, Λ, B) est un \mathfrak{sl}_2 -*triplet* d'endomorphismes de l'espace $\wedge^r F$.

Démonstration. Puisque L et Λ sont de degrés respectifs 2 et -2 , on a de manière évidente les relations $[B, L] = 2L$ et $[B, \Lambda] = -2\Lambda$. Par ailleurs on a, en reprenant les notations du lemme 2.2.7,

$$(2.2.13) \quad Lw_{I, \bar{J}, K} = \sum_{k \in K^0} w_{I, \bar{J}, K \cup \{k\}}.$$

Le calcul de \star montre alors que

$$(2.2.14) \quad \Lambda w_{I, \bar{J}, K} = \begin{cases} \sum_{k \in K} w_{I, \bar{J}, K \setminus \{k\}} & \text{si } K \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } K = \emptyset. \end{cases}$$

On a alors

$$L\Lambda w_{I, \bar{J}, K} = \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K^0 \cup \{k\}} w_{I, \bar{J}, (K \setminus \{k\}) \cup \{k'\}} = c w_{I, \bar{J}, K} + \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K^0} w_{I, \bar{J}, (K \setminus \{k\}) \cup \{k'\}},$$

$$\Lambda L w_{I, \bar{J}, K} = \sum_{k' \in K^0} \sum_{k \in K \cup \{k'\}} w_{I, \bar{J}, K \cup \{k'\} \setminus \{k\}} = c^0 w_{I, \bar{J}, K} + \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K^0} w_{I, \bar{J}, K \cup \{k'\} \setminus \{k\}}.$$

Ceci donne la dernière relation $[L, \Lambda] = (r-n) \text{Id}$ sur $\wedge^r F$, puisque $c^0 - c = n - r$, cf. (2.2.6). \square

$$\begin{aligned} C\star &= \star C, & CL &= LC, & C\Lambda &= \Lambda C, & CB &= BC, \\ \star^2 &= C^2 = (-1)^r & \text{sur } \wedge^r F, \\ L\star &= \star L, & \Lambda\star &= \star \Lambda, & \star B &= B\star, \\ [L, \Lambda] &= B, & [B, L] &= 2L, & [B, \Lambda] &= -2\Lambda. \end{aligned}$$

Les relations entre les opérateurs C, \star, B, L, Λ

2.3. Décomposition de Lefschetz et éléments primitifs

2.3.a. Décomposition de Lefschetz associée à un \mathfrak{sl}_2 -triplet. Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et soit L un endomorphisme nilpotent. Il admet une décomposition de Jordan (non unique). Considérons d'abord le cas d'un bloc de Jordan de taille $k + 1$, avec $k \geq 0$. Il existe donc une base de V , que nous noterons $e = (e_k, e_{k-2}, \dots, e_{-k})$ pour une raison qui apparaîtra claire dans un instant, dans laquelle la matrice de L a la forme de Jordan supérieure

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on a $Le_k = 0, Le_{k-2} = e_k, \dots, Le_{-k} = e_{-k+2}$ et $L^{k+1} = 0$, et la base n'est autre que celle des $L^j(e_{-k})$. Soit B l'endomorphisme semi-simple tel que $Be_j = je_j$. On voit donc que $[B, L] = 2L$. Il est facile de trouver un endomorphisme Λ dont la matrice dans la base e a la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_k & 0 \end{pmatrix}.$$

de sorte que les relations (2.2.11) soient satisfaites. Il est de plus facile d'étendre cette construction au cas de plusieurs blocs, en raisonnant bloc par bloc. Ainsi, tout endomorphisme nilpotent L , une fois mis sous forme de Jordan, détermine une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Le noyau de Λ se calcule bloc par bloc, et dans chaque bloc est la droite engendrée par e_{-k} .

Nous allons voir que, réciproquement, tout \mathfrak{sl}_2 -triplet donne lieu à une structure de ce type. Soit donc L, Λ, B un \mathfrak{sl}_2 -triplet d'endomorphismes de V , *i.e.* satisfaisant les relations (2.2.11). Nous supposons que l'endomorphisme B est *semi-simple* (on peut montrer en fait que cette hypothèse est toujours satisfaite). Notons $P = \text{Ker } \Lambda$: c'est le sous-espace des *vecteurs primitifs*.

Théorème 2.3.1. *Dans ces conditions,*

(1) *Les valeurs propres de l'endomorphisme B sont entières, de sorte que V se décompose en sous-espaces B -propres : $V = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} V_\ell$ et, de manière analogue, $P = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} P_\ell$.*

(2) *Les endomorphismes L et Λ sont nilpotents et satisfont $L(V_\ell) \subset V_{\ell+2}$ et $\Lambda(V_\ell) \subset V_{\ell-2}$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$.*

(3) *De plus,*

(a) *on a $P_\ell = 0$ pour $\ell > 0$,*

(b) *l'homomorphisme $L^k : P_{-\ell} \rightarrow V_{-\ell+2k}$ est injectif pour tous k, ℓ tels que $k, \ell \geq 0$ et $k \leq \ell$, et nul si $k > \ell$,*

(c) *c'est un isomorphisme de V_{-k} sur V_k qui induit un isomorphisme de P_{-k} sur $L^k(P_{-k})$ et on a $P_{-k} = \text{Ker } L^{k+1} : V_{-k} \rightarrow V_{k+2}$.*

(4) Enfin, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, on a la décomposition de Lefschetz (voir la figure 2.1) :

$$V_\ell = \bigoplus_{\substack{j,k \geq 0 \\ 2j-k=\ell}} L^j P_{-k}.$$

Démonstration. Si V_μ est un espace propre de B , les relations (2.2.11) impliquent que $L(V_\mu) \subset V_{\mu+2}$ et $\Lambda(V_\mu) \subset V_{\mu-2}$. Par suite, Λ et L sont nilpotents. De plus, la relation $[B, \Lambda] = -2\Lambda$ montre que $P = \text{Ker } \Lambda$ est stable par B ; par suite, P se décompose en somme directe d'espaces propres pour $B|_P$.

Soit v un vecteur propre de B de valeur propre μ . Il existe donc k tel que $\Lambda^k(v) \neq 0$ et $\Lambda^{k+1}(v) = 0$. Par suite, $\Lambda^k(v)$ est un vecteur primitif non nul qui est propre pour B , de valeur propre $\mu - 2k$.

Soit donc w un vecteur primitif non nul qui est propre pour B , de valeur propre λ . Par le même raisonnement, il existe ℓ tel que $L^\ell(w) \neq 0$ et $L^{\ell+1}(w) = 0$. Puisque $\Lambda w = 0$, on voit par récurrence sur j que

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} \Lambda L^{j+1} w &= -[\lambda + (\lambda + 2) + \cdots + (\lambda + 2j)] L^j w \\ &= -(j+1)(\lambda + j) L^j w \end{aligned}$$

En appliquant ceci à $j = \ell$, on en déduit que $\lambda = -\ell$.

On déduit de ces deux résultats que les valeurs propres de B sont entières et que $P_\lambda = 0$ si $\lambda > 0$.

Le reste de la démonstration résulte de ce qui précède (on pourra le détailler à titre d'exercice). \square

Exercice 2.3.3. Reconnaître la décomposition de Jordan de L sur la figure 2.1 : décrire le nombre de blocs de Jordan et leur taille en fonction de la dimension des P_{-k} .

2.3.b. Application à l'algèbre extérieure. Revenons à l'algèbre extérieure $\wedge F$ et aux opérateurs B, L, Λ définis au § 2.2.b. Par définition, l'opérateur B est semi-simple (avec pour espace propre $V_r = \wedge^{n+r} F$ pour la valeur propre r) et, d'après le théorème 2.2.12, les relations \mathfrak{sl}_2 sont satisfaites, de sorte que nous avons une décomposition de Lefschetz correspondante de $\wedge F$. L'endomorphisme L induit pour tout $r \geq 0$ un isomorphisme

$$L^r : \wedge^{n-r} F \xrightarrow{\sim} \wedge^{n+r} F.$$

Nous allons analyser de plus près l'espace des éléments primitifs $P^{n-r}(\wedge F) \subset \wedge^{n-r} F$. Remarquons d'abord que l'espace $P^{n-r}(\wedge F) \subset \wedge^{n-r} F$ est nul pour $r \leq 0$: ceci a été vu dans la démonstration de la décomposition de Lefschetz (il faut se rappeler que $\wedge^{n-r} F$ est l'espace propre de B de valeur propre $-r$). Nous supposons donc $r \geq 0$ dans la suite.

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $n - r - (a + b)$ soit de la forme $2c$ avec $c \in \mathbb{N}$. Soient I, J deux sous-ensembles disjoints dans $\{1, \dots, n\}$, avec $|I| = a$ et $|J| = b$. Il sera commode de noter dans la suite $\mathcal{K} = \{1, \dots, n\} \setminus (I \cup J)$ et $|\mathcal{K}| = c + c^0$. Nous noterons $P_{I, \bar{J}}^{n-r}$ le sous-espace de l'espace engendré par les $w_{I, \bar{J}, K}$ (I, J fixés, $|K| = c$) formé des éléments $\sum_K \lambda_K w_{I, \bar{J}, K}$ qui satisfont :

$$(2.3.4) \quad \text{pour tout sous-ensemble } K' \subset \mathcal{K} \text{ de cardinal } c-1, \quad \sum_{k \in \mathcal{K} \setminus K'} \lambda_{K' \cup \{k\}} = 0.$$

Suivant les conventions usuelles, la condition (2.3.4) est vide si $c = 0$. Si $c = 1$, elle s'applique à $K' = \emptyset$ uniquement, et elle signifie que $\sum_{k \in \mathcal{K}} \lambda_k = 0$.

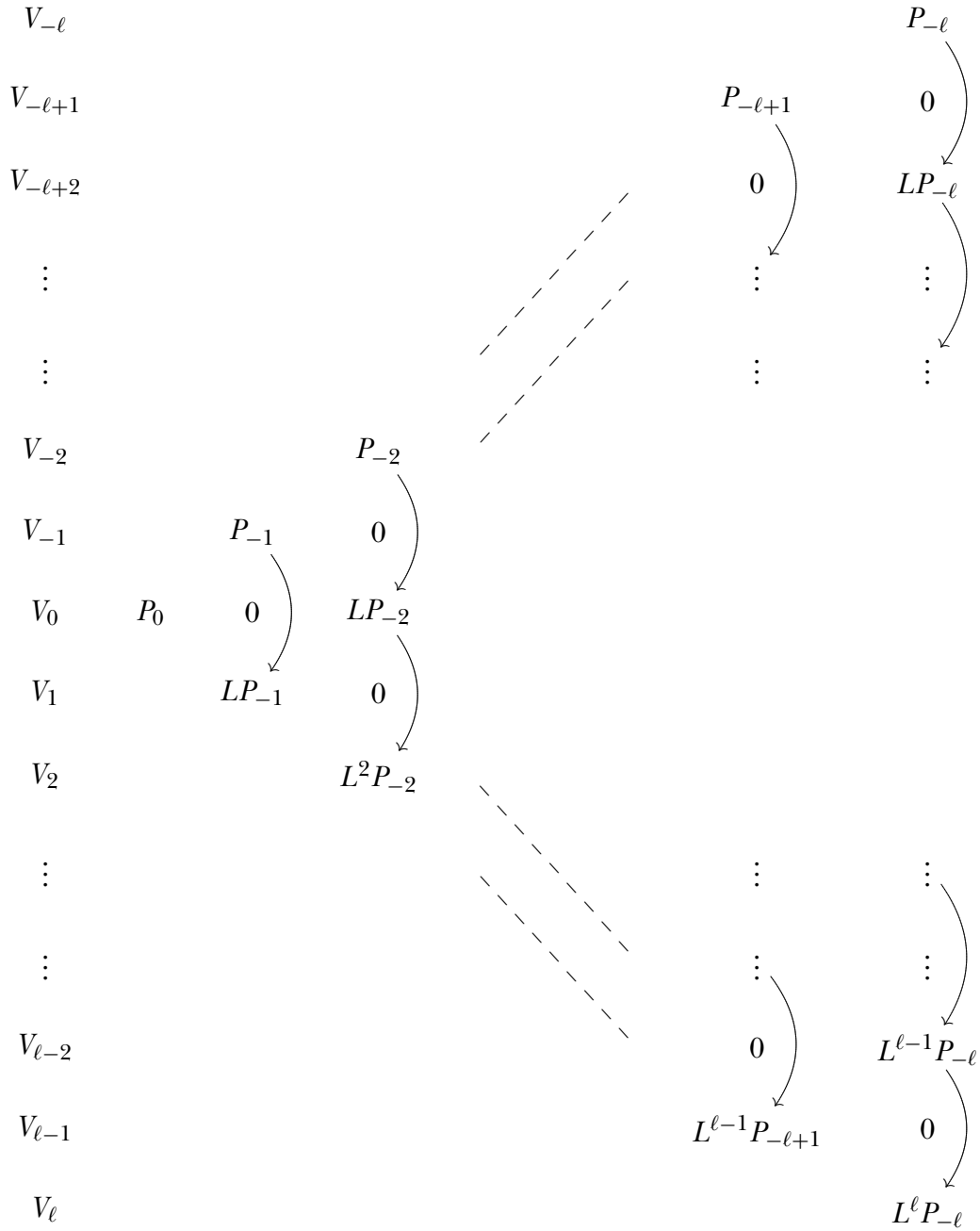


FIGURE 2.1. Une manière graphique de représenter la décomposition de Lefschetz : les flèches représentent l’isomorphisme induit par L ; chaque V_k est la somme directe des éléments de la ligne correspondante, les cases vides étant remplacées par 0

Proposition 2.3.5 (les formes primitives). Pour $r \geq 0$, l’espace $P^{n-r}(\wedge F)$ se décompose en somme directe

$$P^{n-r}(\wedge F) = \bigoplus_{I, J} P_{I, \bar{J}}^{n-r},$$

la somme étant prise sur tous les couples I, J de parties disjointes de $\{1, \dots, n\}$ qui satisfont à $n - r - (|I| + |J|) \in 2\mathbb{N}$. De plus, $P^{n-r}(\wedge F)$ se décompose en somme directe $\bigoplus_{p+q+r=n} P^{p, q}$.

Démonstration. Elle résulte directement de l’expression (2.2.14) de Λ . Le deuxième point en résulte. \square

Exercice 2.3.6. Montrer que les formes de type $w_{I,\bar{J},\emptyset}$ sont primitives si I, J sont deux parties disjointes de $\{1, \dots, n\}$.

Exercice 2.3.7. Montrer que les formes de type $(p, 0)$ ou celles de type $(0, q)$ sont toujours primitives.

La dualité de Lefschetz. La forme volume étant fixée par le choix de la forme hermitienne H sur T (ou de manière équivalente par le choix de la 2-forme ω), l'opérateur $L(\cdot) = \omega \wedge \cdot$ permet, par la formule 2.1.4, de définir une forme bilinéaire $(-1)^{n-r}$ -symétrique Q sur $\wedge^{n-r}F$ pour $r \geq 0$ en posant, pour $\eta, \eta' \in \wedge^{n-r}F$

$$(2.3.8) \quad Q(\eta, \eta') \text{ vol} = \varepsilon(n-r) \cdot \eta \wedge \eta' \wedge \omega^{\wedge r}.$$

On a donc $Q(\eta, \eta') = \varepsilon(n-r) \cdot I(\eta, L^r \eta')$, si I désigne la forme d'intersection. Le signe $\varepsilon(n-r)$ (cf. exercice 2.1.3) est choisi pour que l'on ait :

Proposition 2.3.9 (polarisation de la partie primitive). *Sur la partie primitive P^{n-r} , la forme sesquilinéaire $(\eta, \eta') \mapsto Q(C\eta, \bar{\eta}')$ est hermitienne définie positive.*

On appelle cette forme la *forme de polarisation* de la partie primitive.

Démonstration. Soient $\eta, \eta' \in \wedge^{p,q}F$ avec $p+q = n-r$. On a

$$\begin{aligned} \overline{Q(C\eta', \bar{\eta})} &= \varepsilon(n-r) i^{q-p} \bar{\eta}' \wedge \eta \wedge \omega^{\wedge r} \quad \text{car } \bar{\omega} = \omega \\ &= Q(C\eta, \bar{\eta}') \quad \text{car } (-1)^{n-r} i^{q-p} = i^{p-q}. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons défini une forme hermitienne sur $\wedge^{n-r}F$, car on remarque que $Q(C\eta, \bar{\eta}') = 0$ si $\eta, \eta' \in \wedge^{n-r}F$ ne sont pas du même type (p, q) .

Nous allons démontrer un résultat un peu plus précis que la positivité :

Lemme 2.3.10. *Soit $\eta \in P^{n-r}$. Alors on a $a \star \eta = \frac{\varepsilon(n-r)}{r!} L^r C^{-1} \eta$.*

Démonstration. Nous allons le montrer pour les éléments de $P_{I,\bar{J}}^{n-r}$. Fixons donc $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $a+b+2c = n-r$ et posons $c^0 = c+r$ (attention, par rapport aux notations de (2.2.6), il faut changer r en $n-r$ et réciproquement). Fixons deux sous-ensembles disjoints $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ et notons $\mathcal{K} = \{1, \dots, n\} \setminus (I \cup J)$. Nous omettrons ci-dessous les indices I, \bar{J} et noterons w_K au lieu de $w_{I,\bar{J},K}$.

Soit donc $\eta = \sum_{K \subset \mathcal{K}, |K|=c} \lambda_K w_K \in P_{I,\bar{J}}^{n-r}$.

Assertion. *Si $\eta \in P_{I,\bar{J}}^{n-r}$, on a, pour toute partie $K_1 \subset \mathcal{K}$,*

$$\sum_{\substack{K \subset K_1 \\ |K|=c}} \lambda_K = (-1)^c \sum_{\substack{K \subset \mathcal{K} \\ K \cap K_1 = \emptyset \\ |K|=c}} \lambda_K.$$

Démonstration de l'assertion. C'est un calcul un peu combinatoire à partir de (2.3.4). Nous supposerons $c \geq 1$. Si K_1 est une partie de \mathcal{K} et pour $0 \leq \ell \leq c$, notons

$$S_{K_1, \ell}(\eta) = \sum_{\substack{|K \cap K_1| = \ell \\ |K| = c}} \lambda_K.$$

Nous allons vérifier que (2.3.4) entraîne la relation de récurrence

$$(2.3.11) \quad \ell S_{K_1, \ell}(\eta) + (c - \ell + 1) S_{K_1, \ell-1}(\eta) = 0.$$

Celle-ci implique l'égalité $S_{K_1,c}(\eta) = (-1)^c S_{K_1,0}(\eta)$, qui n'est autre que l'égalité voulue.

Fixons une partie K' de \mathcal{K} de cardinal $c - 1$, telle que $|K' \cap K_1| = \ell - 1$. Si $K \supset K'$ est de cardinal c , alors ou bien $|K \cap K_1| = \ell$, ou bien $|K \cap K_1| = \ell - 1$. On a donc, en sommant l'égalité de (2.3.4) sur toutes les parties K' de ce type,

$$\sum_{\substack{K' \subset K_1 \\ |K'|=c-1 \\ |K' \cap K_1|=\ell-1}} \sum_{\substack{K \supset K' \\ |K|=c \\ |K \cap K_1|=\ell}} \lambda_K + \sum_{\substack{K' \subset K_1 \\ |K'|=c-1 \\ |K' \cap K_1|=\ell-1}} \sum_{\substack{K \supset K' \\ |K|=c \\ |K \cap K_1|=\ell-1}} \lambda_K = 0.$$

On en déduit (2.3.11) en changeant l'ordre de sommation de chaque terme. \square

Revenons à la démonstration du lemme. On a d'une part, d'après le lemme 2.2.7, l'égalité

$$\star \eta = \varepsilon(a+b) i^{b-a} \sum_{\substack{K \subset \mathcal{K} \\ |K|=c}} \lambda_K w_{K^0}.$$

D'autre part, en itérant le calcul (2.2.13) de L , on obtient

$$\frac{1}{r!} L^r \eta = \sum_{\substack{K \subset \mathcal{K} \\ |K|=c}} \sum_{\substack{K' \subset K^0 \\ |K'|=r}} \lambda_K w_{K \cup K'} = \sum_{\substack{K_1 \subset \mathcal{K} \\ |K_1|=c^0}} \left(\sum_{\substack{K \subset K_1 \\ |K|=c}} \lambda_K \right) w_{K_1}.$$

D'après l'assertion, on a

$$\sum_{\substack{K \subset K_1 \\ |K|=c}} \lambda_K = (-1)^c \sum_{\substack{K \subset \mathcal{K} \\ K \cap K_1 = \emptyset \\ |K|=c}} \lambda_K,$$

et puisque $|K_1| = c^0$, le deuxième terme se réduit à $\lambda_{\mathcal{K} \setminus K_1} w_{K_1}$. Finalement, on obtient

$$\frac{1}{r!} L^r \eta = (-1)^c \sum_{\substack{K_1 \subset \mathcal{K} \\ |K_1|=c^0}} \lambda_{\mathcal{K} \setminus K_1} w_{K_1} = (-1)^c \sum_{\substack{K \subset \mathcal{K} \\ |K|=c}} \lambda_K w_{K^0} = (-1)^c \varepsilon(a+b) i^{a-b} \star \eta.$$

Puisque $(-1)^c \varepsilon(a+b) = \varepsilon(n-r)$ et $b-a = q-p$, on en déduit l'égalité annoncée dans le lemme. \square

Terminons la démonstration de la proposition 2.3.9. Soit donc $\eta \in P^{n-r}$. On a aussi $\bar{\eta} \in P^{n-r}$ et

$$\begin{aligned} Q(C\eta, \bar{\eta}) \text{ vol} &= \varepsilon(n-r) \cdot C\eta \wedge \bar{\eta} \wedge \omega^{\wedge r} \\ &= \varepsilon(n-r) \cdot \eta \wedge C^{-1}\bar{\eta} \wedge \omega^{\wedge r} \\ &= \eta \wedge \varepsilon(n-r) L^r C^{-1}\bar{\eta} \\ &= r! \eta \wedge \star \bar{\eta} \quad (\text{d'après le lemme 2.3.10}) \\ &= r! \|\eta\|^2 \text{ vol}. \end{aligned}$$

La positivité est maintenant claire. \square

Exercice 2.3.12. Montrer, pour tout $\ell \geq 0$ et tout $\eta \in P^{n-r}$, l'égalité

$$\star L^\ell \eta = \begin{cases} \varepsilon(n-r) \frac{\ell!}{r-\ell} L^{r-\ell} C^{-1} \eta & \text{si } 0 \leq \ell \leq r \\ 0 & \text{si } \ell > r. \end{cases}$$

[On commencera par remarquer que $\Lambda = \star^{-1} L \star = \star L \star^{-1}$.]

2.3.c. Structures de Hodge-Lefschetz. Il sera utile de dégager de ces propriétés de $\wedge F$ le concept de structure de Hodge-Lefschetz, que nous retrouverons sur la cohomologie d'une variété kählérienne au chapitre 3.

Définition 2.3.13 (structure de Hodge-Lefschetz). Une *structure de Hodge-Lefschetz de poids n* sur un \mathbb{C} -espace vectoriel H de dimension finie consiste en la donnée de

- (1) une involution anti-linéaire $f \rightarrow \bar{f}$ sur H , pour laquelle on note H_0 le sous-espace des vecteurs réels (on a $H = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} H_0$);
- (2) une bi-gradation $H = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{N}} H^{p,q}$ (on note C l'opérateur de Weil correspondant),
- (3) un endomorphisme réel $L : H \rightarrow H$, *i.e.* qui préserve H_0 ,

qui satisfont les conditions suivantes

(a) La bi-gradation satisfait $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$, donc le sous-espace $H^k = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$ est invariant par conjugaison.

(b) L'endomorphisme réel L est de bi-degré $(1, 1)$, donc est nilpotent, et pour tout $r \geq 0$, $L^r : H^{n-r} \rightarrow H^{n+r}$ est un isomorphisme. On note $P^{n-r} = \text{Ker} [L^{r+1} : H^{n-r} \rightarrow H^{n+r+2}]$ l'espace des éléments primitifs de degré $n - r$.

Lorsque $L = 0$ (et donc $H = H^n = P^n$), on parle simplement de *structure de Hodge* de poids n .

Exercice 2.3.14. Montrer que dans ces conditions, l'isomorphisme $L^r : H^{n-r} \xrightarrow{\sim} H^{n+r}$ préserve la bi-gradation et donc que, pour tous $p, q \geq 0$ tels que $p + q = n - r$, on a un isomorphisme

$$L^r : H^{p,q} \xrightarrow{\sim} H^{p+r, q+r}.$$

Montrer aussi que la partie primitive est bi-graduée.

Exercice 2.3.15. Soit $H = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k$ un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une graduation. Soit $L : H \rightarrow H$ un endomorphisme de degré 2 relativement à la graduation. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On suppose que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, L induit un isomorphisme $L^r : H^{n-r} \xrightarrow{\sim} H^{n+r}$.

(1) Montrer que, si l'on pose $P^{n-r} = \text{Ker} L^{r+1} : H^{n-r} \rightarrow H^{n+r+2}$ pour $r \geq 0$, on a $H^{n-r} = P^{n-r} \oplus L(H^{n-r-2})$. En déduire que l'on a la décomposition de Lefschetz, pour $r \geq 0$,

$$H^{n-r} = P^{n-r} \oplus L(P^{n-r-2}) \oplus L^2(P^{n-r-4}) \oplus \dots$$

$$H^{n+r} = L^r(P^{n-r}) \oplus L^{r+1}(P^{n-r-2}) \oplus L^{r+2}(P^{n-r-4}) \oplus \dots$$

(2) Montrer que si on a une bi-gradation $H = \bigoplus H^{p,q}$, et si L est de bi-degré $(1, 1)$, alors tous les termes de la décomposition sont aussi bi-gradués.

(3) Montrer que si B désigne l'opérateur semi-simple de valeur propre r sur H^{n+r} ($r \in \mathbb{Z}$), il existe un unique opérateur réel Λ de degré -2 tel que (L, Λ, B) soit un \mathfrak{sl}_2 -triplet.

