

---

# DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE DISTRIBUTIONS HOLONOMES D'UNE VARIABLE COMPLEXE

PAR CLAUDE SABBABH

---

RÉSUMÉ. — Nous donnons la forme générale d'un germe de distribution holonome d'une variable complexe.

ABSTRACT (*Asymptotic expansion of holonomic distributions of one complex variable*)

We give the general form for a germ of holonomic distribution of one complex variable.

## Introduction

Dans cet article, nous utilisons la notion de « dual hermitien d'un  $\mathcal{D}$ -module » introduite par M. Kashiwara [3] (voir aussi [2]) pour donner la forme générale d'un germe de distribution d'une variable complexe satisfaisant à une équation différentielle holomorphe. Le cas où l'équation est à singularité régulière est bien connu (voir par exemple [1]). Nous utilisons ici le fait que le dual hermitien d'un  $\mathcal{D}$ -module holonome d'une variable complexe est encore holonome : c'est un cas particulier d'une conjecture générale de M. Kashiwara ; ce cas particulier est montré dans [6], en analysant la dualité hermitienne au niveau des cocycles de Stokes.

Nous négligerons ci-dessous les distributions à support ponctuel (masses de Dirac) et travaillerons avec les germes de distributions modérées.

---

CLAUDE SABBABH, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz,  
École polytechnique, F-91128 Palaiseau cedex, France  
*E-mail* : [sabbah@math.polytechnique.fr](mailto:sabbah@math.polytechnique.fr)  
*Url* : <http://www.math.polytechnique.fr/~sabbah>

Classification mathématique par sujets (2000). — 46Fxx, 34M30, 34M35, 34M40.

Mots clefs. — Distribution, développement asymptotique, holonome, D-module.

### 1. Développement asymptotique de distributions holonomes

Soit  $X$  un disque centré en 0 dans  $\mathbb{C}$ , muni de la coordonnée  $x$ . Soit  $u$  un germe en 0 de distribution holonome modérée en 0 sur  $X$  : autrement dit,

(1) il existe un voisinage ouvert  $U$  de 0 dans  $X$  tel que  $u$  soit une distribution sur  $U^* = U \setminus \{0\}$  qui soit la restriction d'une distribution sur  $U$  (l'espace correspondant est noté  $\mathfrak{D}\mathfrak{b}^{\text{mod}0}(U)$ ),

(2) il existe un opérateur différentiel linéaire holomorphe non identiquement nul  $P \in \mathcal{O}(U)\langle \partial_x \rangle$  tel que l'on ait  $P \cdot u = 0$  dans  $\mathfrak{D}\mathfrak{b}^{\text{mod}0}(U)$ .

On peut supposer que  $U$  est choisi de sorte que  $P$  n'ait de singularité qu'en  $0 \in X$ .

Soit  $\pi : Y \rightarrow X$ ,  $y \mapsto y^q = x$ , un revêtement ramifié de degré  $q \in \mathbb{N}^*$ . Alors l'image inverse par  $\pi$  d'une distribution modérée en 0 est bien définie comme distribution modérée en 0 sur  $Y$ . Si  $u$  est holonome,  $\pi^*u$  l'est aussi.

**THÉORÈME.** — *Soit  $u$  un germe en 0 de distribution holonome modérée sur  $X$ . Alors il existe :*

- un entier  $q$ , donnant lieu à un revêtement ramifié  $\pi : Y \rightarrow X$ ,
- un ensemble fini  $\Phi \subset y^{-1}\mathbb{C}[y^{-1}]$ ,
- pour tout  $\varphi \in \Phi$ , un ensemble fini  $B_\varphi \subset \mathbb{C}$  et un entier  $L_\varphi \in \mathbb{N}$ ,
- pour tous  $\varphi \in \Phi$ ,  $\beta \in B_\varphi$  et  $\ell = 0, \dots, L_\varphi$ , une fonction  $f_{\varphi, \beta, \ell} \in \mathcal{C}^\infty(Y)$

tels que l'on ait, dans  $\mathfrak{D}\mathfrak{b}^{\text{mod}0}(V)$  et en particulier dans  $C^\infty(V^*)$  (où  $V$  est un voisinage assez petit de 0 dans  $Y$ ), l'égalité

$$(*) \quad \pi^*u = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\beta \in B_\varphi} \sum_{\ell=0}^{L_\varphi} f_{\varphi, \beta, \ell}(y) e^{\varphi - \bar{\varphi}} |y|^{2\beta} L(y)^\ell,$$

où on a noté

$$L(y) := |\log |y|^2|.$$

Notons que, pour  $\varphi \in y^{-1}\mathbb{C}[y^{-1}]$ , la fonction  $e^{\varphi - \bar{\varphi}}$  est un multiplicateur dans  $\mathfrak{D}\mathfrak{b}^{\text{mod}0}(V)$  (car c'est une fonction  $C^\infty$  sur  $V^*$ , à croissance modérée à l'origine ainsi que toutes ses dérivées). Il en est de même des fonctions  $|y|^{2\beta}$  et  $L(y)^\ell$ .

Avant de montrer le théorème, nous allons préciser les  $\varphi, \beta$  tels que  $f_{\varphi, \beta, \ell} \neq 0$  pour un certain  $\ell$ , en rappelant d'abord des résultats classiques sur la structure des connexions méromorphes d'une variable (cf. [4] par exemple).