(4) Montrer que, dans le cas bi-gradué, Λ est de bidegré $(-1, -1)$.

On note $b^k = \dim H^k$ et, dans le cas bi-gradué, $h^{p,q} = \dim H^{p,q}$. On note de même $b_{\text{prim}}^{n-r} = \dim P^{n-r}$ et $h_{\text{prim}}^{p,q} = \dim P^{p,q}$ pour $p + q \leq n$.

(1) En utilisant la décomposition de Lefschetz, montrer que l'on a

$$b^{n-r} = b^{n+r} = \sum_{k \geq 0} b_{\text{prim}}^{n-r-2k} \quad (r \geq 0)$$

$$h^{p,q} = h^{p+r, q+r} = \sum_{k \geq 0} h_{\text{prim}}^{p-k, q-k} \quad (p + q = n - r \leq n).$$

(2) En déduire les inégalités

- si $n - r = p + q \leq n$, alors $b^{n-r} \geq b^{n-r-2}$ et $h^{p,q} \geq h^{p-1,q-1}$;
- si $n + r = p + q \geq n$, alors $b^{n+r} \geq b^{n+r+2}$ et $h^{p,q} \geq h^{p+1,q+1}$.

Définition 2.3.16 (polarisation de la structure de Hodge-Lefschetz)

Une *polarisation* de la structure de Hodge-Lefschetz consiste en la donnée d'une forme bilinéaire réelle non dégénérée Q sur H , i.e. la forme Q prend des valeurs réelles sur $H_0 \times H_0$, qui satisfait les deux propriétés suivantes :

(c) La décomposition $H = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} H^{n-r}$ est *orthogonale* pour Q et, sur H^{n-r} , la forme Q est $(-1)^{n-r}$ symétrique.

(d) La décomposition $H = \bigoplus_{p,q} H^{p,q}$ est *orthogonale* pour la forme sesquilinéaire $Q(C\cdot, \bar{\cdot})$, qui est hermitienne d'après la condition précédente. Celle-ci induit une forme hermitienne *définie positive* sur $P = \bigoplus_{r \geq 0} P^{n-r}$.

Lorsque $L = 0$, on parle de polarisation de la structure de Hodge. Il faut noter que, dans tous les cas, la partie primitive P^{n-r} ($r \geq 0$) est une structure de Hodge de poids $n - r$ polarisée par (la restriction de) Q .

La donnée de la forme Q est équivalente à la donnée de la forme réelle $I : H^{n-r} \times H^{n+r} \rightarrow \mathbb{C}$ ($r \geq 0$), appelée *forme d'intersection*, définie par

$$(2.3.17) \quad \forall \eta, \eta' \in H^{n-r}, \quad Q(\eta, \eta') = \varepsilon(n-r)I(\eta, L^r \eta').$$

Sur la figure 2.2, la répartition des nombres $h^{p,q} \stackrel{\text{déf}}{=} \dim H^{p,q}$ d'une structure de Hodge-Lefschetz est symétrique par rapport aux axes horizontal et vertical (l'isomorphisme de Lefschetz pour le premier, la conjugaison pour le second).

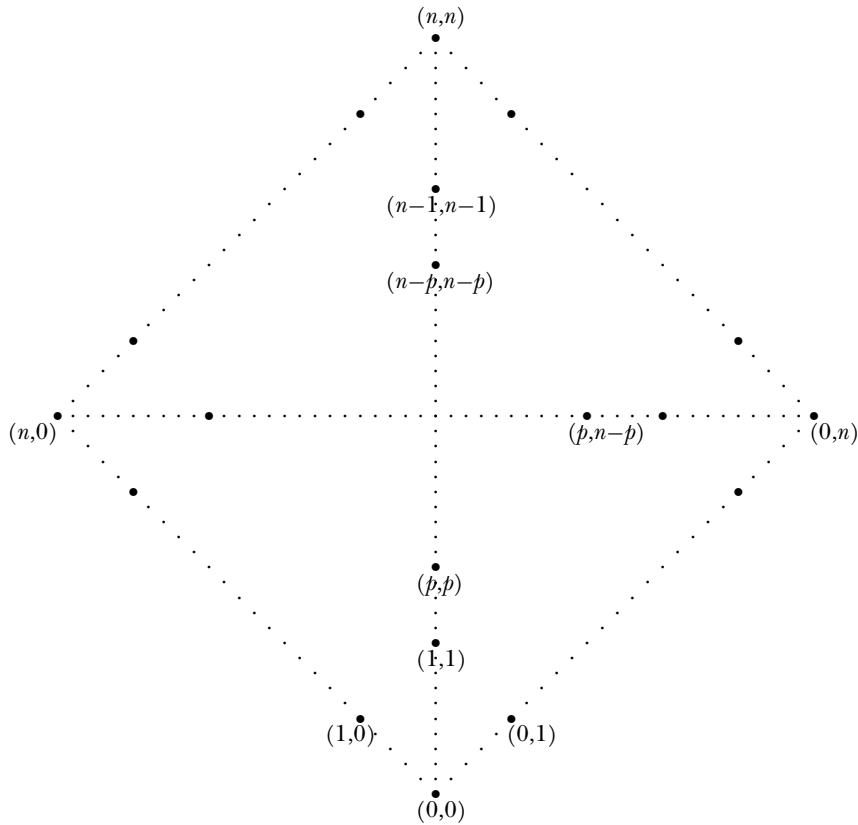


FIGURE 2.2. Le carreau (diamant) de Hodge (the Hodge diamond)

Exercice 2.3.18 (théorème de l'indice de Hodge). Soit H un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'une structure de Hodge-Lefschetz de poids n pair, polarisée par Q , et soit I la forme d'intersection correspondante (cf. (2.3.17)).

Montrer que, puisque n est pair, la forme I sur H^n est bilinéaire symétrique. On veut montrer que la signature (ou indice d'inertie de Sylvester) $\sigma(I)$ de cette forme est donnée par la formule

$$\sigma(I) = \sum_{p,q \geq 0} (-1)^p h^{p,q},$$

où $h^{p,q} = \dim H^{p,q}$.

(1) Montrer que $\sigma(I) = \sigma(\tilde{I})$, où \tilde{I} est la forme hermitienne associée : $\tilde{I}(\eta, \eta') = I(\eta, \overline{\eta'})$.

(2) Montrer que, si $p + q = n - 2r$, le signe de \tilde{I} sur $L^r P^{p,q}$ est $(-1)^p$. En déduire que $\sigma(I) = \sum_{r \geq 0} \sum_{p+q=n-2r} (-1)^p \dim P^{p,q}$.

(3) Montrer que, pour $p + q = n - 2r$ avec $r \geq 0$, on a $\dim P^{p,q} = h^{p,q} - h^{p-1,q-1}$. En déduire :

$$\begin{aligned} \sigma(I) &= \sum_{r \geq 0} \sum_{p+q=n-2r} (-1)^p (h^{p,q} - h^{p-1,q-1}) \\ &= \sum_{p+q \text{ pair}} (-1)^p h^{p,q}. \end{aligned}$$

(4) Vérifier $\sum_{p+q \text{ impair}} (-1)^p h^{p,q} = 0$ et conclure.

Références

- [1] O. DEBARRE – « Variétés complexes », Notes de cours, Strasbourg, octobre 2000.
- [2] J.-P. DEMAILLY – « Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation », in *Introduction à la théorie de Hodge*, Panoramas et Synthèses, vol. 3, Société Mathématique de France, 1996, p. 3–111.
- [3] A. WEIL – *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, Hermann, Paris, 1958.

CHAPITRE 3

THÉORIE DE HODGE SUR LES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES COMPLEXES COMPACTES

3.1. Variétés complexes hermitiennes

3.1.a. Variétés presque complexes hermitiennes

Définition 3.1.1 (structure complexe). Si T est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2n$, une *structure complexe* sur T est un automorphisme \mathbb{R} -linéaire $J : T \rightarrow T$ tel que $J^2 = -\text{Id}$.

Une structure complexe J sur T fait de T un \mathbb{C} -espace vectoriel : on pose

$$(a + ib) \cdot t = (a\text{Id} + bJ) \cdot t.$$

Réciproquement, tout \mathbb{C} -espace vectoriel est muni d'une structure complexe : la multiplication par i .

Soit X une variété C^∞ de dimension $2n$. En chaque point $x \in X$, l'espace tangent $T_x X$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2n$.

Définition 3.1.2 (structure presque complexe). Une *structure presque complexe* sur X est un automorphisme \mathbb{R} -linéaire $J : TX \rightarrow TX$ du fibré tangent sur lui-même, qui induit dans chaque fibre $T_x X$ une structure complexe. Une variété C^∞ munie d'une structure presque complexe est appelée *variété presque complexe*.

Le pourquoi du « presque » sera expliqué plus bas. Le fibré tangent d'une variété presque complexe est un fibré C^∞ localement isomorphe à un fibré trivial de fibre \mathbb{C}^n .

En coordonnées locales x_1, \dots, x_{2n} , la matrice de l'automorphisme J dans la base $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{2n}}$ est à coefficients C^∞ et satisfait identiquement $J^2 = -\text{Id}$.

Exemple 3.1.3. Sur un ouvert U de \mathbb{R}^{2n} de coordonnées (x, y) , une structure presque complexe est la donnée d'une matrice carrée $J(x, y)$ de taille $2n$, qui dépend de manière C^∞ des coordonnées, et qui satisfait identiquement $J^2 = -\text{Id}_{2n}$.

On peut appliquer les résultats du chapitre 2 à chaque espace tangent $T = T_x X$ d'une variété presque complexe hermitienne X . Tous les opérateurs que nous avons introduits sont maintenant des opérateurs sur le fibré $\wedge F_X = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T^* X, \mathbf{1}_X)$, où $\mathbf{1}_X$ est le fibré trivial de rang 1 sur X , *i.e.* le fibré associé à la projection $X \times \mathbb{C} \rightarrow X$. Ils dépendent de manière C^∞ du point x (on vérifiera que les constructions faites préservent la propriété C^∞).

Si on oublie la structure presque complexe sur le fibré TX , qu'on notera alors $TX_{\mathbb{R}}$, on obtient un fibré vectoriel réel de rang $2n$. Le fibré $\wedge T^* X_{\mathbb{R}}$ n'est autre que le fibré noté $F_{0,X}$ au chapitre 2. Il est commode de noter $X_{\mathbb{R}}$ la variété réelle « sous-jacente » à la variété presque complexe X . On a ainsi $\wedge F_X = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \wedge F_{0,X}$.

Si X est une variété presque complexe, l'espace $A^r(X, \mathbb{C})$ des k -formes différentielles complexes est le complexifié de l'espace $A^r(X)$ considéré au §0.2. C'est lui que nous noterons désormais $A^r(X)$. Ainsi, $A^r(X)$ est l'espace des sections du fibré $\wedge^r F_X$. L'espace des formes différentielles réelles, que nous noterons maintenant $A^r(X, \mathbb{R})$, n'est autre que l'espace des sections C^∞ du fibré $\wedge^r F_{0,X}$.

La variante (presque) complexe de la notion de métrique riemannienne sur une variété C^∞ est la notion de métrique hermitienne :

Définition 3.1.4 (métrique hermitienne). Une *métrique hermitienne* h sur une variété presque complexe X consiste en la donnée d'un produit scalaire hermitien dans chaque fibre $T_x X$ du fibré tangent TX , produit scalaire qui dépend de manière C^∞ du point x . On appelle *hermitienne* une variété presque complexe munie d'une métrique hermitienne. On note n sa *dimension complexe* (i.e. le rang du fibré TX comme fibré complexe).

Il existe, au voisinage de tout point $x \in X$, une \mathbb{C} -base ξ_1, \dots, ξ_n de TX qui est orthonormée pour la métrique (démonstration analogue à celle pour les métriques riemanniennes, qui utilise le fait que le procédé de Gram-Schmidt préserve la propriété C^∞).

La donnée de la métrique hermitienne h est équivalente à celle de la 2-forme alternée non dégénérée ω invariante par J qui satisfait la condition de positivité $\omega(\xi, J\xi) > 0$ pour tout champ de vecteurs non nul ξ sur X . Elle est aussi équivalente à celle d'une métrique riemannienne invariante par J (la partie réelle de h).

On voit aussi qu'une variété presque complexe hermitienne X est en particulier une variété riemannienne (plus précisément, $X_{\mathbb{R}}$ est riemannienne), et que le volume riemannien n'est autre que $\omega^{\wedge n}$.

La métrique hermitienne h sur X fournit des opérateurs C, \star, L, Λ, B sur $\wedge F_X$. L'opérateur \star de Hodge est réel et, en restriction à $\wedge T^* X_{\mathbb{R}}$, n'est autre que l'opérateur \star associé à la métrique riemannienne $\text{Ré } h$ sur $X_{\mathbb{R}}$.

L'opérateur L induit une décomposition de Lefschetz de $A^\bullet(X, \mathbb{C})$, et on parlera des composantes de Lefschetz d'une forme différentielle.

3.1.b. Les opérateurs d' et d'' . D'après le §2.1.b, l'espace $A^r(X, \mathbb{C})$ se décompose en

$$A^r(X) = \bigoplus_{p+q=r} A^{p,q}(X).$$

De cette manière, l'opérateur $d : A^r(X) \rightarrow A^{r+1}(X)$ (en fait, le complexifié de l'opérateur d du §0.2) se décompose sur les différents facteurs.

Exemple 3.1.5. Si X est un ouvert de $(\mathbb{R}^2)^n$, X est muni d'une structure presque complexe canonique : le fibré TX est trivial, égal à $X \times (\mathbb{R}^2)^n$; la structure complexe sur chaque facteur \mathbb{R}^2 induit une structure presque complexe sur X . Si $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ sont les coordonnées, on a, en posant $z_j = x_j + iy_j$,

$$A^1(X) = \sum_j \mathcal{E}^\infty(X) dx_j \oplus \sum_k \mathcal{E}^\infty(X) dy_k = \sum_j \mathcal{E}^\infty(X) dz_j \oplus \sum_k \mathcal{E}^\infty(X) d\bar{z}_k.$$

Dans cet exemple, on voit que d se décompose en deux facteurs, l'un de bi-degré $(1, 0)$ et l'autre de bi-degré $(0, 1)$.

Une (p, q) -forme sur X s'écrit

$$\eta = \sum_{\substack{\#I=p \\ \#J=q}} \eta_{I,J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

où $\eta_{I,J}$ est une fonction C^∞ sur X à valeurs complexes. Si on note, comme il est de coutume,

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right),$$

on a

$$\begin{aligned} d'(\eta_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J) &= \sum_{k \notin I} \frac{\partial \eta_{I,J}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J, \\ d''(\eta_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J) &= \sum_{k \notin J} \frac{\partial \eta_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J, \end{aligned}$$

et on en déduit par linéarité les valeurs de $d'\eta$ et de $d''\eta$. En particulier, on voit qu'une fonction $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est holomorphe si et seulement si la $(0, 1)$ -forme $d''f$ est identiquement nulle (équations de Cauchy-Riemann en dimension n).

Définition 3.1.6. On dit que la variété presque complexe X est une *variété complexe* si l'opérateur d se décompose en

$$d = d' + d'', \quad d' : A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{p+1,q}(X), \quad d'' : A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{p,q+1}(X).$$

Remarque. Les opérateurs d' et d'' sont notés respectivement ∂ et $\bar{\partial}$ dans [2, §2.6].

Si X est une *variété analytique complexe*, *i.e.* qui admet un atlas dans lequel les changements de cartes sont holomorphes, alors X est une variété complexe au sens précédent : cela résulte de l'exemple 3.1.5.

On peut montrer que, réciproquement, toute variété complexe est une variété analytique complexe (mais c'est plus difficile !).

C'est pourquoi on ne fait pas la distinction entre les deux notions (*cf.* par exemple la définition donnée dans [2, §2.3]).

Remarque. On peut aussi interpréter la condition en terme d'« intégrabilité » de la structure complexe J : appelons ${}^t J : T^*X_{\mathbb{R}} \rightarrow T^*X_{\mathbb{R}}$ l'opérateur transposé de J ; il s'étend en un opérateur (de degré 0, *i.e.* qui conserve le degré) sur les formes différentielles (réelles) sur $X_{\mathbb{R}}$; la condition est alors que J commute à d .

3.1.c. Cohomologie de Dolbeault. Soit X une variété complexe. La relation $d \circ d = 0$ se décompose suivant le type (ou bi-degré) des opérateurs :

- en bi-degré $(2, 0)$, $d' \circ d' = 0$;
- en bi-degré $(0, 2)$, $d'' \circ d'' = 0$;
- en bi-degré $(1, 1)$, $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$.

Le *complexe de Dolbeault* de degré p est le complexe

$$0 \longrightarrow A^{p,0}(X) \xrightarrow{d''} A^{p,1}(X) \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} A^{p,n}(X) \longrightarrow 0.$$

C'est un *complexe*, puisque $d'' \circ d'' = 0$. Ses espaces de cohomologie sont les *espaces de cohomologie de Dolbeault* :

$$H_{d''}^{p,q}(X) = \text{Ker} [d'' : A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{p,q+1}(X)] / \text{Im} [d'' : A^{p,q-1}(X) \longrightarrow A^{p,q}(X)].$$

On peut définir de manière analogue les espaces de cohomologie $H_{d''}^{p,q}(X)$.

Définition 3.1.7. Soit U un ouvert de la variété complexe X . On dit qu'une forme différentielle $\eta \in A^p(U)$ de degré p est une forme *holomorphe* si, dans toute carte de coordonnées complexes z_1, \dots, z_n , la forme s'écrit « sans $d\bar{z}$ », i.e. $\eta = \sum_{\#I=p} \eta_I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dz_I$ ou encore $\eta \in A^{p,0}(X)$, et de plus toutes les fonctions C^∞ η_I sont *holomorphes*. On note Ω_X^p le faisceau des formes différentielles holomorphes sur X .

Lemme 3.1.8 (Cauchy-Riemann pour les r -formes). Une $(p, 0)$ -forme η est holomorphe si et seulement si elle satisfait identiquement $d''\eta = 0$.

Démonstration. Cela résulte du calcul fait à l'exemple 3.1.5. □

Le *lemme de Dolbeault* (cf. [2, Proposition 2.17]) dit exactement que le complexe *de faisceaux sur X*

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \longrightarrow A_X^{p,0} \xrightarrow{d''} A_X^{p,1} \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} A_X^{p,n} \longrightarrow 0$$

est *exact* en tout degré, i.e. le noyau (au sens de la théorie des faisceaux) d'une flèche est égal à l'image de la flèche précédente. Un argument cohomologique (cf. [2, Corollaire 3.14]) permet d'en déduire que l'on a

$$H_{d''}^{p,q}(X) = H^q(X, \Omega_X^p).$$

3.1.d. Les théorèmes de Hodge pour les variétés compactes complexes hermitiennes. La méthode de Hodge, qui a montré son efficacité pour la cohomologie de de Rham d'une variété C^∞ compacte, va s'appliquer à la cohomologie de Dolbeault d'une variété compacte complexe X . Munissons X d'une métrique hermitienne h (donc $X_{\mathbb{R}}$ d'une métrique riemannienne $\text{Ré } h$). Les opérateurs d' et d'' sont, tout comme d , des opérateurs différentiels de degrés 1 entre des fibrés. Ils admettent par suite un adjoint formel d'^* et d''^* , qui est aussi un opérateur différentiel de degré 1 :

$$d'^* : A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{p-1,q}(X), \quad d''^* : A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{p,q-1}(X).$$

Puisque l'opérateur \star de Hodge est réel (cf. lemme 2.2.5), les opérateurs adjoints d'^* et d''^* s'obtiennent par la formule

$$(3.1.9) \quad d'^* = - \star d'' \star, \quad d''^* = - \star d' \star,$$

à l'aide de la formule analogue pour d (cf. proposition 1.3.6) : en effet, soit $\eta \in A^{p,q}(X)$; alors $d'^*\eta$ est la composante de $d^*\eta$ de type $(p-1, q)$; on a

$$d^*\eta = - \star d \star \eta = - \star d' \star \eta - \star d'' \star \eta;$$

$d' \star \eta$ est de type $(n-q+1, n-p)$ (cf. §2.2.b), donc $- \star d' \star \eta$ est de type $(p, q-1)$, c'est $d''^*\eta$; on raisonne de même pour d'^* .

On dispose donc aussi de laplaciens Δ' et Δ'' et de formes harmoniques $\mathcal{H}_{\Delta'}^{p,q}$ et $\mathcal{H}_{\Delta''}^{p,q}$.

Exercice 3.1.10. On introduit l'opérateur d^c : c'est l'opérateur $C^{-1}dC$ conjugué de d par l'opérateur de Weil C . L'opérateur ainsi construit est de degré 1, et satisfait de manière évidente $d^c \circ d^c = 0$. Montrer :

(1) L'opérateur d^c est réel et on a les formules :

$$2d' = d + id^c, \quad 2d'' = d - id^c, \\ 2id'd'' = dd^c = -d^c d.$$

- (2) L'adjoint formel de d^c est donné par la formule $d^{c*} = C^{-1}d^*C = -\star d^c\star$.
(3) Le laplacien associé à d^c est donné par $\Delta^c = C^{-1}\Delta C$, et c est un opérateur elliptique.

Nous allons appliquer les théorèmes de la théorie de Hodge des variétés C^∞ à la variété $X_{\mathbb{R}}$, et aux opérateurs d' et d'' agissant sur les sections $A^{p,q}(X)$ des fibrés complexes hermitiens $\wedge^{p,q}F_X$. Il s'agit d'abord de vérifier l'ellipticité de Δ' et Δ'' .

Lemme 3.1.11. *Les laplaciens Δ' et Δ'' sont des opérateurs différentiels de degré 2 sur le fibré $\wedge^{p,q}T^*X$. Ce sont des opérateurs elliptiques.*

Démonstration. On procède comme pour le calcul du symbole de Δ en calculant d'abord le symbole de d' : c est une fonction $\sigma_{d'} : T^*X_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Hom}(\wedge^{p,q}F_X, \wedge^{p+1,q}F_X)$. Au point $(x, \zeta) \in T_x^*X_{\mathbb{R}}$, on a

$$\begin{aligned}\sigma_{d'}(x, \zeta)(\bullet) &= \zeta^{(1,0)} \wedge \bullet \\ \sigma_{d''}(x, \zeta)(\bullet) &= \zeta^{(0,1)} \wedge \bullet,\end{aligned}$$

où $\zeta^{(1,0)}$ désigne la projection de ζ sur T_x^*X (projection de F_0 sur T' , avec les notations du chapitre 2). On en déduit que $\sigma_{\Delta'}(x, \zeta) = -\|\zeta^{(1,0)}\|^2 \text{Id}$, et de même, $\sigma_{\Delta''}(x, \zeta) = -\|\zeta^{(0,1)}\|^2 \text{Id}$.

Maintenant, puisque ζ est réel, on a $\|\zeta^{(1,0)}\| = \|\zeta^{(0,1)}\| = \|\zeta\|/2$: en effet, en prenant les notations du chapitre 2, on prend une \mathbb{C} -base h -orthonormée w_1, \dots, w_n de T_x^*X , et on en déduit une \mathbb{R} -base (u_j, v_j) . Si $\zeta = \sum_j a_j u_j + b_j v_j$ avec $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, on a $\zeta^{(1,0)} = \frac{1}{2} \sum_j (a_j - ib_j) w_j$ et $\zeta^{(0,1)} = \frac{1}{2} \sum_j (a_j + ib_j) \bar{w}_j$.

On a donc

$$\sigma_{\Delta'} = \sigma_{\Delta''} = \frac{1}{2} \sigma_{\Delta}. \quad \square$$

On déduit de ce lemme, de la même manière qu'au § 1.4.b, si X est compacte :

Théorème 3.1.12 (de Hodge pour la cohomologie de Dolbeault). *Pour tous $p, q \geq 0$, les espaces $\mathcal{H}_{\Delta'}^{p,q}$ et $\mathcal{H}_{\Delta''}^{p,q}$ sont de dimension finie et on a une décomposition $(,)$ -orthogonale*

$$\begin{aligned}A^{p,q}(X) &= \mathcal{H}_{\Delta'}^{p,q} \oplus \text{Im } d' \oplus \text{Im } d'^*, \\ A^{p,q}(X) &= \mathcal{H}_{\Delta''}^{p,q} \oplus \text{Im } d'' \oplus \text{Im } d''*.\end{aligned}$$

On en déduit aussi que les espaces de cohomologie de Dolbeault sont de dimension finie et que toute classe de Dolbeault d'' a un unique représentant Δ'' -harmonique (et même chose pour les classes d').

Remarque. Contrairement à la cohomologie de de Rham $H_{\text{DR}}^\bullet(X, \mathbb{C})$, la cohomologie de Dolbeault ne se calcule pas, en général, par des méthodes « topologiques » (théorie de Morse par exemple).

3.1.e. Relations entre les espaces $H_{d''}^{p,q}(X)$ et $H_{\text{DR}}^{p+q}(X, \mathbb{C})$. Il n'y a *a priori* pas de relation évidente entre ces espaces. Pour analyser plus précisément la situation, on introduit un troisième larron : l'espace de cohomologie de Bott-Chern.

Avant de le définir, on remarque que le composé de d avec l'opérateur $d'd''$ est nul, puisque d' et d'' anti-commutent. Par suite, $d'd''A^{p-1,q-1}(X) \subset A^{p,q}(X) \cap Z_d^{p+q}(X)$, où, comme avant, $Z_d = \text{Ker } d$. On pose donc

$$(3.1.13) \quad H_{\text{BC}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) = A^{p,q}(X) \cap Z_d^{p+q}(X) / d'd''A^{p-1,q-1}(X).$$

Lemme 3.1.14. *On a des homomorphismes naturels*

$$(3.1.15) \quad H_{\text{BC}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{d''}^{p,q}(X),$$

$$(3.1.16) \quad \bigoplus_{p+q=r} H_{\text{BC}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{\text{DR}}^r(X, \mathbb{C}).$$

De plus, on a $\overline{H_{\text{BC}}^{p,q}(X, \mathbb{C})} = H_{\text{BC}}^{q,p}(X, \mathbb{C})$

Sans hypothèse supplémentaire, rien ne permet d'affirmer que ces flèches sont injectives, surjectives ou bijectives.

Démonstration. La première flèche est définie car on a

$$A^{p,q}(X) \cap Z_d^{p+q}(X) \subset \text{Ker } d'' \quad \text{et} \quad d'd''A^{p-1,q-1}(X) \subset d''A^{p,q-1}(X).$$

Pour la seconde, on utilise l'inclusion $A^{p,q}(X) \cap Z_d^{p+q}(X) \subset Z_d^{p+q}(X)$ et le fait que $d'd'' = dd''$ pour avoir $d'd''A^{p-1,q-1}(X) \subset A^{p,q}(X) \cap \text{Im } d$.

Enfin,

$$\overline{A^{p,q}(X) \cap Z_d^{p+q}(X)} = A^{q,p}(X) \cap Z_d^{p+q}(X)$$

et

$$\overline{d'd''A^{p-1,q-1}(X)} = d''d'A^{q-1,p-1}(X).$$

On conclut en utilisant que $d''d' = -d'd''$. □

3.1.f. Théorie de Hodge pour les fibrés hermitiens. Soit H un fibré vectoriel C^∞ complexe de rang r sur une variété complexe hermitienne (X, h) ou (X, ω) . Nous supposons H muni d'une métrique hermitienne h_H (cf. le cours de Mihai Paun). Nous noterons encore $F_X = \mathbb{C} \otimes \wedge T^*X_{\mathbb{R}}$.

Lemme 3.1.17. *Les fibrés complexes $\wedge^{p,q}F_X \otimes H$ sont naturellement munis d'une métrique hermitienne.*

Démonstration. Nous avons vu au §3.1.a comment munir les fibrés $\wedge^{p,q}F_X$ d'une métrique hermitienne à partir de celle sur le fibré tangent. Il reste donc à voir comment munir d'une métrique hermitienne le produit tensoriel de deux fibrés hermitiens (H, h_H) et (G, h_G) . Si e, e' et f, f' sont des sections C^∞ de H et G respectivement sur un ouvert U de X , on pose

$$h_{H \otimes G}(e \otimes f, e' \otimes f') = h_H(e, e') \cdot h_G(f, f').$$

On étend ensuite la définition de $h_{H \otimes G}$ par sesquilinearité à toutes les sections locales de $H \otimes G$ sur U . Pour voir que cette extension est bien définie (car la décomposition d'un élément en somme d'éléments décomposables n'est pas unique), on utilise l'existence de bases formées d'éléments décomposables. Ainsi, on obtient des bases orthonormées locales dont les éléments sont les produits tensoriels d'éléments de bases orthonormées locales de H et G . □

Nous noterons $A^k(X, H)$ (resp. $A^{p,q}(X, H)$) l'espace des sections C^∞ du fibré $\wedge^k F_X \otimes H$ (resp. $\wedge^{p,q} F_X \otimes H$).

Remarque 3.1.18. Dans la suite, nous noterons de la même manière le fibré H et le faisceau de ses sections C^∞ .

Si E est un fibré *holomorphe* sur X (ou encore un faisceau localement libre de rang fini de \mathcal{O}_X -modules), nous noterons H le fibré C^∞ associé ; au niveau des faisceaux, $H = \mathcal{E}_X^\infty \otimes_{\mathcal{O}_X} E$. Alors $A^k(X, H) = A^k(X, E)$.

Définition 3.1.19. Une *connexion* D sur le fibré H est une application \mathbb{C} -linéaire $D : A^0(X, H) \rightarrow A^1(X, H)$ qui satisfait l'identité de Leibniz

$$\forall e \in A^0(X, H), \forall \varphi \in \mathcal{E}^\infty(X), \quad D(\varphi e) = d\varphi \otimes e + \varphi D e.$$

On dit que la connexion D est *compatible à la métrique* h_H si elle satisfait à

$$\forall e, e' \in A^0(X, H), \quad d(h_H(e, e')) = h_H(D e, e') + h_H(e, D e') \in A^1(X, \mathbb{C}).$$

Une connexion D se décompose en une partie de type $(1, 0)$ et une partie de type $(0, 1)$: $D = D' + D''$. Elle définit plus généralement des opérateurs

$$D : A^k(X, H) \longrightarrow A^{k+1}(X, H)$$

$$D' : A^{p,q}(X, H) \longrightarrow A^{p+1,q}(X, H)$$

$$D'' : A^{p,q}(X, H) \longrightarrow A^{p,q+1}(X, H).$$

Pour le voir, on utilise le même procédé que pour la différentielle usuelle, à savoir la règle de Leibniz. Si η est une k -forme et e une section locale de H , le tout sur un ouvert U de X , on pose donc

$$D(\eta \otimes e) = (d\eta) \otimes e + (-1)^k \eta \otimes D(e),$$

et on étend ensuite par linéarité. La formule est la même pour D' et D'' .

Remarques 3.1.20

(1) Si E est un fibré holomorphe sur X et si H est le fibré C^∞ associé, il existe une connexion D'' de type $(0, 1)$ sur H telle que $D''^2 = 0$ et $E = \text{Ker } D''$: si φ est une fonction C^∞ sur X et e est une section locale de E , on pose $D''(\varphi \otimes e) = d''\varphi \otimes e$.

Réciproquement, on peut montrer que toute connexion D'' de type $(0, 1)$ sur un fibré différentiable H , qui satisfait $D''^2 = 0$, est du type ci-dessus, autrement dit le faisceau $E = \text{Ker } D''$ est \mathcal{O}_X -localement libre de rang égal à celui de H .

(2) Si D est une connexion *plate* sur un fibré différentiable H , *i.e.* si $D^2 = 0$, alors, en décomposant cette égalité suivant le type, on voit que les composantes D', D'' de D satisfont aux relations

$$D'^2 = 0, \quad D''^2 = 0, \quad D' D'' + D'' D' = 0.$$

D'après ce qui précède, $V = \text{Ker } D''$ est un fibré *holomorphe* sur X et on a $H = \mathcal{E}_X^\infty \otimes_{\mathcal{O}_X} V$. De plus, la troisième relation montre que D' induit une connexion *holomorphe* $\nabla : V \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} V$, et la première montre que celle-ci est *plate*.

Réciproquement, tout fibré holomorphe V sur X muni d'une connexion holomorphe plate ∇ définit un fibré différentiable H muni d'une connexion plate D .

Revenons à la situation d'une connexion métrique sur un fibré hermitien H .

Lemme 3.1.21. Soit D une connexion sur H , compatible à la métrique h_H . Alors l'adjoint formel de D est donné par la formule

$$D^* = - \star D \star,$$

et une formule analogue à (3.1.9) pour les adjoints de D', D'' .

Démonstration. Il est d'abord clair que les opérateurs D, D', D'' ci-dessus sont des opérateurs différentiels d'ordre 1 entre les fibrés correspondants. Ils admettent donc chacun un adjoint formel. Pour donner un sens à la question, il faut déjà *définir* l'opérateur \star de Hodge dans ce contexte. Si on pose $\dim X = 2n$, on cherche un opérateur

$$\star : A^{n-r}(X, H) \longrightarrow A^{n+r}(X, H)$$

qui se décompose en

$$\star : A^{p,q}(X, H) \longrightarrow A^{n-q, n-p}(X, H).$$

On définit un produit extérieur

$$\begin{aligned} A^k(X, H) \otimes A^\ell(X, H) &\xrightarrow{\wedge} A^{k+\ell}(X, \mathbb{C}) \\ (\eta \otimes e) \otimes (\eta' \otimes e') &\longmapsto h_H(e, e') \eta \wedge \eta' \end{aligned}$$

et on cherche \star de sorte que

$$(\eta \otimes e) \wedge \star(\overline{\eta'} \otimes e') = h_H(e, e') \langle \eta, \eta' \rangle \text{vol}.$$

Il est clair qu'on peut définir \star par $\star(\eta' \otimes e') = \star(\eta') \otimes e'$, autrement dit, « \star n'opère pas sur H ».

Soit $\varphi \in A_c^{n-r}(X)$, $\psi \in A_c^{n+r-1}(X)$ et e, f des sections C^∞ de H sur X . Il s'agit de montrer

$$d((\varphi \otimes e) \wedge (\psi \otimes f)) = D(\varphi \otimes e) \wedge (\psi \otimes f) + (-1)^{n-r}(\varphi \otimes e) \wedge D(\psi \otimes f),$$

pour appliquer la démonstration de la proposition 1.3.6. On a

$$\begin{aligned} d((\varphi \otimes e) \wedge (\psi \otimes f)) &= d(h_H(e, f)\varphi \wedge \psi) \\ &= dh_H(e, f) \wedge \varphi \wedge \psi + h_H(e, f) \wedge d\varphi \wedge \psi + (-1)^{n-r}h_H(e, f) \wedge \varphi \wedge d\psi \\ &= (h_H(D_{h_H}e, f) + h_H(e, D_{h_H}f)) \wedge \varphi \wedge \psi \\ &\quad + h_H(e, f) \wedge d\varphi \wedge \psi + (-1)^{n-r}h_H(e, f) \wedge \varphi \wedge d\psi \\ &= D(\varphi \otimes e) \wedge (\psi \otimes f) + (-1)^{n-r}(\varphi \otimes e) \wedge D(\psi \otimes f). \end{aligned}$$

On a utilisé ici de manière essentielle le fait que D est une connexion compatible à la métrique, et une égalité analogue pour les $\varphi \otimes e$. \square

Dans une base locale e de sections de H et dans des coordonnées locales, l'opérateur D s'écrit $d \otimes \text{Id}_H + A$, où A est une matrice de 1-formes. Ainsi, D et $d \otimes \text{Id}_H$ ont même symbole principal. Un résultat analogue vaut pour les symboles de D' et D'' . Il en résulte que les laplaciens $\Delta_D, \Delta'_{D'}, \Delta''_{D''}$ sont des opérateurs *elliptiques*.

Le théorème 1.4.1 donne des décompositions $(,)$ -orthogonales

$$\begin{aligned} A^k(X, H) &= \mathcal{H}_D^k(X, H) \oplus \Delta_D(A^k(X, H)), \\ A^{p,q}(X, H) &= \mathcal{H}_{D'}^{p,q}(X, H) \oplus \Delta_{D'}(A^{p,q}(X, H)), \\ A^{p,q}(X, H) &= \mathcal{H}_{D''}^{p,q}(X, H) \oplus \Delta_{D''}(A^{p,q}(X, H)), \end{aligned}$$

ainsi que la finitude de la dimension des espaces $\mathcal{H}_{\Delta_D}^k(X, H), \mathcal{H}_{\Delta'_D}^{p,q}(X, H), \mathcal{H}_{\Delta''_D}^{p,q}(X, H)$ de sections harmoniques. De plus, le raisonnement fait au § 1.4.b montre que $\text{Im } \Delta_D = \text{Im } D + \text{Im } D^*$, et une égalité analogue pour D' et D'' . Néanmoins, sans autre hypothèse, les deux sous-espaces $\text{Im } D$ et $\text{Im } D^*$ ne sont pas nécessairement orthogonaux.

Nous allons exploiter ces informations pour des connexions particulières.

Le cas des connexions métriques plates. Supposons que la connexion D soit *plate*, i.e. qu'elle satisfasse $D \circ D = 0$. Alors les sous-espaces $\text{Im } D$ et $\text{Im } D^*$ sont orthogonaux dans $A^k(X, H)$.

Le complexe de de Rham associé au fibré à connexion plate (H, D) est le complexe

$$(3.1.22) \quad 0 \longrightarrow A^0(X, H) \xrightarrow{D} A^1(X, H) \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} A^{2n}(X, H) \longrightarrow 0.$$

Ses espaces de cohomologie sont les espaces de cohomologie de de Rham de (H, D) . Ils sont donc de dimension finie et s'identifient aux espaces $\mathcal{H}_{\Delta_D}^k(X, H)$.

Pour p fixé, soient $H_{D''}^{p,q}(X, H)$ ($q = 0, \dots, n$) les espaces de cohomologie du complexe de Dolbeault de H (cf. [2, § 2.7]) :

$$0 \longrightarrow A^{p,0}(X, H) \xrightarrow{D''} A^{p,1}(X, H) \xrightarrow{D''} \dots \xrightarrow{D''} A^{p,n}(X, H) \longrightarrow 0.$$

On obtient aussi que l'espace $H_{D''}^{p,q}(X, H)$ s'identifie à l'espace des formes $\Delta_{D''}$ -harmoniques de type (p, q) et qu'il est de dimension finie.

Remarque 3.1.23. Si on pose $V = \text{Ker } D''$, alors D est la connexion de Chern (cf. *infra*) associée à la métrique h_H et à la structure holomorphe V sur H . On note aussi $H_{\text{DR}}^k(X, H) = H_{\text{DR}}^k(X, V)$ et $H_{D''}^{p,q}(X, H) = H^{p,q}(X, V)$.

Le cas de la connexion de Chern sur un fibré holomorphe hermitien. Soit E un fibré holomorphe et soit H le fibré C^∞ associé, qu'on suppose muni d'une métrique hermitienne h_H . Il existe donc un opérateur $d'' : H \rightarrow \mathcal{E}_X^{0,1} \otimes_{\mathcal{E}_X^\infty} H$ dont le noyau est formé des sections holomorphes E .

Soit D_{h_H} la *connexion de Chern* sur H associée à la métrique hermitienne h_H et à la structure holomorphe E (cf. [5]) : c'est par définition l'unique connexion $D : A^0(X, H) \rightarrow A^1(X, H)$ sur H , qui est compatible à la métrique et telle que la partie de type $(0, 1)$ soit égale à d'' . On obtient un résultat analogue au précédent pour la cohomologie de Dolbeault $H_{d''}^{p,q}(X, H)$, aussi notée $H^{p,q}(X, E)$.

Remarque 3.1.24 (dualité de Serre). On peut, à ce stade, donner une démonstration du *théorème de dualité de Serre*, qui affirme que, lorsque X est compacte, si Ω_X^p est le faisceau des p -formes holomorphes sur X , sections holomorphes du fibré $\wedge^p T^*X$, et E le faisceau des sections holomorphes de E , on a un accouplement naturel *non dégénéré*

$$(DS) \quad H^q(X, \Omega_X^p(E)) \otimes H^{n-q}(X, \Omega_X^{n-p}(E^*)) \longrightarrow \mathbb{C},$$

où E^* désigne le dual du fibré E .

Pour le voir, munissons le fibré dual H^* de la métrique hermitienne déduite de h_H . On a alors un accouplement naturel

$$(\wedge^{p,q} F_X \otimes H) \otimes (\wedge^{n-p, n-q} F_X \otimes H^*) \longrightarrow \wedge^{n,n} F_X$$

qui, à l'aide de la forme volume $\omega^{\wedge n}$ sur X , fait du premier fibré le dual du second. En effet, le résultat est vrai lorsque E est le fibré trivial de rang 1, noté $\mathbf{1}_X$. Aussi, il suffit de montrer que, si E et F sont deux fibrés holomorphes, l'accouplement naturel

$$(F \otimes E) \otimes (F^* \otimes E^*) \longrightarrow \mathbf{1}_X \\ (f \otimes e) \otimes (\tilde{f} \otimes \tilde{e}) \longmapsto \tilde{f}(f) \cdot \tilde{e}(e)$$

est non dégénéré, ce qui est facile. Si X est compacte, le composé de cet accouplement avec l'intégration sur X définit un accouplement \mathbb{C} -bilinéaire

$$(\cdot, \cdot) : A^{p,q}(X, H) \otimes A^{n-p, n-q}(X, H^*) \longrightarrow \mathbb{C},$$

identiquement nul sur $\text{Ker } D''_{h_H} \otimes \text{Im } D''_{h_{H^*}}$ et $\text{Im } D''_{h_H} \otimes \text{Ker } D''_{h_{H^*}}$. On en déduit un accouplement \mathbb{C} -bilinéaire

$$(DSb) \quad H_{d''}^{p,q}(X, H) \otimes H_{d''}^{n-p, n-q}(X, H^*) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

On montre que l'accouplement $(,)$ est non dégénéré en restriction aux sections harmoniques $\mathcal{H}_{\Delta''}^{p,q}(X, H) \otimes \mathcal{H}_{\Delta''}^{n-p, n-q}(X, H^*)$ et on en conclut que l'accouplement (DSb) est aussi non dégénéré. En utilisant [2, cor. 3.14], on obtient la non dégénérescence de (DS). \square

3.2. Variétés kählériennes

De même qu'il nous a fallu une hypothèse supplémentaire ($d = d' + d''$) pour obtenir des résultats intéressants sur la cohomologie d'une variété presque complexe compacte, de même il nous faut introduire une condition supplémentaire pour *comparer* la cohomologie de Dolbeault à la cohomologie de de Rham, à l'aide du lemme 3.1.14.

Définition 3.2.1. Une variété complexe hermitienne (X, ω) est dite *kählérienne* si la 2-forme ω est *fermée*, i.e. $d\omega = 0$.

Ainsi, vue comme variété C^∞ de dimension réelle $2n$, une variété kählérienne est *symplectique*.

Exemples 3.2.2

- (1) Toute surface de Riemann (variété complexe de dimension 1) est kählérienne, puisque toute 2-forme est fermée.
- (2) Toute variété algébrique projective lisse (i.e. qui est une variété complexe) est kählérienne (cf. [2, § 2.5]).

La condition pour une variété complexe hermitienne d'être kählérienne est *locale*. Elle se traduit par l'existence, au voisinage de tout point, d'un système de coordonnées dans laquelle la 2-forme ω s'exprime comme la 2-forme canonique de \mathbb{C}^n pour ces coordonnées, à des termes quadratiques près :

Théorème 3.2.3 (cf. [5]). Soit ω une $(1, 1)$ -forme C^∞ réelle invariante par i , de forme hermitienne associée définie positive sur un ouvert U de \mathbb{C}^n . Pour que ω soit kählérienne, i.e. $d\omega = 0$, il faut et il suffit qu'il existe, au voisinage de tout point $z_0 \in U$, un système de coordonnées z_1, \dots, z_n tel que

$$\omega = i \sum_{j,k=1}^n \omega_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k, \quad \text{avec } \omega_{jk} = \delta_{jk} + O(\|z\|^2). \quad \square$$

3.2.a. Identités locales de la géométrie kählérienne. L'hypothèse « kählérienne » intervient dans la théorie de Hodge par la formule magique

$$(3.2.4) \quad \Delta' = \Delta'' = \frac{1}{2}\Delta,$$

qui est beaucoup plus précise que la formule analogue pour les symboles, vue plus haut. Nous allons montrer comment l'obtenir.

Calcul de l'adjoint d'^ .* Fixons un point de X . Nous allons calculer l'adjoint formel de d' au voisinage de ce point, c'est-à-dire sur des formes à support compact contenu dans un voisinage de ce point. Le voisinage est une carte dans laquelle on a des coordonnées z_1, \dots, z_n comme dans le théorème 3.2.3.

Soit donc $u = u_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ une (p, q) -forme C^∞ à support compact. Si $v = \sum_{I',J'} v_{I',J'} dz_{I'} \wedge d\bar{z}_{J'}$ est une autre telle forme, le produit scalaire est donné par

$$(u, v) = \int_X [u_{I,J} \bar{v}_{I,J} + O(\|z\|^2)] \text{vol}.$$

Si $w = w_{K,L} dz_K \wedge d\bar{z}_L$ est une $(p-1, q)$ -forme à support compact, on a donc

$$(u, d'w) = \begin{cases} \int_X O(\|z\|^2) \text{vol} & \text{si } K \not\subset I \text{ ou } L \neq J, \\ \int_X \left[u_{I,J} (-1)^{\sigma(k)} \frac{\partial \bar{w}_{K,L}}{\partial z_k} + O(\|z\|^2) \right] \text{vol} & \text{si } L = J \text{ et } I = K \cup \{k\}, \end{cases}$$

où $\sigma(k)$ est tel que $dz_k \wedge dz_K = (-1)^{\sigma(k)} dz_I$. Si $L = J$ et $I = K \cup \{k\}$, on a donc, d'après la formule de Stokes,

$$(u, d'w) = - \int_X \left[(-1)^{\sigma(k)} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} \bar{w}_{K,L} + O(\|z\|) \right] \text{vol},$$

c'est-à-dire

$$d'^* u = - \sum_{k \in I} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} (-1)^{\sigma(k)} dz_{I \setminus \{k\}} \wedge d\bar{z}_J + O(\|z\|).$$

En utilisant la notation du produit intérieur (cf. la démonstration de la proposition 1.3.9), on a $(-1)^{\sigma(k)} dz_K = \iota_{\partial_{z_k}} dz_I$, de sorte que la formule précédente s'écrit

$$(3.2.5) \quad d'^* (u_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J) = - \sum_{k \in I} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} \cdot \iota_{\partial_{z_k}} (dz_I \wedge d\bar{z}_J) + O(\|z\|).$$

Identités de commutation en géométrie kählérienne

Théorème 3.2.6. *Soit (X, ω) une variété kählérienne. On a les relations*

$$\begin{aligned} [L, d'] &= 0, & [L, d''] &= 0, & [\Lambda, d'^*] &= 0, & [\Lambda, d''^*] &= 0, \\ [L, d'^*] &= id'', & [L, d''^*] &= -id', & [\Lambda, d'] &= id''^*, & [\Lambda, d''] &= d'^*. \end{aligned}$$

On remarquera que ces énoncés sont de nature locale.

Démonstration. Sur chaque ligne, il suffit de montrer les deux premières identités, les secondes en étant les adjointes.

La condition de Kähler $d\omega = 0$ se décompose en $d'\omega = 0$ et $d''\omega = 0$ puisque ω est de type $(1, 1)$. Ces relations sont équivalentes à celles de la première ligne.

Montrons $[L, d'^*] = id''$, l'autre relation $[L, d''^*] = -id'$ s'obtenant de la même manière (c'est aussi la conjuguée de la précédente). Nous utiliserons le calcul de d'^* ci-dessus. Soit η une (p, q) -forme sur X et $x_0 \in X$. Soit χ une fonction C^∞ à support compact sur X , avec $\chi \equiv 1$ près de x_0 . Nous allons montrer que

$$(3.2.7) \quad ([L, d'^*] \eta)(x_0) = i(d'' \eta)(x_0).$$

Pour cela, on peut remplacer η par $\chi\eta$, et donc supposer que η est à support compact dans un petit voisinage de x_0 . Nous pouvons alors appliquer la formule (3.2.5). Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} [L, d'^*]\eta &= - \sum_{I,J} \sum_{k \in I} \frac{\partial \eta_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} \cdot [\omega \wedge \iota_{\partial_{z_k}}(dz_I \wedge d\bar{z}_J) - \iota_{\partial_{z_k}}(\omega \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J)] + O(\|z\|) \\ &= \sum_{I,J} \sum_{k \in I} \frac{\partial \eta_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} \cdot i(d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J) + O(\|z\|) \\ &= id''\eta + O(\|z\|), \end{aligned}$$

la seconde égalité provenant de $\iota_{\partial_{z_k}}(\omega) = id\bar{z}_k + O(\|z\|^2)$. En évaluant en $z = 0$, on obtient la relation (3.2.7). \square

On déduit de ce théorème les identités

$$(3.2.8) \quad d'd''^* + d''^*d' = 0, \quad d''d'^* + d'^*d'' = 0.$$

En effet, en utilisant les relations montrées, on a

$$\begin{aligned} d'd''^* + d''^*d' &= -i(d'[\Lambda, d'] + [\Lambda, d']d') \\ &= 0 \quad \text{car } d'^2 = 0. \end{aligned}$$

Démonstration de la formule (3.2.4). L'identité (3.2.8) implique d'abord que

$$\Delta = (d' + d'')(d' + d'')^* + (d' + d'')^*(d' + d'') = \Delta' + \Delta''.$$

Par ailleurs, on a de manière analogue

$$\begin{aligned} d'd''^* + d'^*d' &= i(d'[\Lambda, d''] + [\Lambda, d'']d') \\ &= i([\Lambda, d'']d' + d'[\Lambda, d'']) \quad \text{car } d'd'' = -d''d', \\ &= d''^*d'' + d''d''^*, \end{aligned}$$

donc $\Delta' = \Delta''$. \square

Corollaire 3.2.9. *Si (X, ω) est kählérienne, le laplacien Δ commute avec tous les opérateurs \star , d' , d'' , d'^* , d''^* , L et Λ .*

Démonstration. Laissée en exercice. \square

Remarque 3.2.10 (une autre démonstration des identités de commutation)

Il s'agit de montrer les identités de la deuxième ligne du théorème 3.2.6, celles de la première résultant directement de $d\omega = 0$. On indique ici comment obtenir la relation $[\Lambda, d'] = id''^* = -i\star d'\star$, en utilisant de manière systématique la décomposition de Lefschetz (cf. théorème 2.3.1(4)). On n'utilisera pas l'existence des coordonnées locales données par le théorème 3.2.3.