Soit  $M$  un germe en  $x = 0$  de fibré méromorphe muni d'une connexion  $\nabla$ , i.e. un  $\mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une connexion. Soit  $\pi : y \mapsto x = y^q$  une ramification telle que le formalisé ramifié  $\widehat{N} := \pi^+ \widehat{M}$  soit isomorphe au formalisé d'un fibré méromorphe à connexion élémentaire, i.e. de la forme  $N^{\text{él}} = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} (E^\varphi \otimes R_\varphi)$ , où les  $R_\varphi$  sont à singularité régulière et  $E^\varphi$  est égal à  $\mathcal{O}_X$  muni de la connexion telle que  $\nabla 1 = d\varphi$ ; on note, pour

plus de clarté, « $e^\varphi$ » la section 1 de  $E^\varphi$ . Le groupe  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  agit naturellement sur  $\widehat{N}$ .

On note  $V^\bullet M$  la filtration décroissante (indexée par  $\mathbb{R}$ ) de Deligne du fibré méromorphe  $M$  : chaque  $V^b M$  est de type fini sur  $\mathbb{C}\{x\}\langle x\partial_x \rangle$ , et le gradué  $\mathrm{gr}_V^b M := V^b M / V^{>b} M$  est un espace vectoriel de dimension finie sur lequel l'endomorphisme induit par  $x\partial_x$  a ses valeurs propres  $\beta$  de partie réelle égale à  $b$ . On note alors  $\psi_x^\beta M \subset \mathrm{gr}_V^b M$  le sous-espace propre généralisé associé à  $\beta$ . La multiplication par  $x^k$  induit un isomorphisme  $\mathrm{gr}_V^b M \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_V^{b+k} M$  qui transforme  $x\partial_x$  et  $x\partial_x + k$ , donc qui induit un isomorphisme  $\psi_x^\beta M \xrightarrow{\sim} \psi_x^{\beta+k} M$ .

La construction peut aussi être appliquée au formalisé  $\widehat{M}$  et il est connu que  $\mathrm{gr}_V^b \widehat{M} = \mathrm{gr}_V^b M$  et  $\psi_x^\beta \widehat{M} = \psi_x^\beta M$ .

Par ailleurs, si  $N = \pi^+ M$  comme ci-dessus, on a  $V^b M = (V^{qb} N)^{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}$  (on utilise le fait que, sur  $1 \otimes M$ ,  $y\partial_y$  agit comme  $q \mathrm{Id} \otimes x\partial_x$ ). Enfin, en utilisant la décomposition de  $\widehat{N} = \widehat{N}^{\mathrm{él}}$ , on a  $V^b(E^\varphi \otimes R_\varphi) = E^\varphi \otimes R_\varphi$  pour tout  $b \in \mathbb{R}$  si  $\varphi \neq 0$ . Ainsi,  $\psi_y^\beta N = \psi_y^\beta \widehat{N} = \psi_y^\beta R_0$ .

Revenons maintenant à la situation du théorème. Dans la suite, on travaille sur un voisinage assez petit de 0 qu'on ne précise pas, et qu'on note toujours  $X$  ou  $Y$ .

Soit  $M$  le  $\mathcal{O}_X[x^{-1}]$ -module engendré par  $u$  dans  $\mathfrak{D}\mathfrak{b}^{\mathrm{mod}0}(X)$ . Alors  $M$  est un  $\mathcal{O}_X[x^{-1}]$ -module localement libre de rang fini muni d'une connexion, induite par l'action de  $\partial_x$ . Soit  $\pi : Y \rightarrow X$  une ramification telle que  $N := \pi^+ M$  soit formellement isomorphe à  $N^{\mathrm{él}} = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} (E^\varphi \otimes R_\varphi)$ . On identifie le germe de fibré à connexion  $\pi^+ N$  au  $\mathcal{O}_Y[y^{-1}]$ -sous-module de  $\mathfrak{D}\mathfrak{b}^{\mathrm{mod}0}(Y)$  engendré par la distribution modérée  $v = \pi^* u$ . Par ailleurs,  $N$  est de la forme  $\mathcal{O}_Y/(Q)$  pour un certain opérateur différentiel holomorphe  $Q$  qui annule  $v$ .

**DÉFINITION.** — On dira que la distribution holonome modérée  $u$  est *sans ramification* si on peut choisir  $\pi = \mathrm{Id}$  ci-dessus.

On travaillera directement avec la distribution holonome modérée sans ramification  $v = \pi^* u$ . Pour  $\varphi \in y^{-1}\mathbb{C}[y^{-1}]$ , soit  $N_\varphi$  le  $\mathcal{O}_Y[y^{-1}]$ -module engendré par  $e^{\bar{\varphi}-\varphi} v$  dans  $\mathfrak{D}\mathfrak{b}^{\mathrm{mod}0} Y$ . C'est aussi un  $\mathcal{O}_X[x^{-1}]$ -module localement libre de rang fini muni d'une connexion.

Pour tout  $\beta \in \mathbb{C}$ , on note  $L'_{\varphi,\beta}(v)$  l'ordre de nilpotence de  $y\partial_y - \beta$  sur  $\psi_y^\beta(N_\varphi)$ . On a bien sûr  $L'_{\varphi,\beta}(v) = L'_{\varphi,\beta+k}(v)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Il existe alors un ensemble fini minimal  $B'_\varphi(v) \subset \mathbb{C}$  tel que, pour tout  $j \in \mathbb{N}$  on puisse trouver un entier  $k(j)$  et un opérateur  $P_j \in \mathbb{C}\{y\}\langle y\partial_y \rangle$  tels que

$$(1) \quad \left[ \prod_{k=0}^{k(j)} \prod_{\beta \in B'_\varphi(v)} [-(y\partial_y - \beta - k)]^{L'_{\varphi,\beta}} - y^j P_j \right] \cdot e^{\bar{\varphi}-\varphi} v = 0.$$

REMARQUE. — Pour presque tout  $\varphi$ , on a  $B'_\varphi(v) = \emptyset$ . On note  $\Phi(v)$  l'ensemble des  $\varphi$  pour lesquels la composante  $E^\varphi \otimes R'_\varphi$  de  $\mathcal{D}_Y[y^{-1}] \cdot v$  n'est pas nulle. C'est aussi l'ensemble des  $\varphi$  pour lesquels la composante  $\overline{E^{-\varphi}} \otimes \overline{R''_\varphi}$  de  $\mathcal{D}_{\overline{Y}}[1/\overline{y}] \cdot v$  n'est pas nulle.