Soit d'abord η une $(n-r)$ -forme C^∞ sur X qui est primitive, i.e. telle que $L^{r+1}\eta = 0$. Puisque L et d' commutent, on a aussi $L^{r+1}d'\eta = 0$, ce qui implique que la décomposition de Lefschetz de la $(n-r+1)$ -forme $d'\eta$ se réduit à deux termes : $d'\eta = \eta_0 + L\eta_1$, avec η_0 primitive de degré $n-r+1$ (donc $L^r\eta_0 = 0$) et η_1 primitive de degré $n-r-1$ (donc $L^{r+2}\eta_1 = 0$). On a ainsi, puisque $\Lambda\eta = 0$, $\Lambda\eta_0 = 0$ et $\Lambda\eta_1 = 0$,

$$(3.2.11) \quad [\Lambda, d']\eta = \Lambda d'\eta = \Lambda L\eta_1 = (r+1)\eta_1.$$

Par ailleurs, en appliquant la formule du lemme 2.3.10, les relations de commutation du § 2.2.b, la commutation $[L, d'] = 0$ et la relation (facile) $Cd' = id'C$, on obtient

$$\begin{aligned}
id''^* &= -i \star d' \star \eta = -i \frac{\varepsilon(n-r)}{r!} \star d' L^r C^{-1} \eta \\
&= \frac{\varepsilon(n-r)}{r!} \star L^r C^{-1} d' \eta \\
&= \frac{\varepsilon(n-r)}{r!} \star C^{-1} L^r (\eta_0 + L\eta_1) \\
&= \frac{\varepsilon(n-r)}{r!} \star C^{-1} L^{r+1} \eta_1 \\
&= \frac{\varepsilon(n-r)}{r!} C^{-1} \Lambda^{r+1} \star \eta_1 \\
&= \frac{\varepsilon(n-r)}{r!} \cdot \frac{\varepsilon(n-r-1)}{(r+1)!} C^{-2} \Lambda^{r+1} L^{r+1} \eta_1 \\
&= \frac{1}{r!(r+1)!} \Lambda^{r+1} L^{r+1} \eta_1 \quad \text{car } C^2 \theta = (-1)^{\deg \theta} \\
&= \frac{1}{r!(r+1)!} \cdot ((r+1)!)^2 \eta_1 \quad \text{cf. (2.3.2)} \\
&= [\Lambda, d'] \eta \quad \text{d'après (3.2.11)}.
\end{aligned}$$

Le cas général s'obtient en appliquant l'argument ci-dessus aux formes $L^k \eta$, avec η primitive, puis en utilisant la décomposition de Lefschetz. \square

3.2.b. Le théorème de Hodge en géométrie kählérienne

Théorème 3.2.12 (décomposition de Hodge). *Si X est kählérienne compacte, on a une décomposition canonique*

$$H_{\text{DR}}^r(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H_{d''}^{p,q}(X)$$

pour laquelle on a $H_{d''}^{q,p}(X) = \overline{H_{d''}^{p,q}(X)}$.

Le mot « canonique » signifie, de manière précise, que les homomorphismes (3.1.15) et (3.1.16) sont des *isomorphismes*. Ceci signifie que la décomposition ainsi obtenue ne dépend pas du choix de la métrique hermitienne, bien qu'il faille faire un choix pour montrer l'existence de la décomposition.

Si $\varphi : X \rightarrow X'$ est un difféomorphisme C^∞ entre deux variétés complexes compactes kählériennes, c'est-à-dire un difféomorphisme entre les deux variétés C^∞ sous-jacentes, alors φ induit un isomorphisme $\varphi^* : H_{\text{DR}}^r(X', \mathbb{C}) \rightarrow H_{\text{DR}}^r(X, \mathbb{C})$ pour tout r (en fait on peut montrer qu'il en est de même pour tout *homéomorphisme* en identifiant la cohomologie de de Rham à la cohomologie singulière à coefficients complexes). Sans autre condition sur φ , on ne peut pas assurer que φ^* préserve la décomposition : on dit que celle-ci n'est pas « topologique ». Néanmoins, si φ est holomorphe, c'est-à-dire préserve la structure complexe, alors φ^* préserve le type (p, q) des formes, donc aussi la décomposition : celle-ci est un invariant du type analytique.

Les *nombre de Betti* sont les entiers $b^r(X) = \dim_{\mathbb{C}} H_{\text{DR}}^r(X, \mathbb{C})$ et les *nombre de Hodge* sont les entiers $h^{p,q}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H_{d''}^{p,q}(X)$. Ainsi, deux variétés complexes difféomorphes (ou homéomorphes) ont les mêmes nombres de Betti, tandis que, si elles sont analytiquement difféomorphes, elles ont aussi les mêmes nombres de Hodge. Pour une variété compacte, tous ces nombres sont finis et, si de plus elle est kählérienne, ces nombres satisfont

$$b^r(X) = \sum_{p+q=r} h^{p,q}(X).$$

Nous verrons à la remarque 3.2.18, que l'hypothèse kählérienne implique des inégalités entre les nombres de Betti ou entre les nombres de Hodge. Ces inégalités sont un premier critère pour détecter si une variété complexe compacte peut être munie d'une métrique kählérienne.

Démonstration du théorème de décomposition de Hodge 3.2.12. L'identité (3.2.4) permet de voir que l'opérateur $\Delta : A^r(X) \rightarrow A^r(X)$ préserve la décomposition en $A^{p,q}$, puisqu'il en est de même de Δ' ou Δ'' . Par conséquent, les composantes (p, q) d'une r -forme Δ -harmonique sont aussi Δ -harmoniques et on a

$$(3.2.13) \quad \mathcal{H}^r(X) = \bigoplus_{p+q=r} \mathcal{H}^{p,q}(X)$$

où les trois significations possibles du terme de droite coïncident : composante (p, q) d'un élément de $\mathcal{H}^r(X)$, $\mathcal{H}_{\Delta'}^{p,q}(X)$, $\mathcal{H}_{\Delta''}^{p,q}(X)$. On en déduit :

Lemme 3.2.14. *Soit η une forme d -fermée de type (p, q) . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) η est d -exacte ;
- (2) η est d' -exacte ;
- (3) η est d'' -exacte ;
- (4) η est $d'd''$ -exacte ;
- (5) η est orthogonale à $\mathcal{H}^{p,q}(X)$.

Démonstration. Puisque $d'd'' = dd'' = -d''d'$, on a (4) \Rightarrow (1), (2), (3). Puisque η est de type (p, q) et d -fermée, elle est aussi d' et d'' -fermée. Par suite, l'une des hypothèse (1), (2), ou (3) implique l'orthogonalité à $\mathcal{H}^{p,q}(X)$, c'est-à-dire (5), par orthogonalité dans la décomposition du théorème de Hodge pour la cohomologie de de Rham (cf. § 0.2) et de celui pour la cohomologie de Dolbeault 3.1.12.

Montrons donc (5) \Rightarrow (4). L'hypothèse implique que η est d'' -exacte, i.e. $\eta = d''\theta$ avec θ de type $(p, q-1)$. En utilisant le théorème 3.1.12 pour d' , on peut écrire $\theta = u + d'v + d'^*w$, avec u harmonique de type $(p, q-1)$ (donc $d''u = 0$), v de type $(p-1, q-1)$ et w de type $(p+1, q-1)$. On a donc

$$\eta = d''d'v + d''d'^*w = -d'd''v - d'^*d''w.$$

d'après la relation (3.2.8), et la décomposition ci-dessus est la décomposition de η suivant la décomposition du théorème 3.1.12 pour d' . Mais puisque $d'\eta = 0$, η n'a pas de facteur sur $\text{Im } d'^*$ et donc $\eta \in \text{Im } d'd''$. \square

Montrons que (3.1.15) est un isomorphisme. Par le théorème 3.1.12, l'application composée

$$\mathcal{H}^{p,q}(X) \xrightarrow{\quad} H_{\text{BC}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{(3.1.15)} H_{d''}^{p,q}(X)$$

\sim

est un isomorphisme, d'où la surjectivité de (3.1.15). Par ailleurs, si $\eta \in A^{p,q}(X) \cap \text{Ker } d$ a pour image 0 dans $H_{d''}^{p,q}(X)$, c'est que $\eta \in \text{Im } d''$ et, d'après 3.2.14(4), $\eta \in \text{Im } d'd''$, donc la classe de η dans $H_{\text{BC}}^{p,q}(X, \mathbb{C})$ est nulle, d'où l'injectivité.

Maintenant, le fait que (3.1.16) soit un isomorphisme n'est autre que (3.2.13). \square

Remarque 3.2.15 (principe des deux types, cf. [3, cor.5.4]). On peut reformuler le lemme 3.2.14, sans hypothèse de pureté du type (p, q) , sous la forme suivante :

$$\text{Ker } d' \cap \text{Ker } d'' \cap (\text{Im } d' + \text{Im } d'') = \text{Im}(d'd'').$$

L'inclusion \supset est immédiate. Montrons l'autre inclusion. Soit donc $\eta = d'\alpha + d''\beta$ avec $d'\eta = 0$ et $d''\eta = 0$, c'est-à-dire $d''d'\alpha = 0$ et $d'd''\beta = 0$. On peut écrire $\beta = u + d'v + d'^*w$ suivant la décomposition de Hodge ; en raisonnant comme dans le lemme, on a $d''\beta = -d'd''v - d'^*d''w$ et, puisque $d''\beta$ est d' -fermée, on a $d''\beta \in \text{Im } d'd''$. On raisonne de même pour $d'\alpha$.

On remarquera aussi que cette identité implique que l'application naturelle

$$\frac{\text{Ker } d' \cap \text{Ker } d''}{\text{Im } d'd''} \longrightarrow \frac{\text{Ker } d'd''}{\text{Im } d' + \text{Im } d''}$$

est bijective. En effet, l'injectivité résulte de ce qui précède. Soit alors $\eta \in \text{Ker } d'd''$. On a par suite $d'\eta \in \text{Ker } d' \cap \text{Ker } d'' \cap (\text{Im } d' + \text{Im } d'')$, d'où $d'\eta = d'd''v$ d'après ce qui précède, et de manière analogue, $d''\eta = d''d'w$. Posons $\theta = \eta - d''v - d'w$. On a $\theta \equiv \eta \pmod{\text{Im } d' + \text{Im } d''}$ et $d'\theta = d''\theta = 0$. \square

Exercice 3.2.16. Soit X une variété kählérienne compacte. Montrer que toute p -forme holomorphe η sur X est fermée. Autrement dit, si une forme η de type $(p, 0)$ satisfait $d''\eta = 0$, elle satisfait aussi $d'\eta = 0$.

Remarque. Lorsque $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ce théorème apporte peu d'information, puisque dans ce cas on a $H^{2p}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = H^{p,p}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \mathbb{C} \cdot \omega^p$ pour tout $p = 0, \dots, n$, où ω est la forme de Fubini-Study (cf. [2, Exemple 1.13.3]). Le théorème de Hodge est plus intéressant pour les sous-variétés complexes fermées de l'espace projectif.

3.2.c. Le théorème de Lefschetz difficile. Puisque $2\Delta = \Delta' = \Delta''$ et L commutent (cf. corollaire 3.2.9), l'opérateur L laisse invariant les formes harmoniques. On en déduit que les composantes de Lefschetz d'une forme harmonique sont encore harmoniques. Par suite, l'opérateur L induit sur l'espace (gradué) $\mathcal{H}(X) = \bigoplus_r \mathcal{H}^r(X)$ des formes harmoniques une structure de Lefschetz. Cette structure est compatible à la bigraduation (3.2.13), donnant ainsi naissance à une structure de Hodge-Lefschetz (cf. définition 2.3.13).

Notons Q la forme \mathbb{C} -bilinéaire sur l'espace $\mathcal{H}^r(X)$ définie par

$$Q(\eta, \eta') = \int_X \varepsilon(n-r) \cdot \eta \wedge \eta' \wedge \omega^r,$$

autrement dit la version « intégrée » de la forme introduite en (2.3.8). Alors la proposition 2.3.9 montre que la forme sesquilinéaire $Q(C\bullet, \bar{\bullet})$ est hermitienne sur $\mathcal{H}(X)$ et définie positive sur la partie primitive $\mathcal{P}(X) = \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{P}^{n-r}$. En conclusion,

Théorème 3.2.17 (de Hodge-Lefschetz). *L'espace $\mathcal{H}(X)$ des formes harmoniques sur une variété kählérienne compacte (X, ω) , muni de l'opérateur de Lefschetz L et de la forme bilinéaire Q , est une structure de Hodge-Lefschetz de poids $n = \dim X$, polarisée par la forme Q .* \square

Remarque 3.2.18 (inégalités entre nombres de Betti ou nombres de Hodge)

Il résulte de l'exercice 2.3.15 (c'est-à-dire de la décomposition de Lefschetz), que les nombres de Betti (*resp.* de Hodge) d'une variété kählérienne satisfont une série d'inégalités remarquables.

De même que la décomposition de Hodge de la cohomologie de de Rham est « plus intrinsèque » que la décomposition des formes harmoniques suivant le type (p, q) , de même il existe une version plus intrinsèque du théorème de Hodge-Lefschetz sur les formes harmoniques.

Remarquons d'abord que, si ω est une 2-forme d -fermée sur X , l'opérateur $\omega \wedge : A^r(X, \mathbb{C}) \rightarrow A^{r+2}(X, \mathbb{C})$ envoie $Z^r(X, \mathbb{C})$ dans $Z^{r+2}(X, \mathbb{C})$ et $B^r(X, \mathbb{C})$ dans $B^{r+2}(X, \mathbb{C})$: si $d\eta = 0$, on a $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + \omega \wedge d\eta = 0$; de même, $\omega \wedge d\eta = d(\omega \wedge \eta)$.

Ainsi, ω définit un homomorphisme $L_\omega : H_{\text{DR}}^r(X, \mathbb{C}) \rightarrow H_{\text{DR}}^{r+2}(X, \mathbb{C})$. Je dis que L_ω ne dépend que de la classe de ω dans $H_{\text{DR}}^2(X, \mathbb{C})$: en effet, si θ est une 1-forme, on a, pour η dans $Z^r(X, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} (\omega + d\theta) \wedge \eta &= \omega \wedge \eta + d\theta \wedge \eta \\ &= \omega \wedge \eta + d(\theta \wedge \eta) \quad \text{car } d\eta = 0. \end{aligned}$$

La classe $c_\omega \in H_{\text{DR}}^2(X, \mathbb{C})$ d'une forme de Kähler ω est dans le sous-espace $H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ (bien défini par le théorème de décomposition de Hodge 3.2.12).

En général, on dit que $c \in H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ est une *classe de Kähler* si c admet un représentant ω qui est une forme de Kähler.

Exemple 3.2.19 (important). Soit X une sous-variété complexe fermée (donc compacte) de l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Soit $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites canonique sur \mathbb{P}^N , et soit $\mathcal{O}_X(1)$ la restriction de ce fibré à X : c'est un fibré en droites holomorphes sur X . Il admet donc une classe de Chern $c \in H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ (*cf.* [5]). Alors c est une classe de Kähler.

On peut appliquer le théorème de décomposition de Hodge et le théorème de Hodge-Lefschetz pour obtenir :

Théorème 3.2.20 (de Lefschetz difficile pour la cohomologie de de Rham)

Soit X une variété complexe compacte et soit c une classe de Kähler. Alors pour tout $r \geq 1$ et tous $p, q \geq 0$ avec $p + q = n - r$, l'endomorphisme L_c induit des isomorphismes

$$\begin{aligned} L_c^r : H_{\text{DR}}^{n-r}(X, \mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} H_{\text{DR}}^{n+r}(X, \mathbb{C}) \\ L_c^r : H^{p,q}(X, \mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} H^{p+r, q+r}(X, \mathbb{C}). \end{aligned} \quad \square$$

Remarque 3.2.21 (interprétation topologique). Au chapitre 4, on interprétera l'opérateur L_c de l'exemple 3.2.19 comme l'opérateur d'intersection avec un hyperplan général de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, agissant sur les cycles de X de dimension $n + r$. On trouvera alors le théorème de Lefschetz original mentionné dans l'introduction.

3.2.d. Les théorèmes de Hodge et de Lefschetz pour les fibrés hermitiens plats. Il est possible d'étendre les résultats précédents à la cohomologie de de Rham d'un fibré hermitien plat. Soit (H, h_H) est un fibré hermitien C^∞ sur la variété kählérienne (X, ω) . Supposons que la métrique hermitienne h_H soit *plate*, *i.e.* supposons qu'il existe une connexion métrique D sur H telle que $D^2 = 0$ (*cf.* remarque 3.1.20(2)). Soit (V, ∇) le fibré holomorphe plat associé. On note $H_{\text{DR}}(X, V) = H_{\text{DR}}(X, H)$. Le théorème de décomposition de Hodge 3.2.12 admet la généralisation suivante :

Théorème 3.2.22 (décomposition de Hodge pour les fibrés hermitiens plats)

Dans ces conditions, on a une décomposition canonique

$$H_{\text{DR}}^r(X, V) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(X, V)$$

et l'espace $H^{p,q}(X, V)$ s'identifie à $\overline{H^{p,q}(X, V^*)}$, où V^* désigne le fibré dual de V (muni de la métrique et de la connexion déduites de celles sur V).

Démonstration. On commence par montrer que les relations du théorème 3.2.6 sont satisfaites lorsqu'on y remplace d', d'' par D', D'' . Il suffit d'adapter la démonstration de ce théorème. L'important est que D est une connexion métrique, de sorte que son adjoint D^* est donné par $-\star D\star$. On peut par exemple recopier la démonstration de la remarque 3.2.10. De plus, en utilisant aussi les relations de platitude

$$D'^2 = 0, \quad D''^2 = 0, \quad D'D'' + D''D' = 0,$$

on montre alors l'analogie des relations (3.2.8). On en déduit ainsi l'égalité des laplaciens $\Delta_D = 2\Delta_{D'} = 2\Delta_{D''}$ et le reste de la démonstration suit.

On déduit de l'analogie du théorème 3.2.6 que Δ_D commute à L_ω . Par suite, l'opérateur de Lefschetz préserve les sections harmoniques et on obtient de même, à partir de l'énoncé sur les sections harmoniques :

Théorème 3.2.23 (de Lefschetz difficile pour les fibrés hermitiens plats)

Dans ces conditions, soit c une classe de Kähler. Alors pour tout $r \geq 1$ et tous $p, q \geq 0$ avec $p + q = n - r$, l'endomorphisme L_c induit des isomorphismes

$$L_c^r : H_{\text{DR}}^{n-r}(X, V) \xrightarrow{\sim} H_{\text{DR}}^{n+r}(X, V)$$

$$L_c^r : H^{p,q}(X, V) \xrightarrow{\sim} H^{p+r, q+r}(X, V). \quad \square$$

3.3. Exemples et applications

3.3.a. Surfaces de Riemann compactes.

3.3.b. Surfaces algébriques complexes.

3.3.c. Tores complexes. Soit T un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n et soit Γ un *réseau* dans T : par définition, Γ est le sous-groupe additif engendré par une \mathbb{R} -base de T . Le choix d'une telle base donne un \mathbb{R} -isomorphisme $\mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{\sim} T$ qui envoie \mathbb{Z}^{2n} sur Γ .

Le groupe Γ agit par translations sur T . Cette action est propre et libre, de sorte que l'application quotient $\pi : T \rightarrow T/\Gamma$ est une application de revêtement, de groupe Γ (*cf.* par exemple [4, §VII.3]). Il en résulte qu'il existe une unique structure de variété analytique complexe sur $X \stackrel{\text{déf}}{=} T/\Gamma$ qui fait de π une application holomorphe. On dit que X est un *tore*

complexe. En tant que variété différentiable, X est difféomorphe au quotient $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$, c'est-à-dire au tore $(S^1)^{2n}$ de dimension $2n$. De plus, T agit sur X par translations et, dans cette action, celle de Γ est triviale.

Par définition de la structure de variété différentielle sur X (l'unique structure différentielle qui fait de π un difféomorphisme local), l'espace des fonctions C^∞ sur X s'identifie à l'espace des fonctions C^∞ sur T qui sont Γ -périodiques. Plus précisément, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\infty(X) &\xrightarrow{\pi^*} \mathcal{E}^\infty(T) \\ f &\longmapsto f \circ \pi \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{E}^\infty(X)$ sur $\mathcal{E}_{\Gamma\text{-pér}}^\infty(T)$. Dans la suite, on ne fera pas la distinction entre ces deux espaces. En particulier, T agit sur $\mathcal{E}^\infty(X)$ par translation : pour $v \in T$, $f \mapsto \tau_v(f)$ définie par $\tau_v(f)(x) = f(x+v)$.

Analysons maintenant les champs de vecteurs et les formes différentielles sur X . Rappelons que l'espace des champs de vecteurs C^∞ sur X (i.e. des sections C^∞ du fibré tangent TX) n'est autre que l'espace des dérivations de l'anneau $\mathcal{E}^\infty(X, \mathbb{R})$, c'est-à-dire des applications \mathbb{R} -linéaires $\xi : \mathcal{E}^\infty(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}^\infty(X, \mathbb{R})$ qui satisfont la règle de Leibniz :

$$\xi(f \cdot g) = \xi(f) \cdot g + f \cdot \xi(g).$$

Lemme 3.3.1. *L'espace des champs de vecteurs sur X s'identifie à l'espace des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathcal{E}^\infty(X, \mathbb{R})$ des éléments de T , espace encore noté $\mathcal{E}^\infty(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} T$.*

Démonstration. Tout élément v de T définit une dérivation de $\mathcal{E}^\infty(X, \mathbb{R}) = \mathcal{E}_{\Gamma\text{-pér}}^\infty(T)$ par la formule

$$\forall x \in X, \quad v(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon}.$$

On en déduit une application, linéaire dans les fibres, du fibré trivial $X \times T$ dans le fibré tangent TX qui en est une trivialisatation.

On déduit du lemme que l'espace des 1-formes différentielles réelles $A^1(X, \mathbb{R})$ s'identifie à l'espace $\mathcal{E}^\infty(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} F_0$, où, suivant les notations du §2.1.a, $F_0 = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T, \mathbb{R})$ est le dual de T comme \mathbb{R} -espace vectoriel. Il en résulte que $A^1(X, \mathbb{C}) = \mathcal{E}^\infty(X, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} F$ et, plus généralement, $A^k(X, \mathbb{C}) = \mathcal{E}^\infty(X, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^k F$, $A^{b,q}(X, \mathbb{C}) = \mathcal{E}^\infty(X, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^{b,q} F$. En particulier, l'espace $\wedge^k F$ s'identifie à un sous-espace de $A^k(X, \mathbb{C})$: c'est l'espace des k -formes différentielles constantes.

Voyons ce que devient la différentielle d dans cette identification. Si f est une fonction C^∞ sur X , df est l'élément de $\mathcal{E}^\infty(X, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} F$ caractérisé par le fait que, pour tout $v \in T$, $df(v) = v(f)$. Plus généralement, si $\eta \in \wedge^k F$, on a $d(1 \otimes \eta) = 0$, et $d(f \otimes \eta) \in \mathcal{E}^\infty(X, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^{k+1} F$ est caractérisé par le fait que, pour tout $v \in T$, $\iota_v d(f \otimes \eta) = v(f)\eta$.

Écrivons tout ceci en coordonnées. À cette fin, fixons une \mathbb{C} -base e_1, \dots, e_n de T . On appelle $z_j : T \rightarrow \mathbb{C}$ la projection sur la j -ème coordonnée. On note (avec un peu d'abus⁽¹⁾) dz_1, \dots, dz_n la \mathbb{C} -base duale de e_1, \dots, e_n dans $T' = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(T, \mathbb{C}) \subset F$, vue comme base de formes différentielles C^∞ de type $(1, 0)$, et $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$ la \mathbb{C} -base conjuguée de $T'' = \overline{T'}$. Dans ces conditions, le calcul différentiel sur X n'est autre que le calcul différentiel sur T à coefficients Γ -périodiques.

⁽¹⁾ car, vues comme formes sur X , les dz_j ne sont pas exactes, puisque les fonctions z_j ne sont pas des fonctions sur X , n'étant pas Γ -périodiques ; néanmoins, les dz_j sont localement exactes.

Proposition 3.3.2. *Un tore complexe $X = T/\Gamma$ est une variété kählérienne.*

Démonstration. De fait, pour toute \mathbb{C} -base e de T , de coordonnées associées z_1, \dots, z_n , la 2-forme constante $\omega_e = i \sum_j dz_j \wedge \bar{d}z_j$ est une forme de Kähler. Si h est la forme hermitienne sur T pour laquelle e est une base orthonormée, alors h définit une métrique hermitienne (constante) sur X , dont la 2-forme associée n'est autre que ω_e . \square

Remarque. Soit U un ouvert de X sur lequel le revêtement π est trivialisé. Choisissons une composante connexe V de $\pi^{-1}(U)$, de sorte que $\pi : V \rightarrow U$ est une application bijective bi-holomorphe. Sur U , la forme dz_j est la différentielle de la fonction $z_j \circ \pi^{-1}$. Les coordonnées $z_j \circ \pi^{-1}$ satisfont les propriétés du théorème 3.2.3 pour la forme ω_e . De plus, la perturbation en $O(\|z\|^2)$ est ici identiquement nulle : la variété X est plate.

Proposition 3.3.3. *Soit (T, h) un \mathbb{C} -espace vectoriel hermitien de dimension n et soit Γ un réseau de T . L'espace $\mathcal{H}^{p,q}(X)$ des (p, q) -formes sur X harmoniques relativement à la métrique induite par h est l'espace $\wedge^{p,q}F$ des (p, q) -formes constantes.*

On déduit de cette proposition, à l'aide du théorème de Hodge, que la cohomologie de de Rham $H_{\text{DR}}^k(X, \mathbb{C})$ s'identifie à $\wedge^k F$, ce qu'on peut obtenir par des méthodes plus élémentaires (voir par exemple [1, Prop. III.4.3]). On peut maintenant interpréter le chapitre 2 de ces notes comme la théorie harmonique de ce chapitre-ci appliquée aux tores complexes.

Démonstration. Nous allons profiter du calcul de d^* fait au §3.2.a. Soit (χ_α) une partition finie de l'unité de X adaptée à un recouvrement par des ouverts trivialisants pour π . Soit $u = u_{I,J} dz_I \wedge \bar{d}z_J$ une (p, q) -forme, avec $u_{I,J} \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$. Puisque chaque $\chi_\alpha u$ est à support compact dans une carte, on peut appliquer le calcul du §3.2.a à $\chi_\alpha u$ (ici sans terme perturbatif en $O(\|z\|)$). En sommant sur tous les α , on trouve pour d^* une formule analogue à (3.2.5), sans terme perturbatif. On raisonne de manière similaire pour d'^* . On déduit de ces formules que toute forme constante est fermée et co-fermée, c'est-à-dire harmonique.