On définit de manière conjuguée les objets  $L''_{\varphi,\beta}$  et  $B''_\varphi(v)$ . On pose alors

$$B_\varphi(v) = \left[ (B'_\varphi(v) - \mathbb{N}) \cap B''_\varphi(v) \right] \cup \left[ B'_\varphi(v) \cap (B''_\varphi(v) - \mathbb{N}) \right].$$

Autrement dit,  $\beta \in B_\varphi(v)$  si et seulement si  $\beta \in B'_\varphi(v) \cup B''_\varphi(v)$  et  $(\beta + \mathbb{N}) \cap B'_\varphi(v) \neq \emptyset$  et  $(\beta + \mathbb{N}) \cap B''_\varphi(v) \neq \emptyset$ . Pour tout  $\beta \in \mathbb{C}$ , on pose  $L_{\varphi,\beta}(v) = \min\{L'_{\varphi,\beta}(v), L''_{\varphi,\beta}(v)\}$ , et on a  $L_{\varphi,\beta+k}(v) = L_{\varphi,\beta}(v)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

Enfin, si  $f \in C^\infty(Y)$ , on développe  $f$  par rapport à  $y, \overline{y}$  et on peut associer à ce développement un ensemble minimal  $E(f) \subset \mathbb{N}^2$  tel que  $f = \sum_{(\nu', \nu'') \in E(f)} y^{\nu'} \overline{y}^{\nu''} g_{(\nu', \nu'')}$  avec  $g_{(\nu', \nu'')} \in C^\infty(Y)$ . La minimalité de  $E(f)$  implique en particulier que  $g_{(\nu', \nu'')}(0) \neq 0$  si  $(\nu', \nu'') \in E(f)$ . On convient que  $E(f) = \emptyset$  si  $f$  est infiniment plate en 0.

COROLLAIRE 1. — Soit  $v$  une distribution holonome modérée sans ramification. Alors  $v$  admet un développement (\*) dans  $\mathfrak{D}\mathfrak{h}_Y^{\text{mod } 0}$ , avec  $\Phi = \Phi(v)$  et  $\beta \in B_\varphi(v)$ . De plus, si  $f_{\varphi,\beta,\ell} \neq 0$  et si le point  $(k', k'') \in \mathbb{N}^2$  est dans  $E(f_{\varphi,\beta,\ell})$ , alors  $\beta + k' \in B'_\varphi(v) + \mathbb{N}$  et  $\beta + k'' \in B''_\varphi(v) + \mathbb{N}$ .

Démonstration. — Nous supposons le théorème démontré. On utilise la transformation de Mellin pour raisonner sur chaque coefficient du développement (\*). Soit  $\chi$  une fonction  $C^\infty$  à support compact contenu dans un ouvert où  $v$  est définie, identiquement égale à 1 près de 0. On note de la même manière la forme  $\chi \frac{i}{2\pi} dy \wedge d\overline{y}$ . Par ailleurs, choisissons une distribution  $\tilde{v}$  induisant  $v$  sur  $Y^*$  et soit  $p$  son ordre sur le support de  $\chi$ . Nous allons d'abord considérer les coefficients pour lesquels  $\varphi = 0$ .

Pour tous  $k', k'' \in \mathbb{N}$ , la fonction  $s \mapsto \langle \tilde{v}, |y|^{2s} y^{-k'} \overline{y}^{-k''} \chi \rangle$  est définie et holomorphe sur le demi-plan  $2 \operatorname{Re} s > p + k' + k''$ . Pour tout  $j \geq 1$ , notons  $Q_j$  l'opérateur apparaissant dans (1) (pour  $\varphi = 0$ ). Alors  $Q_j \cdot \tilde{v}$  est à support l'origine. Il sera commode dans la suite d'utiliser la notation  $\alpha$  pour  $-\beta - 1$  et noter  $A'_\varphi(v) = \{\alpha \mid \beta = -\alpha - 1 \in B'_\varphi(v)\}$ . On en déduit alors que, sur un demi-plan  $\operatorname{Re} s \gg 0$ , la fonction

$$\left[ \prod_{k=0}^{k(j)} \prod_{\alpha \in A'_0(v)} (s - \alpha - k' + k)^{L'_{0,\alpha}} \right] \langle \tilde{v}, |y|^{2s} y^{-k'} \overline{y}^{-k''} \chi \rangle$$

coïncide avec une fonction holomorphe sur  $2 \operatorname{Re} s > p + k' + k'' - j$ . En appliquant le même argument de manière anti-holomorphe, on trouve que, pour tous  $k', k'' \in \mathbb{N}$ , la fonction  $s \mapsto \langle \tilde{v}, |y|^{2s} y^{-k'} \overline{y}^{-k''} \chi \rangle$  s'étend en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  à pôles contenus dans  $(A'_0(v) + k' - \mathbb{N}) \cap (A''_0(v) + k'' - \mathbb{N})$ ,

l'ordre du pôle en  $\alpha + \mathbb{Z}$  étant majoré par  $L_{0,\alpha}(v)$ . De plus, cette fonction ne dépend pas du choix du relèvement  $\tilde{v}$ .

Calculons maintenant la transformée de Mellin du développement (\*) pour  $v$ .