D'autre part, remarquons que si $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ et $v \in T$, la fonction $\tau_v(f) - f$ peut s'écrire sous la forme $v(g)$ pour une certaine fonction C^∞ g , à savoir $g(x) = \int_0^1 f(x + tv) dt$. De manière analogue, pour toute forme $\eta \in A^{k+1}(X, \mathbb{C})$ et tout $v \in T$, on a $\tau_v(\eta) \equiv \eta \pmod{dA^k(X, \mathbb{C})}$. Pour le voir, on utilise la formule de Cartan pour la dérivée de Lie le long du champ de vecteurs constant v :

$$\mathcal{L}_v(\eta)(x + \lambda v) = \frac{\partial}{\partial t}(\eta(x + (\lambda + t)v))|_{t=0} = (d\iota_v + \iota_v d)\eta(x + \lambda v).$$

On peut écrire ceci sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta(x + tv)) = (d\iota_v + \iota_v d)\eta(x + tv).$$

Si η est fermée, le terme de droite se réduit à $d\iota_v \eta(x + tv)$. On pose donc

$$\psi(x) = \int_0^1 \iota_v \eta(x + tv) dt,$$

qui satisfait $d\psi(x) = \eta(x + v) - \eta(x)$.

Soit alors η une k -forme harmonique. Si $k = 0$, i.e. si η est une fonction, il est clair que $d\eta = 0$ implique que η est constante. Supposons donc que $k \geq 1$. Pour tout $v \in T$, $\tau_v \eta$ est harmonique (comme il résulte du calcul de d^* indiqué ci-dessus) et cohomologue à η . Une classe de cohomologie de de Rham ayant au plus un représentant harmonique, on en déduit

que $\tau_v \eta = \eta$ pour tout $v \in T$, *i.e.* les coefficients de η sur la base des $dz_I \wedge d\bar{z}_J$ sont invariants sous les translations par tous les vecteurs de T : ils sont donc constants. \square

3.3.d. Le théorème de Lefschetz « faible » pour les coefficients rationnels.

3.3.e. Le théorème de Lefschetz pour les classes de type $(1, 1)$.

Références

- [1] O. DEBARRE – *Tores et variétés abéliennes complexes*, Cours Spécialisés, vol. 6, Société Mathématique de France & EDP Sciences, Paris, 1999.
- [2] ———, « Variétés complexes », Notes de cours, Strasbourg, octobre 2000.
- [3] P. DELIGNE – « Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **35** (1968), p. 107–126.
- [4] C. GODBILLON – *Éléments de topologie algébrique*, collection Méthodes, Hermann, Paris, 1971.
- [5] M. PAUN – Notes de cours, Strasbourg, octobre 2000.

CHAPITRE 4

LE THÉORÈME DE LEFSCHETZ « DIFFICILE »

Soit X une variété projective lisse de dimension complexe n dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P} = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Si $n = 1$, X est une surface de Riemann compacte, dont la topologie est caractérisée par le *genre*. À l'époque où Lefschetz publie son mémoire fondamental [3], les propriétés topologiques et analytiques de celles-ci sont bien comprises. Dès la dimension $n = 2$, la topologie et les propriétés analytiques deviennent plus difficiles à exprimer.

La « méthode de Lefschetz » pour décrire l'homologie ou (ce qui revient au même par dualité de Poincaré) la cohomologie de X , consiste à la comparer à celle d'une section hyperplane générale, et procéder par récurrence.

Dans la suite de ce chapitre, l'homologie et la cohomologie seront à coefficients dans \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ou \mathbb{C} suivant les cas. On pourrait dès le début travailler à coefficients dans \mathbb{Q} .

Je m'inspire beaucoup, dans ce chapitre, de l'article [2]

4.1. Cohomologie des variétés algébriques projectives lisses

4.1.a. La dualité de Kronecker et la dualité de Poincaré. Soit X une variété C^∞ compacte connexe orientée de dimension réelle $2n$ et soit $[X]$ sa classe d'orientation, générateur du \mathbb{Z} -module libre $H_{2n}(X, \mathbb{Z})$. On considère l'homologie et la cohomologie singulières de la variété X à coefficients dans un anneau *principal* \mathbb{K} , qui sera égal à \mathbb{Z} ou sera l'un des corps $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ dans ce qui suit. La cohomologie singulière à coefficients dans \mathbb{K} est aussi la cohomologie du faisceau constant \mathbb{K}_X (cf. [1]). On rappelle que les groupes d'homologie ou cohomologie entière d'une variété C^∞ compacte sont de type fini sur \mathbb{Z} .

Le *théorème des coefficients universels* affirme par exemple que $H_k(X, \mathbb{C}) = H_k(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ et de même $H^k(X, \mathbb{C}) = H^k(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ pour tout $k \geq 0$.

Enfin, la cohomologie singulière $H^k(X, \mathbb{C})$ s'identifie à la cohomologie de de Rham $H_{\text{DR}}^k(X, \mathbb{C})$.

La *dualité de Kronecker* identifie $H^k(X, \mathbb{K})$ à $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(H_k(X, \mathbb{K}), \mathbb{K})$ sous l'hypothèse que $H_{k-1}(X, \mathbb{K})$ est libre sur \mathbb{K} . Si \mathbb{K} est un corps, l'hypothèse est satisfaite, de sorte que $H^k(X, \mathbb{K})$ est identifié à l'espace vectoriel dual de $H_k(X, \mathbb{K})$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ et $H_{k-1}(X, \mathbb{Z})$ est \mathbb{Z} -libre, alors $H^k(X, \mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ est aussi \mathbb{Z} -libre.

Ce résultat vaut aussi pour la cohomologie et l'homologie d'une paire de variétés (homologie/cohomologie relatives).

Les résultats ci-dessus n'utilisent pas le fait que X est une variété.

La *dualité de Poincaré* (pour tout anneau de coefficients \mathbb{K}) exprime que le « cap-produit » avec la classe fondamentale $[X]$ induit pour tout k un isomorphisme

$$H^k(X, \mathbb{K}) \xrightarrow{\cdot \cap [X]} H_{2n-k}(X, \mathbb{K}).$$

Si par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ et $H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ est \mathbb{Z} -libre, la dualité de Kronecker implique que $H^n(X, \mathbb{Z})$ est \mathbb{Z} -libre, et la dualité de Poincaré que $H_n(X, \mathbb{Z})$ l'est aussi; ces deux dualités impliquent aussi la non dégénérescence de la *forme d'intersection* sur l'homologie à coefficients entiers,

$$(4.1.1) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_X : H_n(X, \mathbb{Z}) \times H_n(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

définie à l'aide du « cap-produit » : si $a = \alpha \cap [X] \in H_n(X, \mathbb{Z})$ et $b \in H_n(X, \mathbb{Z})$, on pose $\langle a, b \rangle_X = \alpha \cap b \in H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, ainsi que celle sur la cohomologie à coefficients entiers, induite par le « cup-produit »

$$H^n(X, \mathbb{Z}) \times H^n(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot \cup \cdot} H^{2n}(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot \cap [X]} H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Cette forme est $(-1)^n$ -symétrique, c'est-à-dire symétrique si n est pair et alternée sinon. On a un résultat analogue pour l'homologie ou la cohomologie à coefficients dans un corps \mathbb{K} , par exemple \mathbb{Q} ou \mathbb{C} ; dans ce cas, l'hypothèse de liberté sur $H_{n-1}(X, \mathbb{K})$ est trivialement satisfaite. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on retrouve, à une constante près, la dualité de Poincaré sur la cohomologie de de Rham, induite par l'intégration du produit extérieur de formes différentielles.

Dans la suite, on appliquera ce fait aux variétés projectives lisses de dimension complexe n : celles-ci sont en effet canoniquement orientées grâce à leur structure complexe, et elles sont de dimension réelle $2n$. Il faut noter que, dans le cas symétrique, cette forme n'est pas, en général, définie positive : par exemple, si X est la variété obtenue en éclatant un point dans \mathbb{P}^2 , le diviseur exceptionnel a pour auto-intersection -1 .

Plus généralement, la dualité de Poincaré affirme la non dégénérescence, sous une hypothèse de liberté si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ et sans autre hypothèse si \mathbb{K} est un corps, des accouplements d'intersection induits par le « cap-produit »

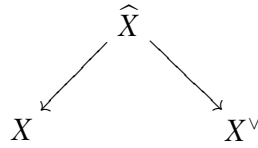
$$(4.1.2) \quad H_{n-k}(X, \mathbb{K}) \times H_{n+k}(X, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Nous supposons désormais que X est une variété projective lisse de dimension complexe n dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P} = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

Remarque. Les composantes connexes d'une variété projective sont encore projectives, de sorte que l'hypothèse de connexité ci-dessus n'est pas restrictive.

4.1.b. Le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes. La *variété duale* X^\vee de X est une sous-variété algébrique de l'*espace projectif dual* \mathbb{P}^\vee des hyperplans de \mathbb{P} . C'est l'ensemble des hyperplans tangents à X . Indiquons sa construction : on considère, dans l'espace produit $\mathbb{P} \times \mathbb{P}^\vee$, la sous-variété \widehat{X} formée des couples (x, h) tels que $x \in X$ et h est un hyperplan contenant l'espace tangent à X au point x (espace tangent vu comme sous-espace projectif dans \mathbb{P}) ; c'est une variété algébrique dans $\mathbb{P} \times \mathbb{P}^\vee$, munie de projections sur \mathbb{P} et \mathbb{P}^\vee ; cette variété est lisse et connexe de dimension $N - 1$, car la projection sur \mathbb{P} en fait une fibration

sur X , de fibre \mathbb{P}^{N-n} ; son image dans \mathbb{P}^V est par définition la variété duale X^\vee ;



ainsi, X^\vee est une variété algébrique irréductible (en général singulière) de dimension $\leq N - 1$. Sa dimension peut être $< N - 1$: c'est le cas si la variété X contient beaucoup de sous-espaces linéaires ; par exemple X^\vee est réduite à un point si et seulement si X est un hyperplan de \mathbb{P} .

Remarque 4.1.3. Il est aussi possible (et nécessaire) de définir la variété duale d'une variété algébrique éventuellement singulière. Nous supposons cette variété irréductible : si $X = \cup_j X_j$ est la décomposition de X en composantes irréductibles, nous poserons $X^\vee = \cup_j X_j^\vee$. Il suffit de modifier, dans la construction précédente, la définition de \widehat{X} : si X est singulière et irréductible, la variété \widehat{X} peut avoir plusieurs composantes irréductibles, car tout hyperplan passant par un point singulier de X est considéré comme « tangent » à X en ce point. Il y a néanmoins une seule composante irréductible de \widehat{X} qui se projette surjectivement sur X . On débarrasse donc \widehat{X} de ses composantes superflues avant de définir X^\vee .

Si H est un hyperplan assez général (*i.e.* si le point h correspondant de l'espace projectif dual \mathbb{P}^V n'est pas dans la variété duale X^\vee), alors $X_h \stackrel{\text{déf}}{=} X \cap H$ est une variété projective lisse. Puisque $\mathbb{P}^V \setminus X^\vee$ est connexe, les variétés X_h , pour $h \in \mathbb{P}^V \setminus X^\vee$, sont toutes difféomorphes.

Le *théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes* affirme que, pour $h \notin X^\vee$, l'homomorphisme $i_* : H_{n-k}(X_h, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-k}(X, \mathbb{Z})$ induit par inclusion $i : X_h \hookrightarrow X$ est

- un isomorphisme si $k \geq 2$,
- une surjection si $k = 1$.

Il revient au même de dire que, pour $k \geq 1$, le groupe d'homologie relative $H_{n-k}(X, X_h, \mathbb{Z})$ est nul. Par dualité de Kronecker pour les paires d'espaces, ceci implique la nullité des groupes $H^{n-k}(X, X_h, \mathbb{Z})$ pour $k \geq 1$, autrement dit l'homomorphisme $i^* : H^{n-k}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n-k}(X_h, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $k \geq 2$ et une injection pour $k = 1$.

On peut noter que, pour $k \geq 2$, la dualité de Poincaré sur X et X_h permet alors d'identifier $H_{n+k}(X, \mathbb{Z})$ et $H_{n-2+k}(X_h, \mathbb{Z})$. Pour $k = 1$, on obtient aussi une injection $i_! : H_{n+1}(X, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_{n-1}(X_h, \mathbb{Z})$.

Pour décrire l'homologie de X si on connaît celle de X_h , notamment pour connaître son rang, il reste donc à calculer le noyau de la surjection $i_* : H_{n-1}(X_h, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ ainsi que le groupe $H_n(X, \mathbb{Z})$. C'est au premier que nous allons nous intéresser.

Définition 4.1.4 (cycles évanescents, cycles invariants). Pour $h \notin X^\vee$, le groupe des *cycles évanescents* $V \subset H_{n-1}(X_h, \mathbb{Z})$ est le noyau de l'homomorphisme surjectif $i_* : H_{n-1}(X_h, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$. Le groupe $I \subset H_{n-1}(X_h, \mathbb{Z})$ des *cycles invariants* en est l'orthogonal relativement à la forme d'intersection \langle , \rangle_{X_h} .

La terminologie « évanescents » et « invariants » sera expliquée au § 4.3.

4.2. Le théorème de Lefschetz difficile

Celui-ci consiste à comparer les positions de V et I dans $H_{n-1}(X_h, \mathbb{Z})$. Néanmoins, il est nécessaire (cf. remarque 4.2.4) de considérer des coefficients dans le corps \mathbb{Q} . On notera $V_{\mathbb{Q}}, I_{\mathbb{Q}} \subset H_{n-1}(X_h, \mathbb{Q})$ les \mathbb{Q} -espaces vectoriels définis de manière analogue ; on a $H_{n-1}(X_h, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H_{n-1}(X_h, \mathbb{Z})$, donc $V_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V$ et $I_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} I$.

Soit $c_X \in H^2(X, \mathbb{Z})$ la classe duale de Poincaré de la classe fondamentale $i_*[X_h]$ vue dans $H_{2n-2}(X, \mathbb{Z})$. C'est la restriction à $H^2(X, \mathbb{Z})$ de la première classe de Chern $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \in H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Le « cap produit » avec c_X définit en particulier un homomorphisme

$$c_X \cap \bullet : H_{n+1}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(X, \mathbb{Z}),$$

qui n'est autre que l'intersection avec $i_*[X_h]$. En particulier, il se factorise par l'homomorphisme surjectif $i_* : H_{n-1}(X_h, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$.

Proposition 4.2.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) $V_{\mathbb{Q}} \cap I_{\mathbb{Q}} = \{0\}$,
- (2) $H_{n-1}(X_h, \mathbb{Q}) = V_{\mathbb{Q}} \oplus I_{\mathbb{Q}}$,
- (3) l'intersection avec $i_*[X_h]$ induit un isomorphisme $c_X \cap \bullet : H_{n+1}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(X, \mathbb{Q})$,
- (4) la restriction à $V_{\mathbb{Q}}$ de la forme d'intersection $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_h}$ est non dégénérée,
- (5) la restriction à $I_{\mathbb{Q}}$ de la forme d'intersection $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_h}$ est non dégénérée.

Démonstration. L'équivalence de (1) et (2) résulte de la non dégénérescence de la forme d'intersection $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_h}$. Notons aussi que l'homomorphisme de (3) n'est autre que le composé

$$H_{n+1}(X, \mathbb{Q}) \xleftarrow{i_!} H_{n-1}(X_h, \mathbb{Q}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X, \mathbb{Q}),$$

où la première flèche, duale de Poincaré de i_* , est injective et la seconde est surjective, d'après le théorème sur les sections hyperplanes. Ainsi, la propriété (3) est équivalente au fait que l'image de $i_!$ est un supplémentaire de $V_{\mathbb{Q}}$ (car $\dim H_{n+1}(X, \mathbb{Q}) = \dim H_{n-1}(X, \mathbb{Q})$). Par conséquent, l'équivalence de (2) et (3) est conséquence du

Lemme 4.2.2. *On a $I_{\mathbb{Q}} = \text{image}[i_! : H_{n+1}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{n-1}(X_h, \mathbb{Q})]$.*

Démonstration. Les deux espaces ont même dimension, aussi il suffit de montrer que $\text{Im } i_!$ est orthogonal à $\text{Ker } i_*$, ou encore que, pour $a \in H_{n+1}(X, \mathbb{Q})$ et $b \in H_{n-1}(X_h, \mathbb{Q})$, on a $\langle i_! a, b \rangle = \langle a, i_* b \rangle$, où le premier accouplement est l'intersection dans $H_{n-1}(X_h, \mathbb{Q})$ et le second est l'intersection entre $H_{n+1}(X, \mathbb{Q})$ et $H_{n-1}(X, \mathbb{Q})$. Mais, par la dualité de Kronecker, i_* est la transposée de i_* . Donc, par la forme d'intersection, $i_!$ est la transposée de i_* . \square

Montrons maintenant l'équivalence avec (4) et (5). D'une part, puisque $I_{\mathbb{Q}}$ est l'orthogonal de $V_{\mathbb{Q}}$ et puisque ces deux espaces sont en somme directe, la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_h}$ se décompose de même sur $H_{n-1}(X_h, \mathbb{Q})$. Elle est donc non dégénérée sur chaque facteur.

Réciproquement, si la restriction de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_h}$ est non dégénérée en restriction à $V_{\mathbb{Q}}$ par exemple, soit $w \in V_{\mathbb{Q}} \cap I_{\mathbb{Q}}$. Alors w est orthogonal à tout élément de $V_{\mathbb{Q}}$, donc $w = 0$, d'où (1). \square

Théorème 4.2.3 (de Lefschetz difficile pour l'homologie rationnelle)

Les propriétés équivalentes de la proposition 4.2.1 sont satisfaites pour une variété projective lisse sur \mathbb{C} .

Démonstration. On montre la propriété 4.2.1(3). Il revient au même de montrer sa version cohomologique, à savoir que le « cup produit » avec c_X induit un isomorphisme

$$c_X \cup \bullet : H^{n-1}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^{n+1}(X, \mathbb{Q}).$$

Il suffit de montrer le même énoncé avec des coefficients complexes. Rappelons que, *via* l'identification naturelle $H^k(X, \mathbb{C}) = H_{\text{DR}}(X, \mathbb{C})$ entre cohomologie de Betti et cohomologie de de Rham, l'opération $c_X \cup \bullet$ est transformée en $\omega \wedge \bullet$, où ω est la 2-forme de Kähler standard sur \mathbb{P} . On peut alors appliquer le théorème de Lefschetz difficile 3.2.20 pour la cohomologie de de Rham. \square

Remarque 4.2.4. Le théorème n'est pas vrai en prenant \mathbb{Z} pour anneau de coefficients : en effet, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, on peut remplacer la classe c_X par dc_X en changeant le plongement de X dans un espace projectif. Même si le théorème est vrai avec coefficients \mathbb{Z} pour l'opérateur $c_X \cup \bullet$, il ne peut le rester pour l'opérateur $dc_X \cup \bullet$. Pire, si X est une courbe de degré d dans \mathbb{P}^2 , l'opérateur $c_X \cup \bullet : H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \rightarrow H_2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est la multiplication par d et, si $d \geq 3$, on ne peut pas trouver de plongement projectif de X pour lequel l'opérateur de Lefschetz sur \mathbb{Z} soit un isomorphisme.

4.3. Semi-simplicité de la représentation de monodromie

4.3.a. Les pinceaux de Lefschetz. Soit $A \subset \mathbb{P}$ un sous-espace projectif de codimension 2. Le pinceau formé des hyperplans contenant A , autrement dit la variété duale de A , est une droite projective $A^\vee \subset \mathbb{P}^\vee$. Si $X \subset \mathbb{P}$ est une variété projective lisse, le sous-ensemble $\tilde{X} \subset X \times A^\vee$ formé des couples (x, h) tels que $x \in h$ est algébrique : c'est l'ensemble obtenu par éclatement de $A \cap X$ dans X .

L'application $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, induite par la première projection, est un isomorphisme de $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(X \cap A)$ sur $X \setminus A$. Pour $x \in X \cap A$, la fibre $\pi^{-1}(x)$ est une droite projective.

L'application $f : \tilde{X} \rightarrow A^\vee$, induite par la deuxième projection, a pour fibre $f^{-1}(h) = X_h$.

Proposition 4.3.1. *Si la droite A^\vee coupe la variété X^\vee en des points de la partie lisse uniquement, et transversalement, alors*

- (1) *A coupe X transversalement et les variétés algébriques $X \cap A$, \tilde{X} et $\tilde{X} \cap (A \times A^\vee)$ sont lisses ;*
- (2) *les points critiques de l'application $f : \tilde{X} \rightarrow A^\vee$ sont tous du type de Morse (i.e. la matrice hessienne de f y est non dégénérée) et les valeurs critiques sont les points de $A^\vee \cap X^\vee$; de plus, il y a un seul point critique par valeur critique ;*
- (3) *l'application $f : \tilde{X} \setminus f^{-1}(A^\vee \cap X^\vee) \rightarrow A^\vee \setminus A^\vee \cap X^\vee$ est une fibration C^∞ localement triviale. \square*

La démonstration de cette proposition (cf. [2]) repose sur le *théorème de bidualité*, qui affirme que $(X^\vee)^\vee = X$ (ici, il faut utiliser la définition suggérée à la remarque 4.1.3 pour le terme de gauche, car X^\vee est en général singulière).

Sous les hypothèses de la proposition, le nombre de points d'intersection de A^\vee et X^\vee est le *degré* de la variété X^\vee , aussi appelé *classe* $\delta(X)$ de X .

Lorsque $\dim X^\vee < N - 1$, i.e. lorsque la classe de X est nulle, une droite générale A^\vee ne rencontre pas X^\vee et l'application $f : \tilde{X} \rightarrow A^\vee$ est une fibration C^∞ .

4.3.b. La représentation de monodromie. Grâce à la propriété de fibration, la famille des espaces d'homologie $(H_k(X_h, \mathbb{Z}))_{h \in A^\vee \setminus A^\vee \cap X^\vee}$ est un faisceau localement constant \mathcal{H}_k de groupes abéliens. La donnée d'un tel faisceau est équivalente à celle d'une représentation ρ du groupe fondamental de $A^\vee \setminus A^\vee \cap X^\vee$, basé au point h_0 , dans le groupe $\text{Aut}(H_k(X_{h_0}, \mathbb{Z}))$. C'est la *représentation de monodromie attachée au pinceau de base A*.

Le groupe fondamental $\pi_1(A^\vee \setminus A^\vee \cap X^\vee, h_0)$ est un groupe engendré par δ éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_\delta$ soumis à la seule relation $\gamma_1 \cdots \gamma_\delta = 1$.

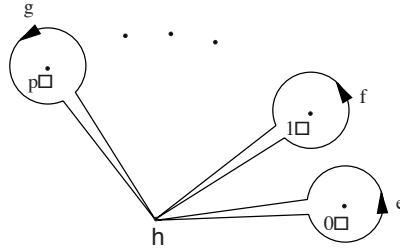


FIGURE 4.1. $A^\vee \cap X^\vee = \{h_1, \dots, h_\delta\}$

Le choix de générateurs de ce groupe permet de réduire la donnée de la représentation ρ à celle de $\delta(X) - 1$ automorphismes de $H_k(X_{h_0}, \mathbb{Z})$.

Lemme 4.3.2. *L'espace V de $H_{n-1}(X_{h_0}, \mathbb{Z})$ est stable par la représentation ρ .*

Démonstration. On a une inclusion de fibrations

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X} \setminus f^{-1}(A^\vee \cap X^\vee) & \hookrightarrow & X \times (A^\vee \setminus A^\vee \cap X^\vee) & \hookrightarrow & X \times A^\vee \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & A^\vee \setminus A^\vee \cap X^\vee & \hookrightarrow & A^\vee \end{array}$$

qui induit une inclusion du faisceau localement constant \mathcal{H}_k dans le faisceau constant de fibre $H_k(X, \mathbb{Z})$ sur $A^\vee \setminus A^\vee \cap X^\vee$. Il en résulte que l'application $i_* : H_k(X_{h_0}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X, \mathbb{Z})$ commute à l'action de la monodromie (ρ à gauche et Id à droite). En particulier, son noyau V est invariant par monodromie. \square

Remarque 4.3.3. Le théorème de Lefschetz faible nous dit aussi que, pour $k \neq n - 1$, la représentation de monodromie sur $H_k(X_{h_0}, \mathbb{Z})$ est l'identité, car égale à celle sur $H_k(X, \mathbb{Z})$ si $k \neq n$ et induite par celle sur $H_n(X, \mathbb{Z})$ sinon.

Proposition 4.3.4 (formules de Picard-Lefschetz). *Il existe une famille e_1, \dots, e_δ de générateurs de V telle que, pour chaque lacet $\gamma_1, \dots, \gamma_\delta$ de la figure 4.1, on ait, pour tout $a \in H_{n-1}(X_{h_0}, \mathbb{Z})$,*

$$T_{\gamma_j} a = a + \varepsilon(n) \langle a, e_j \rangle_{X_{h_0}} \cdot e_j.$$

Rappelons que $\varepsilon(n) = (-1)^{n(n-1)/2}$. Il faut noter que la famille (e_1, \dots, e_δ) n'induit pas, en général, une base de $V_{\mathbb{Q}}$.

Corollaire 4.3.5. *Le sous-groupe $I \subset H_{n-1}(X_{h_0}, \mathbb{Z})$, orthogonal de V , est aussi le groupe des cycles invariants par la monodromie.*

Démonstration du corollaire. En effet, on a $T_{\gamma_j} a = a$ pour tout $j = 1, \dots, \delta$ si et seulement si $\langle a, e_j \rangle_{X_{h_0}} = 0$ pour tout j . Puisque les e_j engendrent V , on en déduit l'assertion. \square

Indication de démonstration de la proposition. Pour tout $j = 1, \dots, \delta$, choisissons $h \in A^\vee \setminus A^\vee \cap X^\vee$ assez proche de h_j . Dans un voisinage de l'unique point critique de X_{h_j} (cf. proposition 4.3.1) existe sur X_h un *cycle évanescent*. On le transporte sur X_{h_0} (en utilisant un difféomorphisme $X_h \rightarrow X_{h_0}$) pour obtenir e_j .

Par construction, l'image de e_j dans $H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ est nulle car, si D_j est un disque assez petit centré en h_j , l'image de e_j dans $H_{n-1}(f^{-1}(D_j), \mathbb{Z})$ l'est.