LEMME 1. — *Si  $\varphi \neq 0$ , alors, pour toute fonction  $g \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ , la transformée de Mellin de  $g(y)e^{\varphi-\bar{\varphi}}|y|^{2\beta}\mathbf{L}(y)^\ell$  est une fonction entière.*

*Démonstration.* — On montre que cette transformée de Mellin est holomorphe sur tout demi-plan  $\operatorname{Re} s > -p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ). Pour cela, pour  $p$  fixé, on décompose  $g$  comme la somme d'un polynôme en  $y, \bar{y}$  et d'un reste qui s'annule à un ordre assez grand à l'origine pour que la partie correspondante de la transformée de Mellin soit holomorphe sur  $\operatorname{Re} s > -p$ . On est donc ramené à supposer que  $g$  est un monôme en  $y, \bar{y}$ . Il existe alors des équations fonctionnelles holomorphe et anti-holomorphe pour la distribution modérée  $g(y)e^{\varphi-\bar{\varphi}}|y|^{2\beta}\mathbf{L}(y)^\ell$  avec polynôme de Bernstein égal à 1. On peut ainsi utiliser le même argument que ci-dessus, avec un terme entre crochets égal à 1.  $\square$

Considérons donc les termes du développement (\*) de  $v$  pour lesquels  $\varphi = 0$ . Il n'est pas restrictif de supposer que deux éléments distincts de l'ensemble d'indices  $B_0$  qui intervient dans (\*) ne diffèrent pas d'un entier, et que tout élément  $\beta$  de  $B_0$  est maximal, en ce sens que l'escalier  $\bigcup_\ell E(f_{0,\beta,\ell})$  est contenu dans  $\mathbb{N}^2$  et dans aucun  $(m, m) + \mathbb{N}^2$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\beta \in B_0$ . Nous utiliserons le fait que, pour tous  $(\nu', \nu'') \in \mathbb{Z}^2$  non tous deux strictement négatifs et toute fonction  $g \in C^\infty(Y)$  telle que  $g(0) \neq 0$ , la fonction méromorphe  $s \mapsto \langle g(y)|y|^{2\beta}\mathbf{L}(y)^\ell, |y|^{2s}y^{\nu'}\bar{y}^{\nu''}\chi \rangle$  a ses pôles contenus dans  $\alpha - \mathbb{N}$  (avec  $\alpha = -\beta - 1$ ), et a un pôle en  $\alpha$  si et seulement si  $\nu' = 0$  et  $\nu'' = 0$ , ce pôle étant alors d'ordre  $\ell + 1$  exactement.

Pour  $\beta \in B_0$ , soit  $E_\beta \subset \mathbb{N}^2$  un ensemble minimal tel que  $E_\beta + \mathbb{N}^2 = \bigcup_\ell (E(f_{0,\beta,\ell}) + \mathbb{N}^2)$ . On déduit de ce qui précède et du développement (\*) que, pour tout  $(k', k'') \in E_\beta$ , la fonction  $s \mapsto \langle \tilde{v}, |y|^{2s}y^{-k'}\bar{y}^{-k''}\chi \rangle$  a un pôle non trivial en  $\alpha$ ; de la première partie de la preuve on conclut que  $\alpha - k' \in A'_0(v) - \mathbb{N}$  et  $\alpha - k'' \in A''_0(v) - \mathbb{N}$ , c'est-à-dire  $\beta + k' \in B'_0(v) + \mathbb{N}$  et  $\beta + k'' \in B''_0(v) + \mathbb{N}$ . Par hypothèse sur  $B_0$ , il existe  $(k', k'') \in E_\beta$  avec  $k' = 0$  ou  $k'' = 0$ . Il en résulte que  $\beta \in B_\varphi(v)$  et que la condition donnée dans l'énoncé du corollaire est satisfaite par les éléments de  $E_\beta$ . Elle est alors aussi trivialement satisfaite par les éléments de tous les  $E(f_{0,\beta,\ell})$ .

Pour obtenir le résultat pour les  $f_{\varphi,\beta,\ell}$ , on applique le résultat précédent à la distribution modérée  $e^{\bar{\varphi}-\varphi}v$ .  $\square$

*Démonstration du théorème.* — Nous utiliserons le résultat suivant :

THÉORÈME ([6, Prop. II.3.2.5]). — *Pour  $M$  comme ci-dessus, le  $\mathcal{O}_{\bar{X}}[\bar{x}^{-1}]$ -module  $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathfrak{D}_X^{\text{mod } 0})$  est libre (de même rang que  $M$ ) et muni d'une connexion anti-holomorphe, donc est un  $\mathcal{D}_{\bar{X}}$ -module holonome.*  $\square$

On note  $C_X^{\text{mod}0}M = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod}0})$ . On a donc un accouplement  $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -linéaire canonique

$$k : M \otimes_{\mathbb{C}} C_X^{\text{mod}0}M \longrightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod}0}, \quad (m, \varphi) \longmapsto \varphi(m).$$

Puisque  $M$  est engendré par  $u$  sur  $\mathcal{D}_X[x^{-1}]$ ,  $\varphi \in C_X^{\text{mod}0}M$  est déterminé par sa valeur  $\varphi(u) \in \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod}0}$ . Il existe donc une section  $\mathbf{1}_u$  de  $C_X^{\text{mod}0}M$  telle que  $\mathbf{1}_u(u) = u$ .

Tout revient ainsi à montrer le théorème dans le cas où

$$k : M' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M''} \longrightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod}0}$$

est un accouplement sesquilinéaire entre deux  $\mathcal{O}_X[x^{-1}]$ -modules libres de rang fini à connexion,  $m', m''$  en sont deux sections locales, et  $u = k(m', \overline{m''})$ .