Considérons l'application $f : \tilde{X} \rightarrow A^\vee = \mathbb{P}^1$ de la proposition 4.3.1. Soit $D \subset \mathbb{P}^1$ un disque fermé contenant toutes les valeurs critiques de f dans son intérieur et supposons que le point h_0 soit sur le bord de D . Soit $\tilde{X}_D = f^{-1}(D)$. On montre d'abord, en utilisant le fait que π est un isomorphisme hors de $X \cap A$, que $\pi_* : H_n(\tilde{X}, \pi^{-1}(X_{h_0})) \rightarrow H_n(X, X_{h_0})$ est bijective. Un calcul homologique permet alors de voir, en utilisant encore une fois le théorème de Lefschetz faible, que l'application $\pi_* : H_n(\tilde{X}_D, f^{-1}(h_0)) \rightarrow H_n(X, X_{h_0})$ est *surjective*.

On a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(\tilde{X}_D, f^{-1}(h_0)) & \longrightarrow & H_{n-1}(f^{-1}(h_0)) & \longrightarrow & H_{n-1}(\tilde{X}_D) & & \\ \downarrow \pi_* & & \parallel \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \\ H_n(X, X_{h_0}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_{h_0}) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel $H_n(\tilde{X}_D, f^{-1}(h_0))$ est libre de rang $\delta(X)$, et les e_j sont les images de la base canonique. la surjectivité de la fêche verticale gauche montre que les e_j engendrent $V = \text{Ker } i_*$.

La formule de Picard-Lefschetz pour T_{γ_j} se montre sur X_h pour h proche de h_j en faisant intervenir la *fibration de Milnor* du point critique. \square

4.3.c. Le théorème de la monodromie. On dit qu'une représentation $\rho : \Pi \rightarrow \text{GL}(V_{\mathbb{Q}})$ du groupe Π sur un espace vectoriel $V_{\mathbb{Q}}$ de dimension finie sur \mathbb{Q} est *irréductible* si les seuls sous-espaces de $V_{\mathbb{Q}}$ invariants par tous les $\rho(\gamma)$ pour γ dans Π sont $V_{\mathbb{Q}}$ et 0.

On dira qu'une représentation est *complètement réductible* si elle se décompose en somme directe de représentations irréductibles.

Théorème 4.3.6. *La représentation de monodromie ρ sur l'espace $V_{\mathbb{Q}}$ des cycles évanescents est irréductible.*

Corollaire 4.3.7. *La représentation ρ sur les $H_k(X_{h_0}, \mathbb{Q})$ est complètement réductible, i.e. somme directe de représentations irréductibles.*

Démonstration du corollaire. On le montre d'abord pour $k = n - 1$. La représentation ρ est l'identité sur $I_{\mathbb{Q}}$ et elle est irréductible sur $V_{\mathbb{Q}}$. Puisque $H_{n-1}(X_{h_0}, \mathbb{Q}) = I_{\mathbb{Q}} \oplus V_{\mathbb{Q}}$, on en déduit l'assertion. On applique ensuite le théorème de Lefschetz faible : par exemple, on utilise l'égalité $H_{n-2}(X_{h_0}, \mathbb{Q}) = H_{n-2}(X_{h_0} \cap X_h, \mathbb{Q})$ pour h assez général, et on applique le raisonnement précédent à X_h au lieu de X . \square

Remarque 4.3.8. On peut montrer (cf. [2]) que, réciproquement, l'énoncé 4.3.7 implique le théorème de Lefschetz difficile sous la forme 4.2.3, et donc aussi l'irréductibilité de la représentation de monodromie sur $V_{\mathbb{Q}}$ (et pas seulement sa semi-simplicité).

Indication de la démonstration du théorème 4.3.6. Soit $W \neq 0$ un sous-espace de $V_{\mathbb{Q}}$ invariant par la représentation ρ et soit $0 \neq x \in W$. Puisque la forme $\langle, \rangle_{X_{h_0}}$ est non dégénérée sur $V_{\mathbb{Q}}$ (cf. proposition 4.2.1(4) et théorème de Lefschetz difficile), et que V est engendré par les

cycles évanescents e_j , il existe e_k tel que $\langle x, e_k \rangle_{X_{h_0}} \neq 0$. La transformation de monodromie associée au lacet γ_k agit par $T_{\gamma_k}(x) = x \pm \langle x, e_k \rangle_{X_{h_0}} e_k$ et donc $e_k \in W$.

Il s'agit donc de voir que V est le $\pi_1(A^\vee \setminus (A^\vee \cap X^\vee))$ -module engendré par l'un quelconque des e_j . La démonstration de ceci procède en plusieurs étapes.

(1) La fibration $f : \tilde{X} \setminus f^{-1}(A^\vee \cap X^\vee) \rightarrow A^\vee \setminus (A^\vee \cap X^\vee)$ est la restriction d'une fibration $q : Y \setminus q^{-1}(X^\vee) \rightarrow \mathbb{P}^\vee \setminus X^\vee$ à A^\vee , où $Y \subset X \times \mathbb{P}^\vee$ est l'ensemble des couples (x, h) tels que $x \in h$ et q est la projection sur \mathbb{P}^\vee . Ainsi, l'action de $\pi_1(A^\vee \setminus (A^\vee \cap X^\vee))$ sur $H_{n-1}(X_{h_0})$ s'étend en une action de $\pi_1(\mathbb{P}^\vee \setminus X^\vee)$.

(2) L'homomorphisme $\pi_1(A^\vee \setminus (A^\vee \cap X^\vee)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^\vee \setminus X^\vee)$ est *surjectif* : ceci est un théorème de Zariski. Il suffit donc de voir que V est le $\pi_1(\mathbb{P}^\vee \setminus X^\vee)$ -module engendré par l'un quelconque des e_j .

(3) Étant donné $j, k \in \{1, \dots, \delta(X)\}$, les lacets γ_j et γ_k sont conjugués dans $\pi_1(\mathbb{P}^\vee \setminus X^\vee)$: ceci provient de l'irréductibilité de la variété X^\vee .

(4) Les transformations de monodromie T_{γ_j} et T_{γ_k} sont donc aussi conjuguées : il existe G telle que $GT_{\gamma_j} = T_{\gamma_k}G$. Plus précisément, G est la monodromie associée à un lacet dans $\pi_1(\mathbb{P}^\vee \setminus X^\vee)$, donc aussi, par surjectivité, à un lacet dans $\pi_1(A^\vee \setminus (A^\vee \cap X^\vee))$. En appliquant encore une fois les formules de Picard-Lefschetz à l'élément Gx on trouve que, pour tout $x \in H_{n-1}(X_{h_0})$ on a

$$\langle x, e_j \rangle_{X_{h_0}} Ge_j = \langle Gx, e_k \rangle_{X_{h_0}} e_k$$

et, par non dégénérescence de la forme d'intersection, on en déduit que e_k est multiple de Ge_j .

□

Remarque 4.3.9. Le théorème de semi-simplicité 4.3.7 repose, dans cette démonstration, outre le théorème de Lefschetz difficile, sur un argument géométrique, à savoir l'irréductibilité de la variété duale X^\vee . Dans les généralisations exposées au chapitre 6, on utilisera une autre type d'arguments. En conséquence, on n'obtiendra pas de résultat d'irréductibilité, mais seulement un résultat de semi-simplicité.

Références

- [1] R. GODEMENT – *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1964.
- [2] K. LAMOTKE – « The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz », *Topology* **20** (1981), p. 15–51.
- [3] S. LEFSCHETZ – *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier-Villars, Paris, 1924.

CHAPITRE 5

GÉNÉRALISATIONS DU THÉORÈME DE LEFSCHETZ DIFFICILE

5.1. Cohomologie à coefficients dans un système local

Que peut-on dire du groupe fondamental d'une variété projective lisse, d'une variété kählérienne? Est-ce que l'existence d'une telle structure sur une variété C^∞ impose des contraintes sur le groupe fondamental? On sait qu'il y a des contraintes, puisque par exemple tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'une variété C^∞ (et même d'une variété presque complexe), alors que l'on sait que certains de ces groupes ne sont pas les groupes fondamentaux d'une variété kählérienne compacte (on pourra consulter [1] à ce sujet, ainsi que les références qui y sont données).

Commençons par quelques exemples :

(1) Une hypersurface lisse de dimension ≥ 2 de l'espace projectif, définie par une équation homogène, est simplement connexe : en effet, d'une part toutes les hypersurfaces lisses de degré donné dans un espace projectif donné sont difféomorphes ; ensuite, elles peuvent être considérées comme des sections hyperplanes de l'espace projectif, pour un plongement de Veronese ; enfin, la variante homotopique du théorème de Lefschetz faible dit qu'une section hyperplane générique (donc, dans cette situation, toute section hyperplane lisse) a même groupe fondamental que l'espace projectif, qui est trivial.

(2) Le même argument s'applique aux intersections complètes lisses de dimension $n \geq 2$: une telle variété peut être définie par p équations algébriques dans l'espace projectif \mathbb{P}^{n+p} .

(3) Il y a néanmoins des variétés projectives lisses non simplement connexes. En voici quelques exemples.

– Une courbe algébrique lisse de genre $g \geq 1$: le groupe fondamental est le groupe abélien libre \mathbb{Z}^{2g} si $g = 1$, et le quotient du groupe libre à $2g$ générateurs $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ par la relation $\prod_{i=1}^g a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = 1$.

– Le produit de courbes dont au moins une est de genre ≥ 1 .

– Une surface réglée dont la base est une courbe de genre ≥ 1 .

– Une variété abélienne, quotient de \mathbb{C}^n par un réseau \mathbb{Z}^{2n} : le groupe fondamental est \mathbb{Z}^{2n} .

– Signalons enfin que tout groupe fini peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété projective lisse. Indiquons la construction de Serre [10] pour le groupe symétrique \mathfrak{S}_n . On fixe un entier p et on considère le produit n -uple $\mathbb{P}^p \times \dots \times \mathbb{P}^p$ sur lequel agit \mathfrak{S}_n . Le quotient X' est encore une variété projective, singulière le long de l'image de l'ensemble Δ formé des points qui ont deux composantes identiques. On plonge X' dans un espace projectif de dimension assez grande, puis on prend pour X

une section par un plan de codimension d assez général. Si les entiers p et d sont bien choisis, la variété X est lisse et a pour groupe fondamental \mathfrak{S}_n .

On s'intéresse, dans la suite, aux représentations linéaires de dimension finie du groupe fondamental d'une variété projective lisse ou d'une variété kählérienne.

5.1.a. Représentations linéaire de groupes fondamentaux, faisceaux localement constants et fibrés plats. Soit X une variété analytique complexe connexe munie d'un point base \star . Nous allons considérer quatre catégories :

(1) La catégorie dont les objets sont les représentations de dimension finie de $\pi_1(X, \star)$, c'est-à-dire les homomorphisme de groupes $\rho_V : \pi_1(X, \star) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, où V est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} , avec $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ; les morphismes $\rho_V \rightarrow \rho_{V'}$ sont les applications linéaires $\varphi : V \rightarrow V'$ telles que

$$\forall \gamma \in \pi_1(X, \star), \quad \varphi \circ \rho_V(\gamma) = \rho_{V'}(\gamma) \circ \varphi.$$

(2) La catégorie dont les objets sont les faisceaux localement constants \mathcal{V} de \mathbb{K} -espaces vectoriels sur X et les morphismes sont les morphismes de faisceaux.

(3) La catégorie dont les objets sont les fibrés vectoriels holomorphes V sur X , munis d'une connexion holomorphe *plate* ∇ et dont les morphismes sont les morphismes de fibrés vectoriels à connexion.

(4) La catégorie dont les objets sont les fibrés vectoriels différentiables H sur X , munis d'une connexion *plate* D_V et dont les morphismes sont les morphismes de fibrés vectoriels C^∞ à connexion.

On dispose de foncteurs entre ces catégories :

(2) \mapsto (1) : on associe à tout faisceau localement constant sur X l'espace des sections globales multiformes du faisceau image inverse sur un revêtement universel de (X, \star) .

(3) \mapsto (2) : on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on associe à tout fibré holomorphe à connexion *plate* le faisceau localement constant de ses sections horizontales.

(4) \mapsto (3) : on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on associe à tout fibré différentiable à connexion *plate* D_V le fibré holomorphe à connexion *plate* $\mathrm{Ker} D_V''$ avec la connexion D_V' .

Proposition 5.1.1. *Ces foncteurs sont des équivalences de catégories.* □

Cette proposition implique que l'on peut étudier les représentations du groupe fondamental par des méthodes topologique ou géométro-différentielles.

Soit donc \mathcal{V} un faisceau localement constant de \mathbb{C} -espaces vectoriels de rang fini d sur la variété kählérienne compacte X , et soit (V, ∇) le fibré holomorphe plat correspondant : $V = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V}$ et ∇ est la connexion pour laquelle \mathcal{V} est le faisceau des sections horizontales. Soit H le fibré C^∞ associé à V et D_V la connexion induite par ∇ (*cf.* remarque 3.1.20(2)). Puisque le complexe de de Rham de (H, D_V) est une résolution de \mathcal{V} , on a

$$H^r(X, \mathcal{V}) = H_{\mathrm{DR}}^r(X, H).$$

Si ω est une 2-forme de Kähler sur X , de classe $c \in H_{\mathrm{DR}}^2(X, \mathbb{C})$, l'opérateur de Lefschetz L_ω induit un opérateur $L_c : H^r(X, \mathcal{V}) \rightarrow H^{r+2}(X, \mathcal{V})$.

Question 5.1.2. *Est-ce que le théorème de Lefschetz difficile est vrai dans cette situation ?*

Exemple 5.1.3. La réponse à cette question peut être négative. Soit en effet \mathcal{V} un faisceau localement constant de rang d sur une surface de Riemann compacte X . La seule chose à vérifier dans ce cas est que $L_c : H^0(X, \mathcal{V}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{V})$ est un isomorphisme. Il est nécessaire, pour cela, que ces deux espaces aient même dimension.

Remarquons d'abord que, si \mathcal{V}^* désigne le système local dual de \mathcal{V} , on a, par dualité de Poincaré, l'égalité $\dim H^2(X, \mathcal{V}) = \dim H^0(X, \mathcal{V}^*)$. Nous allons donner un exemple pour lequel $\dim H^0(X, \mathcal{V}^*) \neq \dim H^0(X, \mathcal{V})$.

Pour cela, supposons que \mathcal{V} est extension du faisceau constant $\mathcal{V}_2 = \mathbb{C}_X$ par un faisceau localement constant \mathcal{V}_1 qui est *irréductible et non constant*. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}_2 \longrightarrow 0$$

donne deux suites exactes longues

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{V}_1) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{V}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{V}_2) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{V}_1) \longrightarrow \dots \\ 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{V}_2^*) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{V}^*) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{V}_1^*) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

et, puisque le faisceau localement constant \mathcal{V}_1 est irréductible et non constant, il n'a pas de section globale ; autant pour son dual \mathcal{V}_1^* ; enfin $H^0(X, \mathcal{V}_2) = H^0(X, \mathcal{V}_2^*) = \mathbb{C}$. On en déduit d'une part que $H^0(X, \mathcal{V}^*) = \mathbb{C}$. D'autre part, on aura $H^0(X, \mathcal{V}) = 0$ dès que l'application $H^0(X, \mathcal{V}_2) \rightarrow H^1(X, \mathcal{V}_1)$ n'est pas triviale. Dans cet exemple, cette application caractérise en fait l'extension. Plus précisément on a :

Lemme. Soit $\sigma \in H^1(X, \mathcal{V}_1)$. Alors σ définit une extension \mathcal{Z} pour laquelle l'image de $1 \in H^0(X, \mathcal{V}_2) = \mathbb{C}$ est σ .

Démonstration. Soit $\mathcal{Z} = (U_\alpha)$ un recouvrement de X tel que $\sigma \in H^1(\mathcal{Z}, \mathcal{V}_1)^{(1)}$. On pose $\sigma = (\sigma_{\alpha, \beta})$. On choisit pour \mathcal{V} le faisceau $\mathcal{V}_{1|U_\alpha} \oplus \mathbb{C}_{U_\alpha}$ sur chaque U_α , et on recolle sur $U_\alpha \cap U_\beta$ par l'isomorphisme

$$\mathcal{V}_{1|U_\alpha \cap U_\beta} \oplus \mathbb{C}_{U_\alpha \cap U_\beta} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathcal{V}_1} & \sigma_{\alpha, \beta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathcal{V}_{1|U_\alpha \cap U_\beta} \oplus \mathbb{C}_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

On vérifie que l'application $H^0(\mathcal{Z}, \mathbb{C}_X) \rightarrow H^1(\mathcal{Z}, \mathcal{V}_1)$ envoie 1 sur σ . \square

En conclusion, tout faisceau localement constant irréductible et non constant \mathcal{V}_1 tel que $H^1(X, \mathcal{V}_1) \neq 0$ permet de donner une réponse négative à la question.

Il reste à exhiber de tels faisceaux. Rappelons que, si \mathcal{V} est un faisceau localement constant sur X , on a

$$\begin{aligned} \chi(X, \mathcal{V}) &\stackrel{\text{déf}}{=} \dim H^0(X, \mathcal{V}) - \dim H^1(X, \mathcal{V}) + \dim H^2(X, \mathcal{V}) \\ &= \text{rg } \mathcal{V} \cdot \chi(X, \mathbb{C}_X) = (2 - 2g) \text{rg } \mathcal{V}, \end{aligned}$$

où g est le genre de la surface de Riemann X .

Notons alors que, pour un faisceau localement constant irréductible et non constant \mathcal{V}_1 , on a $\chi(X, \mathcal{V}_1) = -\dim H^1(X, \mathcal{V}_1) = (2 - 2g) \text{rg } \mathcal{V}_1$. Donc, tout faisceau localement constant irréductible et non constant sur une surface de Riemann de genre $g \geq 2$ permet de construire un exemple.

Il est simple de construire un tel faisceau de rang 1 : si $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ désignent les générateurs de $\pi_1(X)$ introduits plus haut, un faisceau localement constant de rang 1,

⁽¹⁾On rappelle que $H^1(X, \mathcal{V}_1) = \cup_{\mathcal{Z}} H^1(\mathcal{Z}, \mathcal{V}_1)$.

c'est-à-dire un homomorphisme $\pi_1(X) \rightarrow \mathbb{C}^*$, est déterminé par la donnée de $2g$ nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g \in \mathbb{C}^*$ (la relation $\prod_i \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} = 1$ est trivialement satisfaite en rang 1). La représentation est irréductible, car de rang 1, et elle est non constante dès que l'un des α_i ou β_i n'est pas égal à 1.

Nous allons aborder la question 5.1.2 par les méthodes de la théorie de Hodge. Pour cela, fixons une métrique hermitienne quelconque sur le fibré H . Nous ne supposons pas *a priori* que la connexion D_V est compatible à la métrique. La théorie de Hodge s'applique au laplacien Δ_{h_H, D_V} , et donne une décomposition $(,)$ -orthogonale

$$A^r(X, H) = \mathcal{H}_{\Delta_{h_H, D_V}}^r \oplus \text{Im } D_V \oplus \text{Im } D_V^*,$$

(l'orthogonalité de $\text{Im } D_V$ et $\text{Im } D_V^*$ provient de la platitude de D_V). On en déduit que toute classe de cohomologie dans $H^r(X, \mathcal{V})$ est représentée de manière unique par une section harmonique dans $\mathcal{H}_{\Delta_{h_H, D_V}}^r$. Néanmoins, sans autre hypothèse, nous ne pouvons pas affirmer que L_ω commute à Δ_{h_H, D_V} , donc que les composantes de la décomposition de Lefschetz d'une section harmonique sont encore harmoniques.

5.1.b. Représentations unitaires et fibrés hermitiens plats. Nous allons rappeler les résultats du §3.2.d, d'un point de vue plus topologique. Soit donc $\rho : \pi_1(X, \star) \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation. Fixons une forme hermitienne h sur V . Nous dirons que la représentation est unitaire si elle est à valeurs dans le groupe unitaire de h (si on fixe une base h -orthonormée de V , elle est à valeurs dans le groupe des matrices unitaires $U_d(\mathbb{C})$). Par exemple, si l'image $\rho(\pi_1(X))$ est un sous-groupe fini de $\text{GL}(V)$, la représentation est unitaire.

Il existe alors une métrique hermitienne plate sur le fibré plat C^∞ associé à V , et la connexion D_V est la connexion de Chern associée à cette métrique.

Réciproquement, si (H, h_H) est un fibré C^∞ muni d'une métrique hermitienne *plate*, la connexion de Chern de cette métrique est plate. La représentation associée est alors unitaire.

Dans ces conditions, on peut appliquer les résultats du §3.2.d, et répondre ainsi positivement à la question 5.1.2.

5.1.c. Représentations semi-simples et fibrés plats harmoniques. Nous expliquons ici une construction due à C. Simpson [11, 12].

Soit X une variété analytique complexe et (V, ∇) un fibré holomorphe à connexion *plate* sur X , correspondant à une représentation linéaire de dimension finie du groupe fondamental de X , comme expliqué au §5.1.a. Considérons, comme plus haut, le fibré C^∞ associé à V , noté $H \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{E}_X^\infty \otimes_{\mathcal{O}_X} V$, que nous munissons de la connexion $D_V = D'_V + D''_V$ telle que $(V, \nabla) = (\text{Ker } D''_V, D'_V)$.

Choisissons une métrique hermitienne h_H sur H . Si la représentation n'est pas unitaire, il n'est pas possible de choisir une métrique telle que la connexion plate D_V soit métrique. Regardons alors le défaut ainsi obtenu : il existe des connexions notées D'_E (de type $(1, 0)$) et D''_E (de type $(0, 1)$), et une $(1, 0)$ -forme θ'_E à valeurs dans $\text{End}(H)$ telles que, en notant θ''_E l'adjoint de θ'_E par rapport à h_H , nous ayons, pour toutes sections locales u, v de H ,

$$\begin{aligned} d^1 h_H(u, v) &= h_H(D'_E u, v) + h_H(u, D''_E v), \\ d'' h_H(u, v) &= h_H(D''_E u, v) + h_H(u, D'_E v), \\ h_H(\theta'_E u, v) &= h_H(u, \theta''_E v), \\ D'_V &= D'_E + \theta'_E, \quad D''_V = D''_E + \theta''_E. \end{aligned}$$

Ainsi, D_E est une connexion métrique pour h_H , mais ce n'est pas la connexion de Chern pour la structure holomorphe V .

Ces objets sont déterminés de manière unique par les conditions précédentes. Il faut remarquer que, en appliquant d' ou d'' aux trois premières lignes ci-dessus, on voit que $D_E''^2$ est adjoint de $D_E'^2$, que $D''(\theta')$ est adjoint de $D'(\theta'')$ et que $D_E'D_E'' + D_E''D_E'$ est auto-adjoint par rapport à h_H .

Définition 5.1.4 (métrique harmonique). Le triplet (H, D_V, h_H) (ou (V, ∇, h_H) , ou simplement h_H , si (V, ∇) est fixé) est dit *harmonique* si l'opérateur $D_E'' + \theta'_E$ est de carré nul.

En considérant les types, ceci est équivalent aux relations

$$D_E''^2 = 0, \quad D_E''(\theta'_E) = 0, \quad \theta'_E \wedge \theta'_E = 0.$$

Par adjonction, ceci implique aussi

$$D_E'^2 = 0, \quad D'(\theta'') = 0, \quad \theta''_E \wedge \theta''_E = 0.$$

De plus, la platitude de D_V implique alors

$$D_E'(\theta'_E) = 0, \quad D_E''(\theta''_E) = 0, \quad D_E'D_E'' + D_E''D_E' = -(\theta'_E\theta''_E + \theta''_E\theta'_E).$$

Soit $E = \text{Ker } D_E'' : H \rightarrow H$. D'après la remarque 3.1.20(1), c'est un fibré holomorphe. Il est de plus muni d'une 1-forme holomorphe θ'_E à valeurs dans $\text{End}(E)$, qui satisfait à $\theta'_E \wedge \theta'_E = 0$. On dit que (E, θ'_E) est un *fibré de Higgs* et que θ'_E est le *champ de Higgs associé*. On a ainsi construit une nouvelle structure holomorphe sur H , distincte de V en général.

Dans cette construction, la connexion D_V est compatible à la métrique h_H si et seulement si $\theta'_E, \theta''_E = 0$, et on a $D_V = D_E$. Le fibré de Higgs se réduit alors à $(V, 0)$.

Exemple 5.1.5 (variations de structures de Hodge polarisées). Soit $H = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H^{p, w-p}$ un fibré vectoriel complexe C^∞ sur X , où $w \in \mathbb{Z}$ est un entier fixé, muni d'une connexion plate $D_V = D'_V + D''_V$ et d'une forme hermitienne k (pas nécessairement définie positive) qui satisfait aux propriétés suivantes :

– la connexion D_V est compatible à k , *i.e.* satisfait aux relations

$$dk(u, v) = k(D_V u, v) + k(u, D_V v),$$

– la décomposition de H en somme directe est k -orthogonale,

– pour tout p , la forme hermitienne $(-1)^p k$ est une métrique hermitienne sur $H^{p, w-p}$, *i.e.* $(-1)^p k$ est définie positive sur les fibres de $H^{p, w-p}$,

– les *relations de transversalité de Griffiths* sont satisfaites, *i.e.*

$$\begin{aligned} D'_V A^0(X, H^{p, w-p}) &\subset A^{1,0}(X, H^{p, w-p}) \oplus A^{1,0}(H^{p-1, w-p+1}) \\ D''_V A^0(X, H^{p, w-p}) &\subset A^{0,1}(X, H^{p, w-p}) \oplus A^{0,1}(H^{p+1, w-p-1}). \end{aligned}$$

La donnée ci-dessus s'appelle une *variation de structure de Hodge polarisée*.

Remarque 5.1.6. On peut présenter ces relations de transversalité de manière différente en introduisant la suite décroissante des fibrés $F^p H \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{p' \geq p} H^{p', w-p'}$. La deuxième condition montre que D''_V est une connexion de type $(0, 1)$ sur $F^p H$, donc que $F^p V \stackrel{\text{déf}}{=} V \cap F^p H$ est un sous-fibré holomorphe de V . La première relation montre alors que $\nabla F^p V \subset \Omega_X^1 \otimes F^{p-1} V$.