On se ramène, par un revêtement cyclique, au cas où  $M'$  et  $M''$  admettent chacun une décomposition formelle modelée sur  $M'^{\text{él}}$  et  $M''^{\text{él}}$  (si  $M'' = C_X^{\text{mod}0}M'$ , un revêtement qui convient pour l'un convient aussi pour l'autre).

On travaille ensuite avec l'image inverse par l'éclatement réel  $e : \tilde{Y} \rightarrow Y$  de l'origine. On note  $\mathcal{A}_{\tilde{Y}}$  le faisceau des fonctions  $C^\infty$  sur  $\tilde{Y}$  annihilées par l'opérateur de Cauchy-Riemann  $\overline{y}\partial_y$ ,  $\mathcal{D}_{\tilde{Y}} = \mathcal{A}_{\tilde{Y}} \otimes_{e^{-1}\mathcal{O}_Y} e^{-1}\mathcal{D}_Y$  et  $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{Y}}^{\text{mod}0}$  le faisceau sur  $\tilde{Y}$  des distributions modérées le long de  $e^{-1}(0) = S^1$ . On note enfin  $\tilde{M} = \mathcal{A}_{\tilde{Y}} \otimes_{e^{-1}\mathcal{O}_Y} e^{-1}M$ . C'est un  $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$ -module à gauche, qui est  $\mathcal{A}_{\tilde{Y}}[y^{-1}]$ -libre.

L'accouplement  $k$  s'étend de manière unique en un accouplement  $\mathcal{D}_{\tilde{Y}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{\tilde{Y}}$ -linéaire

$$\tilde{k} : \tilde{M}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\tilde{M}''} \longrightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{Y}}^{\text{mod}0}$$

(simplement parce que  $M$  est  $\mathbb{C}\{y\}[y^{-1}]$ -libre). On alors peut travailler localement sur  $\tilde{Y}$  avec  $\tilde{k}$  et ainsi remplacer, grâce au théorème de Hukuhara-Turrittin (voir par exemple [4]),  $\tilde{M}'$  et  $\overline{\tilde{M}''}$  par leurs modèles élémentaires respectifs  $\oplus_{\varphi}(E^{\varphi} \otimes R'_{\varphi})$  et  $\oplus_{\psi}(E^{-\psi} \otimes \overline{R''_{-\psi}})$ .

LEMME 2. — *Si  $\varphi, \psi \in y^{-1}\mathbb{C}[y^{-1}]$  sont distincts, tout accouplement sesquilinéaire  $\tilde{k}_{\varphi, \psi} = (E^{\varphi} \otimes R'_{\varphi}) \otimes_{\mathbb{C}} (E^{-\psi} \otimes \overline{R''_{-\psi}}) \rightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{Y}}^{\text{mod}0}$  prend ses valeurs dans le sous-faisceau des fonctions à décroissance rapide.*

*Démonstration.* — Puisque  $e^{\psi-\bar{\psi}}$  est un multiplicateur sur  $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{Y}}^{\text{mod}0}$ , on peut se ramener au cas où, par exemple,  $\psi = 0$ . Par récurrence sur le rang de  $R'_{\varphi}$  et  $R''_0$ , on se ramène au cas de rang 1, et puisque les fonctions  $y^{\alpha}$  ou  $\bar{y}^{\beta}$  sont aussi des multiplicateurs, on se ramène au cas où  $R'_{\varphi}$  et  $R''_0$  sont égaux à  $\mathcal{O}_Y$ . Alors  $\tilde{u} = \tilde{k}(\ll e^{\varphi} \gg, 1)$  est un germe de distribution modérée sur  $\tilde{Y}$  qui satisfait à  $\bar{\partial}_y \tilde{u} = 0$  et  $\partial_y \tilde{u} = \varphi'(y)\tilde{u}$ . On en déduit  $\tilde{u}|_{Y^*} = e^{\varphi}$ . Donc  $\tilde{u}$  à croissance modérée  $\iff \tilde{u}$  à décroissance rapide.  $\square$

De la même manière (en utilisant la forme normale pour  $R'_0, R''_0$ ), on voit que les termes diagonaux  $k_{\varphi, \varphi}(\tilde{m}', \tilde{m}'')$  se décomposent en somme, à coefficients dans  $\mathcal{C}_{\tilde{Y}}^\infty$ , de termes  $e^{\varphi - \bar{\varphi}} y^{\beta'} \bar{y}^{\beta''} (\log y)^j (\log \bar{y})^k$  ( $\beta', \beta'' \in \mathbb{C}$ ,  $j, k \in \mathbb{N}$ ). On réécrit chacun de ces termes comme une somme, à coefficients dans  $\mathcal{C}_{\tilde{Y}}^\infty$ , de termes  $|y|^{2\beta} L(y)^\ell$  ( $\beta \in \mathbb{C}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ ).

Si  $m', m''$  sont des sections locales de  $M', M''$ , on utilise une partition de l'unité sur  $\tilde{Y}$ . On obtient pour  $e^*k(m', \bar{m}'')$  un développement du type (\*), à coefficients  $\tilde{f}_{\varphi, \beta, \ell}$  dans  $e_*\mathcal{C}_{\tilde{Y}}^\infty$ , à l'ajout près d'une fonction  $C^\infty$  infiniment plate le long de  $e^{-1}(0)$  : on l'incorpore dans un des coefficients  $\tilde{f}_{\varphi, \beta, \ell}$ . On note alors  $\tilde{B}_\varphi$  l'ensemble d'indices  $\beta$  correspondant à  $\varphi$ . Puisque  $|y|$  est  $C^\infty$  sur  $\tilde{Y}$ , on peut supposer que la différence de deux éléments distincts de  $\tilde{B}_\varphi$  n'est pas dans  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ .

Il reste à voir que l'on peut réécrire ce développement avec des coefficients  $f_{\varphi, \beta, \ell}$  dans  $\mathcal{C}_Y^\infty$ . Nous allons utiliser un argument de transformation de Mellin, comme dans le corollaire 1, dont nous n'utiliserons que les notations.

Notons  $y = \rho e^{i\theta}$  en coordonnées polaires. Une fonction  $\tilde{f} \in e_*\mathcal{C}_{\tilde{Y}}^\infty$  admet un développement de Taylor  $\sum_{m \geq 0} \tilde{f}_m(\theta) \rho^m$  où  $\tilde{f}_m(\theta)$  est  $C^\infty$  sur  $S^1$  et se développe en série de Fourier  $\sum_n \tilde{f}_{mn} e^{in\theta}$ . Une telle fonction peut s'écrire sous la forme  $\sum_{k=-2k_0}^0 g_k(y) |y|^k$  avec  $k_0 \in \mathbb{N}$  et  $g_k \in \mathcal{C}^\infty(Y)$  si et seulement si

$$(2) \quad \tilde{f}_{m,n} \neq 0 \implies \frac{m \pm n}{2} \geq -k_0.$$

En effet, si cette condition est satisfaite, on écrit  $\tilde{f}_{m,n} e^{in\theta} \rho^m = \tilde{f}_{m,n} y^{k'} \bar{y}^{k''}$  avec  $k' = (m+n)/2$  et  $k'' = (m-n)/2$ , donc  $k', k'' \geq -k_0$  et  $k' + k'' \geq 0$ . Il existe alors un entier  $k$  compris entre  $-2k_0$  et 0 tel que  $k' - k/2 \in \mathbb{N}$  et  $k'' - k/2 \in \mathbb{N}$ . La partie du développement de Fourier de  $\tilde{f}$  correspondant à  $k$  fixé fournit, par Borel, une fonction  $g_k(y) \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ . La différence  $\tilde{f} - \sum_{k=-2k_0}^0 g_k(y) |y|^k$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $\tilde{Y}$ , infiniment plate le long de  $|y| = 0$ . C'est donc aussi une fonction  $C^\infty$  sur  $Y$ , infiniment plate à l'origine. On l'ajoute à  $g_0$  pour obtenir la décomposition voulue de  $\tilde{f}$ .

La condition (2) peut s'exprimer en terme de transformée de Mellin. On remarque en effet que, pour tous  $k', k'' \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$  tels que  $k' + k'' \in \mathbb{N}$ , la transformée de Mellin  $s \mapsto \langle \tilde{f}, |y|^{2s} y^{-k'} \bar{y}^{-k''} \chi \rangle$ , qui est holomorphe pour  $\text{Re}(s) \gg 0$ , s'étend en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  avec des pôles simples au plus contenus dans  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ . La condition (2) est équivalente au fait qu'il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tous  $k', k'' \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$  avec  $k' + k'' \in \mathbb{N}$ , les pôles de  $s \mapsto \langle \tilde{f}, |y|^{2s} y^{-k'} \bar{y}^{-k''} \chi \rangle$  soient contenus dans l'intersection des ensembles  $k_0 - 1 + k' - \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$  et  $k_0 - 1 + k'' - \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$ .

En raisonnant par récurrence descendante sur  $\ell$ , c'est-à-dire aussi sur l'ordre maximal des pôles, on conclut qu'une fonction  $\sum_{\ell=0}^L \tilde{f}_\ell L(y)^\ell$  à coefficients dans

$\mathcal{C}^\infty(\tilde{Y})$  peut se réécrire sous la forme  $\sum_{-2k_0 \leq k \leq 0} \sum_{\ell=0}^L g_{k,\ell}(y)|y|^k \mathbf{L}(y)^\ell$  avec  $g_{k,\ell} \in \mathcal{C}^\infty(Y)$  si et seulement si la même condition est satisfaite (et les pôles sont d'ordre  $\leq L+1$ ).

Maintenant, si  $\tilde{B}_0 \subset \mathbb{C}$  est un ensemble fini tel que deux éléments distincts ne diffèrent pas d'un demi-entier, une fonction  $\tilde{f} = \sum_{\beta \in \tilde{B}_0} \sum_{\ell=0}^L \tilde{f}_{\beta,\ell} |y|^{2\beta} \mathbf{L}(y)^\ell$  à coefficients dans  $\mathcal{C}^\infty(\tilde{Y})$  se réécrit  $\sum_{\beta \in B_0} \sum_{\ell=0}^L f_{\beta,\ell} |y|^{2\beta} \mathbf{L}(y)^\ell$  pour un certain ensemble  $B_0$ , avec  $f_{\beta,\ell} \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ , si et seulement si il existe un ensemble fini  $A_0 \subset \mathbb{C}$  tel que, pour tous  $k', k'' \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$  avec  $k' + k'' \in \mathbb{N}$ , les pôles de  $s \mapsto \langle \tilde{f}, |y|^{2s} y^{-k'} \bar{y}^{-k''} \chi \rangle$  soient contenus dans  $(A_0 + k' - \mathbb{N}) \cap (A_0 + k'' - \mathbb{N})$ .

Enfin, si  $\tilde{f}$  admet un développement du type (\*) à coefficients dans  $\mathcal{C}^\infty(\tilde{Y})$ , la condition ci-dessus appliquée à  $\tilde{f}$  est équivalente au fait que  $\tilde{f}$  peut se réécrire avec des coefficients  $f_{0,\beta,\ell} \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ , d'après un analogue évident du lemme 1.