Réciproquement, supposons satisfaites les relations de transversalité pour les sous-fibrés $F^p H$ définis à partir des $H^{p, q}$ comme ci-dessus, c'est-à-dire que

- $D_V'' A^0(X, F^p H) \subset A^{0,1}(X, F^p H)$, et
- $D_V' A^0(X, F^p H) \subset A^{1,0}(X, F^{p-1} H)$.

Alors les relations de transversalité données plus haut pour les $H^{p,w-p}$ sont satisfaites. Ceci résulte de la propriété de polarisation : en effet, soit v une section locale de $H^{p,w-p}$ et soit $(D_V'' v)_{p+\ell}$ la composante de $D_V'' v$ sur $H^{p+\ell,w-p-\ell}$. Alors, pour toute section locale u de $H^{p+\ell,w-p-\ell}$, on a

$$k(u, D_V'' v) + k(D_V' u, v) = d'k(u, v) = 0$$

si $\ell \neq 0$. Mais si $\ell \geq 2$, $D_V' u$ est une section de $F^{p+1} H$, donc est k -orthogonal à v . Finalement, puisque $\pm k$ est définie positive sur $H^{p+\ell,w-p-\ell}$, on en déduit que $(D_V'' v)_{p+\ell} = 0$ pour tout $\ell \geq 2$. On raisonne de même pour D_V' .

Notons alors $D_V' = D_E' + \theta_E'$ et $D_V'' = D_E'' + \theta_E''$ les décompositions correspondant aux relations de transversalité. Alors la métrique hermitienne h_H définie par les deux conditions suivantes :

- en restriction à $H^{p,w-p}$, h_H est égale à $(-1)^p k$,
- la décomposition en somme directe de H est h_H -orthogonale,

est une métrique *harmonique*, et les objets D_E' , D_E'' , θ_E' et θ_E'' sont bien ceux qui sont associés à (H, D_V, h_H) par la construction générale indiquée plus haut. En effet, soit u une section locale de $H^{p+1,w-p-1}$ et v une section locale de $H^{p,w-p}$. On a alors

$$0 = d'k(u, v) = k(\theta_E' u, v) + k(u, \theta_E'' v),$$

puisque, par orthogonalité, on a $k(D_E' u, v) = 0$ et $k(u, D_E'' v) = 0$. On en déduit que θ_E'' est l'adjoint de θ_E' , pour k ou pour h_H . On montre de même la compatibilité de D_E avec la métrique h_H . La nullité de $(D_E'' + \theta_E')^2$ provient alors de la platitude de D_V en considérant les parties homogènes de la relation $D_V^2 = 0$, toujours à l'aide de l'orthogonalité.

Quand existe-t-il une métrique harmonique sur un fibré holomorphe plat? Lorsque la variété X est kählérienne et compacte, la réponse est donnée par un théorème de K. Corlette [3] et C. Simpson [11], que nous ne démontrerons pas ici, car les méthodes sont d'une nature différente de celles de la théorie de Hodge.

Théorème 5.1.7. *Soit (V, ∇) un fibré holomorphe à connexion holomorphe plate sur une variété kählérienne compacte X . Il existe une métrique harmonique sur V relativement à ∇ si et seulement si la représentation associée à (V, ∇) est semi-simple, i.e. somme directe de représentations irréductibles. \square*

Théorie de Hodge pour les fibrés plats avec métrique harmonique. Il est remarquable que les identités kählériennes du théorème 3.2.6 s'étendent dans une situation où la connexion D_V n'est pas compatible à la métrique. Néanmoins, la décomposition de D_V à considérer pour obtenir des formules analogues à (3.2.4) n'est pas la décomposition en type $D_V = D_V' + D_V''$, mais la décomposition

$$D_V = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_\infty, \quad \mathcal{D}_0 = D_E'' + \theta_E' \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_\infty = D_E' + \theta_E''.$$

Il faut noter que l'on a

$$(5.1.8) \quad \mathcal{D}_0^2 = 0, \quad \mathcal{D}_\infty^2 = 0, \quad \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_\infty + \mathcal{D}_\infty \mathcal{D}_0 = 0,$$

ainsi qu'il résulte de l'harmonicité de la métrique h_H .

Théorème 5.1.9. *Si la métrique h_H est harmonique, les identités du théorème 3.2.6 s'appliquent en remplaçant d' par \mathcal{D}_0 et d'' par \mathcal{D}_∞ . De plus, on a l'analogie de (3.2.4) :*

$$\Delta_{D_V} = 2\Delta_{\mathcal{D}_0} = 2\Delta_{\mathcal{D}_\infty}.$$

Enfin, l'opérateur de Lefschetz L_ω commute au laplacien Δ_{D_V}

Démonstration. Puisque l'opérateur D_E est compatible à la métrique, son adjoint se calcule par la formule $D_E^* = -\star D_E \star$ (cf. lemme 3.1.21). On en déduit, par exemple comme à la remarque 3.2.10, l'identité

$$[\Lambda, D'_E] = iD''_E,$$

et de même les autres identités du théorème 3.2.6, en remplaçant d' par D'_E et d'' par D''_E . Néanmoins, ces identités ne sont pas utilisables directement pour obtenir une égalité de laplaciens du type (3.2.4), car il faut pour cela démontrer les analogues des identités (3.2.8), qui nécessitent aussi une condition de platitude.

On a donc $[L, D'_E] = iD''_E$ et $[L, D''_E] = -iD'_E$. Par ailleurs, calculons θ'_E dans les coordonnées locales du théorème 3.2.3. On écrit l'opérateur θ'_E sous la forme $\sum_k \theta'_{E,k} dz_k \wedge$. L'adjoint de $\theta'_{E,k}$ est $\theta''_{E,k}$ par hypothèse, et l'adjoint de l'opérateur $dz_k \wedge$ est $\iota_{\partial_{z_k}}$ modulo $O(\|z\|^2)$, par le même calcul que pour la formule (3.2.5) (il faut noter ici l'absence de signe $-$ dans la formule, car on n'utilise pas la formule de Stokes). On a donc

$$\begin{aligned} [L, \theta'_E] &= \sum_k \theta''_{E,k} [L, \iota_{\partial_{z_k}}] \quad \text{mod } O(\|z\|^2) \\ &= -i \sum_k \theta''_{E,k} d\bar{z}_k \quad \text{mod } O(\|z\|^2), \end{aligned}$$

puisque $\iota_{\partial_{z_k}}(\omega) = id\bar{z}_k \quad \text{mod } O(\|z\|^2)$. On en déduit que $[L, \theta'_E] = -i\theta''_E$ en évaluant la formule précédente au centre des coordonnées.

On voit ainsi que les identités du théorème 3.2.6 restent satisfaites si on remplace d' par \mathcal{D}_∞ et d'' par \mathcal{D}_0 . De plus, les relations (5.1.8) permettent d'obtenir les analogues des identités (3.2.8), et on peut conclure comme pour le corollaire 3.2.9. \square

On déduit du théorème 5.1.9 que les espaces de sections harmoniques $\mathcal{H}_{D_V}^r(X, H)$, $\mathcal{H}_{\mathcal{D}_0}^r(X, H)$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{D}_\infty}^r(X, H)$ coïncident. On note cet espace $\mathcal{H}^r(X, H)$. Le théorème de Hodge pour ces laplaciens donne donc les décompositions $(,)$ -orthogonales

$$\begin{aligned} A^r(X, H) &= \mathcal{H}^r(X, H) \oplus \text{Im } \mathcal{D}_0 \oplus \text{Im } \mathcal{D}_0^* \\ &= \mathcal{H}^r(X, H) \oplus \text{Im } \mathcal{D}_\infty \oplus \text{Im } \mathcal{D}_\infty^* \\ &= \mathcal{H}^r(X, H) \oplus \text{Im } D_V \oplus \text{Im } D_V^*. \end{aligned}$$

De la dernière assertion du théorème 5.1.9, on déduit comme au §3.2.c :

Théorème 5.1.10 (C. Simpson [11]). *Si \mathcal{V} est un faisceau localement constant semi-simple sur une variété kählérienne compacte X , l'opérateur de Lefschetz associé à une classe de Kähler $c \in H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ induit, pour tout $r \geq 0$, un isomorphisme*

$$L_c^r : H^{n-r}(X, \mathcal{V}) \xrightarrow{\sim} H^{n+r}(X, \mathcal{V}). \quad \square$$

5.2. Extension au cas singulier : la cohomologie d'intersection

L'extension du théorème de Lefschetz aux variétés projectives singulières est un résultat difficile. Même son énoncé demande des explications : l'énoncé 4.2.3 n'est pas vrai en général pour une variété singulière, pour la bonne raison que les deux espaces de cohomologie considérés n'ont pas nécessairement la même dimension (la forme d'intersection peut être dégénérée, dans le cas singulier).

Il existe par ailleurs des variétés projectives singulières qui, du point de vue de l'homologie, se comportent comme des variétés projectives lisses (dualité de Poincaré, *etc.*) : ce sont les V-variétés. Il n'y a pas d'obstruction à ce qu'elles satisfassent les conclusions du théorème 4.2.3 ; de fait, on peut montrer que c'est bien le cas, mais on ne peut appliquer directement les arguments d'analyse de la théorie de Hodge.

On associe (*cf.* [7, 8]) à toute variété projective complexe X des espaces d'*homologie d'intersection*⁽²⁾, notés $IH_k(X, \mathbb{Q})$, et des espaces de *cohomologie d'intersection*, notés $IH^\ell(X, \mathbb{Q})$. Ils satisfont notamment aux propriétés suivantes :

- (1) $\dim_{\mathbb{Q}} IH_k(X, \mathbb{Q}) < +\infty$ et $\dim_{\mathbb{Q}} IH_k(X, \mathbb{Q}) = 0$ pour $k < 0$ ou $k > 2n$, et même chose pour la cohomologie.
- (2) La dualité de Kronecker identifie $IH^\ell(X, \mathbb{Q})$ au dual de $IH_\ell(X, \mathbb{Q})$.
- (3) On a des morphismes naturels $H^\ell(X, \mathbb{Q}) \rightarrow IH^\ell(X, \mathbb{Q})$ et $H_k(X, \mathbb{Q}) \rightarrow IH_k(X, \mathbb{Q})$.
- (4) Le « cap-produit » avec la classe d'orientation $[X]$ se factorise en

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^{2n-k}(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & IH^{2n-k}(X, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\cap [X]} & IH_k(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_k(X, \mathbb{Q}) \\
 & & & \searrow & \nearrow & & \\
 & & & & \cap [X] & &
 \end{array}$$

- (5) L'homomorphisme de Poincaré $IH^{2n-k}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cap [X]} IH_k(X, \mathbb{Q})$ est un isomorphisme. Il existe donc une forme d'intersection $IH_k(X, \mathbb{Q}) \otimes IH_{2n-k}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$ qui est *non dégénérée* et qui est compatible, par l'application ci-dessus, aux formes d'intersection sur la cohomologie ou l'homologie de X .

Théorème 5.2.1 (Deligne-Gabber [2], M. Saito [9]). *Le théorème de Lefschetz difficile vaut pour la cohomologie d'intersection d'une variété projective complexe éventuellement singulière.* \square

La démonstration de Deligne-Gabber consiste à se ramener au cas d'une variété définie sur \mathbb{Z} , puis à travailler en caractéristique positive par réduction modulo p , et enfin à appliquer des résultats arithmétiques (le complexe d'intersection est un faisceau pervers pur, auquel on peut appliquer les résultats de Deligne sur les conjectures de Weil). Celle de Saito consiste à développer une théorie de \mathcal{S} -modules de Hodge pour remplacer la notion arithmétique de faisceau pur, et à montrer le théorème de Lefschetz dans ce cadre.

Les deux démonstrations sortent du cadre de ces notes. Aussi, nous allons seulement donner quelques conséquences du théorème de Lefschetz dans le cas singulier.

⁽²⁾Comme pour l'homologie et la cohomologie, il y a une version « homologie d'intersection singulière », qui a été la première à être développée par M. Goresky et R.D. MacPherson dans [7], et une version « cohomologie de faisceau », proposée par P. Deligne, version qui s'adapte en géométrie arithmétique (*cf.* [8] pour la version topologique et [2] pour la version arithmétique).

5.2.a. Applications à la combinatoire. Soit K un polytope convexe dans \mathbb{R}^n , qui est un espace topologique homéomorphe à une sphère S^{n-1} . Quelles relations existe-t-il entre les nombres f_j de facettes de dimension j , pour $j = 0, \dots, n-1$ (f_0 est le nombre de sommets, f_1 le nombre d'arêtes, etc) ? Une relation connue est la relation d'Euler :

$$1 + (-1)^{n-1} = \chi(S^n) = f_0 - f_1 + \dots + (-1)^{n-1} f_{n-1}.$$

On considère maintenant des polytopes *simpliciaux*, c'est-à-dire dont toutes les faces sont des $(n-1)$ -simplexes (il est toujours possible de subdiviser un polytope convexe quelconque pour obtenir un polytope simplicial, les nombres f_j étant augmentés lors de cette opération).

On introduit le h -vecteur associé au polytope simplicial K en posant

$$h_k = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} C_i^k f_{n-1-i}$$

avec la convention $f_{-1} = 1$. Ainsi, le nombre h_k s'exprime en fonction des nombres de faces de codimension $\geq k$, et la donnée des h_k est équivalente à celle des f_j . On a $h_n = 1$ et $h_0 = (-1)^{n-1}(\chi(S^{n-1}) - 1) = 1$. La relation d'Euler se traduit par $h_0 = h_n$. Les *relations de Dehn-Sommerville* $h_k = h_{n-k}$ en sont une généralisation.

Théorème 5.2.2 (R.P. Stanley). Soit K un polytope convexe simplicial dans \mathbb{R}^n . Alors, pour $k \leq [n/2]$, la suite h_k est croissante.

Remarque 5.2.3. On peut en fait caractériser complètement les suites (h_k) qui apparaissent comme h -vecteur d'un polytope convexe simplicial dans \mathbb{R}^n (voir par exemple [5, §5.6]). Cette caractérisation avait été conjecturée par P. McMullen.

Indication de la démonstration. La première démonstration, faite par R.P. Stanley, des conjectures de McMullen utilise le théorème de Lefschetz difficile sur une variété algébrique. Plus récemment, une démonstration purement combinatoire a été donnée.

La méthode de Stanley consiste à associer à un polytope convexe simplicial K dans \mathbb{R}^n une variété projective complexe X de dimension n pour laquelle $h_j = \dim H^j(X, \mathbb{Q})$. Si X est lisse, la dualité de Poincaré sur X se traduit alors par les relations de Dehn-Sommerville, et la croissance de la suite $(h_k)_{k=0, \dots, [n/2]}$ est conséquence du théorème de Lefschetz difficile.

En général cependant, la variété X est singulière mais, sous l'hypothèse que K est simplicial, c'est une V-variété. Sa cohomologie à coefficients dans \mathbb{Q} est égale à sa cohomologie d'intersection, et la dualité de Poincaré ainsi que le théorème de Lefschetz difficile s'appliquent à la cohomologie de X , de sorte qu'on peut appliquer l'argument précédent.

Avant de construire X , on remarque que, sans changer la suite (f_j) , donc la suite (h_k) , on peut perturber le polytope K pour faire en sorte que les sommets soient à coordonnées rationnelles. Par une translation, on peut supposer que l'origine de \mathbb{R}^n est à l'intérieur de K et par une homothétie, on peut aussi supposer que les sommets sont à coordonnées entières. On considère alors la subdivision de \mathbb{R}^n obtenue en prenant les cônes de sommet l'origine et s'appuyant sur les faces de K : c'est un *éventail* simplicial. On montre alors que la *variété torique* X associée à cet éventail satisfait les propriétés voulues. \square

5.2.b. Une démonstration du théorème de Bloch-Giesecker. Le résultat qui suit est tiré de [6] et donne une jolie application du théorème de Lefschetz difficile sur une variété singulière.

Soit X une variété projective complexe (pas nécessairement lisse) de dimension n et soit E un fibré vectoriel holomorphe *ample* (cf. *infra*) de rang d sur X .

Théorème 5.2.4. *Si $d \geq n$, alors la classe de Chern $c_n(E) \in H^{2n}(X, \mathbb{Z})$ n'est pas nulle.*

En fait, le théorème est plus précis, car il dit que $\int_X c_n(E) > 0$, mais nous nous contentons de cet énoncé.

Démonstration. Rappelons la signification de l'amplitude. Pour un fibré en droites \mathcal{L} sur une variété projective Y , elle signifie que, quitte à prendre une puissance tensorielle r suffisante, le fibré $\mathcal{L}^{\otimes r}$ est la restriction à Y du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$, pour un plongement $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. En particulier, le morphisme de Lefschetz L associé à la classe de Chern $c = c_1(\mathcal{L}) \in H^2(Y, \mathbb{Z})$, agissant sur l'homologie d'intersection de Y , satisfait au théorème de Lefschetz difficile.

Soit E un fibré vectoriel de rang d sur X et soit E^\vee le fibré dual. Soit $\mathbb{P}(E^\vee)$ le fibré projectif associé et $\pi : \mathbb{P}(E^\vee) \rightarrow X$ la projection. C'est une variété projective de dimension $n + d - 1$. Pour tout $x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ est l'ensemble des droites dans l'espace vectoriel E_x^\vee , c'est-à-dire l'ensemble des hyperplans dans E_x . L'espace $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E^\vee)$ est muni d'un fibré canonique \mathcal{L} , dont la restriction à chaque fibre $\mathbb{P}(E_x^\vee)$ est le fibré $\mathcal{O}(1)$ correspondant.

On dit que le fibré E est ample sur X si le fibré \mathcal{L} est ample sur \mathbb{P} .

Notons $c = c_1(\mathcal{L}) \in H^2(\mathbb{P})$ la première classe de Chern de \mathcal{L} et $c_j(E) \in H^{2j}(X, \mathbb{Z})$ les classes de Chern de E . On sait que $c_j(E) = 0$ pour $j > n$ et qu'on a la relation dans $H^{2d}(\mathbb{P}, \mathbb{Z})$

$$c^d + \pi^* c_1(E^\vee) \cdot c^{d-1} + \cdots + \pi^* c_n(E^\vee) \cdot c^{d-n} = 0,$$

qui traduit le fait que le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) = \mathcal{L}^\vee$ est contenu dans le fibré image inverse $\pi^* E^\vee$, donc le quotient est un fibré de rang $d - 1$: sa classe de Chern de degré d est nulle. De plus, $c_j(E^\vee) = (-1)^j c_j(E)$. Posons alors

$$\alpha = c^{n-1} - \pi^* c_1(E) \cdot c^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} \pi^* c_{n-1}(E) \in H^{2n-2}(X, \mathbb{Z}).$$

Si $c_n(E) = 0$ dans $H^{2n}(X, \mathbb{Z})$, alors c'est aussi vrai dans $H^{2n}(X, \mathbb{Q})$, et on a $c^{d-n+1} \cdot \alpha = 0$ dans $H^{2d}(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$. D'après les propriétés de l'homologie d'intersection, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{2n-2}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{c^{d-n+1}} & H^{2d}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cap[\mathbb{P}] \left(\begin{array}{ccc} IH^{2n-2}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) & \xrightarrow[\sim]{c^{d-n+1}} & IH^{2d}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{2d}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) & & \end{array} \right) \end{array}$$

et l'isomorphisme du milieu est conséquence du théorème de Lefschetz pour l'homologie d'intersection. Par suite, l'image de α dans $IH^{2n-2}(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$, et donc dans $H_{2d}(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$, est nulle.

D'un autre côté, rappelons aussi que l'on a les relations suivantes (voir par exemple [4, Prop. 3.1]) :

$$\begin{aligned} \pi_*(c^{d-1} \cap [\mathbb{P}]) &= [X] \in H_{2n}(X, \mathbb{Z}) \\ \pi_*(c^{d-1-j} \cdot \pi^* \beta \cap [\mathbb{P}]) &= 0 \quad \forall j > 0 \text{ et } \beta \in H^{2j}(X, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

On en déduit que $c^{d-n} \cdot \alpha \cap [\mathbb{P}] \neq 0$ dans $H_{2n}(\mathbb{P})$ puisque l'image $[X]$ de cet élément par π_* n'est pas nulle dans $H_{2n}(X)$. Il en résulte que $\alpha \cap [\mathbb{P}]$ n'est pas nulle non plus dans $H_{2d}(X)$, ce qui est contradictoire avec le résultat précédent. \square

Références

- [1] J. AMORÓS, M. BURGER, K. CORLETTE, D. KOTSCHICK & D. TOLEDO – *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [2] A.A. BEILINSON, J.N. BERNSTEIN & P. DELIGNE – « Faisceaux pervers », in *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, Astérisque, vol. 100, Société Mathématique de France, 1982, p. 7–171.
- [3] K. CORLETTE – « Flat G -bundles with canonical metrics », *J. Differential Geom.* **28** (1988), p. 361–382.
- [4] W. FULTON – *Intersection Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Folge 3 Band 2, Springer-Verlag, 1984.
- [5] ———, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [6] W. FULTON & R. LAZARSFELD – « Ample vector bundles », *Ann. of Math.* **118** (1983), p. –59.
- [7] M. GORESKY & R.D. MACPHERSON – « Intersection homology theory », *Topology* **19** (1980), p. 135–162.
- [8] ———, « Intersection homology II », *Invent. Math.* **71** (1983), p. 77–129.
- [9] M. SAITO – « Modules de Hodge polarisables », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **24** (1988), p. 849–995.
- [10] J.-P. SERRE – « Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p », in *Symposium internacional de topología algebraica*, Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO, Mexico City, 1958, p. 24–53.
- [11] C. SIMPSON – « Higgs bundles and local systems », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **75** (1992), p. 5–95.
- [12] ———, « Mixed twistor structures », Prépublication Université de Toulouse & arXiv:math.AG/9705006, 1997.

CHAPITRE 6

LE THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION DE BEILINSON, BERNSTEIN, DELIGNE ET GABBER

Dans ce chapitre, nous indiquons comment certains résultats du chapitre 4 se généralisent au cas d'un morphisme projectif entre variétés algébriques. Ainsi, le théorème de semi-simplicité est un fait très général. Nous allons voir aussi une nouvelle application du théorème de Lefschetz difficile, à savoir un théorème de dégénérescence de la suite spectrale de Leray.

Nous expliquerons ensuite comment ces théorèmes s'étendent à la catégorie de faisceaux pervers.

Les résultats de ce chapitre proviennent essentiellement d'articles de P. Deligne [3, 4, 1].

6.1. Un critère de dégénérescence de suite spectrale

6.1.a. La suite spectrale de Leray. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue propre entre espaces topologiques et \mathcal{F} un faisceau sur X . La suite spectrale de Leray est un outil de type Fubini pour calculer la cohomologie du faisceau \mathcal{F} sur X : on « intègre » d'abord dans les fibres de f , puis on prend la cohomologie sur Y du résultat ainsi obtenu.

Intégrer d'un faisceau dans les fibres de f signifie en prendre l'image directe par f : on obtient un complexe $Rf_*\mathcal{F}$, bien défini comme objet de la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux sur Y (dans la suite, nous travaillons avec des faisceaux d'espaces vectoriels sur \mathbb{Q} ou \mathbb{C}). Ce complexe a pour faisceaux de cohomologie les faisceaux $R^q f_*\mathcal{F}$ sur Y associés aux préfaisceaux $V \mapsto H^q(f^{-1}(V), \mathcal{F})$ (on remarquera que, pour $q = 0$, le préfaisceau considéré est déjà un faisceau).

Remarque 6.1.1. Une propriété importante des faisceaux $R^q f_*\mathcal{F}$ lorsque f est propre est la compatibilité au changement de base. Notamment, si $y_0 \in Y$, le germe $(R^q f_*\mathcal{F})_{y_0}$ en y_0 du faisceau $R^q f_*\mathcal{F}$ est égal à $H^q(f^{-1}(y_0), \mathcal{F})$.

Si Γ désigne le foncteur des sections globales (image directe par l'application à valeurs dans un point), le théorème de Fubini dans les catégories dérivées s'écrit

$$R\Gamma(X, \mathcal{F}) = R\Gamma(Y, Rf_*\mathcal{F}).$$

La suite spectrale de Leray exprime cette égalité en termes cohomologiques. Elle a pour terme $E_2^{p,q}$ l'espace vectoriel $H^p(Y, R^q f_*\mathcal{F})$ et elle converge vers $H^{p+q}(X, \mathcal{F})$.

Rappelons que la suite spectrale définit par récurrence l'espace $E_{r+1}^{p,q}$ comme la cohomologie du complexe

$$\dots \longrightarrow E_r^{p-r, q+r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{p, q} \xrightarrow{d_r} E_r^{p+r, q-r+1} \longrightarrow \dots$$

On dit que la suite spectrale converge si $d_r = 0$ pour tout r assez grand.

Lemme 6.1.2 (cf. [6]). *La suite spectrale de Leray converge.* □

Un gradué de $H^k(X, \mathcal{F})$ pour une filtration convenable s'identifie alors à $\bigoplus_{p+q=k} E_r^{p,q}$. On dit que la suite spectrale *dégénère* en E_2 si $d_2 = d_3 = \dots = 0$. Ainsi, un gradué convenable de $H^k(X, \mathcal{F})$ s'identifie à $\bigoplus_{p+q=k} E_2^{p,q}$. En particulier, la dimension de $H^k(X, \mathcal{F})$ est la somme de celles des $E_2^{p,q}$ pour $p + q = k$.

Nous allons expliciter la construction de la suite spectrale dans le cas où \mathcal{F} est le faisceau constant \mathbb{C}_X , X et Y sont des variétés C^∞ et où f est partout une submersion. En particulier, puisque f est propre, il résulte d'un théorème d'Ehresmann [5] que l'application f fait de X un espace fibré différentiable sur Y . Autrement dit, au voisinage V de tout point $y_0 \in Y$, on a un difféomorphisme $f^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} V \times f^{-1}(y_0)$, transformant l'application f en la première projection. Il en résulte notamment que les faisceaux $R^k f_* \mathbb{C}_X$ sont constants sur de tels voisinages V : ce sont donc des faisceaux localement constants de \mathbb{C} -espaces vectoriels.