On applique donc ceci à  $k(m', \bar{m}'')$  : on voit que la condition sur la transformée de Mellin est satisfaite en utilisant l'existence d'équations fonctionnelles de Bernstein pour  $m'$  et  $m''$ , de la même manière que dans le corollaire 1 et on obtient ainsi le résultat pour les coefficients avec  $\varphi = 0$ . On obtient le résultat pour les autres coefficients en appliquant le même raisonnement à  $E^{-\varphi} \otimes M'$  et  $E^\varphi \otimes M''$  pour les différents  $\varphi$ .  $\square$

## 2. Application à la filtration parabolique canonique

Soit  $M$  un germe de fibré méromorphe à connexion sur  $X$  et  $N = \pi^+ M$  son image inverse par une ramification  $\pi : Y \rightarrow X$ . On suppose que  $N$  admet un modèle élémentaire formel :  $\hat{N} \simeq \oplus_\varphi (E^\varphi \otimes R_\varphi)$ . Pour tout  $\varphi$  et tout  $b \in \mathbb{R}$ , on note  $\mathcal{P}^b(\hat{N}) = \oplus_{\varphi \in \Phi} (E^\varphi \otimes V^b R_\varphi)$ , si  $V^\bullet$  désigne la filtration de Deligne du fibré méromorphe à singularité régulière  $R_\varphi$ , définie comme plus haut par le fait que le résidu de la connexion logarithmique sur  $V^b R_\varphi$  a ses valeurs propres de partie réelle dans  $[b, b+1[$ . Alors  $\mathcal{P}^b(\hat{N})$  est un  $\mathbb{C}[[y]]$ -module libre de type fini tel que  $\mathbb{C}[[y]] [y^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[[y]]} \mathcal{P}^b(\hat{N}) = \hat{N}$ . On a aussi  $y \mathcal{P}^b(\hat{N}) = \mathcal{P}^{b+1}(\hat{N})$ . Toute suite exacte  $0 \rightarrow \hat{N}' \rightarrow \hat{N} \rightarrow \hat{N}'' \rightarrow 0$ , où  $\hat{N}, \hat{N}', \hat{N}''$  admettent une décomposition comme ci-dessus, est strictement filtrée relativement à la filtration  $\mathcal{P}^\bullet$ .

Le  $\mathbb{C}\{y\}$ -module  $\mathcal{P}^b(N) := \mathcal{P}^b(\hat{N}) \cap N$  est libre de type fini, c'est un réseau de  $N$  et toute suite exacte  $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ , où  $N, N', N''$  admettent un modèle élémentaire formel, est strictement filtrée relativement à la filtration  $\mathcal{P}^\bullet$ .

Enfin, en prenant les invariants sous l'action de  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , on obtient la *filtration (parabolique) canonique* de  $M$ , qui se comporte aussi de manière stricte dans toute suite exacte (cf. [5] pour un cas plus général de cette construction) :  $\mathcal{P}^b(M) := \mathcal{P}^{qb}(N)^{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}$ . Remarquons que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $x^k \mathcal{P}^b(M) = \mathcal{P}^{b+k}(M)$ .

LEMME 3. — Dans  $M$  on a, pour tout  $b \in \mathbb{R}$ , l'égalité  $\mathbb{C}\{x\}\langle x\partial_x \rangle \cdot \mathcal{P}^b(M) = V^b(M)$ .

*Démonstration.* — On remarque d'abord que la filtration  $V^\bullet$  se comporte comme  $\mathcal{P}^\bullet$  par rapport à la ramification, c'est-à-dire que  $V^b(M) = V^{qb}(N)^{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}$  : en effet,  $y\partial_y$  opère comme  $q(\text{Id} \otimes x\partial_x)$  sur  $1 \otimes M \subset N$ . L'inclusion  $\subset$  est alors claire. On se ramène à montrer l'égalité pour  $N$ , en prenant ensuite les invariants sous  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ . Il suffit enfin de montrer l'égalité des formalisés des deux termes, ce qui donnera aussi leur égalité.

D'un côté on a  $V^b(\widehat{N}) = V^b(R_0) \oplus \bigoplus_{\varphi \neq 0} (E^\varphi \otimes R_\varphi)$ . D'un autre côté, on a

$$\mathbb{C}\{y\}\langle y\partial_y \rangle \cdot (E^\varphi \otimes V^b(R_\varphi)) = \begin{cases} V^b(R_0) & \text{si } \varphi = 0, \\ E^\varphi \otimes R_\varphi & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit l'assertion.  $\square$

COROLLAIRE 2. — L'extension minimale  $M_{\min} := \mathbb{C}\{x\}\langle \partial_x \rangle \cdot V^{>-1}(M)$  est aussi égale à  $\mathbb{C}\{x\}\langle \partial_x \rangle \cdot \mathcal{P}^{>-1}(M)$ .  $\square$

Soient  $M', M''$  deux fibrés méromorphes sur  $X$  et soit  $k : M' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M''} \rightarrow \mathfrak{D}_{X,0}^{\text{mod } 0}$  un germe d'accouplement  $\mathcal{D}_{X,0} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{\overline{X},0}$ -linéaire.

COROLLAIRE 3. — La restriction de  $k$  à  $\mathcal{P}^{>-1}(M') \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{P}^{>-1}(M'')}$  prend ses valeurs dans l'espace des (germes de) fonctions  $L_{\text{loc}}^1(\frac{i}{2\pi} dx \wedge d\bar{x})$ .