Considérons la résolution de de Rham $\mathbb{C}_X \rightarrow \mathcal{E}_X^\bullet$ par les faisceaux de formes différentielles C^∞ , de différentielle d . On sait (par l'existence de partitions C^∞ de l'unité) que, pour tout ouvert U de X , on a $H^k(U, \mathcal{E}_X^\ell) = 0$ pour tout $k \geq 1$. Il en résulte que, pour tout recouvrement ouvert \mathfrak{U} de X , le complexe de Čech $(\mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{E}_X^\ell), \delta)$ est une résolution de $\Gamma(X, \mathcal{E}_X^\ell)$ et que le complexe simple associé au complexe double $(\mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{E}_X^\bullet), \delta, d)$ a pour cohomologie la cohomologie de de Rham $H_{\text{DR}}^*(X, \mathbb{C})$.

En appliquant ceci aux ouverts $f^{-1}(V)$, on en déduit que les faisceaux $R^k f_* \mathbb{C}_X$ sont nuls pour $k \geq 1$. Un argument de suite spectrale dégénérée montre alors que les faisceaux $R^k f_* \mathbb{C}_X$ sont les faisceaux de cohomologie du complexe $(f_* \mathcal{E}_X^\bullet, d)$ (lorsque Y est réduite à un point, on retrouve le théorème de de Rham). De plus, si \mathfrak{Y} est un recouvrement ouvert de Y , le complexe double $(\mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{Y}, f_* \mathcal{E}_X^\bullet), \delta, d)$ n'est autre que le complexe double $(\mathcal{E}^\bullet(f^{-1}\mathfrak{Y}, \mathcal{E}_X^\bullet), \delta, d)$. La suite spectrale de Leray est la première suite spectrale de ce complexe double. Elle converge vers $H_{\text{DR}}^*(X, \mathbb{C}) = H^*(X, \mathbb{C})$, d'après ce qui précède.

D'autre part, le terme $E_2^{p,q}$ de cette suite spectrale est la cohomologie $H^p(\mathfrak{Y}, R^q f_* \mathbb{C}_X)$. Nous dirons que \mathfrak{Y} est un *bon* recouvrement de Y si toutes les intersections non vides d'ouverts sont contractiles. Un tel recouvrement existe (cf. [2, p. 42]). Le faisceau $R^q f_* \mathbb{C}_X$ étant localement constant, un bon recouvrement \mathfrak{Y} est acyclique pour $R^q f_* \mathbb{C}_X$. Par le théorème de Leray, on a alors $E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* \mathbb{C}_X)$.

Lemme 6.1.3. *Pour tout $q \geq 0$, on a un homomorphisme surjectif $H^q(X, \mathbb{C}_X) \rightarrow E_\infty^{0,q}$.*

Démonstration. En effet, la première filtration du complexe double $\mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{Y}, f_* \mathcal{E}_X^\bullet)$ commence à F^0 puisque les exposants \bullet sont ≥ 0 . Par suite, $E_\infty^{0,q} = H^q(X, \mathbb{C}_X) / F^1 H^q(X, \mathbb{C}_X)$, si $F^\bullet H^q(X, \mathbb{C}_X)$ est la filtration induite naturellement par celle du complexe double. □

6.1.b. Dégénérescence de la suite spectrale de Leray. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme projectif entre variétés quasi-projectives connexes. Ceci signifie qu'il existe un plongement fermé $X \hookrightarrow Y \times \mathbb{P}^N$ avec N convenable, de sorte que l'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & Y_o \times \mathbb{P}^N \\ & \searrow f & \downarrow p_1 \\ & & Y \end{array}$$

Supposons de plus que f soit lisse. Alors les fibres de f sont des sous-variétés projectives lisses. Soit n leur dimension. On a $n = \dim X - \dim Y$.

Théorème 6.1.4 (Deligne [3]). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme projectif et lisse entre variétés quasi-projectives connexes. Alors la suite spectrale de Leray pour le faisceau constant $\mathcal{F} = \mathbb{C}_X$ dégénère en E_2 .

Remarque 6.1.5. L'énoncé vaut aussi pour la suite spectrale à coefficients dans \mathbb{Q} , puisqu'on obtient celle du théorème par tensorisation de celle-ci par \mathbb{C} . Il sera cependant plus simple de définir l'homomorphisme de Lefschetz sur \mathbb{C} .

Démonstration. Choisissons un plongement fermé $X \hookrightarrow Y \times \mathbb{P}^N$ et soit c la restriction à X de la classe $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$.

Lemme 6.1.6. L'opérateur de Lefschetz L_c définit un morphisme $R^k f_* \mathbb{C}_X \rightarrow R^{k+2} f_* \mathbb{C}_X$, dont le germe en $y_0 \in Y$ est l'opérateur de Lefschetz $L_c : H^k(f^{-1}(y_0), \mathbb{C}) \rightarrow H^{k+2}(f^{-1}(y_0), \mathbb{C})$.

Démonstration. On considère comme plus haut la résolution de de Rham $\mathbb{C}_X \rightarrow \mathcal{E}_X^\bullet$. Soit ω la forme de Fubini-Study sur \mathbb{P}^N , qu'on transporte sur X par image inverse par l'application $X \rightarrow \mathbb{P}^N$. C'est donc une forme fermée de type $(1,1)$ sur X . Par ailleurs, on a vu que $R^k f_* \mathbb{C}_X = \mathcal{H}^k(f_* \mathcal{E}_X^\bullet, d)$. La forme ω définit donc un opérateur $L_\omega = \omega \wedge$ sur les termes du complexe $f_* \mathcal{E}_X^\bullet$. Cet opérateur commute à la différentielle, puisque ω est fermée, et définit par passage au quotient un opérateur L_c en cohomologie, qui ne dépend que de la classe de cohomologie c de ω . Il est clair que la restriction de L_c à la fibre $H^k(X_{y_0}, \mathbb{C})$ de $R^k f_* \mathbb{C}_X$ en y_0 est l'opérateur de Lefschetz défini par c sur la variété projective X_{y_0} . \square

On déduit de ce lemme que, pour tout $r \geq 1$, l'opérateur de Lefschetz L_c^k induit un isomorphisme $R^{n-k} f_* \mathbb{C}_X \xrightarrow{\sim} R^{n+k} f_* \mathbb{C}_X$: en effet, il suffit de vérifier cette propriété pour chaque fibre, et on peut appliquer le théorème de Lefschetz difficile.

Fixons un bon recouvrement \mathfrak{B} de Y . Comme nous l'avons vu, la forme ω étant fermée, l'opérateur $L_\omega = \omega \wedge$ commute à la différentielle d du complexe double $(\mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{B}, f_* \mathcal{E}_X^\bullet), \delta, d)$ et, d'autre part, il commute de manière évidente à la différentielle de Čech δ . On en déduit que L_ω définit pour chaque r un morphisme $L_\omega : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p,q+2}$ qui commute à la différentielle d_r .

Montrons par récurrence que $d_r = 0$ pour $r \geq 2$. Nous pouvons supposer que $E_r = E_2$ si $r \geq 3$ puisque $d_{r-1} = 0$ par récurrence. L'isomorphisme $L_\omega^k : R^{n-k} f_* \mathbb{C}_X \xrightarrow{\sim} R^{n+k} f_* \mathbb{C}_X$ induit donc un isomorphisme $L_\omega^k : E_2^{p,n-k} \xrightarrow{\sim} E_2^{p,n+k}$. Ainsi, l'espace $\bigoplus_{\ell} E_2^{p,\ell}$ admet une décomposition de Lefschetz, et il suffit de vérifier la nullité de d_r sur la partie primitive

$$PE_2^{p,n-k} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Ker} [L^{k+1} : E_2^{p,n-k} \rightarrow E_2^{p,n+k+2}].$$

Nous avons maintenant un diagramme commutatif, puisque $r \geq 2$,

$$\begin{array}{ccc} PE_2^{p,n-k} & \xrightarrow{d_r} & E_2^{p+r,n-k-r+1} \\ \downarrow L^{k+1} = 0 & & \downarrow L^{k+1} \\ E_2^{p,n+k+2} & \xrightarrow{d_r} & E_2^{p+r,n+k-r+3} \\ & & \downarrow L^{r-2} \\ & & E_2^{p+r,n+k+r-1} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} PE_2^{p,n-k} & \xrightarrow{d_r} & E_2^{p+r,n-k-r+1} \\ \downarrow L^{k+1} = 0 & & \downarrow L^{k+1} \\ E_2^{p,n+k+2} & \xrightarrow{d_r} & E_2^{p+r,n+k-r+3} \\ & & \downarrow L^{r-2} \\ & & E_2^{p+r,n+k+r-1} \end{array}} \right\}$$

et la flèche L^{k+1} de droite est donc injective. Ceci montre que d_r est nul sur $PE_2^{p,n-k}$. Par compatibilité avec la décomposition de Lefschetz, d_r est nul sur $E_2^{p,q}$ pour tous p, q . \square

6.1.c. Applications du théorème de dégénérescence. La première application est une généralisation du corollaire 4.3.5, compte tenu du lemme 4.2.2. Pour cette raison, le résultat est connu sous le nom de « théorème (global) des cycles invariants », bien qu'il parle de cocycles.

Théorème 6.1.7 (des cycles invariants [4]). *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de variétés projectives lisses connexes, soit S^o un ouvert de Zariski dense de S au-dessus duquel f est lisse et soit $s_o \in S^o$. Alors, pour tout k , l'image du morphisme de restriction $H^k(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^k(X_{s_o}, \mathbb{Q})$ est égale au sous-espace des classes invariantes par la représentation de monodromie $\pi_1(S^o, s_o) \rightarrow \text{Aut}(H^k(X_{s_o}, \mathbb{Q}))$.*

Démonstration. Rappelons d'abord pourquoi S^o existe (théorème de Bertini-Sard). Soit $Z \subset X$ le lieu critique de f . C'est un sous-ensemble algébrique projectif de X (cf. [7, prop. V.2.6]). Son image $f(Z)$ est encore un sous-ensemble algébrique fermé dans S . D'après le théorème de Sard, il est nul part dense dans S . On peut prendre pour S^o le complémentaire de $f(Z)$ dans S .

Notons $X^o = f^{-1}(S^o)$, de sorte que $f : X^o \rightarrow S^o$ est une application lisse. Puisqu'elle est propre, c'est une fibration C^∞ . Pour tout k , le faisceau $R^k f_* \mathbb{Q}_{X^o}$ est localement constant sur S^o . Sa fibre en $s_o \in S^o$ est l'espace $H^k(X_{s_o}, \mathbb{Q})$ (si l'on pose $X_{s_o} = f^{-1}(s_o)$). Il détermine donc une représentation de monodromie comme indiqué dans l'énoncé. L'espace des classes invariantes s'identifie ainsi à l'espace des sections globales du faisceau $R^k f_* \mathbb{Q}_{X^o}$, c'est-à-dire $H^0(S^o, R^k f_* \mathbb{Q}_{X^o})$.

Le morphisme de restriction se décompose en

$$H^k(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(X^o, \mathbb{Q}_{X^o}) \longrightarrow H^0(S^o, R^k f_* \mathbb{Q}_{X^o}) \hookrightarrow H^k(X_{s_o}, \mathbb{Q}).$$

Le premier morphisme est le morphisme de restriction. Le second morphisme s'identifie au composé $H^k(X^o, \mathbb{Q}) \rightarrow E_\infty^{0,k} \hookrightarrow E_2^{0,k}$ dans la suite spectrale de Leray. Le premier morphisme est surjectif, comme on l'a vu au lemme 6.1.3, et l'inclusion $E_\infty^{0,k} \hookrightarrow E_2^{0,k}$ est en fait une égalité, d'après le théorème de dégénérescence 6.1.4. Ainsi, l'image du morphisme de restriction $H^k(X^o, \mathbb{Q}) \rightarrow H^k(X_{s_o}, \mathbb{Q})$ est l'espace des classes invariantes par la monodromie.

Nous pouvons conclure en utilisant le

Lemme 6.1.8. *L'image du morphisme de restriction $H^k(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^k(X_{s_o}, \mathbb{Q})$ est égale à celle de $H^k(X^o, \mathbb{Q}) \rightarrow H^k(X_{s_o}, \mathbb{Q})$.*

La démonstration de ce lemme utilise la théorie de Hodge mixte (cf. [4, cor. 3.2.18]). \square

La deuxième application entre dans le cadre des théorème de semi-simplicité ou de décomposition. Le résultat affirme que, dans les conditions ci-dessus, le complexe $Rf_* \mathbb{Q}_{X^o}$ se décompose en la somme directe de ses groupes de cohomologie. Nous verrons la puissance de ce type de résultat comme conséquence du théorème de décomposition au § 6.6.

Théorème 6.1.9 (de décomposition de l'image directe [3]). *Sous les conditions précédentes, le complexe $Rf_* \mathbb{Q}_{X^o}$ est isomorphe, dans la catégorie dérivée $D^b(\mathbb{Q}_{S^o})$ des complexes bornés de \mathbb{Q} -espaces vectoriels, à un complexe à différentielles nulles, c'est-à-dire au complexe $\bigoplus_k R^k f_* \mathbb{Q}_{X^o}[-k]$, somme directe des faisceaux de cohomologie convenablement décalés (et où les différentielles sont nulles).*

Rappelons que la notation $\mathcal{F}[-k]$ désigne le complexe dont le seul terme non nul est \mathcal{F} en degré k . Ce complexe n'a de cohomologie qu'en degré k , et cette cohomologie est égale à \mathcal{F} .

Démonstration. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on a une suite spectrale de terme

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_{\mathbb{Q}_{S^0}}(R^k f_* \mathbb{Q}_{X^0}, R^q f_* \mathbb{Q}_{X^0})$$

qui converge vers $\text{Hom}_{D^b(\mathbb{Q}_{S^0})}(R^k f_* \mathbb{Q}_{X^0}, \mathbf{R}f_* \mathbb{Q}_{X^0}[p+q])$. On a en particulier un homomorphisme naturel

$$\text{Hom}_{D^b(\mathbb{Q}_{S^0})}(R^k f_* \mathbb{Q}_{X^0}, \mathbf{R}f_* \mathbb{Q}_{X^0}[k]) \longrightarrow E_2^{0,k} = \text{Hom}(R^k f_* \mathbb{Q}_{X^0}, R^k f_* \mathbb{Q}_{X^0})$$

qui est celui déduit de $\mathbf{R}f_* \mathbb{Q}_{X^0}[k] \rightarrow H^0(\mathbf{R}f_* \mathbb{Q}_{X^0}[k]) = R^k f_* \mathbb{Q}_{X^0}$. En particulier, si la suite spectrale dégénère en E_2 , ce morphisme est *surjectif*, puisque celui à valeurs dans E_∞ l'est (cf. lemme 6.1.3). Dans ces conditions, il existe des morphismes $a_k : R^k f_* \mathbb{Q}_{X^0}[-k] \rightarrow \mathbf{R}f_* \mathbb{Q}_{X^0}$ tels que $H^k(a_k) = \text{Id} : R^k f_* \mathbb{Q}_{X^0} \rightarrow R^k f_* \mathbb{Q}_{X^0}$. On en déduit ainsi, puisque $\mathbf{R}f_* \mathbb{Q}_{X^0}$ est un complexe borné, un morphisme

$$\sum_k a_k : \bigoplus_k R^k f_* \mathbb{Q}_{X^0}[-k] \longrightarrow \mathbf{R}f_* \mathbb{Q}_{X^0}$$

qui induit l'identité en cohomologie, donc qui est un isomorphisme dans la catégorie dérivée.

La propriété de dégénérescence de la suite spectrale s'obtient exactement comme dans le théorème 6.1.4. \square

6.2. Le théorème de semi-simplicité

Nous allons généraliser le corollaire 4.3.7 pour d'autres familles que celle des sections hyperplanes d'un pinceau de Lefschetz. Soit donc $f : X \rightarrow S$ un morphisme de variétés projectives lisses connexes, et soit S^0 un ouvert de Zariski dense de S au-dessus duquel f est lisse. Posons encore $X^0 = f^{-1}(S^0)$.

Théorème 6.2.1 (de semi-simplicité). *Dans ces conditions, les faisceaux localement constants $R^k f_* \mathbb{Q}_{X^0}$ sont complètement réductibles, i.e. sommes directes de faisceaux localement constants irréductibles de \mathbb{Q}_{X^0} -espaces vectoriels.*

Joint au théorème 6.1.9, le résultat montre que le complexe $\mathbf{R}f_* \mathbb{Q}_X$ lui-même se décompose, dans la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux de \mathbb{Q}_{S^0} -espaces vectoriels, en une somme directe $\bigoplus_j \mathcal{L}_j[n_j]$, où les \mathcal{L}_j sont des faisceaux localement constants irréductibles de \mathbb{Q}_{S^0} -espaces vectoriels, et les n_j sont des entiers convenables.

6.2.a. Représentations complètement réductibles. Rappelons quelques résultats classiques de théorie des représentations linéaires de dimension finie. Soit Π un groupe et ρ une représentation linéaire de Π sur un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps k . Nous considérerons essentiellement les corps $k = \mathbb{Q}$ et $k = \mathbb{C}$. Ainsi, ρ est un homomorphisme $\Pi \rightarrow \text{GL}(V)$. Nous dirons que V est un Π -module (il serait plus correct d'introduire l'algèbre associative — mais non commutative en général — $\mathbb{C}[\Pi]$ du groupe Π , formée des combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{C} des éléments de Π , et de parler de $\mathbb{C}[\Pi]$ -module à gauche). Les sous-espace de V stables par $\rho(\Pi)$ correspondent donc aux sous- Π -modules de V .

Nous dirons qu'un Π -module V est *irréductible* s'il n'a pas de sous- Π -module non trivial. Alors, tout homomorphisme entre deux Π -modules irréductibles est soit nul, soit un isomorphisme (lemme de Schur). Si le corps k est algébriquement clos, tout automorphisme d'un Π -module irréductible est un multiple (non nul) de l'identité (considérer un espace propre de l'automorphisme).

Proposition 6.2.2. *Pour un Π -module V , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Le Π -module V est semi-simple, i.e. tout sous- Π -module admet un sous- Π -module supplémentaire.*
- (2) *Le Π -module V est complètement réductible, i.e. V admet une décomposition (en général non unique) en somme directe de sous- Π -modules irréductibles.*
- (3) *Le Π -module V est engendré par ses sous- Π -modules irréductibles.*

Démonstration. Le seul point qui ne soit pas évident est (3) \Rightarrow (1). Soit donc W un sous- Π -module de V . Nous montrons le résultat par récurrence sur $\text{codim } W$, celui-ci étant clair pour $\text{codim } W = 0$. Si $\text{codim } W \geq 1$, il existe, par hypothèse, un sous- Π -module irréductible $V_1 \subset V$ non contenu dans W et non trivial. Par irréductibilité de V_1 , on a $W \cap V_1 = \{0\}$ et $W_1 = W \oplus V_1$ est un sous- Π -module de V auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Si W'_1 est un Π -module supplémentaire de W_1 , alors $W' = W'_1 \oplus V_1$ est un Π -module supplémentaire de W . \square

Il résulte alors du lemme de Schur qu'un Π -module complètement réductible admet une décomposition *unique* en somme directe

$$V = \bigoplus_i V_i = \bigoplus_i (V_i^o \otimes E_i),$$

dans laquelle les *composantes isotypiques* V_i sont des sous- Π -modules de la forme $V_i^o \otimes E_i$, où V_i^o est un Π -module irréductible, V_i^o n'est pas isomorphe à V_j^o pour $i \neq j$, et E_i est un Π -module trivial, i.e. sur lequel Π agit par l'identité.

On voit aussi que si W est un sous- Π -module d'un Π -module complètement réductible V , il est lui-même complètement réductible et sa décomposition isotypique est donnée par

$$W = \bigoplus_i (W \cap V_i),$$

dans laquelle $W \cap V_i = V_i^o \otimes F_i$ pour un certain sous-espace F_i de E_i . Un Π -module supplémentaire de W s'obtient alors en choisissant pour chaque i un k -espace vectoriel supplémentaire de F_i dans E_i .

Remarques 6.2.3. Les propriétés ci-dessus ont des conséquences faciles à démontrer.

(1) Un \mathbb{Q} -espace vectoriel $V_{\mathbb{Q}}$ est un Π -module semi-simple *si et seulement si* l'espace complexe $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}}$ est un Π -module semi-simple (pour la représentation complexifiée). Il en résulte par exemple que les énoncés 6.2.1 pour \mathbb{Q}_{X^o} ou \mathbb{C}_{X^o} sont équivalents.

Rappelons d'abord que le groupe $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ opère sur $V_{\mathbb{C}}$: si $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est \mathbb{Q} -une base de $V_{\mathbb{Q}}$, alors, pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $\sigma \in \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$, on pose $\sigma(\sum_i a_i \varepsilon_i) = \sum_i \sigma(a_i) \varepsilon_i$. Un sous-espace $W_{\mathbb{C}}$ de $V_{\mathbb{C}}$ est « défini sur \mathbb{Q} », i.e. de la forme $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} W_{\mathbb{Q}}$ pour un sous-espace $W_{\mathbb{Q}}$ de $V_{\mathbb{Q}}$, si et seulement si il est laissé stable par tout automorphisme $\sigma \in \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$: en effet, si $d = \dim_{\mathbb{C}} W_{\mathbb{C}}$, on peut, quitte à renuméroter la base $\boldsymbol{\varepsilon}$, trouver une base e_1, \dots, e_d de $W_{\mathbb{C}}$

telle que

$$\begin{aligned} e_1 &= \varepsilon_1 + a_{1,2}\varepsilon_2 + \cdots + a_{1,d}\varepsilon_d + \cdots + a_{1,n}\varepsilon_n \\ e_2 &= \varepsilon_2 + \cdots + a_{1,d}\varepsilon_d + \cdots + a_{2,n}\varepsilon_n \\ &\vdots \\ e_d &= \varepsilon_d + \cdots + a_{d,n}\varepsilon_n, \end{aligned}$$

où les $a_{i,j}$ sont dans \mathbb{C} ; on montre alors par récurrence descendante sur $i \in \{d, \dots, 1\}$ que, si $W_{\mathbb{C}}$ est stable par $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$, les $a_{i,j}$ sont invariants par tout automorphisme de \mathbb{C} sur \mathbb{Q} , i.e. sont dans \mathbb{Q} par séparabilité de \mathbb{C} sur \mathbb{Q} .

Revenons à l'assertion. Supposons d'abord $V_{\mathbb{Q}}$ irréductible et considérons le sous-espace $W_{\mathbb{C}}$ de $V_{\mathbb{C}}$ engendré par les sous- Π -modules de dimension minimale (donc irréductibles). Puisque la représentation de Π est définie sur \mathbb{Q} , si $E_{\mathbb{C}}$ est un Π -module, il en est de même de $\sigma(E_{\mathbb{C}})$ pour tout $\sigma \in \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$; ainsi l'espace $W_{\mathbb{C}}$ est invariant par $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$, autrement dit est de la forme $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} W_{\mathbb{Q}}$ pour un certain sous-espace $W_{\mathbb{Q}}$ de $V_{\mathbb{Q}}$. Il est clair que $W_{\mathbb{Q}}$ est un sous- Π -module de $V_{\mathbb{Q}}$, donc $W_{\mathbb{Q}} = V_{\mathbb{Q}}$. Par le critère 6.2.2(3), $V_{\mathbb{C}}$ est semi-simple.

Réciproquement, supposons $V_{\mathbb{C}}$ semi-simple. Choisissons une forme \mathbb{Q} -linéaire $\ell : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Q}$ telle que $\ell(1) = 1$. Elle définit une application \mathbb{Q} -linéaire $L : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{Q}}$ qui est Π -invariante et qui induit l'identité sur $V_{\mathbb{Q}}$. Soit $W_{\mathbb{Q}}$ un sous- Π -module de $V_{\mathbb{Q}}$. On a une projection Π -invariante $V_{\mathbb{C}} \rightarrow W_{\mathbb{C}}$, d'où une projection composée p qui est Π -invariante,

$$\begin{array}{ccccc} V_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & W_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{L} & W_{\mathbb{Q}} \\ \uparrow & & & \nearrow p & \\ V_{\mathbb{Q}} & & & & \end{array}$$

ce qui donne un Π -module supplémentaire de $W_{\mathbb{Q}}$ dans $V_{\mathbb{Q}}$.

(2) Si $\Pi'' \rightarrow \Pi$ est un homomorphisme surjectif de groupes et ρ'' est la représentation composée, alors V est un Π -module semi-simple si et seulement si c'est un Π'' -module semi-simple. En effet, la structure de Π -module ne dépend que de l'image $\rho(\Pi) \subset \text{GL}(V)$.

(3) Soit $\Pi' \subset \Pi$ un sous-groupe *distingué*, et soit V un Π -module. Alors, si V est semi-simple comme Π -module, il l'est aussi comme Π' -module. En effet, si V' est un sous- Π' -module irréductible de V , alors $\rho(\pi)V'$ l'est encore, pour tout $\pi \in \Pi$. Si V est Π -irréductible et si V' est un sous- Π' -module irréductible non nul, le sous- Π' -module engendré par les $\rho(\pi)V'$ est un Π -module, donc est égal à V . Par conséquent, V est engendré par ses sous- Π' -modules irréductibles, donc est Π' -semi-simple par le critère 6.2.2(3).

6.3. La notion de perversité

6.4. Cohomologie d'intersection et faisceaux pervers irréductibles

6.5. Cycles proches et cycles évanescents, filtration monodromique

6.6. Le théorème de décomposition

Références

[1] A.A. BEILINSON, J.N. BERNSTEIN & P. DELIGNE – « Faisceaux pervers », in *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, Astérisque, vol. 100, Société Mathématique de France, 1982, p. 7–171.

- [2] R. BOTT & L. TU – *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Math., vol. 82, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1982.
- [3] P. DELIGNE – « Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **35** (1968), p. 107–126.
- [4] ———, « Théorie de Hodge II », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **40** (1971), p. 5–57.
- [5] C. EHRESMANN – « Sur les espaces fibrés différentiables », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **224** (1947), p. 1611–1612.
- [6] R. GODEMENT – *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1964.
- [7] D. PERRIN – *Géométrie algébrique*, Savoirs Actuels, CNRS Éditions & EDP Sciences, Paris, 1995.