*Démonstration.* — Il est équivalent et plus commode de montrer que la restriction de  $k$  à  $\mathcal{P}^{>0}(M') \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{P}^{>0}(M'')}$  prend ses valeurs dans  $L_{\text{loc}}^1(\frac{i}{2\pi} \frac{dx}{x} \wedge \frac{d\bar{x}}{\bar{x}})$ . Soit  $\pi : y \mapsto x = y^q$  une ramification adaptée à  $M = M'$  et  $\overline{M''}$  et notons  $N = \pi^+ M$ . On peut définir de manière naturelle un accouplement  $\pi^+ k : N' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{N''} \rightarrow \mathfrak{D}_{Y,0}^{\text{mod } 0}$  qui est  $\mathcal{D}_{Y,0} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{\overline{Y},0}$ -linéaire et dont la restriction aux éléments  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ -invariants soit  $\pi^* k$ . Il suffit alors de montrer la proposition pour  $\pi^+ k$  et  $L_{\text{loc}}^1(\frac{i}{2\pi} \frac{dy}{y} \wedge \frac{d\bar{y}}{\bar{y}})$ . Si  $m' \in \mathcal{P}^{>0}(N')$  et  $m'' \in \mathcal{P}^{>0}(N'')$  alors, en posant  $v = \pi^+ k(m', \overline{m''})$ , tout  $\beta \in B_\varphi(v)$  a une partie réelle  $> 0$  et le corollaire 1 appliqué à  $v$  montre que, puisque  $e^{\varphi - \bar{\varphi}}$  est localement bornée pour tout  $\varphi \in y^{-1}\mathbb{C}[y^{-1}]$ ,  $v$  est dans  $L_{\text{loc}}^1$ .  $\square$

REMARQUE (Filtration parabolique canonique et cycles proches formels)

Pour tout  $b \in \mathbb{R}$ , le quotient  $\text{gr}_{\mathcal{P}}^b(N) := \mathcal{P}^b(N)/\mathcal{P}^{>b}(N)$  est isomorphe à  $\bigoplus_{\varphi} \bigoplus_{\beta | \text{Re } \beta = b} \psi_y^\beta(R_\varphi)$  ; il est de dimension finie. Il est muni d'un endomorphisme semi-simple  $S = \bigoplus_{\varphi} \bigoplus_{\beta | \text{Re } \beta = b} \beta \text{Id}$  et d'un endomorphisme nilpotent  $N$  somme directe des endomorphismes  $y\partial_y - \beta$  sur les  $\psi_y^\beta(R_\varphi)$ . Enfin,  $y : \psi_y^\beta(R_\varphi) \rightarrow \psi_y^{\beta+1}(R_\varphi)$  est un isomorphisme compatible avec l'action de  $N$ .

On pose alors, pour  $\text{Re } \beta = b$ ,

$$\widehat{\psi}_y^\beta(N) = \ker[S - \beta \text{Id} : \text{gr}_{\mathcal{P}}^b(N) \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{P}}^b(N)] = \bigoplus_{\varphi} \psi_y^\beta(R_\varphi).$$

Cet espace, muni de  $N$ , est l'espace des cycles proches formels de  $N$  pour la valeur propre  $\beta$  (il est plus gros que  $\psi_y^\beta N = \psi_y^\beta R_0$ ).

L'action de  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  sur  $N$  préserve  $\mathcal{P}^b(N)$  et induit une action sur  $\text{gr}_{\mathcal{P}}^b(N)$ . Elle préserve aussi chaque  $\oplus_{\varphi} \psi_y^\beta(R_{\varphi}) = \widehat{\psi}_y^\beta(N)$ , *i.e.* commute à  $S$ , et elle commute aussi à  $N$ .

En prenant les invariants sous  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , on trouve

$$\text{gr}_{\mathcal{P}}^b(M) := \mathcal{P}^b(M)/\mathcal{P}^{>b}(M) = \text{gr}_{\mathcal{P}}^{qb}(N)^{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}},$$

et on munit le terme de gauche de l'endomorphisme semi-simple  $S_M = \frac{1}{q}S_N$  et de l'endomorphisme nilpotent  $N_M = \frac{1}{q}N_N$ . On en déduit

$$(\widehat{\psi}_y^\beta(M), N) := \ker[S - \beta \text{Id} : \text{gr}_{\mathcal{P}}^b(M) \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{P}}^b(M)] = (\widehat{\psi}_y^{qb}(N)^{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}, \frac{1}{q}N).$$

Toute suite exacte  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  donne lieu à une suite exacte  $0 \rightarrow \widehat{\psi}_y^\beta M' \rightarrow \widehat{\psi}_y^\beta M \rightarrow \widehat{\psi}_y^\beta M'' \rightarrow 0$  compatible à  $N$ .

On a  $(\widehat{\psi}_y^\beta(M), N) = (\widehat{\psi}_y^\beta(\widehat{M}), N)$  pour tout  $\beta$ . Si  $M$  est régulier en 0, on a  $(\widehat{\psi}_y^\beta(M), N) = (\psi_y^\beta(M), N)$  pour tout  $\beta$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. BARLET & H.-M. MAIRE – « Développements asymptotiques, transformation de Mellin complexe et intégration sur les fibres », in *Séminaire d'analyse 1985-1986* (P. Lelong, P. Dolbeault & H. Skoda, éd.), Lect. Notes in Math., vol. 1295, Springer-Verlag, 1987, p. 11–23.
- [2] J.-E. BJÖRK – *Analytic  $\mathcal{D}$ -modules and applications*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1993.
- [3] M. KASHIWARA – « Regular holonomic  $\mathcal{D}$ -modules and distributions on complex manifolds », in *Complex analytic singularities*, Advanced Studies in Pure Math., vol. 8, 1986, p. 199–206.
- [4] B. MALGRANGE – *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Math., vol. 96, Birkhäuser, Basel, Boston, 1991.
- [5] ———, « Connexions méromorphes, II : le réseau canonique », *Invent. Math.* **124** (1996), p. 367–387.
- [6] C. SABBAH – *Équations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension 2*, Astérisque, vol. 263, Société Mathématique de France, Paris, 2000.